Diseño de Experimentos.
Curso Práctico

Armando Cervantes Sandoval

María José Marques Dos Santos

Ilustración de portada: Anahy Cruz Mejía

Publicado con apoyo de los proyectos PAPIME EN216403 y EN203503

Diseño de Experimentos.
Curso Práctico

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

Av. Guelatao No. 66, Colonia Ejercito de Oriente,

Delegación Iztapalapa, México, D.F. 09230

ISBN: 970-32-2913-1

Prólogo

Se presenta este material sobre Análisis de varianza y Diseño de Experimentos; en el que se abarcan los modelos de uso más común, los de un solo factor de estudio sin variables de ruido: Diseño Completamente al Azar; los de un factor de estudio y uno de ruido: Diseño de Bloques al Azar Completos; los de un factor de estudio y dos factores de ruido: Diseño de Cuadrado Latino. Se revisan los Diseños Factoriales generales y los Diseños 2^k y 3^k, presentando por último los Diseños Anidados.

El enfoque es el de un curso que tiene como meta revisar los criterios prácticos para seleccionar el diseño más adecuado a una situación experimental y aplicarlo de la manera correcta, utilizando un software de análisis estadístico. En aras de este enfoque se han sacrificado, hasta donde es posible, explicaciones demasiado matemáticas e inclusive cálculos numéricos "a mano", que puedan distraer al lector en la comprensión y manejo de los conceptos fundamentales del diseño de experimentos, dándole prioridad al manejo computacional, utilizando principalmente Statgraphics, y a la interpretación de resultados.

Es un material que se espera motive, a quienes se inician en el estudio o necesitan de estas herramientas, al buen uso de este conjunto de técnicas estadísticas, así como a la lectura de material más formal, una lista de los cuales se da en la bibliografía. Premeditadamente no se ha elaborado un índice analítico ya que se espera que al (h)ojear este material se encuentren temas de interés que apoyen al lector en la correcta aplicación e interpretación del diseño de experimentos.

Se agradece la minuciosa revisión de Vicente J. Hernández Abad y de Oscar L. Flores Maldonado, cuyas sugerencias y correcciones ayudaron a mejorar el contenido y formato del escrito final.

Como todo material, con fines didácticos, la retroalimentación es fundamental para corregir errores y enriquecer aciertos, así que de antemano agradecemos todas las críticas o comentarios que ayuden a mejorarlo. Aclarando que los autores asumimos la responsabilidad de las omisiones, errores o malas interpretaciones, que totalmente sin querer se encuentren en este escrito.

Armando Cervantes Sandoval
arpacer@servidor.unam.mx

María José Marques Dos Santos
marques@servidor.unam.mx

Contenido

Pág.

Capítulo 1. Aspectos Básicos

Presentación

En este primer capítulo se hace una revisión de los principios generales del Análisis de varianza, desde su motivación hasta la comprobación de supuestos. Se hace énfasis en el diseño de una vía o diseño completamente al azar, presentando los cálculos numéricos a detalle. Contiene información básica cuyo dominio facilita la comprensión y manejo de diseños más complejos, los cuales se comienzan a revisar a partir del capítulo 2.

La recomendación es entender y manejar la información de este capítulo, incluyendo los ejercicios, antes de avanzar a los siguientes, si Ud. es un lector experto en Diseños, seguro puede encontrar información interesante, así que también revíselo.

Introducción

El termino diseño de experimentos hace referencia a una amplia gama de técnicas estadísticas que permiten comparar la igualdad o semejanza entre más de dos medias, o de que no existe efecto de los tratamientos utilizados. En otras palabras, sirve para probar el siguiente par de hipótesis.

Ho: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ (no hay efecto de tratamiento)
Ha: $\mu_i \neq \mu_j$, para toda $i \neq j$; $i,j = 1, 2, 3, \ldots, k$

Que se lee: Ho, La respuesta promedio de los k tratamientos de un experimento son estadísticamente iguales o semejantes; contra Ha, al menos un par de respuestas promedio son diferentes entre si.

El camino más obvio es realizar comparaciones sucesivas de pares de medias mediante pruebas de t-student. Algo que se puede, pero no se debe hacer, ya que existe una regla empírica que establece una disminución en la confiabilidad del análisis, de acuerdo con la siguiente expresión: Confiabilidad = $(1 - \alpha)^C$, donde α es el nivel de significancia y c es el número de comparaciones. Por ejemplo, si se consideran 4 medias a comparar con una significancia del 0.05, en este caso se tienen 6 posibles comparaciones (1 - 2, 1 - 3, 1 - 4, 2 - 3, 2 - 4 y 3 - 4), entonces se tiene $(1 - 0.05)^6 = 0.735$, lo que implica una confiabilidad del 73.5% en lugar del 95% planteado inicialmente.

La técnica estadística que permite probar esta hipótesis, sin perder confiabilidad, es el análisis de varianza, que consiste en dividir la variabilidad total en dos componentes, la variabilidad debida a tratamiento o entre tratamientos, y la variabilidad aleatoria o dentro de los tratamientos. Por último se comparan estas dos varianzas.

1.1. Motivación al análisis de varianza (abreviado como ANOVA, ANDEVA, ANADEVA o simplemente ANVA)

Suponer un experimento donde se quieren comparar 5 tratamientos, para ver si su respuesta promedio es la misma en los 5 o si hay algunas diferentes.

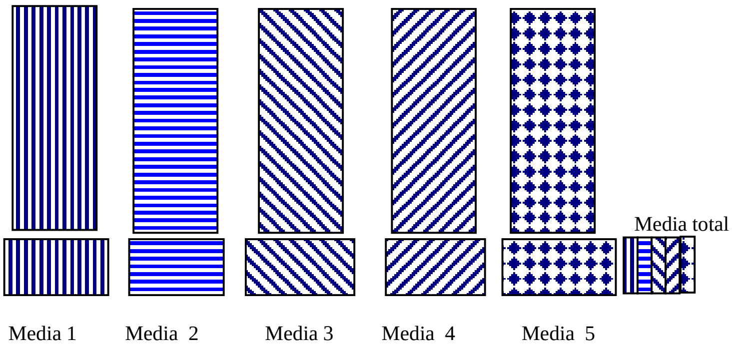


Figura 1.1. Esquema conceptual de un ANVA

De antemano el investigador asume que hay diferencia, si no carece de sentido el experimento. También se sabe que en cada tratamiento debe haber un efecto de variaciones debida a la causa o factor que se está controlando (temperatura, presión, etc.) y una variación debida al azar, la cual es inevitable.

Antes de hablar de variaciones, es necesario recordar que la fórmula de cálculo de la varianza es: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{n-1}$, es decir la suma del cuadrado de las desviaciones de cada observación con respecto a su media, dividida entre los grados de libertad de los datos.

Entonces, se tienen tres varianzas en un experimento de este tipo:

1. La varianza dentro de un tratamiento, dada por las desviaciones de cada observación dentro de un tratamiento con respecto a su propia media, dividida entre sus grados de libertad. En términos del análisis de varianza, a este resultado numérico se le conoce como cuadrado medio del error y mide la variación debida al azar ya que en un experimento bien planeado todo el material dentro de un tratamiento debe ser homogéneo.
2. Una varianza total, dada por las desviaciones de cada observación con respecto a la media total o gran media, dividida entre los grados de libertad totales. Se puede demostrar que:
   Suma de Cuadrados Total = Suma de cuadrados entre tratamientos + Suma de Cuadrados del error
   A la varianza total se le conoce como el cuadrado medio total.
3. La variación entre tratamientos se mide como las desviaciones de la media de cada uno de los tratamientos con respecto a la gran media, dividida entre sus grados de libertad. Aquí se supone que todas las variables de influencia están bajo control y la única variación se debe al efecto de tratamiento, a este valor se le conoce como el cuadrado medio de tratamientos.

Al tener 2 varianzas, se puede proceder a una prueba de F, para comparar su igualdad

$$F = \frac{\text{Varianza entre tratamientos}}{\text{Varianza dentro tratamientos}} = \frac{\text{Cuadrado medio Entre}}{\text{Cuadrado medio Dentro}} = \frac{\text{Cuadrado medio Tratamientos}}{\text{Cuadrado medio Error}}$$

Si las dos varianzas son semejantes el valor de F es cercano a 1 y se tiene evidencia de que la variación entre tratamientos es muy parecida a la que se presentaría de manera aleatoria, por lo que no hay efecto de tratamiento. Para tener efecto de tratamiento se requiere que la varianza entre tratamientos sea mucho mayor que la varianza debida al azar y entonces, si el valor de F es mucho mayor a 1, se tendría evidencia estadística para rechazar Ho.

Rechazar Ho implica que al menos un par de efectos promedio son diferentes, lo interesante es que el ANVA no dice nada acerca de cuál o cuáles pares de medias son diferentes. Para eso se debe recurrir a técnicas de comparación múltiple de medias, las cuales permiten comparar todos los posibles pares sin perder confiabilidad.

1.2. Análisis de varianza de un factor (ONE-WAY) o diseño completamente al azar (DCA)

La característica esencial es que se realiza un experimento o estudio donde todas las posibles fuentes de variación o de influencia están controladas y sólo hay efecto de un solo factor en estudio, para el cual se consideran al menos 3 niveles o tratamientos, con n_i repeticiones dentro de cada nivel o tratamiento.

1.2.1. Estructura típica de los datos en el ANVA de un factor (One-Way)

Hablar de un diseño completamente al azar implica verdaderamente aleatorizar todos los elementos o componentes a participar en el experimento. Por ejemplo, en un experimento de invernadero hay que aleatorizar macetas, tierra y semillas a colocar en la maceta, así como el tratamiento que se debe aplicar a cada maceta. Esto sin contar la o las variables a medir con sus respectivas unidades de medición. Lo interesante es que en un experimento real quedan “revueltos” (más bien aleatorizados) los tratamientos y es hasta que se realiza el análisis estadístico que se llega a la estructura del cuadro 1.1.

Tratamiento o Nivel del factor	Repetición				Totales	medias
	1	2	...	n	$\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$	$\bar{Y}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}}{n_i}$
1	Y_{11}	Y_{12}	...	Y_{1n}	$Y_{1.}$	$\bar{Y}_{1.}$
2	Y_{21}	Y_{22}	...	Y_{2n}	$Y_{2.}$	$\bar{Y}_{2.}$
.	.	.	...	.	.	.
.	.	.	...	.	.	.
.	.	.	...	.	.	.
k	Y_{k1}	Y_{k2}	...	Y_{kn}	$Y_{k.}$	$\bar{Y}_{k.}$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = Y_{..} \qquad \frac{Y_{..}}{\sum_{i=1}^{k} n_i} = \bar{Y}_{..}$$

Cuadro 1.1. Datos típicos para un ANOVA de un factor (One-Way)

Comentarios del cuadro 1.

1. Representa un experimento de un solo factor con k niveles o tratamientos y n_i repeticiones por tratamiento. Si el número de repeticiones es el mismo para cada tratamiento se dice que el diseño está balanceado y se puede utilizar n directamente en las fórmulas de cálculo, si el diseño está desbalanceado se debe utilizar n_i, como se representa en las fórmulas.
2. En la bibliografía es común encontrar este cuadro con los tratamientos en las columnas y las repeticiones en las filas, pero por concordancia con la nomenclatura de matrices y vectores se recomienda el formato del cuadro 1.1.
3. Es común representar los valores de la respuesta con la letra X, pero en este caso se representan con Y_{ij} para especificar y aclarar que se trabaja con la variable aleatoria (respuesta).
4. Se tienen dos notaciones o nomenclaturas, una con base en sumatorias y otra conocida como notación punto, donde el punto indica el subíndice sobre el cual se realiza la suma.
5. De aquí se puede empezar a visualizar como obtener las varianzas: total, entre tratamientos y dentro de tratamientos.

1.2.2. Modelo Estadístico del ANVA, para un Diseño Completamente al Azar (DCA)

Partiendo de la hipótesis de trabajo.

Ho: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ (No existe efecto de tratamiento)
Ha: $\mu_i \neq \mu_j$, para toda $i \neq j$; $i,j = 1, 2, 3, \ldots, k$ *(Al menos dos tratamientos son diferentes)*

Se tiene que el valor esperado del i-ésimo tratamiento es $E(Y_i) \equiv \mu_i = \mu + \tau_i$, de manera que se quiere probar la igualdad de las medias entre los tratamientos. Nótese que si Ho es verdadera todos los tratamientos tiene una misma media común μ, ya que el efecto de tratamiento $\tau_i = 0$.

Existe una forma alternativa de escribir la hipótesis, en términos del efecto de los tratamientos τ_i, esta es:

Ho: $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_k$ (No existe efecto de tratamiento)
Ha: $\tau_i \neq 0$, para al menos una i; $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ *(Al menos dos tratamientos son diferentes)*

Entonces, se habla de examinar la igualdad del efecto promedio de los tratamientos.

Si Ho es verdadera se espera que $\mu_i = \mu$ para todos los tratamientos, en caso contrario se espera que por efecto del tratamiento las μ_i se desvíen una cantidad τ_i de μ, entonces

$$\tau_i = \mu_i - \mu \qquad (1)$$

Como Y_{ij} es la j-ésima observación o medición del i-ésimo tratamiento, se esperan fluctuaciones por efecto del muestreo aleatorio, por lo que las Y_{ij} se desvían dentro de cada tratamiento en una cantidad ε_{ij} conocida como error residual o error dentro de tratamientos.

$$\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \mu_i \qquad (2)$$

Pero, cada respuesta Y_{ij} está dada por el efecto promedio, más el efecto de tratamiento, más cierta variación aleatoria

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \qquad \text{con } i = 1, 2, \ldots, k \qquad j = 1, 2, \ldots, n_i \qquad (3)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) en (3)

$$Y_{ij} - \mu = (\mu_i - \mu) + (Y_{ij} - \mu_i) \qquad (4)$$

Si se considera que los mejores estimadores de μ y μ_i son $\bar{Y}_{..}$ y $\bar{Y}_{i.}$ respectivamente (lo cual se puede demostrar, aunque se deja para una noche de insomnio del lector), la ecuación (4) se puede escribir como:

$$Y_{ij} - \bar{Y}_{..} = \left(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}\right) + \left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}\right) \qquad (5)$$

$$A \quad = \quad B \quad + \quad C$$

Donde

A es la desviación de cada una de las observaciones con respecto a la gran media (Total)
B Desviación de cada una de las medias de los tratamientos con respecto a la gran media (Entre)
C Desviación de cada una de las observaciones con respecto a la media correspondiente a su tratamiento (Dentro)

Ahora, al elevar al cuadrado y sumar todas las desviaciones se tiene

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\overline{Y}..)^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}..\right)+(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.})\right]^2 \qquad (6)$$

Desarrollando los cuadrados se llega a la siguiente expresión

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}..\right)^2=n\sum_{i=1}^{n_i}\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}..\right)^2+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}\right)^2 \qquad (7)$$

D = E + F

Donde:
D es la suma de cuadrados Total
E Suma de cuadrados de tratamientos
F Suma de cuadrados del error

A continuación se desglosa la forma de llegar a la ecuación (7) partiendo de la ecuación (6). Para quienes nos le agrade mucho eso de las demostraciones, puede hacer una revisión muy rápida, pero no deje de revisarlas y tratar de entenderlas.

El segundo término de la ecuación (6) queda como:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}..\right)+(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.})\right]^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}..\right)^2+2\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}..\right)\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}\right)+\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}\right)^2\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}..\right)^2+2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}..\right)\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}\right)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}\right)^2$$

El término central es igual a cero, ya que

$\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.})=Y_{i.}-n\overline{Y}_{i.}=Y_{i.}-n\dfrac{Y_{i.}}{n}=Y_{i.}-Y_{i.}=0$; y entonces, cero por lo que sea es cero.

También es necesario mostrar que la suma de cuadrados del error (F) en la ecuación (7), realmente refleja a todo el experimento y no sólo a un tratamiento.

Como primer paso, recordar que la varianza se obtiene con la ecuación: $s_i^2 = \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.}\right)^2}{n-1}$, para i = 1, 2, … , k

Si se combinan las varianzas muestrales, de cada tratamiento, para estimar una varianza global común se tiene

$$\frac{(n-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2 + \ ...\ + (\text{n-1})s_k^2}{(\text{n-1})_1 \ + \ (\text{n-1})_2 \ + \ ...\ + (\text{n-1})_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2\right]}{\sum_{i=1}^{k}(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i.})^2}{kn-k} = \frac{SC_{ERROR}}{N-k} = CM_{ERROR}$$

Donde *N* = número total de datos, entonces se puede ver que el CM_{ERROR} es la estimación de una varianza común dentro de todos y cada uno de los *k* tratamientos.

1.2.3. Tabla del Análisis de Varianza

Todos los cálculos de esta técnica se condensan en una tabla o cuadro, de acuerdo al siguiente formato.

Fuente de Variación (F.V.)	Suma de Cuadrados (S.C.)	Grados de Libertad (g.l.)	Cuadrados Medios (C.M.)	F_o
Tratamientos	$SC_{TRATAMIENTOS}$	*k* - 1	$\dfrac{SC_{TRATAMIENTOS}}{k-1}$	$\dfrac{CM_{TRATAMIENTOS}}{CM_{ERROR}}$
Error	SC_{ERROR}	*N* - *k*	$\dfrac{SC_{ERROR}}{N-k}$	
Total	SC_{TOTAL}	*N* - 1	—	

Se requieren las siguientes notas para entender y manejar esta tabla

1. Es común considerar los siguientes "trucos" de cálculo numérico
   .) Los grados de libertad de tratamientos es igual al número de tratamientos menos uno
   ..) Los grados de libertad del total son iguales al número total de datos menos uno
   …) Los grados de libertad del error se obtienen por la diferencia: $gl_{ERROR} = gl_{TOTAL} - gl_{TRATAMIENTO}$

2. Las sumas de cuadrados de la ecuación (7) generalmente se sustituyen por las siguientes ecuaciones
   .) $SC_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}^2 - \dfrac{Y_{..}^2}{N}$
   ..) $SC_{TRATAMIENTOS} = n\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\dfrac{Y_{i.}^2}{n_i} - \dfrac{Y_{..}^2}{N}$
   …) $SC_{ERROR} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k}\dfrac{Y_{i.}^2}{n_i}$, aunque también se puede obtener por la diferencia: $SC_{Total} - SC_{Tratamientos}$

Mostrar la igualdad de estas expresiones da para otra noche de insomnio, así que adelante, no se limiten.

3. Los valores esperados más interesantes de esta técnica son:

   .) $E(CM_{ERROR}) = \sigma^2$

..) E(CM$_{TRATAMIENTOS}$) = $\sigma^2 + \dfrac{n\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2}{k-1}$

Donde puede verse que si no hay efecto de tratamiento, la varianza es igual en ambos casos, ya que τ_i = 0.

4. Del cociente $\dfrac{CM_{TRATAMIENTOS}}{CM_{ERROR}}$ se tiene que Ho se debe rechazar si el valor de F_o es demasiado grande.

Esto implica una región crítica unilateral superior. En otras palabras se rechaza Ho si F_o (calculada) > $F_{\alpha,\,k-1,\,N-k}$ (tablas).

Ejemplo 1.1. En el siguiente problema se muestran los cálculos numéricos del ANVA.

Para estudiar los efectos del etanol en el tiempo de sueño, se seleccionó una muestra de 20 ratas de edad semejante, a cada rata se le administró una dosis oral con una concentración en particular de etanol por peso corporal. Se registró el movimiento ocular rápido (REM) en el tiempo de sueño para cada rata, con los siguientes resultados.

Repetición

Tratamiento	1	2	3	4	5	$Y_{i.}$	$\bar{Y}_{i.}$
0(Control)	88.6	73.2	91.4	68	75.2	396.4	79.28
1 g/Kg	63	53.9	69.2	50.1	71.5	307.7	61.54
2 g/Kg	44.9	59.5	40.2	56.3	38.7	239.6	47.92
4 g/Kg	31	39.6	45.3	25.2	22.7	163.8	32.76
					Totales =	1107.5	55.375

Como primer paso se debe tener en cuenta el par de hipótesis a trabajar.

Ho: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ (No existe efecto de tratamiento o de la concentración de etanol)

Ha: $\mu_i \neq \mu_j$, para toda $i \neq j$; i,j = 1, 2, 3, 4 *(Al menos dos tratamientos son diferentes)*

SC_{Total} = (88.6 – 55.375)^2 + (73.2 – 55.375)^2 + . . . + (45.3 – 55.375)^2 + (25.2 – 55.375)^2 + (22.7 – 55.375)^2
= 7 369.7575

SC_{Trat} = 5[(79.28 – 55.375)^2 + (61.54 – 55.375)^2 + (47.92 – 55.375)^2 + 32.76 – 55.375)^2] = 5(1176.4715) = 5882.357

SC_{Error} = (88.6 – 79.28)^2 + (73.2 – 79.28)^2 + . . . +(25.2 – 32.76)^2 + (22.7 – 32.76)^2 = 1487.4

Tratamientos k = 4, con repeticiones n = 5, por lo tanto $k*n = N$ = 4*5 = 20

Siguiendo la otra estrategia de cálculo:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 = (88.6)^2 + (73.2)^2 + (91.4)^2 + (68)^2 + (75.2)^2 + \cdots + (31)^2 + (39.6)^2 + (45.3)^2 + (25.2)^2 + (22.7)^2 = 68697.57$$

$\dfrac{Y_{\bullet\bullet}^2}{N} = \dfrac{(1107.5)^2}{20} = 61327.8$, valor que se conoce como factor de corrección

$$SC_{Total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{Y_{ij}^2} - \frac{Y_{\bullet\bullet}^2}{N} = 68697.57 - 61327.8 = 7369.77$$

$$SC_{Tratamiento} = \sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i\bullet}^2}{n} - \frac{Y_{\bullet\bullet}^2}{N} = \frac{(396.4)^2 + (307.7)^2 + (239.6)^2 + (163.8)^2}{5} - 61327.8 =$$

$$= \frac{336050.85}{5} - 61327.8 = 5882.4$$

SC_{Error} = SC_{Total} – SC_{Trat} = 7 369.77 – 5 882.4 = 1 487.4

Y la tabla de ANVA queda como:

Modelo: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$

Hipótesis: *Ho*: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ vs *Ha*: $\mu_i \neq \mu_j$; para i≠j con i,j = 1, 2, 3, 4

Fuente de Variación (*FV*)	g.l.	Suma de Cuadrados (*SC*)	Cuadrados Medios (*CM*)	F_o	$F_{1-\alpha,k-1,N-k}$ $F_{0.95,3,16}$	*Pr > F*
Tratamientos	3	5 882.400	1960.7850	21.09	3.24	0.0001
Error	16	1 487.400	92.9625			
Total	19	7 369.757				

El ANVA muestra una *F* calculada mayor a la *F* de tablas, lo que implica que se rechaza Ho (de aquí la importancia de establecer claramente el par de hipótesis, antes de realizar cualquier cálculo), también es importante considerar el valor de *Pr > F*. Este valor se conoce como nivel de significancia observado o p-value, $\hat{\alpha}$ que representa una medición del error tipo I en el experimento. Entonces, un valor menor a 0.05 implica un error menor al que el investigador está dispuesto a tolerar (lo que es una buena noticia), pero si tiene un valor mayor que 0.05, hay un error más grande del que se está dispuesto a tolerar y rechazar Ho es bajo el propio riesgo del investigador.

Considerar este valor (**Pr > F** o **signif.** o **P-value**, según el software que se utilice) implica dejar de consultar las tablas de *F*, ya que se recurre a la siguiente regla práctica: Si el **valor** es **menor de 0.05 rechazar Ho**, en caso contrario no se rechaza Ho.

En el ANVA de este ejemplo se tiene evidencia para rechazar Ho, ya que el valor 0.0001 es notoriamente menor de 0.05.

1.3. Después del análisis de varianza

Al rechazar Ho inmediatamente surge la pregunta: ¿Cuál de todos los pares de medias son diferentes? Para responder a esta pregunta se realizan pruebas de comparaciones múltiples de medias, cuyo principio básico en términos generales es:

- Se establece un valor crítico contra el cual comparar las diferencias de medias, con base en el cuadrado medio del error como una estimación de la varianza global del experimento y un estadístico que permite asignar un nivel de confiabilidad a la prueba.

- Obtener la diferencia o resta de un par de medias y comparar el valor absoluto de este resultado contra el valor crítico, si es mayor entonces son diferentes, estadísticamente hablando, en caso contrario se consideran iguales.

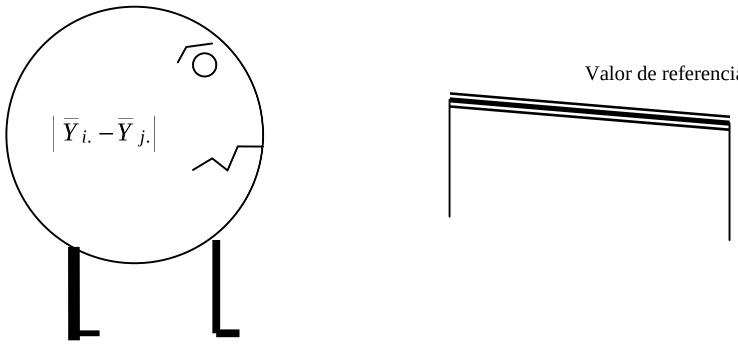


Figura 1.2. Esquema de la comparación de pares de medias

1.3.1. Comparaciones Múltiples de Medias

1.3.1.1. Prueba de Tukey (Diferencia Honestamente Significativa, DHS)

Esta prueba está diseñada para comparar todas las parejas posibles de medias, manteniendo a α, el error tipo I para todo el conjunto completo de comparaciones. El método se basa en utilizar el cuadrado medio del error, que se obtiene de un ANVA, para calcular un valor de referencia, ω, que se compara con las diferencias de cada par de medias, si el resultado es mayor que ω se asumen medias diferentes, en caso contrario se consideran semejantes o estadísticamente iguales.

La fórmula de cálculo es.

$$\omega = q_{\alpha}(k,\nu)\sqrt{\frac{CM_E}{n_g}}$$

Donde:

k = número de tratamientos o niveles

ν = grados de libertad asociados al CME, con ν = N - k

n_g = número de observaciones en cada uno de los k niveles (lo que implica un diseño balanceado)

α = nivel de significancia

$q_{\alpha}(k,\nu)$ = valor de tablas de Tukey (rangos estudentizados de Tukey)

La secuencia de trabajo es:

1. Ordenar las medias de los k tratamientos en forma ascendente o descendente
2. Obtener todos los elementos de la fórmula de cálculo de la prueba de Tukey y calcular el valor de referencia, ω
3. Realizar las diferencias de todos los posibles pares de medias (en valor absoluto).

4. Comparar los resultados de cada uno de los valores absolutos de las restas contra el valor de ω
5. Unir con una línea todos los pares de medias semejantes

Ejemplo 1.2. Considerando el ejemplo 1.1, se tienen los siguientes resultados

1. Lo más común es ordenar de manera descendente para garantizar que todas las restas tengan un valor positivo, aunque en este caso se ordenaron de manera ascendente.

$\overline{Y}_{4\cdot}$	32.76
$\overline{Y}_{3\cdot}$	47.92
$\overline{Y}_{2\cdot}$	61.54
$\overline{Y}_{1\cdot}$	79.28

2. Para recordar los valores se reproduce la tabla de ANOVA para el ejemplo que se está trabajando

Fuente de Variación (*FV*)	g.l.	Suma de Cuadrados (*SC*)	Cuadrados Medios (*CM*)	*F*	*Pr > F*
Tratamientos	3	5 882.400	1960.7850	21.09	0.0001
Error	16	1 487.400	92.9625		
Total	19	7 369.757			

$k = 4$

g.l. $_{\text{Error}}$ = $\nu = 16$

$n_g = 5$

$\alpha = 0.05$

$q_\alpha(k,\nu) = q_{0.05}(4,16) = 4.05$

Entonces $\omega = q_\alpha(k,\nu)\sqrt{\dfrac{CM_E}{n_g}} = 4.05\sqrt{\dfrac{92.9625}{5}} = (4.05)(4.3119) = 17.463195$

3. Todas las posibles comparaciones se muestran en el siguiente cuadro.

	$\overline{Y}_{3\cdot}$	$\overline{Y}_{2\cdot}$	$\overline{Y}_{1\cdot}$
$\overline{Y}_{4\cdot}$	$\lvert 32.76 - 47.92 \rvert = 15.16$	$\lvert 32.76 - 61.54 \rvert = 28.78$	$\lvert 32.76 - 79.28 \rvert = 46.52$
$\overline{Y}_{3\cdot}$		$\lvert 47.92 - 61.54 \rvert = -3.62$	$\lvert 47.92 - 79.28 \rvert = 31.36$
$\overline{Y}_{2\cdot}$			$\lvert 61.54 - 79.28 \rvert = 17.74$
$\overline{Y}_{1\cdot}$			

4. Las diferencias, en valores absolutos, muestran diferencia significativa entre los pares de medias 4 - 2, 4 - 1, 3 - 1 y 2 - 1

5. Estos resultados se pueden concentrar de la siguiente forma

$\bar{Y}_{4.}$ $\bar{Y}_{3.}$ $\bar{Y}_{2.}$ $\bar{Y}_{1.}$

Por el ANVA se sabe que al menos un par de medias son diferentes y por la prueba de Tukey se tiene información sobre cuales son los pares de medias semejantes o diferentes entre ellas.

Otra forma de hacer la comparación es mediante una serie de intervalos de confianza para cada par de medias, los cuales se obtienen de la siguiente forma

$$(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{j.}) - q_\alpha(k,\nu)\sqrt{\frac{CM_{Error}}{n}} \le \mu_i - \mu_j \le (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{j.}) + q_\alpha(k,\nu)\sqrt{\frac{CM_{Error}}{n}} \qquad ; i \ne j$$

Ejemplo 1. 3, Calcular un intervalo de confianza para un par de medias diferentes y un par de medias iguales, con base en los datos del ejemplo 1.1.

1) Si $\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{3.}$ = 32.76 - 47.92 = –15.16

y

$q_\alpha(k,\nu)\sqrt{\frac{CM_E}{n_g}}$ = 4.05 $\sqrt{\frac{92.9625}{5}}$ = (4.05)(4.3119) = 17.463195

Entonces, el intervalo queda como:

$$-15.16 - 17.463195 < \mu_4 - \mu_3 < -15.16 + 17.463195$$

$$-32.623195 < \mu_4 - \mu_3 < 2.303195$$

Como este intervalo contiene el valor de cero (ya que el límite inferior es negativo y el límite superior es positivo), no existe diferencia significativa entre μ_4 y μ_3

2) Para $\bar{Y}_{4.} - \bar{Y}_{2.}$ = 32.76 – 61.54 = –28.78

Entonces, el intervalo queda como:

$$-28.78 - 17.463195 < \mu_4 - \mu_3 < -28.78 + 17.463195$$

$$-46.243195 < \mu_4 - \mu_3 < -11.316805$$

En este caso, ambos límites son negativos (los valores no cambian de signo), lo que indica que las medias son significativamente diferentes

Es importante aclarar que la diferencia significativa honesta de Tukey funciona muy bien para diseños balanceados, pero NO para desbalanceados. En diseños desbalanceados se recomienda la prueba de Bonferroni.

1.3.1.2. Comparando las medias contra un tratamiento control, Prueba de Dunnett

En muchos experimentos uno de los tratamientos es un control y lo que interesa es comparar cada una de las **k**-1 medias restantes contra este control. En este caso la mejor opción consiste en realizar una prueba de Dunnett.

Este procedimiento es una modificación de la prueba de **t** ya conocida, de manera que se calcula el valor absoluto de la diferencia de cada media contra el control.

$$\left|\bar{Y}_{ij} - \bar{Y}_{k.}\right| \qquad i = 1, 2, \ldots, k\text{-}1$$

La hipótesis Ho: $\mu_i - \mu_a$ se rechaza, con una significancia α si

$$\left|\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{k.}\right| > d(k-1,\nu)\sqrt{CM_{ERROR}\left(\frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_k}\right)}$$

Donde:

k-1 = número de comparaciones a realizar

ν = grados de libertad del error

α = nivel de significancia

$d_\alpha(k\text{-}1, \nu)$ = valor de tablas de Dunnett

Ejemplo 1.4. Considerando, nuevamente, los datos del ejemplo 1.1

Tratamiento	$\bar{Y}_{i.}$
0(Control)	79.28
1 g/Kg	61.54
2 g/Kg	47.92
4 g/Kg	32.76

1. Calcular los valores absolutos de las diferencias de cada media contra el control

Control vs 1 g/Kg = |79.28 – 61.54| = 17.74

Control vs 2 g/Kg = |79.28 – 47.92| = 31.36

Control vs 4 g/Kg = | 79.28 – 32.76 | = 46.52

2. Calcular el valor de referencia de Dunnett

$$d_{\alpha}(k-1,\nu)\sqrt{CM_{Error}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_k}\right)}$$

Entonces

k-1 = 4-1 = 3

ν = grados de libertad del error = 16

α = 0.05

CM_{Error} = 92.9625

d_{α}(k-1, ν) = valor de tablas = $d_{0.05}$(3, 16) = 2.59

El resultado numérico es: $2.59\sqrt{92.9625(\frac{1}{5}+\frac{1}{5})}=2.59\sqrt{37.185}=2.59(6.0979)=15.793561$

Comparando los valores absolutos de las diferencias contra el valor de referencia se tiene que todos los tratamientos son estadísticamente significativos con respecto al control.

1.3.1.3. Otras pruebas de comparación múltiple de medias

La bibliografía reporta una amplia gama de pruebas, siendo las más comunes, además de la de Tukey, el método de diferencia significativa mínima (LSD) de Fisher; la prueba del rango múltiple de Duncan; la prueba de Newman-Keuls. Aclarando que no son los únicos pero si los más reportados en la literatura estadística.

Ante la posibilidad de utilizar varios métodos de comparación múltiple de medias surge la pregunta: ¿Qué método es el más adecuado? Desafortunadamente no hay una respuesta única y todavía es un tema de discusión entre los especialistas en estadística, quienes a veces no se ponen de acuerdo sobre cuál método utilizar.

Aún así se tiene la siguiente recomendación: Dado que Tukey genera intervalos más amplios que la prueba de Fisher, se recomienda Tukey en estudios iniciales y Fisher en estudios finales o concluyentes.

1.3.2. Supuestos del ANVA

Después de comparar las medias, es necesario que se satisfagan ciertos supuestos del modelo estadístico utilizado. Recordando que el modelo es: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$

Que al trabajarlo a nivel muestral (datos reales) se convierte en:

$$\widehat{Y}_{ij} = \widehat{\mu} + \hat{\tau}_i + e_{ij}$$

Donde los mejores estimadores para estos parámetros son:

1) $\widehat{\mu} = \overline{Y}_{\bullet\bullet}$ 2) $\hat{\tau}_i = \overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}$ 3) $e_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet}$

Gran media *Efecto de tratamiento* *Error aleatorio o residual*

Recordar que:

1) = Es la gran media

2) = Es la desviación de la media de cada nivel del factor o tratamiento, con respecto a la gran media

3) = Desviación de cada observación dentro de cada nivel o tratamiento, con respecto a la propia media de ese tratamiento

Los supuestos se simplifican en la expresión:

$e_{ij} \sim NI(0, \sigma^2)$ conocidos como error aleatorio o residual

Esto implica que el modelo estadístico "de veras" (realmente) describe las observaciones o mediciones del experimento y que los residuales siguen una distribución normal e independiente con media cero y varianza común σ^2, constante pero desconocida.

En la práctica es común que estos supuestos no se satisfagan, por lo que no es prudente confiar en los resultados del ANVA hasta no verificarlos. Lo cual es relativamente fácil mediante el examen de los residuales, para descubrir algunos tipos de inadecuaciones del modelo y violaciones al modelo.

Si, pero, no se ha dicho como calcular residuales, esto se realiza con la siguiente expresión.

$Y_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\tau} + e_{ij} = \overline{Y}_{\bullet\bullet} + (\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet}) + (Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet})$ entonces $e_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet}$

Donde se puede apreciar que el mejor estimador de cualquier observación en el i-ésimo tratamiento no es sino el promedio del tratamiento correspondiente, entonces el residual se obtiene de las desviaciones de cada observación dentro de un tratamiento, con respecto a la media del mismo tratamiento.

1.3.2.1. Supuesto de Normalidad y Homogeneidad de Varianzas

El supuesto de normalidad se puede hacer a través de un histograma de los residuales. Si se satisfacen los supuestos, este histograma debe corresponder a una distribución normal (campana de Gauss) con media cero. Por desgracia, cuando se trabaja con muestras pequeñas, es común encontrar desviaciones significativas de la normalidad.

1.3.2.1.1. Gráficos de Probabilidad Normal

Estos gráficos, a los que se les conoce como Q - Q, permiten juzgar hasta donde un conjunto de datos puede o no ser caracterizado por una distribución de probabilidad específica, en este caso la normal. Cuya forma de construirla es siguiendo los pasos:

1. Obtener los residuales del experimento e_{ij} (para efectos de la construcción de la gráfica se usará un solo subíndice), e_i

2. Ordenarlos de manera ascendente y darles una numeración, *i*.

3. Obtener los valores $p_i = \frac{100(i-0.5)}{n}$

4. Un gráfico de los pares (e_i , p_i) se espera que tenga una forma de S para asegurar una aproximación normal, aunque es más común hacer este gráfico en **papel normal** para obtener una línea recta (este tipo de papel es cada vez más difícil de conseguir, por lo que se recomienda continuar con el paso 5).

Si en el gráfico en papel normal todos los puntos de los datos aparecen aleatoriamente distribuidos a lo largo de la línea recta y si la línea pasa sobre o cercanamente a la intersección de la media de *X*, el 50% de probabilidad, el ajuste de los datos a la distribución normal se considera adecuado. Contrariamente, si los puntos aparecen con forma de S, la sugerencia es que los datos no se distribuyen normalmente.

5. Con la ayuda de una tabla de probabilidad normal, las probabilidades acumuladas, p_i se pueden convertir en sus correspondientes valores normales estandarizados z_i.

$$P(z \leq z_i) = p_i$$

6. Con la media y la varianza de la variable Y_i, los datos muestreados se pueden estandarizar utilizando la transformación:

$$q_i = \frac{Y_i - \mu_Y}{\sigma_Y}$$

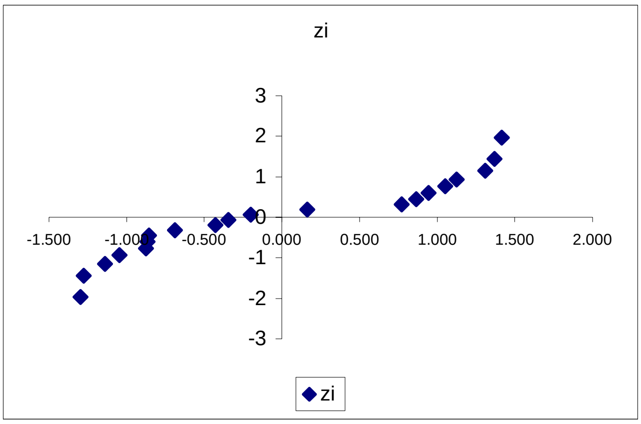
Dado que la μ_Y y σ_Y generalmente no se conocen, se usa la ecuación:

$$q_i = \frac{Y_i - \overline{Y}}{s_Y}$$

7. Elaborar un gráfico de los puntos (q_i, z_i) que sirve para juzgar la normalidad de un conjunto de datos, ya que si se traza una gráfica con la misma escala para q_i y z_i, se espera que los puntos se distribuyan aleatoriamente a lo largo de una línea recta dibujada a 45°.

Los pasos descritos, para los datos del ejemplo 1.1 se muestran en la siguiente tabla:

Observación (i)	e_i	e_i en orden ascendente	p_i (%)	z_i	q_i
9	-11.44	-11.44	2.5	-1.96	-1.296
4	-11.28	-11.28	7.5	-1.44	-1.278
20	-10.06	-10.06	12.5	-1.15	-1.140
15	-9.22	-9.22	17.5	-0.93	-1.045
13	-7.72	-7.72	22.5	-0.76	-0.875
7	-7.64	-7.64	27.5	-0.60	-0.866
19	-7.56	-7.56	32.5	-0.45	-0.857
2	-6.06	-6.06	37.5	-0.32	-0.689
5	-3.78	-3.78	42.5	-0.19	-0.429
11	-3.02	-3.02	47.5	-0.06	-0.343
16	-1.76	-1.76	52.5	0.06	-0.201
6	1.46	1.46	57.5	0.19	0.163
17	6.84	6.84	62.5	0.32	0.772
8	7.66	7.66	67.5	0.45	0.865
14	8.38	8.38	72.5	0.60	0.946
1	9.32	9.32	77.5	0.76	1.053
10	9.96	9.96	82.5	0.93	1.125
12	11.58	11.58	87.5	1.15	1.308
3	12.12	12.12	92.5	1.44	1.369
18	12.54	12.54	97.5	1.96	1.417



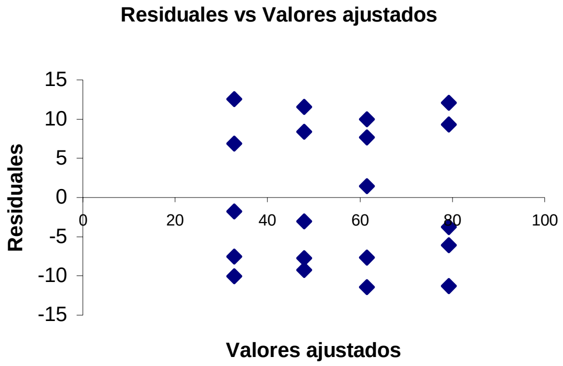
1.3.2.1.2. Gráficos de Residuales contra los valores ajustados

Si el modelo es correcto y se satisfacen los supuestos, los residuales no deben presentar algún tipo de estructura, y en particular no deben de estar relacionados con ninguna otra variable, incluyendo la respuesta predicha o ajustada. Una forma simple de verificar esto es mediante una gráfico de residuales (e_{ij} = variable en el eje Y) contra los valores ajustados ($\hat{Y}_{ij}$ = variable en el eje X).

Ejemplo 1.5. Para realizar este gráfico, con los datos del ejemplo 1.1, se tienen los siguientes residuales.

	Residuales del experimento e_{ij}					
Tratamiento	1	2	3	4	5	$\bar{Y}_{i.}$
0(Control)	9.32	–6.08	12.12	–11.28	–3.78	79.28
1 g/Kg	1.46	–7.64	7.66	–11.44	9.96	61.54
2 g/Kg	–3.02	11.58	–7.72	8.38	–9.22	47.92
4 g/Kg	–1.76	6.84	12.54	–7.56	–10.06	32.76

El gráfico resultante se presenta a continuación.



1.3.2.1.3. Gráficos de Residuales en secuencia en el tiempo

Este gráfico implica tener registro del orden temporal en el que se realizan las mediciones en el experimento y su mayor utilidad consiste en detectar correlaciones entre los residuales, lo que implica probar el supuesto de independencia.

1.3.2.1.3.1. Anormalidades y desviaciones a considerar en un gráfico de residuales

1. La presencia de algún tipo de patrón en la dispersión de los datos indica desviación de la normalidad e inclusive inadecuación del modelo estadístico utilizado.

NOTA: En general las desviaciones moderadas de la normalidad no son motivo de preocupación en el ANVA de efectos fijos, ya que este análisis es robusto con respecto al supuesto de normalidad.

2. Una anomalía muy común es que uno o algunos de los residuales sean mucho más grande que los otros, lo que índica un punto atípico (outlier u observación aberrante) sobre el cual se debe poner especial atención antes de pensar en eliminarlo. Una forma relativamente fácil de detectar observaciones de este tipo es utilizando residuales estandarizados.

$$d_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{CM_{ERROR}}}$$

donde un valor de d_{ij} mayor que 3 indica claramente un punto atípico potencial.

3. Otro aspecto a considerar es la presencia de corridas de residuales positivos o negativos, lo que implica una correlación positiva y por lo tanto una violación al supuesto de independencia, problema potencialmente serio y difícil de resolver.

4. Si en el gráfico se muestran tendencias a un aumento o disminución en la dispersión de los valores de los residuales (comportamiento tipo embudo), entonces se tiene que hay violación al supuesto de homogeneidad de varianzas (homocedasticidad). Si se viola este supuesto y el diseño está balanceado la prueba de F se afecta ligeramente, pero en el caso de diseños desbalanceados o en caso de que una varianza sea mucho más grande que las demás, entonces si se tiene un problema grave.

Para probar normalidad existen pruebas numéricas las cuales básicamente plantean una curva normal teórica y mediante una prueba de bondad de ajuste someten a prueba la hipótesis nula de que los datos se apegan a esta distribución (Método de Kolmogorov-Smirnov o el de Anderson-Darling, entre otros). Por su impacto visual, el análisis de residuales es el más utilizado en diseños de experimentos, por lo fácil que es interpretarlo y por su presencia en las "salidas" de los "paquetes" estadísticos.

1.3.2.1.4. Prueba de Bartlett para Homogeneidad de Varianzas

Esta prueba considera el siguiente par de hipótesis.

Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ Todas las varianzas son iguales

Ha: Al menos dos varianzas son diferentes

La prueba consiste en obtener un estadístico de contraste cuya distribución se aproxima a una distribución ji-cuadrada, con k-1 grados de libertad, cuando las k muestras aleatorias son de poblaciones normales independientes. La secuencia de cálculo es.

1. Considerando la fórmula
$$\chi^2 = 2.3026\frac{q}{c}$$
2. Obtener $s_p^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)s_i^2}{N-k}$
3. Utilizar este resultado para calcular
$$q = (N-k)\log_{10} s_p^2 - \sum_{i=1}^{k}(n-1)\log_{10} s_i^2$$
4. Calcular $c = 1 + \dfrac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)^{-1} - (N-k)^{-1}\right)$
5. Obtener el valor calculado de ji-cuadrada y compararlo con el valor de tablas con nivel de significancia α y k-1 grados de libertad. Regla de decisión: Si $\chi^2_{calculada} > \chi^2_{\alpha,\nu}$, se rechaza Ho.

1.3.2.1.5. Prueba de Levene modificada

Debido a que la prueba de Bartlett es sensible al supuesto de normalidad, hay situaciones donde se recomienda un procedimiento alternativo, como lo es este método robusto en cuanto a las desviaciones de la normalidad, ya que se basa en las medianas y no en las medias de los tratamientos. La secuencia de cálculo es:

Primero y antes que nada considerar el juego de hipótesis a trabajar.

Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$ Todas las varianzas son iguales

Ha: Al menos un par de varianzas son diferentes entre si

1. Obtener la mediana de cada tratamiento: $\tilde{Y}_{i\bullet}$
2. Obtener para cada dato del experimento el valor absoluto de la desviación de cada observación con respecto a la mediana de su tratamiento. $d_{ij} = \left| Y_{ij} - \tilde{Y}_{i\bullet} \right|$
3. Sobre la tabla de estas diferencias, realizar un ANOVA y aplicar la regla de decisión sobre el estadístico F para rechazar o no la Hipótesis nula.

1.3.2.2. ¿Qué hacer cuando no se cumplen los supuestos del ANVA?

Si no se cumplen los supuestos se tienen 2 opciones

1. Transformar los resultados de las observaciones para estabilizar la varianza

   1.1. Cuando se conoce la distribución teórica de las observaciones

   - Si la distribución es de Poisson, aplicar transformación a raíz cuadrada
   - Si la distribución es Lognormal, aplicar transformación logarítmica
   - Si la distribución es binomial, aplicar transformación arcoseno

   1.2. Cuando no se conoce la distribución lo recomendable es realizar una búsqueda empírica de la transformación

Es importante recalcar que las conclusiones del ANVA se deben aplicar a las poblaciones transformadas, por lo que es importante "visualizar" las posibilidades de interpretación antes de realizar estas transformaciones.

2. Recurrir a pruebas de distribución libre, es decir que no se apeguen a una función de distribución de probabilidad. En otras palabras aplicar alguna técnica de Análisis Estadístico No-Paramétrico. En el caso del DCA la técnica apropiada es la de Kruskal-Wallis.

1.4. Diseños de efectos fijos y efectos aleatorios

En el análisis de varianza se tienen 2 situaciones de trabajo.

1. Los k tratamientos los elige el investigador, con base en su experiencia o conocimiento previo del proceso o fenómeno en estudio. De tal manera que se prueban hipótesis con respecto a las medias de estos tratamientos específicos y las

conclusiones se aplican únicamente a los niveles del factor considerados en el análisis. También se puede tener como objetivo estimar los parámetros del modelo, es decir: μ, τ_i o σ^2. A este modelo se le conoce como **modelo de efectos fijos.**

2. Los k tratamientos representan una muestra aleatoria de una población de tratamientos. En este caso se pueden extender las conclusiones a la totalidad de los tratamientos de la población, ya sea que estén considerados explícitamente o no. Aquí las τ_i son variables aleatorias y se prueban hipótesis acerca de la variabilidad de las τ_i y se intenta estimar esta variabilidad. A este modelo se le conoce como **modelo de efectos aleatorios o modelo de componentes de varianza.**

3. Hay situaciones experimentales donde se pueden combinar efectos fijos y efectos aleatorios, trabajando entonces **con modelos de efectos combinados (mixtos o mezclados).**

En resumen, los cálculos para un diseño de efectos fijos y completamente al azar se presentan en la siguiente tabla.

Modelo: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$

Hipótesis *Ho*: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ vs *Ha*: $\mu_i \neq \mu_j$; para i≠j con i,j = 1, 2, 3, 4

Fuente de Variación *(FV)*	Suma de Cuadrados (SC)	Grados de Libertad *(gl)*	Cuadrados Medios *(CM)*	F_0	Valor Esperado de Cuadrados Medios
Tratamientos	$\sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i\bullet}^2}{n_i}-\frac{Y_{\bullet\bullet}^2}{N}$	$k-1$	$\frac{SC_{TRAT}}{k-1}$	$\frac{CM_{TRAT}}{CM_{ERROR}}$	$\sigma^2+\frac{n\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2}{k-1}$
Error	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}^2-\sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i.}^2}{n_i}$	$N-k$	$\frac{SC_{ERROR}}{N-k}$		σ^2
Total	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}^2-\frac{Y_{\bullet\bullet}^2}{N}$	$N-1$			

Esta tabla funciona adecuadamente para diseños balanceados y desbalanceados por el subíndice *i* de las fórmulas, lo que no sucede para la prueba de Tukey, ya que cuando el diseño está desbalanceado (las repeticiones no son iguales), las ecuaciones quedan como:

Estadístico de Tukey : $\omega = \frac{q_\alpha(k,\nu)}{\sqrt{2}}\sqrt{CM_{Error}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$

Y la ecuación para el intervalo de confianza es:

$$(\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet})-\frac{q_\alpha(k,\nu)}{\sqrt{2}}\sqrt{CM_{Error}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)} \leq \mu_i-\mu_j \leq (\bar{Y}_{i\bullet}-\bar{Y}_{j\bullet})+\frac{q_\alpha(k,\nu)}{\sqrt{2}}\sqrt{CM_{Error}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)} \quad ; i \neq j$$

Ejemplo 1.6: Un fabricante supone que existe diferencia en el contenido de calcio en lotes de materia prima que le son suministrados por su proveedor. Actualmente hay una gran cantidad de lotes en la bodega. Cinco de estos son elegidos aleatoriamente. Un químico realiza cinco pruebas sobre cada lote y obtiene los siguientes resultados.

Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4	Lote 5
23.46	23.59	23.51	23.28	23.29
23.48	23.46	23.64	23.40	23.46
23.56	23.42	23.46	23.37	23.37
23.39	23.49	23.52	23.46	23.32
23.40	23.50	23.49	23.39	23.38

¿Hay variación significativa en el contenido de calcio de un lote a otro?

Realizando los cálculos numéricos se tiene

Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4	Lote 5	
23.46	23.59	23.51	23.28	23.29	
23.48	23.46	23.64	23.40	23.46	
23.56	23.42	23.46	23.37	23.37	
23.39	23.49	23.52	23.46	23.32	
23.40	23.50	23.49	23.39	23.38	
$Y_{.1}$ =117.29	$Y_{.2}$ = 117.46	$Y_{.3}$ = 117.62	$Y_{.4}$ = 116.9	$Y_{.5}$ = 116.82	$Y_{..}$ = 586.09
				$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 = 13740.2441$	

Recordando las fórmulas de cálculo se tiene:

-) $SC_{Total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N}$
-) $SC_{Trat} = n\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i.}^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{N}$
-) $SC_{Error} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i.}^2}{n_i}$, aunque también se puede obtener por la diferencia: $SC_{Total} - SC_{Trat}$

Entonces

Suma de cuadrados de tratamientos

$$SC_{Trat} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i.}^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{N} = \frac{(117.19^2 + 117.46^2 + 117.62^2 + 116.9^2 + 116.82^2)}{5} - \frac{586^2}{25} =$$
$$= \frac{68700.7825}{5} - 13740.0595 = 0.096976$$

Suma de cuadrados totales

$$SC_{Total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N} = (23.46^2 + 23.48^2 + \cdots + 23.32^2 + 23.38^2) - 13740.0595 =$$
$$= 13740.2441 - 13740.0595 = 0.184576$$
$$SC_{Error} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i.}^2}{n_i} = 13740.2441 - 13740.1565 = 0.0876$$

Tratamientos = k = 5, Repeticiones = n = 5, Número total de datos = (k)(n) = N = (5)(5) = 25

Modelo: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$

Hipótesis *Ho*: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ vs *Ha*: $\mu_i \neq \mu_j$; para i≠j con i,j = 1, 2, 3, 4, 5

(FV)	*(SC)*	*(gl)*	*(CM)*	F_o	Esperanzas
Tratamientos	0.096976	4	0.024244	5.535159	$\sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{k}\tau_i^2}{k-1}$
Error	0.0876	20	0.00438		σ^2
Total	0.184576	24			

$F_{0.95,\,4,\,20} = 2.87$, entonces $F_o > F_{0.95,\,4,\,20}$

Conclusión: Dado que F_0 es mayor que la F de tablas se tiene evidencia para rechazar Ho, por lo tanto, al menos un par de medias es diferente.

Ahora surge la pregunta: ¿cuáles son los pares de medias que son diferentes y cuáles son semejantes? Para esto se realiza una prueba de Tukey.

Las medias son:

	Lote 1	**Lote 2**	**Lote 3**	**Lote 4**	**Lote 5**
$\overline{Y}_{\bullet j}$	23.458	23.492	23.524	23.38	23.364

Que ordenadas quedan como:

	Lote 5	**Lote 4**	**Lote 1**	**Lote 2**	**Lote 3**
$\overline{Y}_{\bullet j}$	23.364	23.38	23.458	23.492	23.524

La fórmula de cálculo es

$$\omega = q_\alpha(k,\nu)\sqrt{\frac{CM_E}{n_g}}$$

Entonces

$$\omega = q_\alpha(5,20)\sqrt{\frac{0.00438}{5}} = 4.232(0.02959) = 0.125255$$

Calculando los valores absolutos de las diferencias entre todos los posibles pares de medias, se tiene

	$\overline{Y}_{\bullet 4} = 23.38$	$\overline{Y}_{\bullet 1} = 23.458$	$\overline{Y}_{\bullet 2} = 23.492$	$\overline{Y}_{\bullet 3} = 23.524$
$\overline{Y}_{\bullet 5} = 23.364$	0.016	0.094	0.128	0.16
$\overline{Y}_{\bullet 4} = 23.38$	—	0.078	0.112	0.144
$\overline{Y}_{\bullet 1} = 23.458$	—	—	0.034	0.066
$\overline{Y}_{\bullet 2} = 23.492$	—	—	—	0.032

Los pares de medias que son diferentes son aquellos cuya diferencia supera a ω, por lo tanto, son diferentes $\mu_5 \neq \mu_3$, $\mu_5 \neq \mu_2$ y $\mu_4 \neq \mu_3$. Estos resultados se pueden condensar trazando una línea que una a las medias semejantes, de la siguiente forma

Lote 5 Lote 4 Lote 1 Lote 2 Lote 3

Conclusión: Los lotes que realmente difieren son el 5 y el 3, el 5 y el 2, y el 4 y el 3, finalmente, el lote 5 es el que menos contenido de calcio tiene y el lote 3 es el que presenta mayor contenido de calcio.

Verificando Supuestos

Primero se verifica la homogeneidad de varianzas, mediante la prueba de Bartlett, para esto hay que obtener los elementos de la fórmula.

$$\chi^2 = 2.3026\frac{q}{c}$$

-) $s_p^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)s_i^2}{N-k} = \dfrac{4(0.00472)+4(0.00397)+4(0.00473)+4(0.00425)+4(0.00423)}{N-k}$

$$= \frac{0.0876}{25-5} = 0.00438$$

- $q=(N-k)\log_{10}s_p^2-\sum_{i=1}^{k}(n-1)\log_{10}s_i^2=(20)(-2.35852)-(-47.1907082)=0.02019044$

- $c=1+\frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)^{-1}-(N-k)^{-1}\right)=1+\frac{1}{3(5-1)}[(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})-\frac{1}{20}]=1+\frac{1}{12}(\frac{5}{4}-\frac{1}{20})=1.1$

- Ahora si: $\chi^2=2.3026\frac{q}{c}=2.3026\frac{0.02019044}{1.1}=0.04226409$

- Regla de decisión: Si $0.04226409=\chi^2_{Calc}>\chi^2_{\alpha,\nu}=\chi^2_{0.05,4}=9.49$ se rechaza Ho

Como no se cumple que el valor calculado sea mayor que el de tablas entonces NO se rechaza Ho. Y se tiene evidencia estadística de que las 5 varianzas son iguales (Homocedasticidad).

Probando supuestos mediante el análisis de residuales

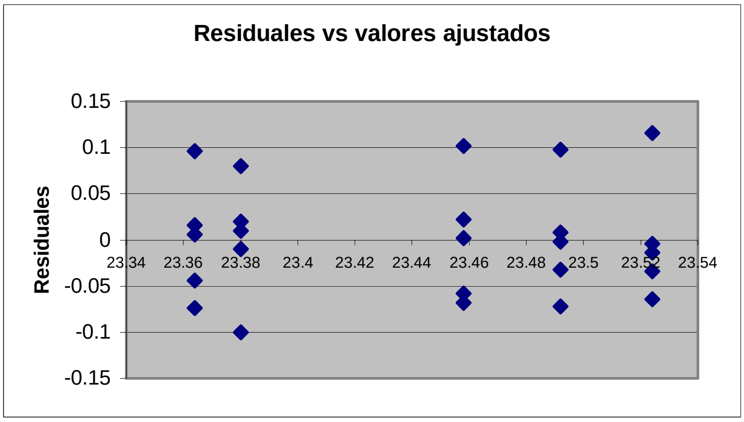
El primer paso es obtener los residuales, recordando que $e_{ij}=Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}$, considerando los datos originales

	Lote1	**Lote2**	**Lote3**	**Lote4**	**Lote5**
	23.46	23.59	23.51	23.28	23.29
	23.48	23.46	23.64	23.4	23.46
	23.56	23.42	23.46	23.37	23.37
	23.39	23.49	23.52	23.46	23.32
	23.4	23.5	23.49	23.39	23.38
Medias ($Y_{.j}$)	23.458	23.492	23.524	23.38	23.364

Entonces, los residuales son

e_{i1}	e_{i2}	e_{i3}	e_{i4}	e_{i5}
0.002	0.098	–0.014	–0.10	–0.074
0.022	–0.032	0.116	0.02	0.096
0.102	–0.072	–0.064	–0.01	0.006
–0.068	–0.002	–0.004	0.08	–0.044
–0.058	0.008	–0.034	0.01	0.016

Para realizar un gráfico de residuales contra valores ajustados o predichos se debe recordar que $\hat{Y}_{ij}=\overline{Y}_{i.}$. En otras palabras, los valores ajustados corresponden a las medias de cada tratamiento y el gráfico queda de la siguiente forma.



La interpretación de los residuales se centra en buscar patrones o secuencias de comportamiento, ya que la aleatoriedad de los puntos en el gráfico es la condición para el buen cumplimiento de los supuestos de normalidad, homogeneidad de varianza e independencia.

Por ejemplo, la presencia de curvaturas (herraduras o “S’s”) indican que el modelo estadístico no es el adecuado para explicar el comportamiento estadístico de los datos. Aunque este criterio es más útil en el ajuste de modelos lineales (regresión) se aprovecha la ocasión para mencionarlo.

Rachas o cúmulos de puntos por encima o por debajo de la línea del valor cero, así como la presencia de “embudos” implica problemas en el cumplimiento del supuesto de homogeneidad de varianzas.

Se recomienda contar con información sobre la secuencia temporal en la que se obtienen los datos (ya que no se obtienen todos a la vez). Pues, en un gráfico de residuales vs tiempo (1, 2, …..) la tendencia a tener corridas de residuales positivos y negativos indican cierta correlación, lo que indica que se ha violado el supuesto de independencia.

También seria útil realizar el gráfico de normalidad para estos residuales (sección 1.3.2.1.1) y verificar este supuesto. Así como la búsqueda de valores extremos (outliers)

NOTA IMPORTANTE. En un sentido estricto, los supuestos se deban probar sobre los residuales, aunque es común realizar las pruebas sobre los datos originales. Si los supuestos no se cumplen se puede realizar alguna transformación en los datos o aplicar técnicas estadísticas no-paramétrica, para conservar la confiabilidad en los resultados estadísticos.

Ejemplo 1.7 A continuación se muestra la secuencia de cálculo para un diseño desbalanceado, observe que es la misma que la realizada para el modelo balanceado, para ejemplificar el análisis se consideran los datos del ejemplo 1.6 eliminando el último dato del lote 1 y los dos últimos del lote 4.

	Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4	Lote 5	
	23.46	23.59	23.51	23.28	23.29	
	23.48	23.46	23.64	23.40	23.46	
	23.56	23.42	23.46	23.37	23.37	
	23.39	23.49	23.52	—	23.32	
	—	23.50	23.49	—	23.38	
n_j	4	5	5	3	5	$N = 22$
$Y_{\bullet j}$	93.89	117.46	117.62	70.05	116.82	$Y_{\bullet\bullet} = 515.84$

$$SC_{Trat} = \sum_{i=1}^{k} \frac{Y_{i.}^{2}}{n_i} - \frac{Y_{..}^{2}}{N} = \left[\frac{93.89^2}{4} + \frac{117.46^2}{5} + \frac{117.62^2}{5} + \frac{70.05^2}{3} + \frac{116.82^2}{5}\right] - \frac{515.84^2}{22} =$$
$$= 12095.146205 - 12095.41164 = 0.105041$$

$$SC_{Total} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^{2}}{N} = (23.46^2 + 23.48^2 + \cdots + 23.32^2 + 23.38^2) - 12095.041164 =$$
$$= 12095.2204 - 12095.041164 = 0.179236$$

$$SC_{Error} = SC_{Total} - SC_{Trat} = 0.179236 - 0.105041 = 0.074195$$

Modelo: $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$

Hipótesis Ho: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$ vs Ha: $\mu_i \neq \mu_j$; para i≠j con i,j = 1, 2, 3, 4, 5

(FV)	*(SC)*	*(gl)*	*(CM)*	F_0
Tratamientos	0.105041	4	0.026260	6.016928
Error	0.074195	17	0.004364	
Total	0.179236	21		

$F_{0.95,\,4,\,17} = 2.965$, entonces $F_o > F_{0.95,\,4,\,17}$

Conclusión: Dado que F_0 es mayor que la F de tablas se tiene evidencia para rechazar Ho, por lo tanto, al menos un par de medias es diferente.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 1

Se recomienda que la discusión de estos ejercicios se realice de manera grupal, ya que no se plantean como elementos de evaluación, sino para reafirmar los conocimientos adquiridos.

1. Describa con sus propias palabras el inconveniente de comparar tres o más tratamientos mediante la aplicación sucesiva de pruebas de t -student, para pares de muestras independientes.
2. ¿Qué pasa si para comparar un par de medias independientes, en lugar de aplicar una prueba de t-student se aplica un ANVA?

   2.1. ¿Es un error?

   2.2. ¿Cambia o no la conclusión de interpretación?
3. Explique, en un cuadro de ANVA, por qué los Cuadrados medios son varianzas en si.
4. Describa con sus propias palabras la conveniencia de rechazar Ho y la inconveniencia de no rechazarla.
5. Explique para qué sirve una prueba de comparación múltiple de medias.
6. Sin realizar cálculos describa a detalle como realizar una prueba de Tukey a un experimento de efectos fijos, con un factor a 4 niveles y 6 repeticiones (balanceado), dentro de un diseño completamente al azar (one-way).
7. Cuál es la importancia de comprobar el cumplimiento de supuestos del modelo estadístico del ANVA. Y en que consisten la homocedasticidad, normalidad e independencia.
8. ¿Los supuestos se verifican sobre los datos originales o sobre los residuales? Justifique su respuesta, explicando que son los residuales.
9. ¿Qué se recomienda hacer cuando no se cumplen los supuestos de un ANVA?
10. ¿Cuáles son las principales opciones de transformación de datos en un ANVA? No olvidar la raíz cuadrada, logarítmica y la arcoseno.
11. Realizar una reseña de cada uno de los pasos de solución del siguiente ejemplo, enfatizar en los comentarios de texto "sombreados".
12. Buscar en la Bibliografía un ejemplo de ANVA de un factor, (one-way o una-vía), para cada uno de los siguientes casos

    12.1. Diseño de efectos fijos, balanceado

    12.2. Diseño de efectos fijos, desbalanceado

    12.3. Diseño de efectos aleatorios (componentes de varianza)

Nota: No olvidar la referencia bibliográfica.

13. Seleccionar alguno de los ejemplos del punto 12 y resolverlo. De preferencia realizando los cálculos a mano (ya habrá oportunidad de realizarlos mediante el uso de software de análisis estadístico).

Capitulo 2

Software de Análisis Estadístico (STATGRAPHICS y SPSS), para el Diseño Completamente al Azar (DCA)

Presentación

En este capítulo, a través de ejemplos, se muestra como utilizar el software de análisis estadístico para el diseño completamente al azar. Para esto se requieren conocimientos previos de cómo manejar Statgraphics y SPSS, así como la información del capítulo 1. *(Ver manuales de Manejo de STATGRAPHICS y de SPSS, publicados por los mismos autores en la FES Zaragoza UNAM)*

2.1. Statgraphics

2.1. 1. Diseño completamente al azar, balanceado

Ejemplo 2.1. Un fabricante supone que existe diferencia en el contenido de calcio en lotes de materia prima que le son suministrados por su proveedor. Actualmente hay una gran cantidad de lotes en la bodega. Cinco de estos son elegidos aleatoriamente. Un químico realiza cinco pruebas sobre cada lote y obtiene los siguientes resultados.

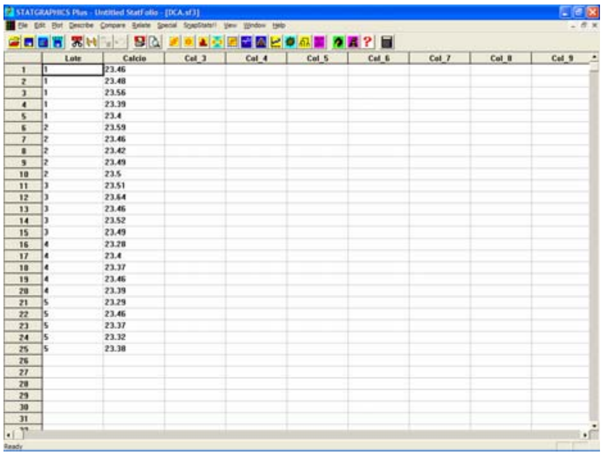
Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4	Lote 5
23.46	23.59	23.51	23.28	23.29
23.48	23.46	23.64	23.40	23.46
23.56	23.42	23.46	23.37	23.37
23.39	23.49	23.52	23.46	23.32
23.40	23.50	23.49	23.39	23.38

¿Hay diferencia significativa en el contenido de calcio de un lote a otro?

El par de hipótesis a probar es:

Ho: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$

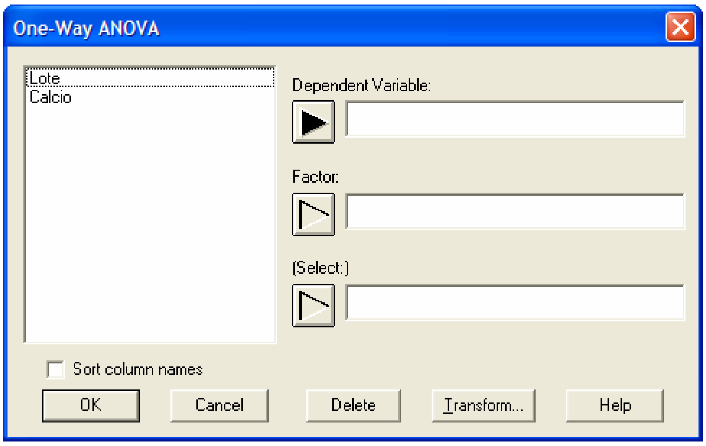
Ha: al menos un par de medias es diferente



La secuencia de análisis es:

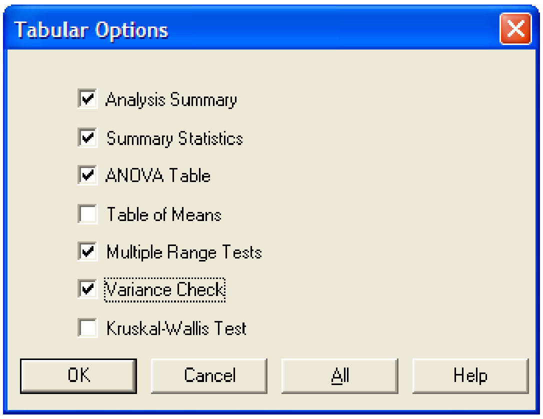
1. Ingresar los datos, con dos columnas, una para lote y otra para calcio
2. Del menú seguir la secuencia:

Compare → Analysis of Variance → One-Way ANOVA



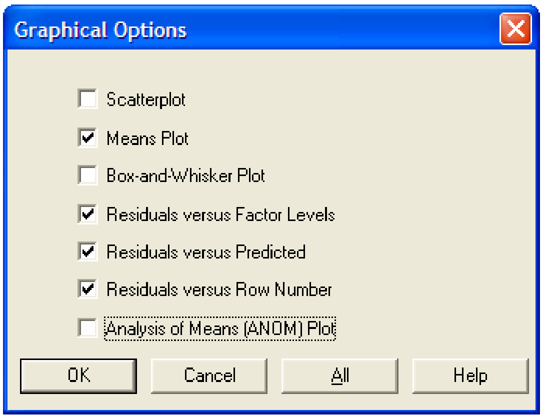
3. En la caja de diálogo que aparece, colocar la variable **Calcio** en la caja **Dependent Variable**, ya que ésta es la respuesta de interés.

También colocar la variable **Lote** en la caja **Factor**



4. Una vez que aparecen los resultados, en la caja de diálogo de opciones tabulares, seleccionar todas las opciones, menos **Table of Means** y **Kruskal Wallis Test**

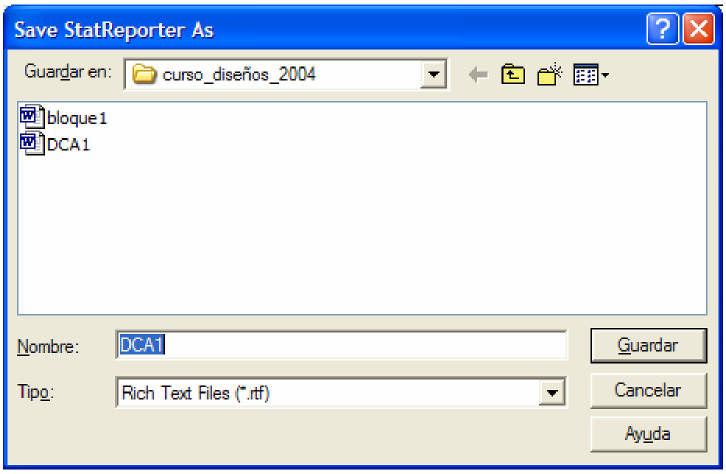
La prueba de Kruskal-Wallis es una técnica No Paramétrica de Análisis de Varianza y se selecciona una vez que se comprueba la violación de supuestos del modelo del Diseño Completamente al Azar.



5. En el diálogo de opciones gráficas, seleccionar **Means Plot** y **todas las opciones de residuales.**

Box-and-Whisker-Plot es una buena opción cuando se aplica la prueba de Kruskal-Wallis, ya que la muesca en los gráficos de cada tratamiento permite visualizar e interpretar la semejanza o diferencia entre tratamientos.

6. "Jugar" un poco con los resultados tanto tabulares como gráficos, desactivar las opciones tabulares o gráficas que no sean de interés. Después, con un **clic derecho** y seleccionando **Copy Analysis to StatReporter**, se copian los resultados a la memoria y luego se pueden guardar o almacenar en disco todos los resultados presentes en pantalla.



7. Para guardar los resultados, seguir la secuencia

File -> Save As -> Save StatReporte

En la caja de diálogo se le da nombre a un archivo en formato rtf (Rich Text File), que se puede "abrir" y trabajar en cualquier procesador de palabras, en nuestro caso se puede trabajar en WORD.

Resultados

Se muestran las "salidas" del análisis agregando algunos comentarios que ayuden a su lectura e interpretación.

One-Way ANOVA - Calcio by Lote

```
Analysis Summary
Dependent variable: Calcio
Factor: Lote
Number of observations: 25
Number of levels: 5

The StatAdvisor
---------------
   This procedure performs a one-way analysis of variance for Calcio. It constructs various tests and graphs to compare the mean values of Calcio for the 5 different levels of Lote.  The F-test in the ANOVA table will test whether there are any significant differences amongst the means.  If there are, the Multiple Range Tests will tell you which means are significantly different from which others.  If you are worried about the presence of outliers, choose the Kruskal-Wallis Test which compares medians instead of means.  The various plots will help you judge the practical significance of the results, as well as allow you to look for possible violations of the assumptions underlying the analysis of variance.
```

En el texto del StatAdvisor se describe lo que hace el ONE WAY-ANOVA y las posibles estrategias de análisis.

Summary Statistics for Calcio

Lote	Count	Average	Median	Mode	Variance
1	5	23.458	23.46		0.00472
2	5	23.492	23.49		0.00397
3	5	23.524	23.51		0.00473
4	5	23.38	23.39		0.00425
5	5	23.364	23.37		0.00423
Total	25	23.4436	23.46	23.46	0.00769067

Lote	Standard deviation	Minimum	Maximum	Range	Skewness
1	0.0687023	23.39	23.56	0.17	0.722536
2	0.0630079	23.42	23.59	0.17	0.892295
3	0.068775	23.46	23.64	0.18	1.60956
4	0.065192	23.28	23.46	0.18	-0.721849
5	0.0650385	23.29	23.46	0.17	0.603753
Total	0.0876964	23.28	23.64	0.36	0.137419

```
Lote                Kurtosis
--------------------------------------------------------------------------------------------
1                   -0.0789105
2                   1.53018
3                   3.13044
4                   1.76747
5                   0.294921
--------------------------------------------------------------------------------------------
Total               0.0340129

The StatAdvisor
---------------
   This table shows various statistics for Calcio for each of the 5 levels of Lote. The one-way
analysis of variance is primarily intended to compare the means of the different levels, listed here
under the Average column. Select Means Plot from the list of Graphical Options to display the means
graphically.
```

Se tienen tablas que muestran las estadísticas descriptivas por cada uno de los tratamientos o niveles del factor en estudio (en este caso lotes).

ANOVA Table for Calcio by Lote

```
                            Analysis of Variance
-----------------------------------------------------------------------------
Source             Sum of Squares     Df     Mean Square     F-Ratio     P-Value
-----------------------------------------------------------------------------
Between groups           0.096976      4      0.024244        5.54       0.0036
Within groups              0.0876     20      0.00438
-----------------------------------------------------------------------------
Total (Corr.)            0.184576     24

The StatAdvisor
---------------
   The ANOVA table decomposes the variance of Calcio into two components: a between-group component and
a within-group component. The F-ratio, which in this case equals 5.53516, is a ratio of the between-
group estimate to the within-group estimate. Since the P-value of the F-test is less than 0.05, there
is a statistically significant difference between the mean Calcio from one level of Lote to another at
the 95.0% confidence level. To determine which means are significantly different from which others,
select Multiple Range Tests from the list of Tabular Options.
```

Se muestra la tabla o cuadro de ANVA, donde se aprecia un P-value de 0.0036, menor a 0.05, lo que implica rechazar Ho. Esto se recalca en el texto del StatAdvisor, donde se indica que al menos un par de lotes son diferentes.

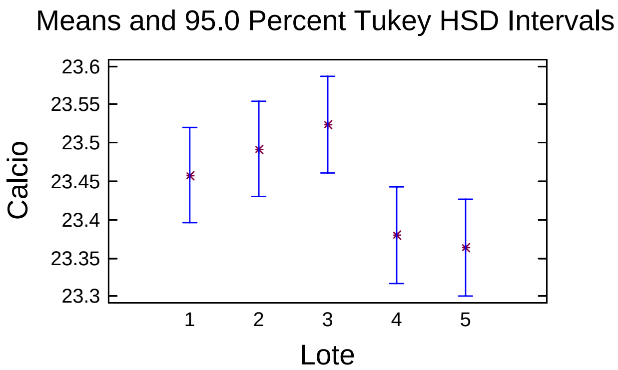
Multiple Range Tests for Calcio by Lote

```
--------------------------------------------------------------------------------
Method: 95.0 percent Tukey HSD
Lote           Count      Mean              Homogeneous Groups
--------------------------------------------------------------------------------
5              5          23.364            X
4              5          23.38             XX
1              5          23.458            XXX
2              5          23.492             XX
3              5          23.524              X
--------------------------------------------------------------------------------
Contrast                                    Difference           +/-  Limits
--------------------------------------------------------------------------------
1 - 2                                       -0.034                0.12529
1 - 3                                       -0.066                0.12529
1 - 4                                        0.078                0.12529
1 - 5                                        0.094                0.12529
2 - 3                                       -0.032                0.12529
2 - 4                                        0.112                0.12529
2 - 5                                       *0.128                0.12529
3 - 4                                       *0.144                0.12529
3 - 5                                       *0.16                 0.12529
4 - 5                                        0.016                0.12529
--------------------------------------------------------------------------------
* denotes a statistically significant difference.
```

```
The StatAdvisor
---------------
   This table applies a multiple comparison procedure to determine which means are significantly
different from which others.  The bottom half of the output shows the estimated difference between each
pair of means.  An asterisk has been placed next to 3 pairs, indicating that these pairs show
statistically significant differences at the 95.0% confidence level.  At the top of the page, 3
homogenous groups are identified using columns of X's.  Within each column, the levels containing X's
form a group of means within which there are no statistically significant differences.  The method
currently being used to discriminate among the means is Tukey's honestly significant difference (HSD)
procedure.  With this method, there is a 5.0% risk of calling one or more pairs significantly different
when their actual difference equals 0.
```

En la prueba de Tukey se tienen los grupos de medias semejantes, indicados por columnas de X's (equivalente a las líneas que se "pintan" para unir grupos de medias semejantes, nada más que de forma vertical). También se genera una matriz de comparaciones entre pares de medias, marcando con asteriscos aquellos pares de medias que son diferentes entre si.

Para aplicar alguna otra prueba de comparación múltiple de medias, basta con dar un **clic derecho** sobre la ventana de resultados de Tukey (Multiple Range Tests), **seleccionar Pane Options** y después activar cualquiera de las seis posibles opciones que se presentan.



Más que saber si las medias son iguales o diferentes, la conclusión práctica requiere que se indique cual de los nivels del factor es el que tiene "mejores" o "peores" resultados. En este gráfico se puede apreciar que los lotes 1, 2 y 3 son semejantes entre ellos y los lotes 4 y 5 son semejantes entre ellos. Lo que se aprecia en los intervalos de confianza que muestran translape.

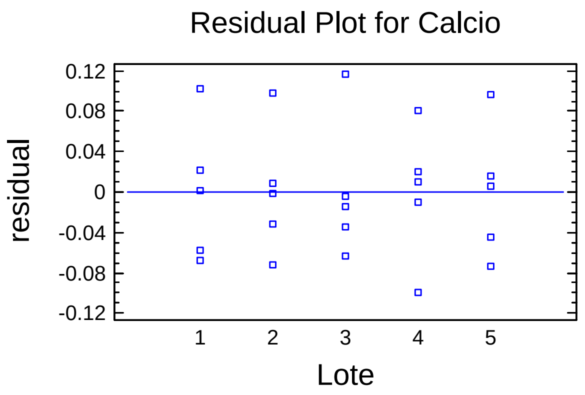
Entonces, es de mayor interés saber que el lote 3 presenta la mayor concentración de calcio y el lote 5 es el que tiene la concentración más baja.

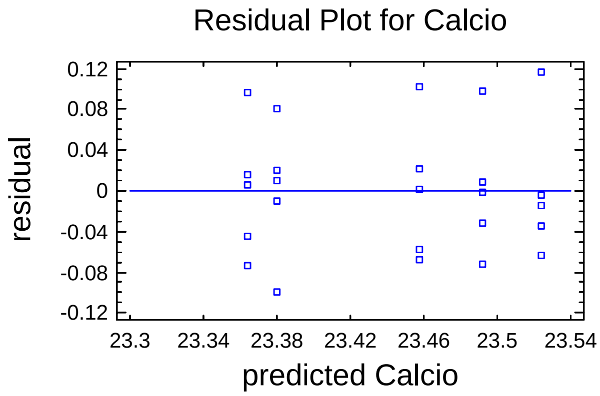
Variance Check

```
Cochran's C test: 0.215982   P-Value = 1.0
Bartlett's test: 1.00233   P-Value = 0.99978
Hartley's test: 1.19144
Levene's test: 0.0321932   P-Value = 0.997834
```

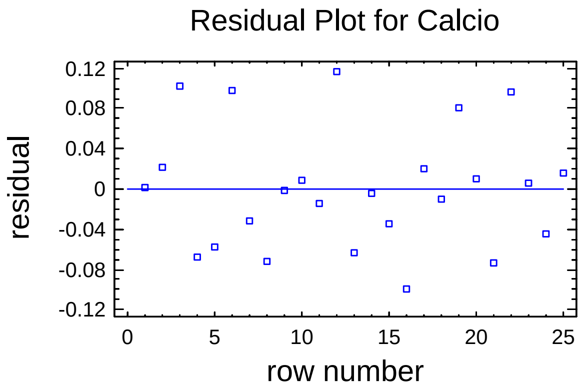
```
The StatAdvisor
---------------
   The four statistics displayed in this table test the null hypothesis that the standard deviations of
Calcio within each of the 5 levels of Lote is the same.  Of particular interest are the three P-values.
Since the smallest of the P-values is greater than or equal to 0.05, there is not a statistically
significant difference amongst the standard deviations at the 95.0% confidence level.
```

De las cuatro pruebas de homogeneidad de varianzas, las tres que muestran valores de probabilidad tienen P-Values mayores a 0.05, lo que indican que se cumple el supuesto de homogeneidad de varianzas. Supuesto fundamental para confiar en los resultados de este análisis estadístico.





Estos dos gráficos de residuales no muestran algún patrón que ponga en duda el cumplimiento del supuesto de normalidad y de homogeneidad de varianzas, ya que no hay rachas de valores positivos o negativos, no hay "curvaturas" ni tampoco se presentan "embudos" en los datos.



Este gráfico no muestra tendencia alguna en los residuales, con respecto al número de hilera o fila (suponiendo que la fila indica la secuencia temporal en la que se colectan los datos), lo que demuestra que se cumple el supuesto de independencia.

2.1.2. Diseño completamente al azar, desbalanceado

Ejemplo 2.2. La secuencia de análisis para un diseño desbalanceado es la misma que la realizada para el modelo balanceado, para ejemplificar el análisis se consideran los datos del ejemplo 1.1 eliminando el último dato del lote 1 y los dos últimos del lote 4.

	Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4	Lote 5	
	23.46	23.59	23.51	23.28	23.29	
	23.48	23.46	23.64	23.40	23.46	
	23.56	23.42	23.46	23.37	23.37	
	23.39	23.49	23.52		23.32	
		23.50	23.49		23.38	
n_j	4	5	5	3	5	$N = 22$
$Y_{\bullet j}$	93.89	117.46	117.62	70.05	116.82	$Y_{\bullet\bullet} = 515.84$

```
One-Way ANOVA - Calcio by Lote

Analysis Summary
Dependent variable: Calcio

Factor: Lote
Number of observations: 22
Number of levels: 5

The StatAdvisor
---------------

   This procedure performs a one-way analysis of variance for Calcio. It constructs various tests and
graphs to compare the mean values of Calcio for the 5 different levels of Lote.  The F-test in the
ANOVA table will test whether there are any significant differences amongst the means.  If there are,
the Multiple Range Tests will tell you which means are significantly different from which others.  If
you are worried about the presence of outliers, choose the Kruskal-Wallis Test which compares medians
instead of means.  The various plots will help you judge the practical significance of the results, as
well as allow you to look for possible violations of the assumptions underlying the analysis of
variance.
```

Es importante notar que el número de observaciones ahora es 22 y no 25 como en el ejemplo 2.1.

```
Summary Statistics for Calcio
Lote              Count            Average          Median           Mode           Variance
-----------------------------------------------------------------------------------------------
1                  4               23.4725           23.47                          0.00489167
2                  5               23.492            23.49                          0.00397
3                  5               23.524            23.51                          0.00473
4                  3               23.35             23.37                          0.0039
5                  5               23.364            23.37                          0.00423
-----------------------------------------------------------------------------------------------
Total             22               23.4473           23.46            23.46         0.00853506

Lote       Standard deviation    Minimum          Maximum          Range          Skewness
1            0.0699405           23.39            23.56            0.17           0.208257
2            0.0630079           23.42            23.59            0.17           0.892295
3            0.068775            23.46            23.64            0.18           1.60956
4            0.06245             23.28            23.4             0.12          -1.29334
5            0.0650385           23.29            23.46            0.17           0.603753
------------------------------------------------------------------------------------------------
Total        0.0923854           23.28            23.64            0.36           0.0201233
```

```
Lote                Kurtosis
-----------------------------------------------------------------------------------------------
1                   1.1229
2                   1.53018
3                   3.13044
4
5                   0.294921
-----------------------------------------------------------------------------------------------
Total              -0.191001

The StatAdvisor
---------------
   This table shows various statistics for Calcio for each of the 5 levels of Lote.  The one-way
analysis of variance is primarily intended to compare the means of the different levels, listed here
under the Average column.  Select Means Plot from the list of Graphical Options to display the means
graphically.
```

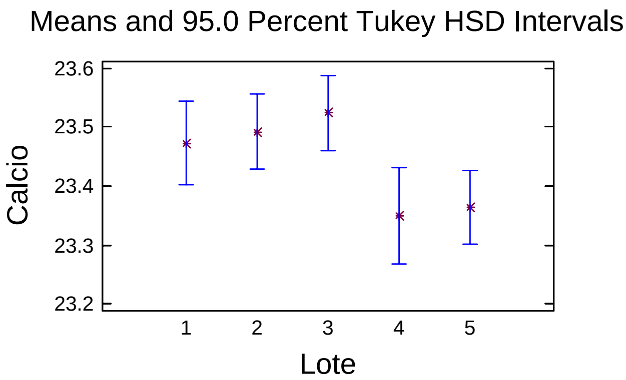
En estos resultados nótese la variable count, donde se indica el número de datos por cada nivel del factor.

```
ANOVA Table for Calcio by Lote

                            Analysis of Variance
-----------------------------------------------------------------------------
Source             Sum of Squares     Df  Mean Square    F-Ratio      P-Value
-----------------------------------------------------------------------------
Between groups           0.105041      4    0.0262603       6.02       0.0033
Within groups            0.074195     17    0.00436441
-----------------------------------------------------------------------------
Total (Corr.)            0.179236     21


The StatAdvisor
---------------
   The ANOVA table decomposes the variance of Calcio into two components: a between-group component and
a within-group component.  The F-ratio, which in this case equals 6.01693, is a ratio of the between-
group estimate to the within-group estimate.  Since the P-value of the F-test is less than 0.05, there
is a statistically significant difference between the mean Calcio from one level of Lote to another at
the 95.0% confidence level.  To determine which jeans are significantly different from which others,
select Multiple Range Tests from the list of Tabular Options.
```

Hay una pequeña variación en el P-Value del ejemplo 2.1, pero la conclusión es la misma.

```
Multiple Range Tests for Calcio by Lote

--------------------------------------------------------------------------------
Method: 95.0 percent Tukey HSD
Lote           Count      Mean              Homogeneous Groups
--------------------------------------------------------------------------------
4              3          23.35              XX
5              5          23.364             X
1              4          23.4725            XXX
2              5          23.492              XX
3              5          23.524               X
--------------------------------------------------------------------------------
Contrast                                    Difference           +/-  Limits
--------------------------------------------------------------------------------
1 - 2                                      -0.0195               0.134885
1 - 3                                      -0.0515               0.134885
1 - 4                                       0.1225               0.153574
1 - 5                                       0.1085               0.134885
2 - 3                                      -0.032                0.127171
2 - 4                                       0.142                0.146845
2 - 5                                      *0.128                0.127171
3 - 4                                      *0.174                0.146845
3 - 5                                      *0.16                 0.127171
4 - 5                                      -0.014                0.146845
--------------------------------------------------------------------------------
* denotes a statistically significant difference.
```

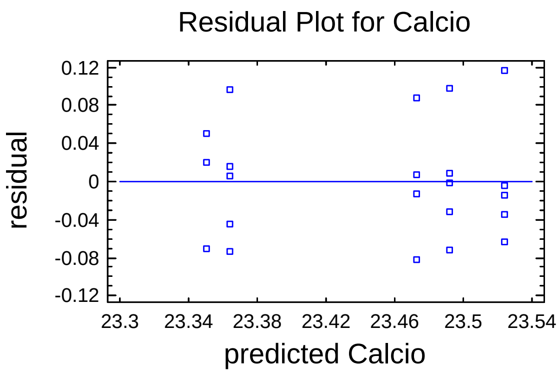
```
The StatAdvisor
---------------
   This table applies a multiple comparison procedure to determine which means are significantly
different from which others.  The bottom half of the output shows the estimated difference between each
pair of means.  An asterisk has been placed next to 3 pairs, indicating that these pairs show
statistically significant differences at the 95.0% confidence level.  At the top of the page, 3
homogenous groups are identified using columns of X's.  Within each column, the levels containing X's
form a group of means within which there are no statistically significant differences.  The method
currently being used to discriminate among the means is Tukey's honestly significant difference (HSD)
procedure.  With this method, there is a 5.0% risk of calling one or more pairs significantly different
when their actual difference equals 0.   NOTE: the intervals are not exact since the number of
observations at each level is not the same. You might consider using the Bonferroni procedure instead.
```

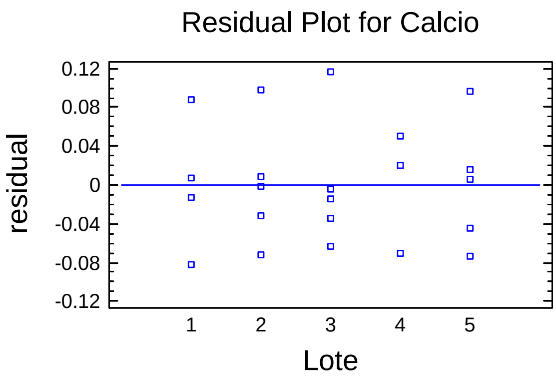


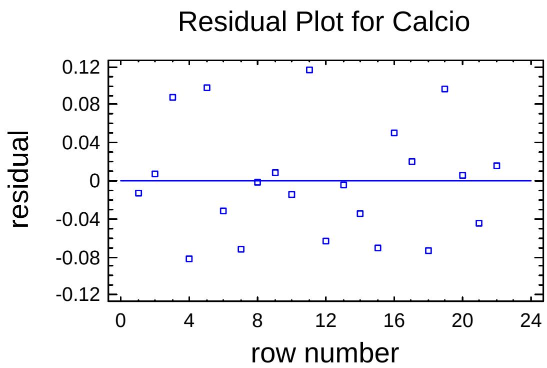
Es importante notar como cambian los resultados, con respecto al ejemplo 2.1. Aunque la conclusión final es semejante.

```
Variance Check

Cochran's C test: 0.225198   P-Value = 1.0
Bartlett's test: 1.00384   P-Value = 0.999591
Hartley's test: 1.25427
Levene's test: 0.018952   P-Value = 0.999222


The StatAdvisor
---------------
   The four statistics displayed in this table test the null hypothesis that the standard deviations of
Calcio within each of the 5 levels of Lote is the same.  Of particular interest are the three P-values.
Since the smallest of the P-values is greater than or equal to 0.05, there is not a statistically
significant difference amongst  the standard deviations at the 95.0% confidence level.
```

De las cuatro pruebas de homogeneidad de varianzas, los P-Values mayores a 0.05 indican que se cumple el supuesto de homogeneidad de varianzas.







Estos gráficos de residuales no muestran algún patrón que ponga en duda el cumplimiento del supuesto de normalidad y de homogeneidad de varianzas, ya que no hay rachas de valores positivos o negativos, no hay "curvaturas" ni tampoco se presentan "embudos" en los datos.

Es importante notar que los criterios de interpretación no cambian y que finalmente el software se hace cargo de las rutinas de cálculo.

2.2. SPSS

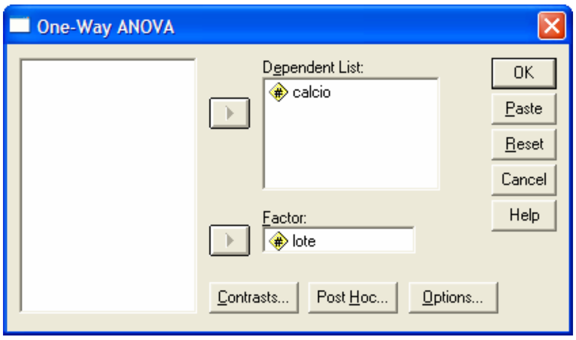
Para quienes utilizan el SPSS, a continuación se muestra la secuencia de análisis para el mismo ejemplo 2.1.

2.2.1. Diseño completamente al azar, DCA

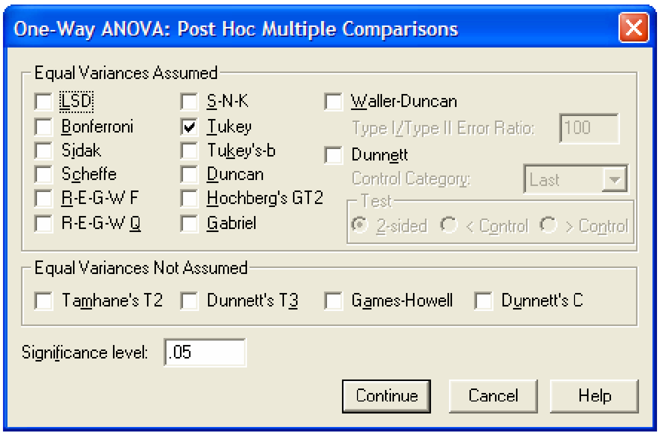
El análisis se realiza con la secuencia:

1. Ingresar los datos en dos columnas, una para identificar el lote y otra para la concentración de calcio.
2. Del menú seguir los pasos:

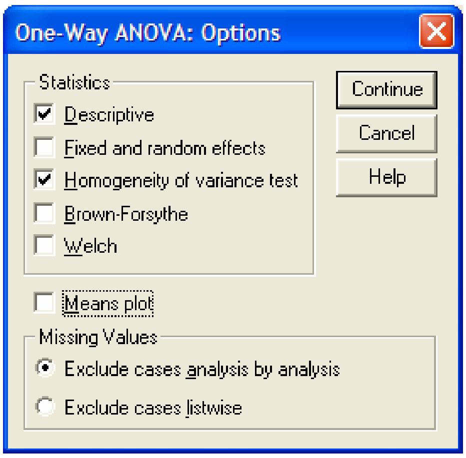
ANALYZE -> COMPARE MEANS -> ONEWAY ANOVA



3. De la caja de diálogo seleccionar las variables a trabajar y colocarlas en su caja correspondiente.



4. Abrir el diálogo **Post Hoc** y seleccionar la prueba de comparación múltiple de medias de Tukey.



5. Abrir el diálogo **options** y seleccionar las opciones a trabajar.

6. Ya con todas las opciones seleccionadas, dar **OK** para realizar el análisis.

RESULTADOS

Descriptives

CALCIO

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
1	5	23.4580	.06870	.03072	23.3727	23.5433	23.39	23.56
2	5	23.4920	.06301	.02818	23.4138	23.5702	23.42	23.59
3	5	23.5240	.06877	.03076	23.4386	23.6094	23.46	23.64
4	5	23.3800	.06519	.02915	23.2991	23.4609	23.28	23.46
5	5	23.3640	.06504	.02909	23.2832	23.4448	23.29	23.46
Total	25	23.4436	.08770	.01754	23.4074	23.4798	23.28	23.64

ANOVA

CALCIO

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	.097	4	.024	5.535	.004
Within Groups	.088	20	.004		
Total	.185	24			

CALCIO

Tukey HSD[a]

LOTE	N	Subset for alpha = .05: 1	2	3
5	5	23.3640		
4	5	23.3800	23.3800	
1	5	23.4580	23.4580	23.4580
2	5		23.4920	23.4920
3	5			23.5240
Sig.		.204	.094	.528

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

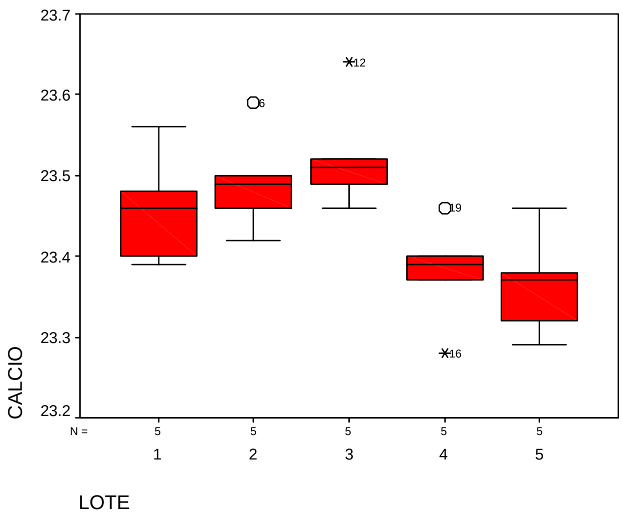
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

Multiple Comparisons

Dependent Variable: CALCIO
Tukey HSD

(I) LOTE	(J) LOTE	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1	2	-.0340	.04186	.924	-.1593	.0913
	3	-.0660	.04186	.528	-.1913	.0593
	4	.0780	.04186	.368	-.0473	.2033
	5	.0940	.04186	.204	-.0313	.2193
2	1	.0340	.04186	.924	-.0913	.1593
	3	-.0320	.04186	.938	-.1573	.0933
	4	.1120	.04186	.094	-.0133	.2373
	5	.1280*	.04186	.044	.0027	.2533
3	1	.0660	.04186	.528	-.0593	.1913
	2	.0320	.04186	.938	-.0933	.1573
	4	.1440*	.04186	.019	.0187	.2693
	5	.1600*	.04186	.008	.0347	.2853
4	1	-.0780	.04186	.368	-.2033	.0473
	2	-.1120	.04186	.094	-.2373	.0133
	3	-.1440*	.04186	.019	-.2693	-.0187
	5	.0160	.04186	.995	-.1093	.1413
5	1	-.0940	.04186	.204	-.2193	.0313
	2	-.1280*	.04186	.044	-.2533	-.0027
	3	-.1600*	.04186	.008	-.2853	-.0347
	4	-.0160	.04186	.995	-.1413	.1093

*. The mean difference is significant at the .05 level.



Test of Homogeneity of Variances

CALCIO

Levene Statistic	df1	df2	Sig.
.028	4	20	.998

ANÁLISIS, los criterios de interpretación son los mismos independientemente del software que se esté utilizando. Aunque en el caso del SPSS no se presenta alguna herramienta tipo el StatAdvisor del Statgraphics que apoye la interpretación.

La tabla del análisis de varianza permite rechazar Ho (Sig = 0.004, menor que 0.05), es decir, existe evidencia de que al menos un par de medias es diferente, surgiendo la pregunta: ¿cuál o cuáles son los pares de medias diferentes? La comparación de medias de Tukey es la mejor opción para responder a esta interrogante.

La matriz de medias de Tukey compara todos los posibles pares de medias, señalando los pares que son diferentes con un asterisco.

Esto se puede analizar mejor en un gráfico boxplot. Donde como ya se mencionó, la diferencia se presenta entre las medias cuyas cajas no se interceptan, aunque esta conclusión se debe reforzar con los valores de la prueba de Tukey.

Para darle confiabilidad a las conclusiones se requiere verificar el cumplimiento de supuestos, como la homogeneidad de varianzas y la normalidad de los residuales.

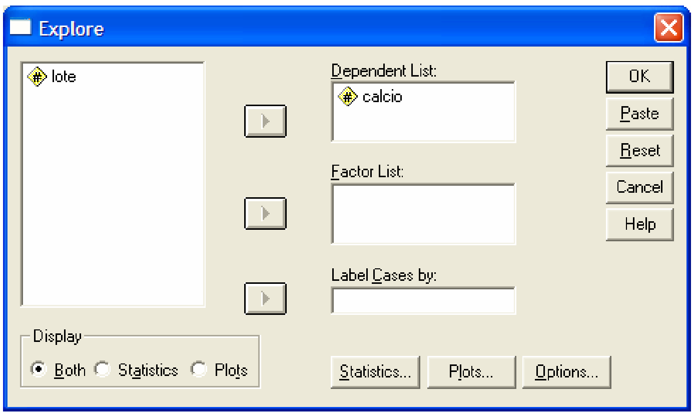
Analizando los valores de la prueba de Levene (sig. = 0.998, muchísimo mayor que 0.05) se observa que no se puede rechazar la hipótesis nula de que toda las varianzas son estadísticamente iguales, por lo tanto se cumple con la homogeneidad de varianzas.

Otro supuesto a verificar es la normalidad de los datos, el cual se puede checar con un gráfico de probabilidades normales.

Aunque se observa cierta desviación de la normalidad, ya que debería verse una tendencia lineal. La mejor forma de verificar este supuesto es mediante una prueba numérica, como la Kolmogorov-Smirnov o Shapiro-Wilks, cuya Ho: es que los datos siguen una distribución normal, contra una Ha: de que los datos no siguen una distribución normal.

Esto se logra con la secuencia: ANALYZE -> DESCRIPTIVE STATISTICS -> EXPLORE, asegurándose de seleccionar la prueba de normalidad en el diálogo PLOT.

Observe que no se define un factor, sólo se trabaja sobre la variable dependiente.



Resultados de Normalidad

Descriptives

				Statistic	Std. Error
CALCIO	Mean			23.4436	.01754
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound		23.4074	
		Upper Bound		23.4798	
	5% Trimmed Mean			23.4422	
	Median			23.4600	
	Variance			.008	
	Std. Deviation			.08770	
	Minimum			23.28	
	Maximum			23.64	
	Range			.36	
	Interquartile Range			.1100	
	Skewness			.137	.464
	Kurtosis			.034	.902

Tests of Normality

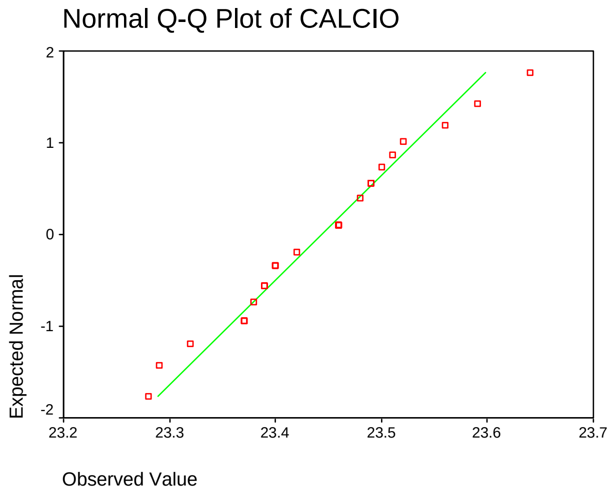
	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
CALCIO	.134	25	.200*	.978	25	.847

*. This is a lower bound of the true significance.

a. Lilliefors Significance Correction

Calcio

```
CALCIO Stem-and-Leaf Plot

 Frequency     Stem &  Leaf
     2.00       232 .  89
     1.00       233 .  2
     5.00       233 .  77899
     3.00       234 .  002
     8.00       234 .  66666899
     3.00       235 .  012
     2.00       235 .  69
     1.00 Extremes     (>=23.64)

 Stem width:        .10
 Each leaf:        1 case(s)
```



El valor de P, en este caso Sig. (de significancia), indica que no se puede rechazar la Ho y por lo tanto se tiene evidencia de que los datos se comportan como una distribución normal. Lo cual se complementa con el gráfico Q-Q, donde se aprecia poca desviación de los datos con respecto a la línea recta de referencia.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 2

En los siguientes ejercicios, seleccionar los que correspondan a diseños completamente al azar (todo homogéneo) y resolver utilizando algún software de análisis estadístico.

a) Plantear el par de hipótesis estadísticas y describirlas en términos coloquiales

b) Indicar el modelo estadístico a utilizar

c) En los resultados, remarcar los elementos de interpretación

d) Obtener las conclusiones estadísticas con relación al contexto del problema

1. Se somete a estudio tres marcas de baterías. Se sospecha que las vidas (en semanas) de las tres marcas son diferentes. Se prueban cinco baterías de cada marca con los siguientes resultados.

Semanas de vida		
Marca 1	Marca 2	Marca 3
100	76	108
96	80	100
92	75	96
96	84	98
92	82	100

2. Se pide a cuatro químicos que determinen el porcentaje de alcohol metílico en cierto compuesto químico. Cada químico hace tres determinaciones, obteniendo los siguientes resultados.

Químico	Porcentaje de alcohol metílico		
1	84.99	84.04	84.38
2	85.15	85.13	84.88
3	84.72	84.48	85.16
4	84.20	84.10	84.55

3. Para probar 4 dietas diferentes sobre el incremento en peso de cerdos se tienen los siguientes datos.

Peso de los cerdos (Kgs)			
Dieta 1	Dieta 2	Dieta 3	Dieta 4
60.8	68.7	102.6	87.9
57.0	67.7	102.1	84.2
65.0	74.7	100.2	83.1
58.6	66.3	96.5	85.7
61.7	69.8		90.3

Capitulo 3

DISEÑOS DE BLOQUES AL AZAR COMPLETO (DBAC) Y CUADRADOS LATINOS (DCL)

Presentación

Se hace una revisión del concepto de bloques y acercándose cada vez más al manejo de software estadístico se dan los criterios para realizar un diseño de bloques, así como para su interpretación. Para la exposición se utilizan fragmentos de salida de computadora y al final del capítulo se muestra la secuencia completa de manejo en el "paquete" estadístico.

3.1. Motivación al diseño de bloques

¿Por qué utilizar bloques en un diseño de experimentos?, simple y sencillamente porque hay fuentes de variación bien detectadas sobre las cuales no se tiene manera de influir para modificarlas, pero si se puede cuantificar su efecto en un experimento. Inclusive se puede determinar un gradiente de variación. De tal manera que se puede estudiar cada nivel del experimento, tanto en las condiciones más favorables, como en las desfavorables, por lo que las conclusiones se realizan sobre la respuesta promedio.

(-) (+)

Figura 3.1. Gradiente de variación en la variable de influencia no controlada (ruido)

Tratamientos aleatorizados dentro de un Diseño de Bloques al Azar, para 5 tratamientos con 4 niveles de ruido (bloques).

BLOQUE 1	BLOQUE2	BLOQUE3	BLOQUE4
Nivel B del factor	Nivel E del factor	Nivel D del factor	Nivel C del factor
Nivel E del factor	A	B	D
Nivel C del factor	D	A	B
Nivel A del factor	B	C	E
Nivel D del factor	C	E	A

(-) (+)

Figura 3.2. Experimento con todos los niveles tanto en las mejores como peores condiciones, cada columna es un nivel de ruido, que a la vez constituye un bloque.

En un experimento de este tipo se tiene variación por los cambios de nivel en el factor de estudio (tratamientos) y variación por efecto del gradiente (bloque).

Entonces, se tiene la posibilidad de cuantificar el efecto de bloques, que de no hacerlo se acumula en el efecto del error incrementando el valor numérico de las Suma de Cuadrados del Error y del Cuadrado Medio del Error, lo que provoca que la F calculada en el ANVA se haga más pequeña y no se pueda rechazar Ho, en los casos en que se debe rechazar.

Esto significa que al analizar un Diseño de Bloques como un Completamente al azar, entonces la F calculada.

$$F_o \text{ realmente } no\ es\ \frac{CM_{TRAT}}{CM_{ERROR}} \text{ sino más bien } \frac{CM_{TRAT}}{CM_{BLOQUES} + CM_{ERROR}},$$

En otras palabras, el efecto de bloques va a parar al Cuadrado Medio del Error, lo que puede conducir a conclusiones erróneas.

3.2. Modelo de un DBAC

El modelo que mejor describe a un DBAC es:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}\,,$$ con i = 1, 2,…, k tratamientos y

j = 1, 2,…, b bloques.

Donde, τ_i representa el efecto del i-ésimo tratamiento y β_j el efecto del j-ésimo bloque, con $\varepsilon_{ij} \sim NI(0,\sigma^2)$.

Es importante aclarar que el **experimento** sigue siendo **de un solo factor** y que la variable de **bloque es una variable de "ruido"**. Una variable que se sabe influye en el experimento, pero que no hay manera de controlarla o tomar decisión sobre ella; es más se sabe que presenta un gradiente (que se puede interpretar como que "va" de las peores a las mejores condiciones). De aquí que cada bloque debe contener todos los niveles del factor, de manera que cada bloque contenga todas las combinaciones del tratamiento bajo experimentación.

El modelo del diseño contiene una variable que representa el efecto de bloques, el cual también debe tener su propia varianza o cuadrado medio.

$\varepsilon_{ij} \sim NI(0,\sigma^2)$ representa los supuestos del modelo, que se lee "Los residuales se distribuyen Normal e Independientemente con media 0 y varianza semejante entre todos los tratamientos e igual a σ^2.

Este modelo es específico para tratamientos y bloque como efectos fijos. Además, los efectos de tratamientos y bloques se definen como desviaciones de la media, de tal forma que: $\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0$ y $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$.

El interés continúa sobre el par de hipótesis

Ho: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ (No existe efecto de tratamiento o todas las medias debidas a tratamiento son iguales)

Ha: $\mu_i \neq \mu_j$; para $i \neq j$ con i , j = 1, 2, … , k, (al menos un par de medias es diferente o no todas las medias debidas a tratamiento son iguales)

Con una tabla típica de ANVA para un DBAC

	Bloques							Sumas para tratamientos	Promedios para trat.
	Tratamiento	1	2	.	.	.	b	$\sum_{j=1}^{b} Y_{ij}$	$\frac{\sum_{j=1}^{b} Y_{ij}}{k}$
	1	Y_{11}	Y_{12}	.	.	.	Y_{1b}	$Y_{1.}$	$\overline{Y}_{1.}$
	2	Y_{21}	Y_{22}	.	.	.	Y_{2b}	$Y_{2.}$	$\overline{Y}_{2.}$
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	k	Y_{k1}	Y_{k2}	.	.	.	Y_{kb}	$Y_{k.}$	$\overline{Y}_{k.}$
Sumas para bloques	$\sum_{i=1}^{k} Y_{ij}$	$Y_{.1}$	$Y_{.2}$	.	.	.	$Y_{.b}$	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij} = Y..$	
									$\frac{Y..}{kb} = \overline{Y}..$

Se puede demostrar que:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}\left(Y_{ij}-\overline{Y}..\right)^2 = b\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}..\right)^2 + k\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}..\right)^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{.j}+\overline{Y}..\right)^2$$

SC_{TOTAL} = SC_{TRAT} + $SC_{BLOQUES}$ + SC_{ERROR}

Demostración que se deja para una noche de insomnio (ya van varias . . .)

Por analogía con el DCA, se tiene que:

.) SC_{TOTAL} = $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}\left(Y_{ij}-\overline{Y}..\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N}$, donde N = k*b

..) $SC_{TRATAMIENTOS}$ = $b\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}..\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{Y_{i.}^2}{b} - \frac{Y_{..}^2}{N}$

..) $SC_{BLOQUES}$ = $a\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{Y}_{.j}-\overline{Y}..\right)^2 = \sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{.j}^2}{k} - \frac{Y_{..}^2}{N}$

…) SC_{ERROR} se puede obtener por la diferencia: SC_{ERROR} = SC_{Total} – ($SC_{Tratamientos}$ + $SC_{Bloques}$)

En resumen, los cálculos para un diseño de efectos fijos y bloques al azar completo se presentan en la siguiente tabla.

Modelo $Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

Hipótesis Ho: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_k$ vs Ha: $\mu_i \neq \mu_j$; para $i \neq j$

Fuente de Variación *(FV)*	Suma de Cuadrados *(SC)*	Grados de Libertad *(gl)*	Cuadrados Medios *(CM)*	F_0
Tratamientos	$\sum_{i=1}^{K}\frac{Y_{i.}^2}{b} - \frac{Y_{..}^2}{N}$	$k-1$	$\frac{SC_{TRAT}}{k-1}$	$\frac{CM_{TRAT}}{CM_{ERROR}}$
Bloques	$\sum_{j=1}^{b}\frac{Y_{.j}^2}{k} - \frac{Y_{..}^2}{N}$	$b-1$	$\frac{SC_{BLOQUES}}{b-1}$	
Error	SC_{TOT}-(SC_{TRAT}+SC_{BLO})	gl_{TOT} – (gl_{TRAT}+gl_{BLO}) (k-1)(*b*-1)		
Total	$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{b}Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N}$	N – 1 *kb*-1		

En este cuadro se aprecia una fila más que en el ANVA del DCA, nótese que aparece el término $Y_{.j}$ que representa la suma del efecto de bloque (pasando por todos los niveles del factor). También es importante apreciar que hay una sola F_0 para el análisis, ya que no es de interés ver si el efecto de bloque es significativo.

Si se rechaza Ho, se debe aplicar una prueba de comparación múltiple de medias, como la de Tukey o cualquier otra que se conozca o se fundamente su uso.

Ejemplo 3.1. Tres diferentes soluciones para lavar están siendo comparadas con el objeto de estudiar su efectividad en el retraso del crecimiento de bacterias en envases de leche de 1 galón. El análisis se realiza en un laboratorio y sólo pueden efectuarse tres pruebas en un mismo día. Se hicieron conteos de colonias durante cuatro días. Analizar los datos y obtener conclusiones acerca de las soluciones.

Solución	Días			
	1	2	3	4
I	13	22	18	39
II	16	24	17	44
III	5	4	1	22

Este problema presenta 3 variables, claramente la variable *Y* o la de respuesta es el conteo de colonias de bacterias. Las otras dos son: soluciones para lavar y tres pruebas por día; parece obvio que el factor de estudio está en: ¿cuál de las soluciones es la mejor para lavar?, ésta es la variable *X*, entonces qué hacemos con la variable día. Esta es una variable de ruido, *Z*, ya que se espera variación de día a día, es más se supone que hay unos días mejores que otros, ésta es la variable de bloqueo.

La variable día no puede ser una *X*, ya que no interesa saber qué día es el mejor, inclusive sólo se pueden hacer tres pruebas por día. Es importante que se identifiquen el tipo de diseño y las variables involucradas, antes de realizar cualquier cálculo numérico, es más, antes de realizar el experimento.

A continuación se presentan los resultados parciales de este diseño, utilizando Statgraphics.

```
Analysis of Variance for Colonias - Type III Sums of Squares
--------------------------------------------------------------------------------
Source                Sum of Squares     Df     Mean Square     F-Ratio     P-Value
--------------------------------------------------------------------------------
MAIN EFFECTS
A:Solución                  703.5        2         351.75       40.72      0.0003
B:BLOCK                   1106.92        3        368.972       42.71      0.0002
RESIDUAL                    51.8333      6          8.63889
--------------------------------------------------------------------------------
TOTAL (CORRECTED)          1862.25      11
--------------------------------------------------------------------------------
All F-ratios are based on the residual mean square error.
```

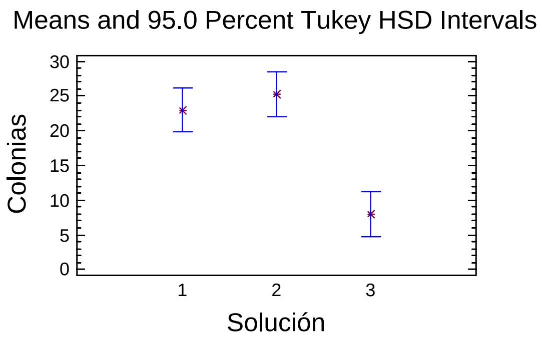
En esta tabla es importante considerar 2 puntos

1. Sólo es de interés práctico analizar el valor de F para el tratamiento. No tiene sentido probar la influencia de bloque, ya que aunque el efecto sea no significativo se debe cuantificar el efecto de esta variable de ruido.

2. Se rechaza Ho, ya que P-value (0.0003) es menor que 0.05 para la variable solución, entonces se debe realizar una Comparación Múltiple de Medias, con la ventaja de que el Cuadrado Medio del Error ya considera la corrección por el efecto de la variable de Bloqueo.

```
Multiple Range Tests for Colonias by Solución
--------------------------------------------------------------------------------
Method: 95.0 percent Tukey HSD
Solución       Count      LS Mean        LS Sigma      Homogeneous Groups
--------------------------------------------------------------------------------
3              4          8.0            1.4696        X
1              4          23.0           1.4696         X
2              4          25.25          1.4696          X
--------------------------------------------------------------------------------
Contrast                                Difference           +/-  Limits
--------------------------------------------------------------------------------
1 - 2                                  *-2.25                0.00000419388
1 - 3                                  *15.0                 0.00000419388
2 - 3                                  *17.25                0.00000419388
--------------------------------------------------------------------------------
* denotes a statistically significant difference.
```

La prueba de Comparaciones múltiple de medias muestra que las tres soluciones son todas diferentes, además la solución 3 es la que presenta una media menor.



Se corrobora que la solución 3 es diferente de las otras 2 y que presenta el menor número de colonias. En otras palabras, la solución 3 es la mejor.

Antes de confiar en las conclusiones se debe verificar el cumplimiento de supuestos

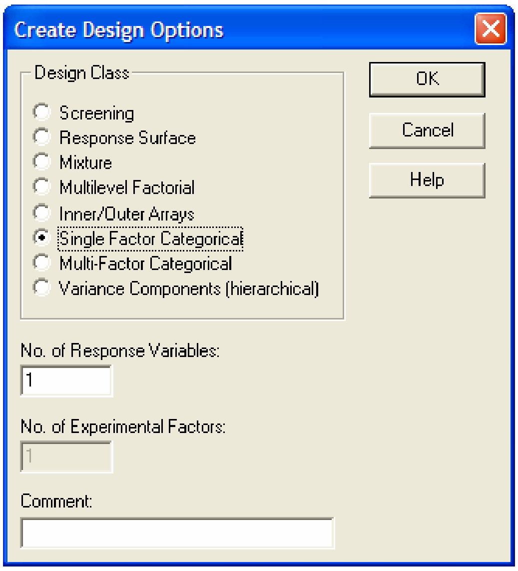
A continuación se muestra como realizar este análisis con Statgraphics.

3.3. Statgraphics. Diseño de bloques al azar completo y balanceado

Ejemplo 3.2. Retomando el ejemplo 1 de este capítulo: Tres diferentes soluciones para lavar están siendo comparadas con el objeto de estudiar su efectividad en el retraso del crecimiento de bacterias en envases de leche de 1 galón. El análisis se realiza en un laboratorio y sólo pueden efectuarse tres pruebas en un mismo día. Se hicieron conteos de colonias durante cuatro días. Analizar los datos y obtener conclusiones acerca de las soluciones.

	Días			
Solución	1	2	3	4
I	13	22	18	39
II	16	24	17	44
III	5	4	1	22

Este es un diseño de Bloques al azar, donde la variable de bloqueo es días y la variable a comparar es solución (el factor). Aquí ya no se puede realizar el análisis con el ANOVA ONE-WAY.



SOLUCIÓN

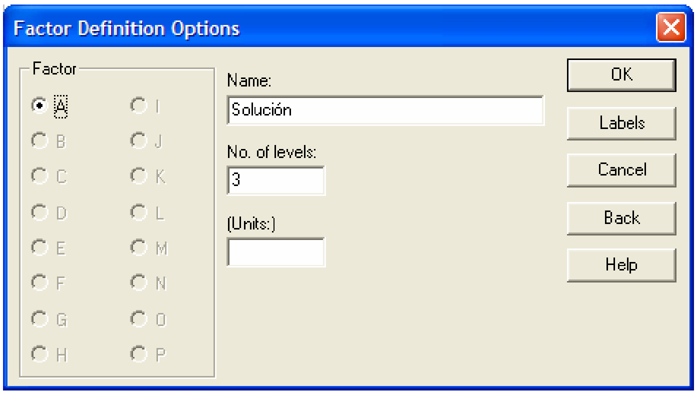
STATGRAPHICS cuenta con un módulo de Diseños Experimentales, al cual se accede al seleccionar del menú las opciones:

SPECIAL -> EXPERIMENTAL DESIGN

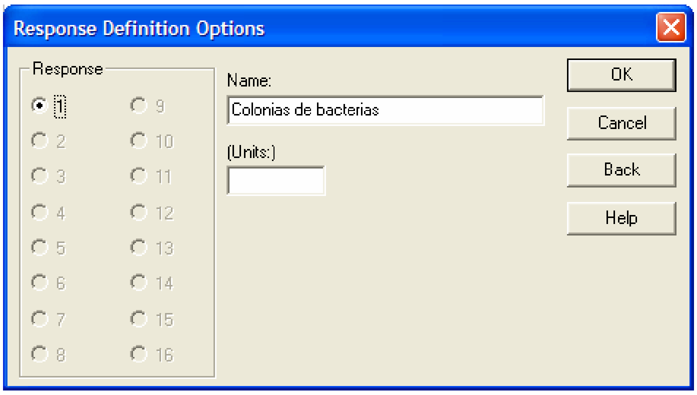
Donde en esencia se hacen tres actividades: CREATE (definir el diseño), OPEN (ingresar datos), ANALYZE (realizar el análisis).

CREATE, está opción despliega una caja de diálogo, donde se puede seleccionar el tipo de diseño experimental a realizar.

Para el ejemplo, en esta caja de diálogo es importante asegurarse de tener un 1 en No. Of Response Variables (Número de variables de respuesta) y en No. Of Experimental Factors (Número de factores experimentales).



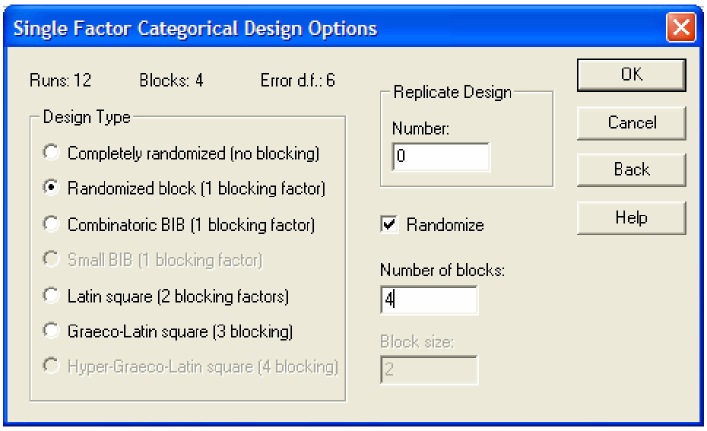
En el diálogo que aparece se define el factor en estudio, con su nombre, número de niveles y hasta las unidades en las que se mide.



El siguiente diálogo permite definir las características de la respuesta: Nombre y unidades de medición.

Si se tienen 2 o más respuesta, sólo basta con seleccionar el número de variable, para dar el nombre y definir las unidades.

A continuación aparece un diálogo donde se define el tipo de diseño a realizar.



Es importante notar la selección del Diseño de Bloques Aleatorizados (Randomized block), el número de réplicas o repeticiones es cero, ya que no se repite el experimento y el número de bloques es 4.

La opción Randomize puede activarse o no. En la etapa de planeación experimental ayuda a establecer una secuencia en la que debe realizarse el experimento. Si ya se tienen datos, es más conveniente no activarla, para facilitar la captura de datos.

Es importante notar que el número de "corridas" sea igual a 12.

Al dar OK, aparece una ventana de resultados que resume el tipo de diseño creado.

Resultados de la opción CREATE

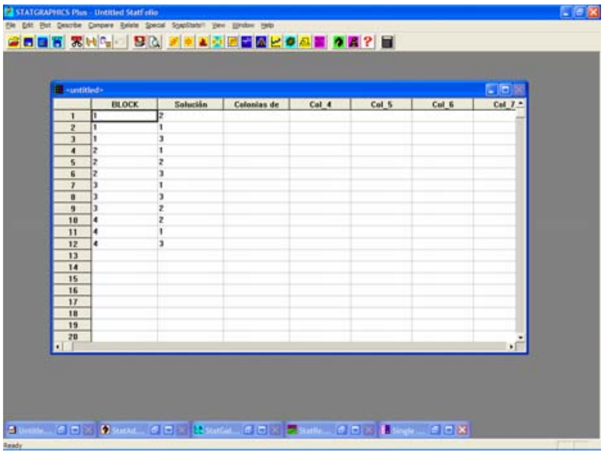
Single Factor Categorical Design Attributes

```
Design Summary
--------------
Design class: Single Factor Categorical
File name: <Untitled>

Base Design
-----------
Number of experimental factors: 1  Number of blocks: 4
Number of responses: 1
Number of runs: 12                 Error degrees of freedom: 6
Randomized: Yes
```

```
Factors                Levels      Units
-----------------------------------------------
Solución               3

Responses              Units
-----------------------------------
Colonias de bacteria

The StatAdvisor
---------------
   You have created a Randomized block design consisting of 12 runs. The design is to be run in 4
blocks.  The order of the experiments has been fully randomized.  This will provide protection against
the effects of lurking variables.
```

El resultado más importante es una tabla de datos con los valores definidos para el factor y el número de bloques. Así como para capturar los datos resultantes del experimento a analizar.

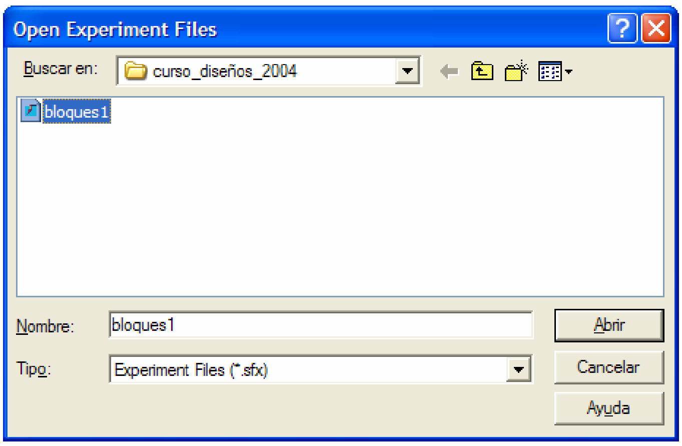
Esta tabla se puede almacenar en disco, con la secuencia:



SAVE AS -> SAVE DESIGN FILE AS

El archivo se almacena con extensión .SFX y sólo se puede abrir en el módulo de diseños de experimentos de Statgraphics.

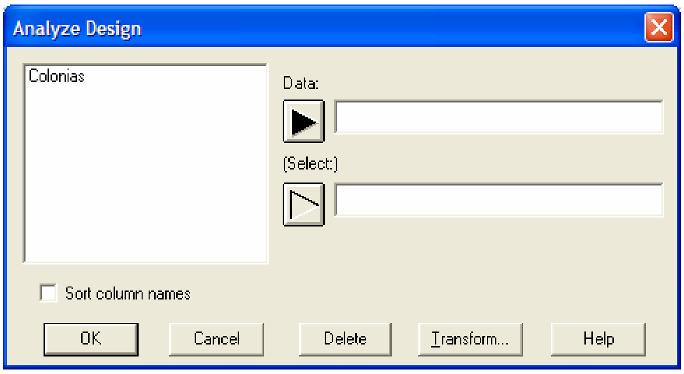
OPEN. Un diseño se abre para agregar datos o para su análisis con la secuencia.



SPECIAL -> EXPERIMENTAL DESIGN -> OPEN DESIGN

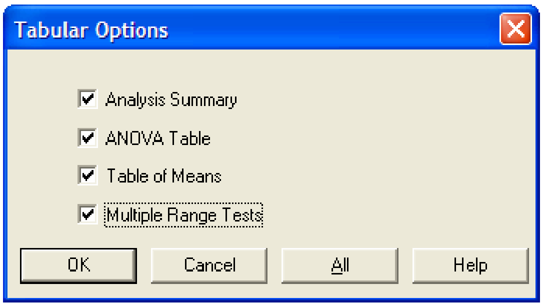
Al abrir el diseño aparece la tabla donde se definen los niveles del factor y los bloques. El primer paso y más importante consiste "en teclear" los valores de la variable de respuesta, cuidando que coincidan los resultados con el nivel del factor y el bloque correspondiente.

Después de capturar los valores de la variable de respuesta, se pasa a realizar el análisis, siguiendo la secuencia.



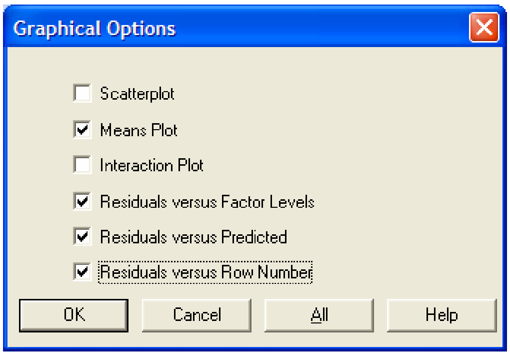
SPECIAL -> EXPERIMENTAL DESIGN -> ANALYZE DESIGN

Para iniciar el análisis se debe colocar la variable de respuesta en la caja DATA y presionar el botón OK.



Al aparecer los resultados se pueden seleccionar las opciones Tabulares y Gráficas.

Seleccionar todas las opciones de la caja de diálogo Tabular Options.



En las opciones gráficas seleccionar todas las opciones de residuales y el gráfico de medias.

RESULTADOS

Multifactor ANOVA - Colonias

```
Analysis Summary
Dependent variable: Colonias
Factors:
        Solución
        BLOCK

Number of complete cases: 12

The StatAdvisor
---------------
   This procedure performs a multifactor analysis of variance for Colonias.  It constructs various
tests and graphs to determine which factors have a statistically significant effect on Colonias.  It
also tests for significant interactions amongst the factors, given sufficient data.  The F-tests in the
ANOVA table will allow you to identify the significant factors.  For each significant factor, the
Multiple Range Tests will tell you which means are significantly different from which others.  The
Means Plot and Interaction Plot will help you interpret the significant effects.  The Residual Plots
will help you judge whether the assumptions underlying the analysis of variance are violated by the
data.
```

Analysis of Variance for Colonias - Type III Sums of Squares

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
MAIN EFFECTS					
A:Solución	703.5	2	351.75	40.72	0.0003
B:BLOCK	1106.92	3	368.972	42.71	0.0002
RESIDUAL	51.8333	6	8.63889		
TOTAL (CORRECTED)	1862.25	11			

All F-ratios are based on the residual mean square error.

The StatAdvisor

The ANOVA table decomposes the variability of Colonias into contributions due to various factors. Since Type III sums of squares (the default) have been chosen, the contribution of each factor is measured having removed the effects of all other factors. **The P-values test the statistical significance of each of the factors. Since 2 P-values are less than 0.05, these factors have a statistically significant effect on Colonias at the 95.0% confidence level.**

Como ya se había visto, se tiene evidencia estadística de que al menos un par de soluciones son diferentes. También se tiene evidencia del efecto de bloque, por lo que fue un acierto hacer bloques, aunque se debe recalcar que la presencia de una F en el bloque no implica que se deba de interpretar.

Table of Least Squares Means for Colonias with 95.0 Percent Confidence Intervals

Level	Count	Mean	Stnd. Error	Lower Limit	Upper Limit
GRAND MEAN	12	18.75			
Solución					
1	4	23.0	1.4696	19.404	26.596
2	4	25.25	1.4696	21.654	28.846
3	4	8.0	1.4696	4.40401	11.596
BLOCK					
1	3	11.3333	1.69695	7.18104	15.4856
2	3	16.6667	1.69695	12.5144	20.819
3	3	12.0	1.69695	7.84771	16.1523
4	3	35.0	1.69695	30.8477	39.1523

The StatAdvisor

This table shows the mean Colonias for each level of the factors. It also shows the standard error of each mean, which is a measure of its sampling variability. The rightmost two columns show 95.0% confidence intervals for each of the means. You can display these means and intervals by selecting Means Plot from the list of Graphical Options.

En la tabla o cuadro anterior se tiene una visión general de las medias, tanto para los tratamientos o niveles del factor, como para los bloques.

Multiple Range Tests for Colonias by Solución

Method: 95.0 percent Tukey HSD

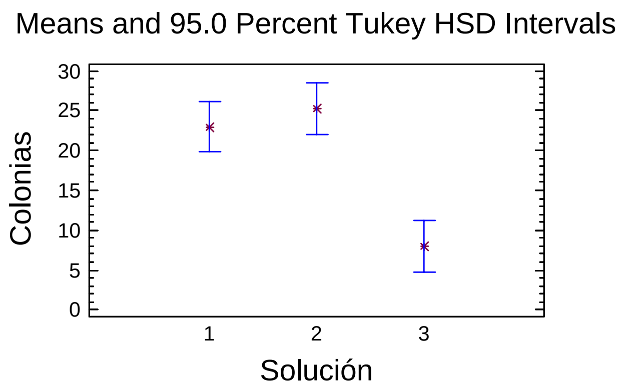
Solución	Count	LS Mean	LS Sigma	Homogeneous Groups
3	4	8.0	1.4696	X
1	4	23.0	1.4696	X
2	4	25.25	1.4696	X

Contrast	Difference	+/- Limits
1 - 2	*-2.25	0.00000419388
1 - 3	*15.0	0.00000419388
2 - 3	*17.25	0.00000419388

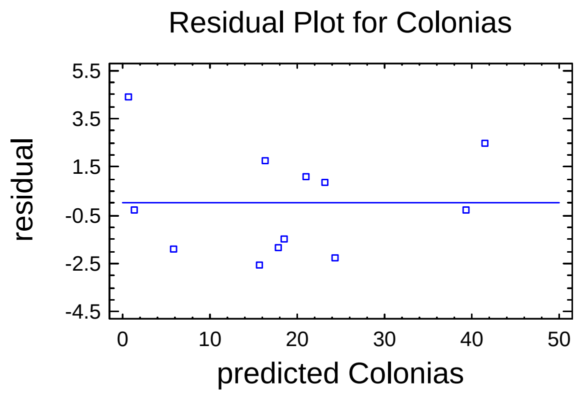
* denotes a statistically significant difference.

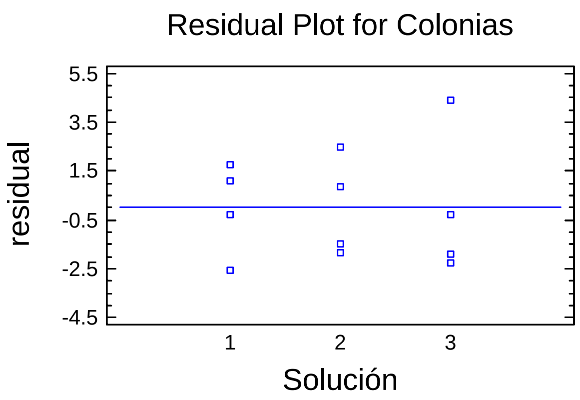
```
The StatAdvisor
---------------
   This table applies a multiple comparison procedure to determine which means are significantly
different from which others.  The bottom half of the output shows the estimated difference between each
pair of means.  An asterisk has been placed next to 3 pairs, indicating that these pairs show
statistically significant differences at the 95.0% confidence level.  At the top of the page, 3
homogenous groups are identified using columns of X's.  Within each column, the levels containing X's
form a group of means within which there are no statistically significant differences.  The method
currently being used to discriminate among the means is Tukey's honestly significant difference (HSD)
procedure.  With this method, there is a 5.0% risk of calling one or more pairs significantly different
when their actual difference equals 0.
```

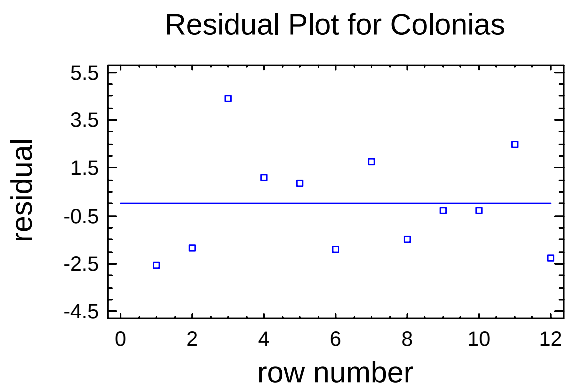
La prueba de Comparaciones múltiples de medias, muestra que la solución 3 es diferente de las soluciones 1 y 2, además de ser la que presenta una media menor.



Se corrobora que la solución 3 es diferente de las otras 2 y que presenta el menor número de colonias. Entonces, se tiene evidencia estadística para afirmar que la solución 3 es la mejor para lavar, esto a la luz de los datos.



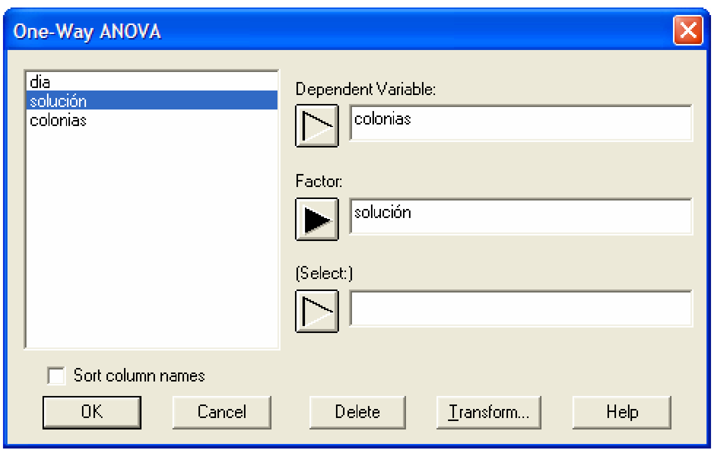




No se hace patente algún patrón claro, que muestre desviaciones de la normalidad y de la homogeneidad de la varianza. Aunque se aprecia un valor residual relativamente alto al extremo superior izquierdo de la gráfica de residuales contra valores predichos o ajustados.

3.4. Statgraphics. Analizando un DBAC como un DCA (lo que implica un error)

Ejemplo 3.3. Analizar los datos del ejemplo 3.2 como un diseño completamente al azar. Siguiendo la misma secuencia del ejemplo 3.1.



Nótese que en la definición de variables se tiene como variable de respuesta COLONIAS, como factor SOLUCIÓN y que no se utiliza la variable DIA.

Al seleccionar las opciones tabulares y gráficas se tienen los siguientes resultados.

One-Way ANOVA - colonias by solución

Analysis Summary
Dependent variable: colonias
Factor: solución

Number of observations: 12
Number of levels: 3

The StatAdvisor

This procedure performs a one-way analysis of variance for colonias. It constructs various tests and graphs to compare the mean values of colonias for the 3 different levels of solución. The F-test in the ANOVA table will test whether there are any significant differences amongst the means. If there are, the Multiple Range Tests will tell you which means are significantly different from which others. If you are worried about the presence of outliers, choose the Kruskal-Wallis Test which compares medians instead of means. The various plots will help you judge the practical significance of the results, as well as allow you to look for possible violations of the assumptions underlying the analysis of variance.

Summary Statistics for colonias

solución	Count	Average	Median	Mode	Variance
1	4	23.0	20.0		127.333
2	4	25.25	20.5		168.917
3	4	8.0	4.5		90.0
Total	12	18.75	17.5	22.0	169.295

solución	Standard deviation	Minimum	Maximum	Range	Skewness
1	11.2842	13.0	39.0	26.0	1.37801
2	12.9968	16.0	44.0	28.0	1.59027
3	9.48683	1.0	22.0	21.0	1.80367
Total	13.0114	1.0	44.0	43.0	0.643714

solución	Kurtosis
1	2.15788
2	2.3358
3	3.4358
Total	0.140265

The StatAdvisor

This table shows various statistics for colonias for each of the 3 levels of solución. The one-way analysis of variance is primarily intended to compare the means of the different levels, listed here under the Average column. Select Means Plot from the list of Graphical Options to display the means graphically.

ANOVA Table for colonias by solución
Analysis of Variance

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Between groups	703.5	2	351.75	2.73	0.1182
Within groups	1158.75	9	128.75		
Total (Corr.)	1862.25	11			

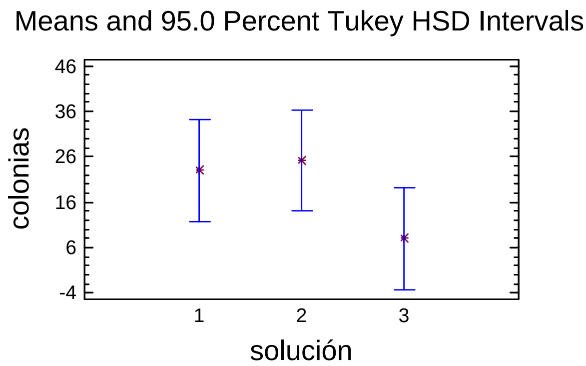
The StatAdvisor

The ANOVA table decomposes the variance of colonias into two components: a between-group component and a within-group component. The F-ratio, which in this case equals 2.73204, is a ratio of the between-group estimate to the within-group estimate. Since the P-value of the F-test is greater than or equal to 0.05, there is not a statistically significant difference between the mean colonias from one level of solución to another at the 95.0% confidence level.

```
Multiple Range Tests for colonias by solución
--------------------------------------------------------------------------------
Method: 95.0 percent Tukey HSD
solución       Count     Mean              Homogeneous Groups
--------------------------------------------------------------------------------
3              4          8.0             X
1              4         23.0             X
2              4         25.25            X
--------------------------------------------------------------------------------
Contrast                                  Difference           +/-  Limits
--------------------------------------------------------------------------------
1 - 2                                     -2.25                22.3988
1 - 3                                     15.0                 22.3988
2 - 3                                     17.25                22.3988
--------------------------------------------------------------------------------
* denotes a statistically significant difference.
```

The StatAdvisor

This table applies a multiple comparison procedure to determine which means are significantly different from which others. The bottom half of the output shows the estimated difference between each pair of means. There are no statistically significant differences between any pair of means at the 95.0% confidence level. At the top of the page, one homogenous group is identified by a column of X's. Within each column, the levels containing X's form a group of means within which there are no statistically significant differences. The method currently being used to discriminate among the means is Tukey's honestly significant difference (HSD) procedure. With this method, there is a 5.0% risk of calling one or more pairs significantly different when their actual difference equals 0.

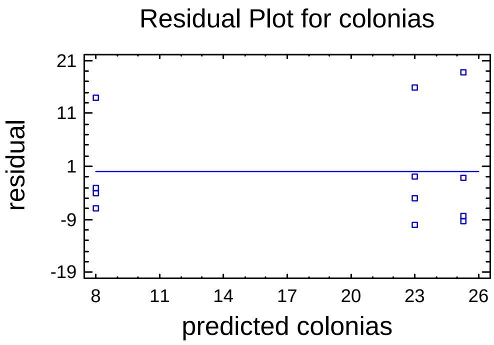


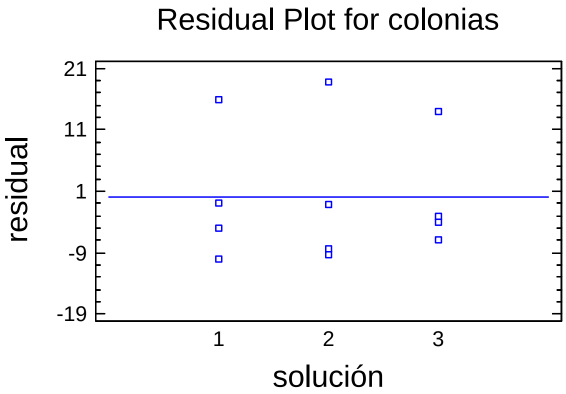
Variance Check

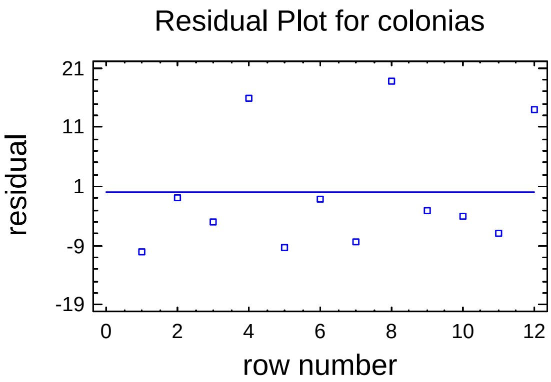
Cochran's C test: 0.437325   P-Value = 0.885063
Bartlett's test: 1.03307   P-Value = 0.880292
Hartley's test: 1.87685
Levene's test: 0.141914   P-Value = 0.8696

The StatAdvisor

The four statistics displayed in this table test the null hypothesis that the standard deviations of colonias within each of the 3 levels of solución is the same. Of particular interest are the three P-values. Since the smallest of the P-values is greater than or equal to 0.05, there is not a statistically significant difference amongst the standard deviations at the 95.0% confidence level.







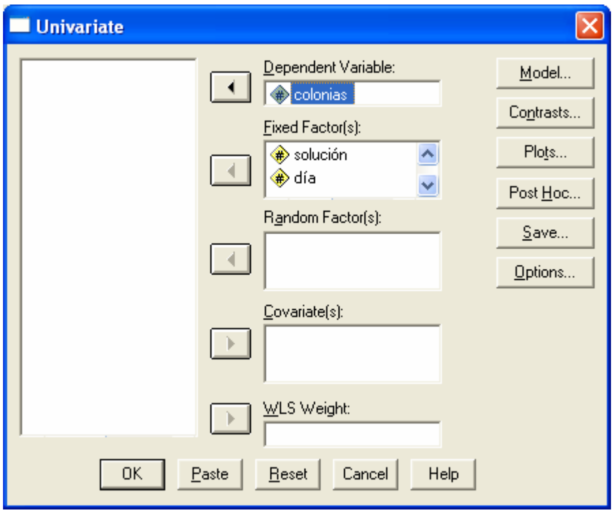
En la interpretación es importante notar que:

1. El ANOVA indica que las 3 soluciones son estadísticamente iguales
2. La prueba de Tukey y el gráfico de medias con intervalos de confianza corrobora esta semejanza entre las soluciones
3. Se verifica la homocedasticidad de los datos
4. Los gráficos de residuales muestran patrones que hacen dudar del cumplimiento de supuestos, ya que hay 9 valores por abajo del cero y sólo 3 por arriba del cero. Esto indica una variabilidad no aleatoria, por una causa no considerada en el experimento (el día).

3.5. SPSS. Diseño de bloques al azar completo y balanceado

Ejemplo 3.4. Considerando los datos del ejemplo 3.2, la secuencia de análisis es:

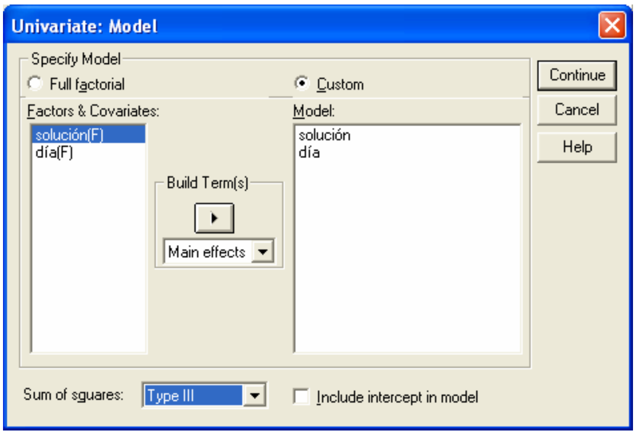
1. Capturar los datos en tres columnas, una para identificar la **solución**, otra para el **día** y una para la variable de respuesta **colonias**.



2. Seguir la secuencia

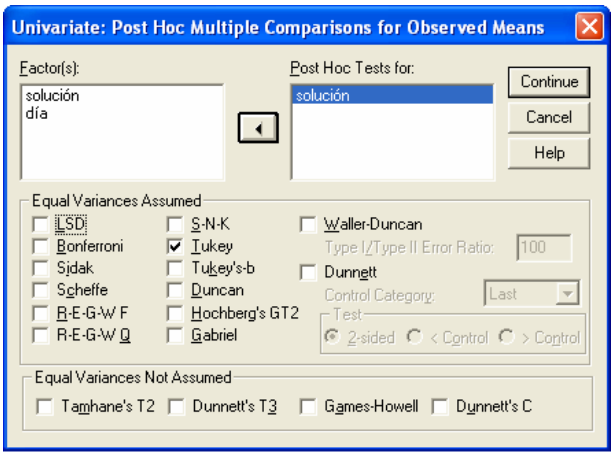
ANALYZE -> GENERAL LINEAR MODEL -> UNIVARIATE

3. Colocar en la caja de diálogo la variable dependiente y los factores fijos, en este caso, solución y día.

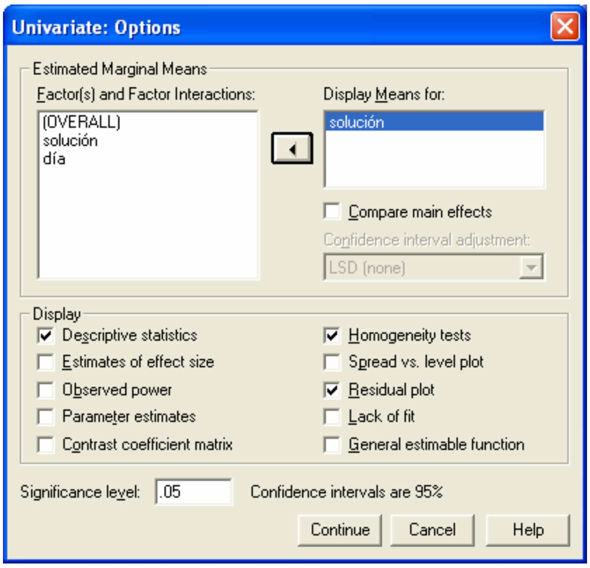


4. Abrir el diálogo **Model** y seleccionar en **specify model** la opción **custom**.

En la caja **model** ingresar las **variables día** y **solución**. Además asegurarse de que en **Build Term(s)** esté la opción **Main effects**, que **Sum squares** esté en **Type III** y que **no** esté activa la opción **Include intercept in model**



5. Abrir el diálogo Post Hoc, y ahí seleccionar la prueba de comparación de medias a realizar (Tukey). Recordar que la variable factor es solución.



6. Abrir el diálogo OPTIONS y seleccionar las opciones a trabajar.

7. Ahora si, listos para realizar el análisis.

Resultados

Los elementos de interpretación en la “salida” son los siguientes

Between-Subjects Factors

		N
SOLUCIÓN	1	4
	2	4
	3	4
DÍA	1	3
	2	3
	3	3
	4	3

Tabla de ANOVA, donde la única F de interés corresponde a la SOLUCIÓN

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: COLONIAS

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Model	6029.167[a]	6	1004.861	116.318	.000
SOLUCIÓN	703.500	2	351.750	40.717	.000
DÍA	1106.917	3	368.972	42.711	.000
Error	51.833	6	8.639		
Total	6081.000	12			

a. R Squared = .991 (Adjusted R Squared = .983)

Los valores de **Significación** indican que hay evidencia estadística de diferencias entre las soluciones, ahora hay que decir cuales son las que realmente son diferentes y cuál seria la mejor. Para esto hay que realizar una prueba de Tukey, tomando el valor del CME (Mean Square Error) de la tabla de ANVA.

Nota: Observe que hay un error en este paquete en los grados de libertad del total, que deben ser 11; sin emabrgo, esto no afecta ninguno de los cálculos ya que no se utiliza el Cuadrado medio del total, ni se usa para ningún cálculo posterior.

Multiple Comparisons

Dependent Variable: COLONIAS
Tukey HSD

(I) SOLUCIÓN	(J) SOLUCIÓN	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1	2	-2.2500	2.07833	.558	-8.6269	4.1269
	3	15.0000*	2.07833	.001	8.6231	21.3769
2	1	2.2500	2.07833	.558	-4.1269	8.6269
	3	17.2500*	2.07833	.000	10.8731	23.6269
3	1	-15.0000*	2.07833	.001	-21.3769	-8.6231
	2	-17.2500*	2.07833	.000	-23.6269	-10.8731

Based on observed means.
*. The mean difference is significant at the .05 level.

Homogeneous Subsets

COLONIAS

Tukey HSD[a,b]

SOLUCIÓN	N	Subset	
		1	2
3	4	8.0000	
1	4		23.0000
2	4		25.2500
Sig.		1.000	.558

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
Based on Type III Sum of Squares
The error term is Mean Square(Error) = 8.639.
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 4.000.
b. Alpha = .05.

La conclusión es que la media de la solución 3 es diferente a las otras dos y es la que menos colonias presenta en el conteo, lo que implica que es la mejor solución, a la luz de los datos. En este ejemplo falta la comprobación de supuestos.

3.6. Diseño cuadrado latino

En algunos experimentos se pueden tener dos variables de ruido bien detectadas y sobre las cuales no se tiene manera de influir para modificarlas, pero si se puede cuantificar su efecto en un experimento, inclusive se puede determinar un gradiente de variación en ambas variables de ruido. Por lo que se recomienda “bloquear” para cada una de estas variables, siendo el arreglo en Cuadrado Latino la mejor opción para diseñar un experimento de este tipo.

El arreglo de Cuadrado Latino se deriva de las letras del alfabeto latino: A, B, C,… dispuestas en un arreglo cuadrado, de tal forma que cada letra aparece una vez en cada columna y una vez en cada renglón. En la práctica los renglones y columnas se identifican con los dos criterios de “bloqueo” y las letras latinas como los tratamientos.

Ejemplo 3.5. Se tiene un experimento para estudiar los efectos de 5 diferentes formulaciones de una mezcla explosiva utilizada en la manufactura de dinamita sobre la fuerza explosiva. Cada formulación se mezcla de un lote de materia prima que es lo suficientemente grande para probar 5 formulaciones. Además, las formulaciones se preparan por diferentes operadores, entre los cuales hay marcadas diferencias en habilidad y experiencia.

En este enunciado se deben considerar los siguientes aspectos.

1. Hay dos fuentes de variación (bloqueo): a) Lotes de materia prima y b) Operadores
2. Dado que sólo se pueden probar 5 formulaciones por lote, el cuadrado es un 5*5
3. Se tienen 5 formulaciones: A, B, C, D y E

De donde se llega a la tabla típica de un Cuadrado Latino

Lotes de Materia Prima	Operadores				
	1	2	3	4	5
1	A=24	B=20	C=19	D=24	E=24
2	B=17	C=24	D=30	E=27	A=36
3	C=18	D=38	E=26	A=27	B=21
4	D=26	E=31	A=26	B=23	C=22
5	E=22	A=30	B=20	C=29	D=31

3.6.1. Cuadrado Latino estándar para generar diseños

Todos los cuadrados latinos de un tamaño específico se pueden generar a partir de un cuadrado estándar. Un cuadrado estándar tiene los símbolos de tratamiento: A, B, C . . . , en orden alfabético en el primer renglón y en la primera columna, del segundo renglón al último una vez que se completan las letras de los tratamientos se empieza con A, B, …, etc.

De manera que se tienen el siguiente número de cuadrados

Para un 3*3 sólo se tienen dos cuadrados

A	B	C
B	C	A
C	A	B

A	C	B
B	A	C
C	A	B

4*4 se tienen 4 cuadrados

A	B	C	D
B	C	D	A
C	D	A	B
D	A	B	C

A	B	D	C
B	D	C	A
D	C	A	B
C	A	B	D

A	C	B	D
C	B	D	A
B	D	A	C
D	A	C	B

A	C	D	B
C	D	B	A
D	B	A	C
B	A	C	D

A	D	B	C
D	B	C	A
B	C	A	D
C	A	D	B

A	D	C	B
D	C	B	A
C	B	A	D
B	A	D	C

5*5 tiene 24 cuadrados, este número se incrementa de manera drástica, ya que para un 6*6 hay 129 cuadrados. Esto sin considerar la aleatorización.

3.6.2. Aleatorizar el diseño

Si se dispone de todos los cuadrados latinos de tamaño a*a, la aleatorización se logra con los siguientes pasos:

1. Seleccionar al azar uno de los cuadrados estándar
2. Ordenar al azar todos los renglones, menos el primero
3. Ordenar al azar todas las columnas
4. Asignar al azar los tratamientos a las letras

Uno de los aspectos interesantes de este tipo de diseños es la generación de un diseño aleatorio. Para lo cual inclusive se manejan tablas especializadas, generadas por Fisher y Yates desde 1953.

3.6.3. Modelo de un diseño Cuadrado Latino

El **modelo** estadístico lineal para un experimento con a tratamientos en un diseño cuadrado latino $a * a$ es:

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_k + \varepsilon_{ijk}$$

$$i = 1, 2, \cdots, a, \quad j = 1, 2, \cdots, a \quad \text{y} \quad k = 1, 2, \cdots, a$$

Con Y_{ijk} corresponde a la observación del i-ésimo renglón, j-ésima columna y del k-ésimo tratamiento. Los efectos de renglón y columna son respectivamente α_i y β_j; τ_k corresponde al efecto de tratamiento y $\varepsilon_{ijk} \sim NI(0, \sigma^2)$.

Hipótesis Ho: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_k$ vs Ha: $\mu_i \neq \mu_j$; para i≠j

La tabla de ANVA para este diseño es

Fuente de Variación (FV)	Suma de Cuadrados (SC)	Grados de Libertad (gl)	Cuadrados Medios (CM)	F_o
Tratamientos	$SC_{Trat} = a\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{Y}_{k} - \overline{Y}_{\cdot\cdot}\right)^2$	$a-1$	$\frac{SC_{TRAT}}{a-1}$	$\frac{CM_{TRAT}}{CM_{Error}}$
Renglones	$SC_{Reng} = a\sum_{j=1}^{a}\left(\overline{Y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{\cdot\cdot}\right)^2$	$a-1$	$\frac{SC_{RENG}}{a-1}$	
Columnas	$SC_{Col} = a\sum_{j=1}^{a}\left(\overline{Y}_{\cdot j} - \overline{Y}_{\cdot\cdot}\right)^2$	$a-1$	$\frac{SC_{COL}}{a-1}$	
Error	$SC_{Error} = SC_{Total} - (SC_{Trat} + SC_{Reng} + SC_{Col})$	$(a-1)(a-2)$	$\frac{SC_{Error}}{(a-1)(a-2)}$	
Total	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{a}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{\cdot\cdot}\right)^2$	$N-1 = a^2 - 1$	—	

En este cuadro de ANVA se presentan las dos variables de bloqueo, más el factor de estudio. Sólo es de interés analizar la F correspondiente al factor de estudio.

3.6.4. Resultados de un diseño Cuadrado Latino, con Statgraphics

Se debe seguir la misma secuencia que se realizó para el diseño de Bloques, agregando una columna más de datos para la segunda variable de bloqueo y seleccionando la opción **Latin square**. Cuyo desarrollo se deja como un buen ejercicio para el lector.

Analysis of Variance for Fuerza explosiva - Type III Sums of Squares

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
MAIN EFFECTS					
A:formulación	330.0	4	82.5	7.73	0.0025
B:Lote	68.0	4	17.0	1.59	0.2391
C:operador	150.0	4	37.5	3.52	0.0404
RESIDUAL	128.0	12	10.6667		
TOTAL (CORRECTED)	676.0	24			

All F-ratios are based on the residual mean square error.

Se aprecia efecto de formulación (p-value = 0.0025 <0.05), por lo que al menos un par de formulaciones es diferente. También se aprecia el efecto de de la variable de bloqueo (operador) (p-value = 0.0404 < 0.05), que aunque no se interprete es conveniente darle una revisada.

Multiple Range Tests for Fuerza explosiva by formulación

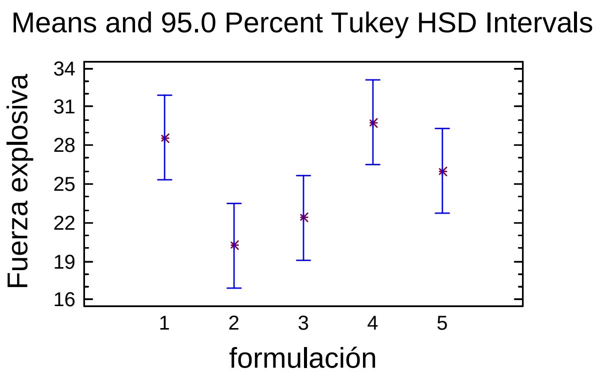
Method: 95.0 percent Tukey HSD

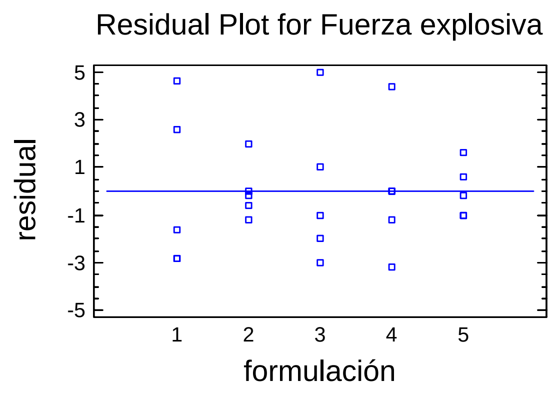
formulación	Count	LS Mean	LS Sigma	Homogeneous Groups
2	5	20.2	1.46059	X
3	5	22.4	1.46059	X
5	5	26.0	1.46059	X
1	5	28.6	1.46059	X
4	5	29.8	1.46059	X

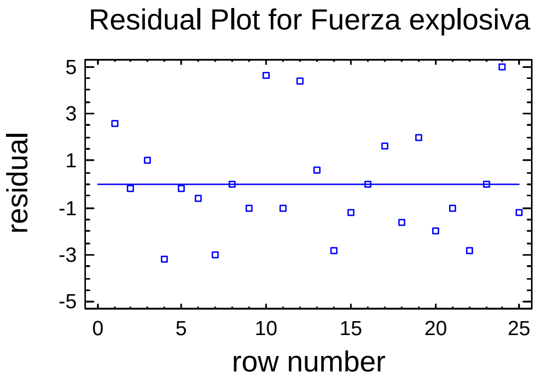
Contrast	Difference	+/- Limits
1 - 2	*8.4	0.00000541175
1 - 3	*6.2	0.00000541175
1 - 4	*-1.2	0.00000541175
1 - 5	*2.6	0.00000541175
2 - 3	*-2.2	0.00000541175
2 - 4	*-9.6	0.00000541175
2 - 5	*-5.8	0.00000541175
3 - 4	*-7.4	0.00000541175
3 - 5	*-3.6	0.00000541175
4 - 5	*3.8	0.00000541175

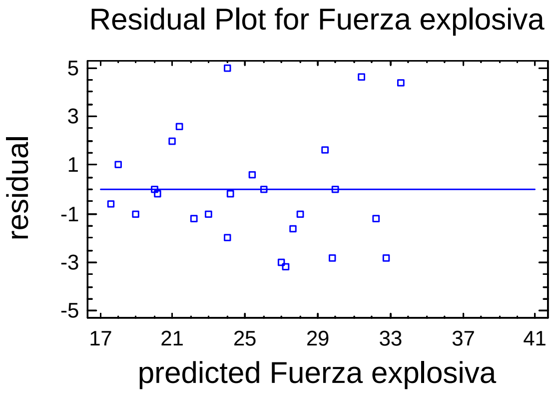
- denotes a statistically significant difference.

Los resultados de la prueba de Tukey muestran que todas las medias son diferentes entre si, con la formulación 2 como la de menor fuerza explosiva y la formulación 4 como la de mayor fuerza explosiva.









Los gráficos de residuales no muestran evidencia de que se éste violando alguno de los supuestos del modelo, por lo que las conclusiones son estadísticamente confiables.

NOTA: Hay diseños donde se tiene un factor de estudio y 3 variables de ruido (cuadrados grecolatinos), también los hay con un factor de estudio y 4 variables de ruido (cuadrados hipergrecolatinos). Cuya dinámica de trabajo es muy semejante al diseño de bloques y al cuadrado latino, aquí revisados. Así que si se encuenta con uno de estos diseños adelante, Ud. puede.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 3

I. Con base en el enunciado definir el tipo de diseño más adecuado, explicando su(s) criterio(s) de selección, sin hacer trampa. Esto es, no pasar al enunciado con datos hasta no resolver el punto I.

II. Ya con los datos resolver cada uno de los ejercicios, indicando: a) las hipótesis estadísticas a contrastar, b) el modelo estadístico, c) las variables a trabajar, d) La secuencia de análisis utilizando Statgraphics.

Además, al interpretar los resultados, dar una conclusión estadística, otra en el contexto del problema y verificar el cumplimiento de los supuestos del modelo estadístico.

Enunciados

1. En un experimento para comparar el porcentaje de eficiencia de cuatro diferentes resinas quelantes (A, B, C y D) en la extracción de iones de Cu^{2+} de solución acuosa, el experimentador sólo puede realizar cuatro corridas con cada resina. De manera que durante tres días seguidos se preparó una solución fresca de iones Cu^{2+} y se realizó la extracción con cada una de las resinas, tomadas de manera aleatoria, obteniendo los siguientes resultados.

2. Se llevó a cabo un experimento para probar los efectos de un fertilizante nitrogenado en la producción de lechuga. Se aplicaron cinco dosis diferentes de nitrato de amonio a cuatro parcelas homogéneas (réplicas). Los datos son el número de lechugas cosechadas de la parcela.

3. Se encuentra bajo estudio el efecto que tienen 5 reactivos distintos (A, B, C, D y E) sobre el tiempo de reacción de un proceso químico. Cada lote de material nuevo es lo suficientemente grande para permitir que sólo se realicen 5 ensayos. Más aún, cada ensayo tarda aproximadamente una hora y media por lo que sólo pueden realizarse cinco ensayos por día. En el experimento se busca controlar sistemáticamente las variables lote de material y día, ¿que se puede decir del tiempo de reacción de los 5 reactivos diferentes? (Tomado de: Douglas C. Montgomery, 2002, Diseño y Análisis de Experimentos, 2ª edición, Ed. Limusa-Wiley, pág. 167).

4. Se realizó un estudio para determinar los efectos de una planta cloroalcalina sobre los peces que viven en el rio que fluye junto a la planta. La variable de interés es el nivel total de mercurio en microgramos por gramo de peso corporal por pez. Las muestras se toman en cuatro puntos a lo largo del río. (Tomado de: Milton Tsokos, 1987, Estadística para Biología y Ciencias de la Salud, Ed. Interamericana mcGraw-Hill, pág. 304).

   I. 5.5 Km más arriba de la planta, II. 3.7 Km más abajo de la planta, III. 21 Km más abajo de la planta, IV. 133 Km más abajo

5. Se realiza un experimento para comparar la energía que se requiere para llevar a cabo tres actividades físicas: correr, pasear caminando y montar en bicicleta. La variable de interés es el número de kilocalorías consumidas por kilometro recorrido. Para hacerlo se seleccionan a ocho individuos. Se le pide a cada uno que corra, camine y recorra en bicicleta una distancia medida. La actividad se realiza de manera aleatoria con tiempo de recuperación entre una y otra. (Tomado de: Milton Tsokos, 1987, Estadística para Biología y Ciencias de la Salud, Ed. Interamericana mcGraw-Hill, pág. 319).

6. Un ingeniero industrial investiga el efecto de cuatro métodos de ensamblaje (A, B, C y D) sobre el tiempo de ensamblaje de un componente de televisor a color (en minutos). Se seleccionan cuatro operadores para el estudio. Además, el ingeniero sabe que todos los métodos de ensamblaje producen fatiga, de tal modo que el tiempo requerido para el último ensamblaje puede ser mayor que para el primero, independientemente del método.

7. En el ejercicio 6 el ingeniero sospecha que los sitios de trabajo usados por los cuatro operadores pueden representar una fuente adicional de variación, por lo que es necesario introducir al diseño esta otra fvariable y realizar otro experimento.

8. El rendimiento de un proceso químico se midió utilizando cinco lotes de materia prima, cinco concentraciones del ácido, cinco tiempos de procesamiento (A, B, C, D y E) y cinco concentraciones del catalizador ([illegible]). ¿Concentración del catalizador?

Enunciados y datos

1. Un ingeniero industrial está realizando un experimento sobre el tiempo de enfoque del ojo. Se interesa en el efecto de la distancia del objeto al ojo sobre el tiempo de enfoque. Cuatro distancias diferentes son de interés. Se cuenta con cinco sujetos no homogéneos para el experimento.

	Sujeto				
Distancia (pies)	1	2	3	4	5
4	10	6	6	6	6
6	7	6	6	1	6
8	5	3	3	2	5
10	6	4	4	2	3

Nota: Sujetos no homogéneos

2. En un experimento para comparar el porcentaje de eficiencia de cuatro diferentes resinas quelantes (A, B, C y D) en la extracción de iones de Cu^{2+} de solución acuosa, el experimentador sólo puede realizar cuatro corridas con cada resina. De manera que durante cuatro días seguidos se preparo una solución fresca de iones Cu^{2+} y se realizó la extracción con cada una de las resinas, tomadas de manera aleatoria, obteniendo los siguientes resultados.

Día	Resinas			
	A	B	C	D
1	97	93	96	92
2	90	92	95	90
3	96	91	93	91
4	95	93	94	90

3. Se llevó a cabo un experimento para probar los efectos de un fertilizante nitrogenado en la producción de lechuga. Se aplicaron cinco dosis diferentes de nitrato de amonio a cuatro parcelas homogéneas (réplicas). Los datos son el número de lechugas cosechadas de la parcela

Tratamiento Kg N/Ha	N° de lechugas			
0	104	114	90	140
50	134	130	144	174
100	146	142	152	156
150	147	160	160	163
200	131	148	154	163

4. Se encuentra bajo estudio el efecto que tienen 5 reactivos distintos (A, B, C, D y E) sobre el tiempo de reacción de un proceso químico. Cada lote de material nuevo es lo suficientemente grande para permitir que sólo se realicen 5 ensayos. Más aún, cada ensayo tarda aproximadamente una hora y media por lo que sólo pueden realizarse cinco ensayos por día. En el experimento se busca controlar sistemáticamente las variables lote de material y día, ¿que se puede decir del tiempo de reacción de los 5 reactivos diferentes? (Tomado de: Douglas C. Montgomery, 2002, Diseño y Análisis de Experimentos, 2ª edición, Ed. Limusa-Wiley, pág. 167)

Lote	Día				
	1	2	3	4	5
1	A,8	B,7	D,1	C,7	E,3
2	C,11	E,2	A,7	D,3	B,8
3	B,4	A,9	C,10	E,6	D,5
4	D,6	C,8	E,6	B,1	A,10
5	E,4	D,2	B,3	A,8	C,8

5. Se realizó un estudio para determinar los efectos de una planta cloroalcalina sobre los peces que viven en el rio que fluye junto a la planta. La variable de interés es el nivel total de mercurio en microgramos por gramo de peso corporal por pez. Las muestras se toman en cuatro puntos a lo largo del río. (Tomado de: Milton Tsokos, 1987, Estadística para Biología y Ciencias de la Salud, Ed. Interamericana mcGraw-Hill, pág. 304)

I. 5.5 Km más arriba de la planta, II. 3.7 Km más abajo de la planta, III. 21 Km más abajo de la planta, IV. 133 Km más abajo

Sitio			
I	II	III	IV
0.45	1.64	1.56	0.65
0.35	1.67	1.55	0.59
0.32	1.85	1.69	0.69
0.68	1.57	1.67	0.62
0.53	1.59	1.60	0.70
0.34	1.61	1.68	0.64
0.61	1.53	1.65	0.81
0.41	1.40	1.59	0.58
0.51	1.70	1.75	0.53
0.71	1.48	1.49	0.75

6. Se realiza un experimento para comparar la energía que se requiere para llevar a cabo tres actividades físicas: correr, pasear caminando y montar en bicicleta. La variable de interés es el número de kilocalorías consumidas por kilometro recorrido. Para hacerlo se seleccionan a ocho individuos. Se le pide a cada uno que corra, camine y recorra en bicicleta una distancia medida. La actividad se realiza de manera aleatoria con tiempo de recuperación entre una y otra. (Tomado de: Milton Tsokos, 1987, Estadística para Biología y Ciencias de la Salud, Ed. Interamericana mcGraw-Hill, pág. 319)

Individuo	Corriendo	Caminando	Pedaleando
1	1.4	1.1	0.7
2	1.5	1.2	0.8
3	1.8	1.3	0.7
4	1.7	1.3	0.8
5	1.6	0.7	0.1
6	1.5	1.2	0.7
7	1.7	1.1	0.4
8	2.0	1.3	0.6

7. Un ingeniero industrial investiga el efecto de cuatro métodos de ensamblaje (A, B, C y D) sobre el tiempo de ensamblaje de un componente de televisor a color (en minutos). Se seleccionan cuatro operadores para el estudio. Además, el ingeniero sabe que todos los métodos de ensamblaje producen fatiga, de tal modo que el tiempo requerido para el último ensamblaje puede ser mayor que para el primero, independientemente del método.

Orden de ensamblaje	Operador			
	1	2	3	4
1	C,10	D, 14	A, 7	B, 8
2	B, 7	C, 18	D, 11	A, 8
3	A, 5	B, 10	C, 11	D, 9
4	D, 10	A, 10	B, 12	C, 14

8. En el ejemplo 6 el ingeniero sospecha que los sitios de trabajo usados por los cuatro operadores pueden representar una fuente adicional de variación, por lo que es necesario introducir al diseño este otro factor y realizar otro experimento.

Orden de ensamblaje	Operador			
	1	2	3	4
1	Cβ, 11	Bγ, 10	Dδ, 14	Aα, 8
2	Bα, 8	Cδ, 12	Aγ, 10	Dβ, 12
3	Aδ, 9	Dα, 11	Bβ, 7	Cγ, 15
4	Dγ, 9	Aβ, 8	Cα, 18	Bδ, 6

9. El rendimiento de un proceso químico se midió utilizando cinco lotes de materia prima, cinco concentraciones del ácido, cinco tiempos de procesamiento (A, B, C, D y E) y cinco concentraciones del catalizador (α, β, γ, δ, ε). Determine si existe diferencia en los rendimientos debida a las concentraciones de catalizador.

	Concentración del ácido				
Lote	1	2	3	4	5
1	Aα, 26	Bβ, 16	Cγ, 19	Dδ, 16	Eε, 13
2	Bγ, 18	Cδ, 21	Dε, 18	Eα, 11	Aβ, 21
3	Cε, 20	Dα, 12	Eβ, 16	Aγ, 25	Bδ, 13
4	Dβ, 15	Eγ, 15	Aδ, 22	Bε, 14	Cα, 17
5	Eδ, 10	Aε, 24	Bα, 17	Cβ, 17	Dγ, 14

Capitulo 4

DISEÑOS FACTORIALES

Este tipo de diseños permiten analizar varios factores a la vez, donde el aspecto más interesante consiste en "visualizar" el efecto conjunto de los factores en estudio, es decir su interacción.

La construcción típica de un factorial se presenta a continuación, considerando un diseño de dos factores, $a * b$ (se lee a por b) donde a indica el número de niveles del primer factor y b el del segundo factor.

4.1. Estructura típica y modelo de un diseño factorial

Este es un diseño con sólo dos factores de estudio, pero se pueden estudiar conjuntamente todos los factores que sean de interés, sólo hay que cuidar algo que se conoce como "explosión combinatoria", que en términos prácticos implicar cuidar que el número de unidades experimentales no se vuelva tan grande que haga imposible el trabajo experimental, ya sea por costo económico o en tiempo.

	FACTOR B				TOTAL
FACTOR A	1	2	…	b	$\boldsymbol{Y_{i..}}$
1	Y_{111} Y_{112} Y_{113} Y_{114}	Y_{121} Y_{122} Y_{123} Y_{124}	…	Y_{1b1} Y_{1b2} Y_{1b3} Y_{1b4}	$Y_{1..}$
2	Y_{211} Y_{212} Y_{213} Y_{214}	Y_{221} Y_{222} Y_{223} Y_{224}	…	Y_{1b1} Y_{1b2} Y_{1b3} Y_{1b4}	$Y_{2..}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a	Y_{a11} Y_{a12} Y_{a13} Y_{a14}	Y_{a21} Y_{a22} Y_{a23} Y_{a24}	…	Y_{ab1} Y_{ab2} Y_{ab3} Y_{ab4}	$Y_{a..}$
Total $\boldsymbol{Y_{.j.}}$	$Y_{.1.}$	$Y_{.2.}$	…	$Y_{.b.}$	$Y_{...}$

Modelo: $Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \tau_i\beta_j + \varepsilon_{ijk}$

$i = 1, 2, \cdots, a$, $j = 1, 2, \cdots, b$ y $k = 1, 2, \cdots, n$

Hipótesis

1. *Ho:* $\tau_i = 0$ v.s. *Ha:* $\tau_i \neq 0$; para al menos una *i*.
2. *Ho:* $\beta_j = 0$ v.s. *Ha:* $\beta_j \neq 0$; para al menos una *j*.
3. *Ho:* $\tau_i\beta_j = 0$ v.s. *Ha:* $\tau_i\beta_j \neq 0$ para al menos un par $i \neq j$.

$$SC_{Total} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})^2$$

$$SC_A = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2 = bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$$

$$SC_B = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...})^2 = an\sum_{j=1}^{b}(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...})^2$$

$$SC_{AB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...})^2 = n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...})^2$$

$$SC_{Error}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2$$

Grados de Libertad

$A = a - 1$
$B = b - 1$
$AB = (a - 1)(b - 1)$
$Error = ab(n - 1) = abn - ab = N - ab$
$Total = abn - 1 = N - 1$

En comparación con los modelos ya revisados, se parece bastante al diseño de bloques, por ejemplo la suma de cuadrados de cada factor es totalmente análoga a las suma de cuadrados de un diseño de bloques; pero aquí aparece la suma de cuadrados de la interacción la cual requiere de la media de las Y_{ijk}, además aquí si interesan todas las F's que se generan y no sólo una de ellas.

Las fórmulas de trabajo, cuyas rutinas de cálculo son más sencillas desde el punto de vista computacional, son:

$$SC_{Total} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}Y_{ijk}^2 - \frac{\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$SC_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a}Y_{i\bullet\bullet}^2 - \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$SC_B = \frac{1}{an}\sum_{i=1}^{b}Y_{i\bullet\bullet}^2 - \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{N}$$

$$SC_{AB} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}Y_{ij\bullet}^2 - \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{N} - SC_A - SC_B$$

$$SC_{Error} = SC_{Total} - SC_A - SC_B - SC_{AB}$$

Ejemplo 4.1. Experimento para estudiar el tiempo de vida de baterias, considerando 3 temperaturas y 3 tipos de materiales, entonces el punto crucial es: ¿cuál es la combinación de temperatura y tipo de material que da tiempos de vida más altos?

Material	Temperatura (°F)			$Y_{i\bullet\bullet}$
	15	70	125	
1	130 155 74 180 539	34 40 80 75 229	20 70 81 58 230	998
2	150 188 159 126 623	136 122 106 115 479	25 70 58 45 198	1300
3	137 110 168 160 576	174 120 150 139 583	96 104 82 60 342	1501
$Y_{\bullet j\bullet}$	1738	1291	770	$Y_{\bullet\bullet\bullet}$ = 3799

Modelo: $Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \tau_i\beta_j + \varepsilon_{ijk}$

$i = 1, 2, \cdots, a$, $j = 1, 2, \cdots, b$ y $k = 1, 2, \cdots, n$

Hipótesis

1. *Ho:* $\tau_i = 0$ v.s. *Ha:* $\tau_i \neq 0$; para al menos un material.
2. *Ho:* $\beta_j = 0$ v.s. *Ha:* $\beta_j \neq 0$; para al menos una temperatura.
3. *Ho:* $\tau_i\beta_j = 0$ v.s. *Ha:* $\tau_i\beta_j \neq 0$ para al menos una interacción de material y temperatura

Aplicando las fórmulas de cálculo:

$$SC_{Total} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2 - \frac{\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet}^2}{N} = (130)^2 + (155)^2 + \cdots + (82)^2 + (60)^2 - \frac{(3799)^2}{36} = 77646.97$$

$$SC_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} Y_{i\bullet\bullet}^2 - \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{N} = \frac{1}{(3)(4)}\left[(998)^2 + (1300)^2 + (1501)^2\right] - \frac{(3799)^2}{36} = 10683.72$$

$$SC_B = \frac{1}{an}\sum_{j=1}^{b} Y_{\bullet j\bullet}^2 - \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{N} = \frac{1}{(3)(4)}\left[(1738)^2 + (1291)^2 + (770)^2\right] - \frac{(3799)^2}{36} = 39118.72$$

$$SC_{AB} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} Y_{ij\bullet}^2 - \frac{Y_{\bullet\bullet\bullet}^2}{N} - SC_A - SC_B$$

$$= \frac{1}{4}\left[(539)^2 + (229)^2 + \cdots + (198)^2 + (342)^2\right] - \frac{(3799)^2}{36} - 10683.72 - 39118.72$$

$$= 9613.78$$

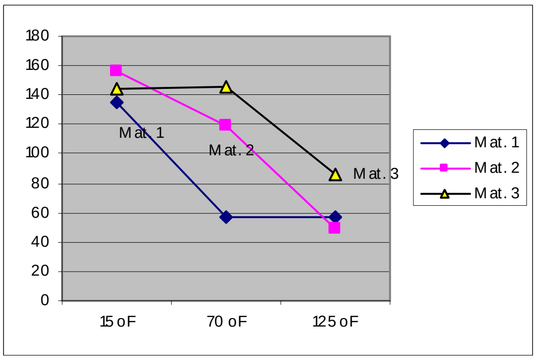
$$SC_{Error} = SC_{Total} - SC_A - SC_B - SC_{AB}$$

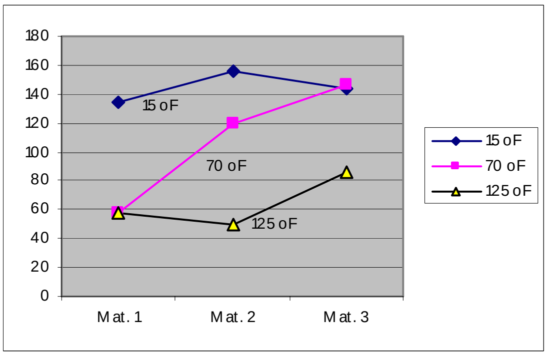
$$= 77646.97 - 10683.72 - 39118.72 - 9613.78 = 18230.75$$

Al “vaciar” estos resultados en una tabla de Análisis de varianza se tiene.

Fuente de Variación (FV)	g.l.	Suma de Cuadrados (SC)	Cuadrados Medios (CM)	F_o	P-value
A	2	10683.72	5341.86	7.91	0.0020
B	2	39118.72	19559.36	28.97	0.0001
AB	4	9613.78	2403.44	3.56	0.0186
Error	27	18230.75	675.21		
Total	35	77646.97			

Aquí se ve que hay efecto de los factores principales y de la interacción (ya que el P-value es menor que 0.05). Por lo que se recomienda analizar los resultados en un gráfico de interacciones.





En ambos gráficos se aprecia que la mejor combinación es: Material 2 a 15 ºF.

Un ejercicio interesante es realizar estos gráficos a mano, considerando las siguientes medias

	15°F	70°F	125°F
Mat. 1	134.75	57.25	57.5
Mat. 2	155.75	119.75	49.5
Mat. 3	144	145.75	85.5

Tanto los cálculos, tabla de ANOVA y gráficos de interacciones se puede extender a tres o más factores, sin mayores problemas.

4.2. Diseños factoriales con statgraphics

Ejemplo 4.2. Se encuentra en estudio el rendimiento de un proceso químico. Se cree que las dos variables más importantes son la temperatura y la presión. Seleccionando para el estudio tres temperaturas y tres presiones diferentes, se obtienen los siguientes resultados de rendimiento.

Temperatura\Presión	Baja	Media	Alta
Baja	90.4	90.7	90.2
	90.2	90.6	90.4
Intermedia	90.1	90.5	89.9
	90.3	90.6	90.1
Alta	90.5	90.8	90.4
	90.7	90.9	90.1

Se quiere encontrarir la combinación de temperatura y presión que optimiza el rendimiento del proceso químico. Entonces, la combinación hace referencia al efecto conjunto de las dos variables y no de cada una de ellas por separado, además optimizar puede implicar maximizar o minimizar, en el caso de rendimiento se busca el máximo (caso contrario a cuando se habla de costos, donde lo que se busca es minimizar).

Entonces, el modelo más adecuado es un diseño factorial 3x3, con dos repeticiones. Y las hipótesis a considerar son:

1. *Ho:* $\tau_i = 0$ (No existe efecto de temperatura) v.s. *Ha:* $\tau_i \neq 0$; para al menos una i (Existe efecto de temperatura).

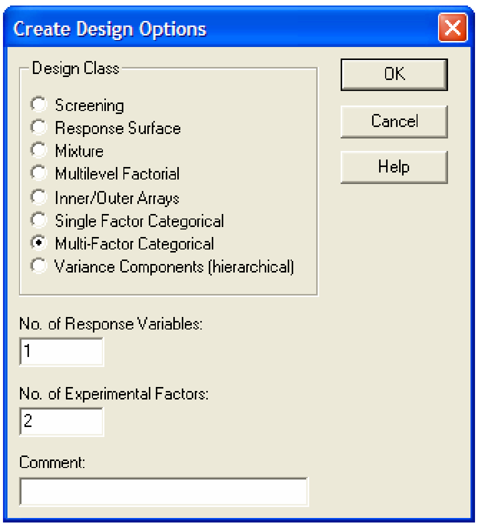
2. *Ho:* $\beta_j = 0$ (No existe efecto de presión) v.s. *Ha:* $\beta_j \neq 0$; para al menos una j (Existe efecto de presión).

3. *Ho:* $\tau_i\beta_j = 0$ (No existe efecto de interacción) v.s. *Ha:* $\tau_i\beta_j \neq 0$ para al menos un par $i \neq j$ (Existe efecto de interacción).

Solución, con Statgraphics

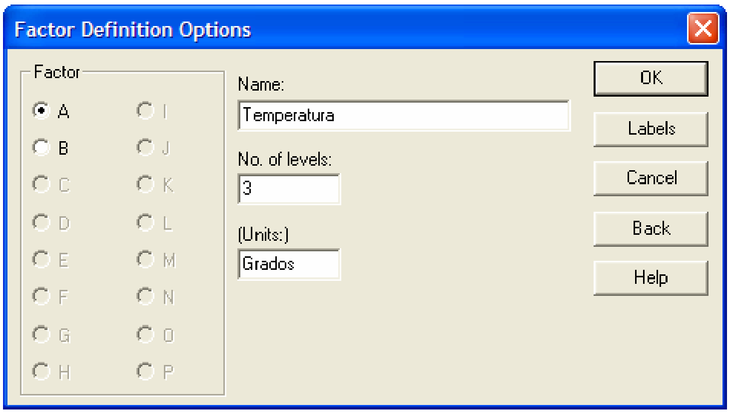
1. Acceder al módulo de Diseños Experimentales, seleccionando del menú las opciones:

SPECIAL -> EXPERIMENTAL DESIGN



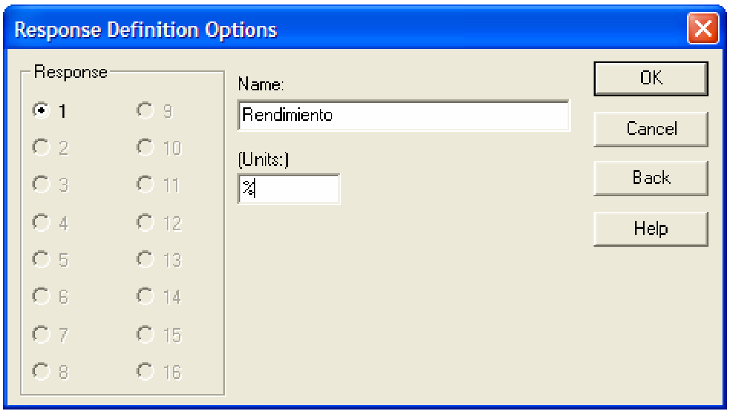
2. En la opción CREATE se despliega una caja de diálogo, donde se puede seleccionar el tipo de diseño experimental a realizar.

3. En esta caja de diálogo es importante asegurarse de tener un 1 en No. Of Response Variables (Número de variables de respuesta) y un 2 en No. Of Experimental Factors (Número de factores experimentales).

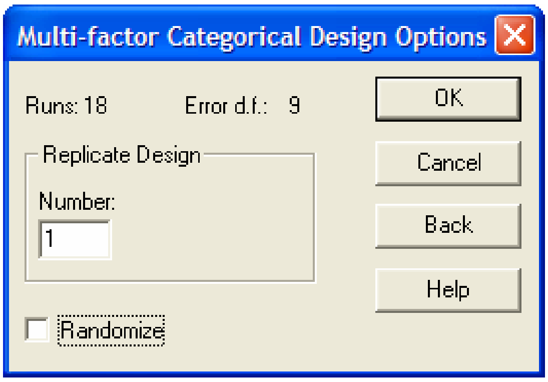


4. En el diálogo que aparece se definen los factores en estudio, con su nombre, número de niveles y hasta las unidades en las que se mide.

Hay que dar un clic en el identificador del factor (A o B) para acceder a su definición.



5. El siguiente diálogo permite definir las características de la respuesta: Nombre y unidades de medición.



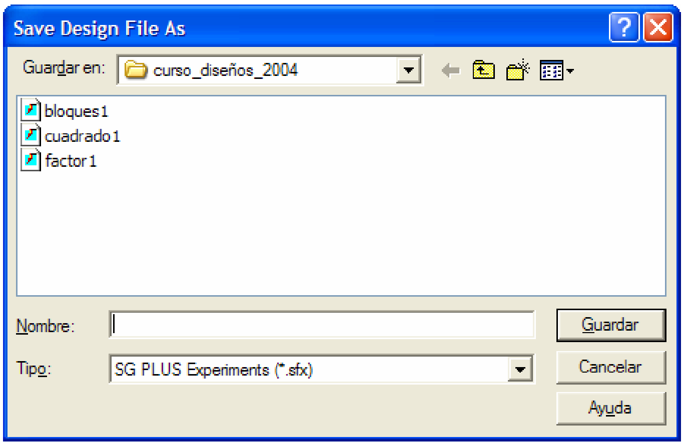
6. A continuación aparece un diálogo para definir el número de réplicas o repeticiones del experimento, así como si el diseño de debe generar de manera aleatoria.

7. La opción Randomize puede activarse o no. En la etapa de planeación experimental ayuda a establecer una secuencia en la que debe realizarse el experimento. Si ya se tienen datos, es más conveniente no activarla para facilitar la captura de datos.

Al dar OK, aparece una ventana de resultados que resume el tipo de diseño generado.

```
Multi-factor Categorical Design Attributes
Design Summary
--------------
Design class: Multi-factor Categorical
File name: <Untitled>

Base Design
-----------
Number of experimental factors: 2
Number of responses: 1
Number of runs: 18                Error degrees of freedom: 9
Randomized: No
```

```
Factors                Levels      Units
-----------------------------------------------
Temperatura            3           Grados
Presión                3

Responses              Units
-----------------------------------
Rendimiento            %
```



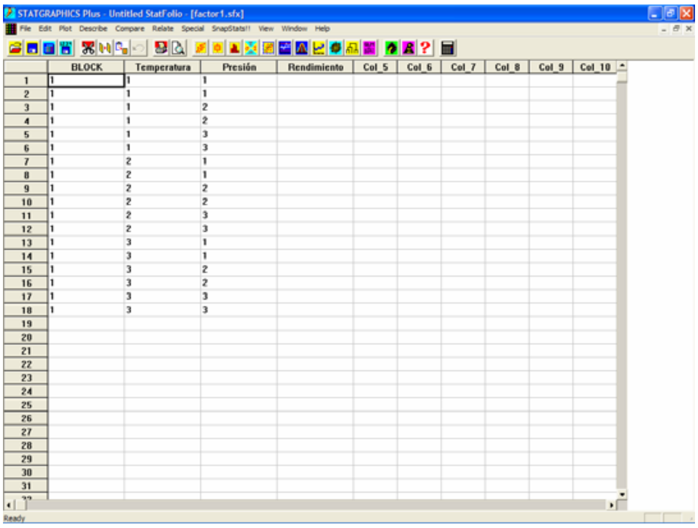
En este momento es conveniente guardar este diseño en disco, lo que se logra con la secuencia.

FILE -> SAVE AS -> SAVE DESIGN FILE AS ...

Este archivo se guarda con extensión SFX y sólo se puede abrir en el módulo de diseños de experimentos de Statgraphics.

Un diseño se abre para agregar datos o para su análisis con la secuencia.

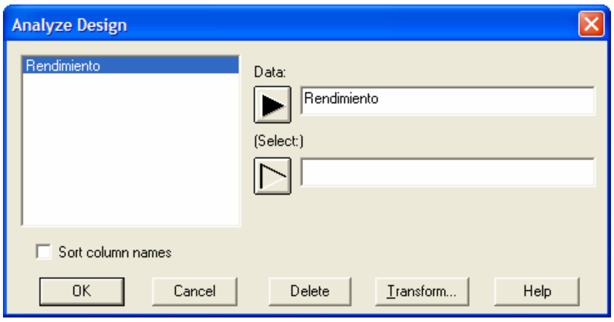
SPECIAL -> EXPERIMENTAL DESIGN -> OPEN DESIGN



Los datos se deben "teclear en la columna rendimiento

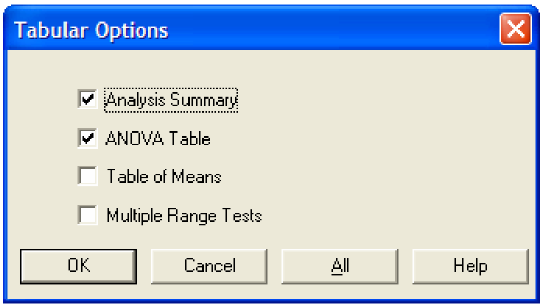
Para realizar el análisis, sobre el diseño que esté abierto en ese momento se sigue la secuencia.

SPECIAL -> EXPERIMENTAL DESIGN -> ANALYZE DESIGN

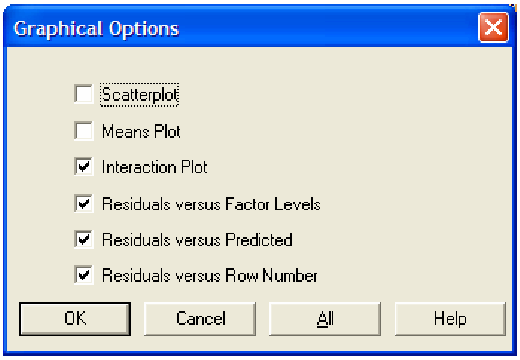


Para iniciar el análisis colocar la variable de respuesta en la caja DATA y presionar el botón OK.

Al aparecer los resultados se pueden seleccionar las opciones Tabulares y Gráficas.



Al abrir la caja de diálogo **Tabular Options**, se seleccionan: Analysis Summary y ANOVA Table.



En las **opciones gráficas** seleccionar todas las opciones de residuales y el gráfico de interacción.

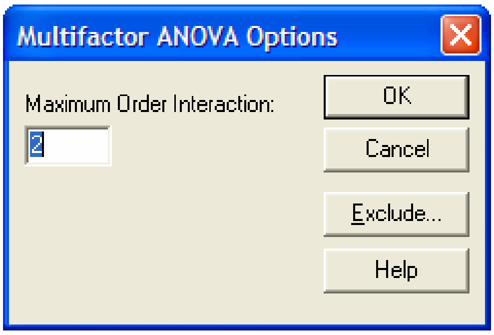
Resultados

Multifactor ANOVA - Rendimiento

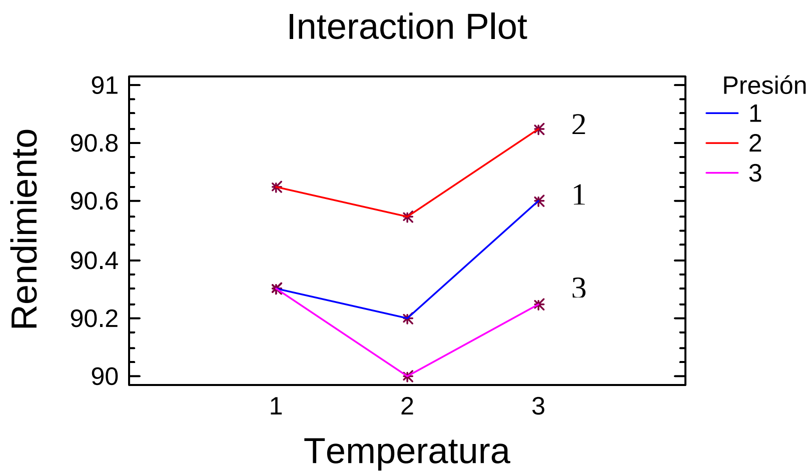
```
Analysis Summary

Dependent variable: Rendimiento
Factors:
        Temperatura
        Presión

Number of complete cases: 18

Analysis of Variance for Rendimiento - Type III Sums of Squares
--------------------------------------------------------------------------------
Source                      Sum of Squares     Df    Mean Square    F-Ratio    P-Value
--------------------------------------------------------------------------------
MAIN EFFECTS
 A:Temperatura                    0.301111      2       0.150556       8.47     0.0085
 B:Presión                        0.767778      2       0.383889      21.59     0.0004
INTERACTIONS
 AB                              0.0688889      4      0.0172222       0.97     0.4700
RESIDUAL                              0.16      9      0.0177778
--------------------------------------------------------------------------------
TOTAL (CORRECTED)                  1.29778     17
--------------------------------------------------------------------------------
All F-ratios are based on the residual mean square error.
```

En esta tabla se tiene evidencia del efecto de la presión y la temperatura (ya que P-value es menor que 0.05 en ambos casos), aunque el efecto de interacción es no significativo.

NOTA: Cuando no se presenta el efecto de interacción, dar un clic derecho sobre la ventana del ANOVA, seleccionar ANALYSIS OPTIONS.



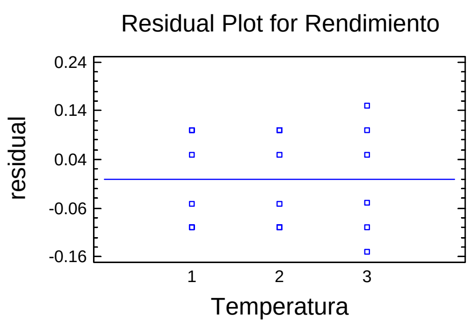
En el diálogo que aparece indicar que se requieren las interacciones de orden 2 (para el ejemplo). Ya que al no estar activa esta opción, no se analiza la interacción.

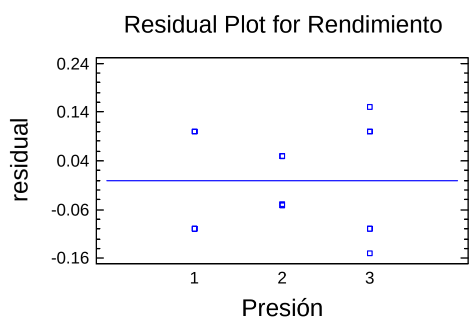


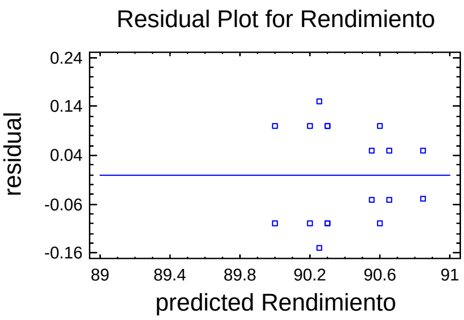
El gráfico de interacciones es el elemento clave en un diseño factorial, ya que es aquí donde se realiza la interpretación y se sustenta la toma de decisiones

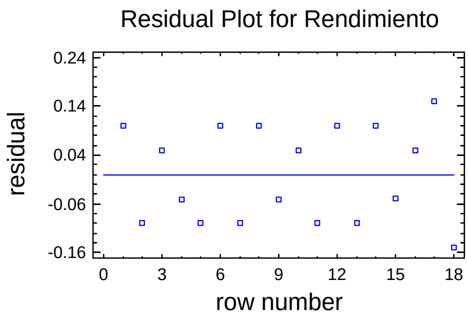
Por ejemplo, aquí se puede indicar a que temperatura y a qué presión se obtiene el máximo rendimiento. En este caso en la combinación de factores: temperatura alta y presión media.

El siguiente paso es analizar el cumplimiento de supuestos









Donde los gráficos de residuales muestran que la temperatura 3 y la presión 3 presentan mayor variabilidad que los otros 2 niveles.

En estos gráficos no se aprecia algún patrón anómalo o alguna tendencia lo que permite asumir que si se están cumpliendo los supuestos, dándole validez a las conclusiones del experimento.

En los diseños de dos factores se pueden aplicar pruebas de compraciones múltiples para un factor en especial, pero fijando el otro factor en un nivel determinado. Cuando se tienen 3 factores hay que fijar dos de ellos y aplicar Tukey al otro. Lo que se recomienda siempre y cuando la interacción sea no significativa.

Ejemplo 4.3. En la producción de un químico viscoso se tienen varios lotes, de cada uno de los cuales se llenan 100 contenedores. El análisis del producto se determina por infrarrojo, por 2 analistas, realizándolo por duplicado. En un esfuerzo por mejorar el rendimiento del producto se realizó un estudio con tres lotes, dos contenedores, dos analistas y dos mediciones (repeticiones), para determinar si alguna de las tres posibles fuentes de variacióno o su interacción son signifiacativas en el proceso, y determinar su magnitud. Los resultados obtenidos son los siguientes.

Lote	No. de Contenedor			
	I		II	
	Analista		Analista	
	M	P	M	P
23	94.6	95.8	97.7	97.8
	95.2	95.8	98.1	98.6
35	96.2	96.5	98.0	99.0
	96.4	96.9	98.4	99.0
2	97.9	98.4	99.2	99.6
	98.1	98.6	99.4	100.0

SOLUCIÓN

Diseño factorial 3x2x2, con dos repeticiones, donde interesa la significancia de los efectos principales, así como la de cada una de las dobles interacciones y la triple interacción.

Hipótesis

1. *Ho:* $\tau_i = 0$ (No existe efecto de lote) v.s. *Ha:* $\tau_i \neq 0$; para al menos una i (Existe efecto de lote).
2. *Ho:* $\beta_j = 0$ (No existe efecto de contenedor) v.s. *Ha:* $\beta_j \neq 0$; para al menos una j (Existe efecto de contenedor).
3. *Ho:* $\gamma_l = 0$ (No existe efecto de analista) v.s. *Ha:* $\gamma_l \neq 0$; para al menos una l (Existe efecto de analista).
4. *Ho:* $\tau_i\beta_j = 0$ (No existe efecto de interacción de lote y contenedor) v.s.
   Ha: $\tau_i\beta_j \neq 0$ para al menos un par $i \neq j$ (Existe efecto de interacción de lote y contenedor).
5. *Ho:* $\tau_i\gamma_l = 0$ (No existe efecto de interacción de lote y analista) v.s.
   Ha: $\tau_i\gamma_l \neq 0$ para al menos un par $i \neq l$ (Existe efecto de interacción de lote y analista).
6. *Ho:* $\beta_j\gamma_l = 0$ (No existe efecto de interacción de contenedor y analista) v.s.
   Ha: $\beta_j\gamma_l \neq 0$ para al menos un par $j \neq l$ (Existe efecto de interacción de contenedor y analista).
7. *Ho:* $\tau_i\beta_j\gamma_l = 0$ (No existe efecto de interacción de lote, contenedor y analista) v.s.
   Ha: $\tau_i\beta_j\gamma_l \neq 0$ para al menos un par $i \neq j \neq l$ (Existe efecto de interacción de lote, contenedor y analista).

Con Statgraphics

1. Acceder al módulo de Diseños Experimentales, seleccionando del menú las opciones:}

SPECIAL -> EXPERIMENTAL DESIGN

2. En la opción CREATE se despliega una caja de diálogo, donde se puede seleccionar el tipo de diseño experimental a realizar.

En esta caja de diálogo es importante asegurarse de tener un 1 en No. Of Response Variables (Número de variables de respuesta) y un 3 en No. Of Experimental Factors (Número de factores experimentales). Después, todo el proceso es análogo al ejemplo anterior.

SPECIAL -> EXPERIMENTAL DESIGN -> OPEN

SPECIAL -> EXPERIMENTAL DESIGN -> ANALYZE

Recalcando la importancia de analizar los gráficos de interacciones.

Resultados

Multifactor ANOVA - Rendimiento

Analysis of Variance for Rendimiento - Type III Sums of Squares

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
MAIN EFFECTS					
A:Lote	19.6933	2	9.84667	131.29	0.0000
B:Contendor	24.8067	1	24.8067	330.76	0.0000
C:Analista	1.92667	1	1.92667	25.69	0.0003
INTERACTIONS					
AB	1.97333	2	0.986667	13.16	0.0009
AC	0.0133333	2	0.00666667	0.09	0.9155
BC	0.00666667	1	0.00666667	0.09	0.7707
ABC	0.253333	2	0.126667	1.69	0.2258
RESIDUAL	0.9	12	0.075		
TOTAL (CORRECTED)	49.5733	23			

All F-ratios are based on the residual mean square error.

The StatAdvisor

The ANOVA table decomposes the variability of Rendimiento into contributions due to various factors. Since Type III sums of squares (the default) have been chosen, the contribution of each factor is measured having removed the effects of all other factors. The P-values test the statistical significance of each of the factors. Since 4 P-values are less than 0.05, these factors have a statistically significant effect on Rendimiento at the 95.0% confidence level.

Es importante recalcar que se deben analizar las 7 F´s que resultan del análisis, resaltando que sólo la interacción de A con B es significativa. Aún asi se deben analizar todas las interacciones.

Table of Least Squares Means for Rendimiento
with 95.0 Percent Confidence Intervals

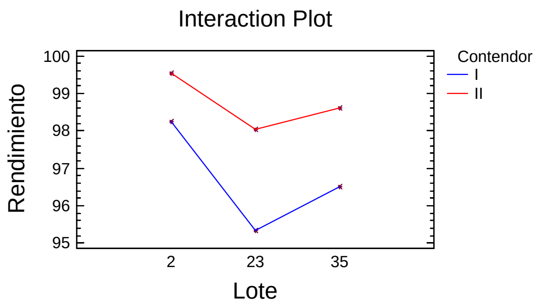
Level		Count	Mean	Stnd. Error	Lower Limit	Upper Limit
GRAND MEAN		24	97.7167			
Lote						
2		8	98.9	0.0968246	98.689	99.111
23		8	96.7	0.0968246	96.489	96.911
35		8	97.55	0.0968246	97.339	97.761
Contendor						
I		12	96.7	0.0790569	96.5277	96.8723
II		12	98.7333	0.0790569	98.5611	98.9056
Analista						
M		12	97.4333	0.0790569	97.2611	97.6056
P		12	98.0	0.0790569	97.8277	98.1723
Lote by Contendor						
2	I	4	98.25	0.136931	97.9517	98.5483
2	II	4	99.55	0.136931	99.2517	99.8483
23	I	4	95.35	0.136931	95.0517	95.6483
23	II	4	98.05	0.136931	97.7517	98.3483
35	I	4	96.5	0.136931	96.2017	96.7983
35	II	4	98.6	0.136931	98.3017	98.8983
Lote by Analista						
2	M	4	98.65	0.136931	98.3517	98.9483
2	P	4	99.15	0.136931	98.8517	99.4483
23	M	4	96.4	0.136931	96.1017	96.6983
23	P	4	97.0	0.136931	96.7017	97.2983
35	M	4	97.25	0.136931	96.9517	97.5483
35	P	4	97.85	0.136931	97.5517	98.1483
Contendor by Analista						

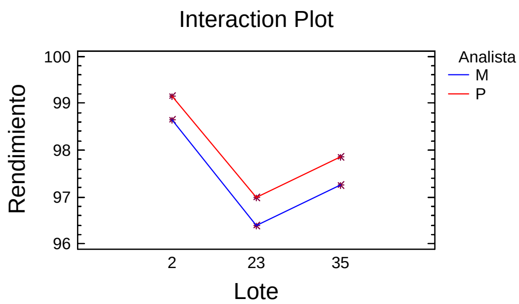
I	M	6	96.4	0.111803	96.1564	96.6436
I	P	6	97.0	0.111803	96.7564	97.2436
II	M	6	98.4667	0.111803	98.2231	98.7103
II	P	6	99.0	0.111803	98.7564	99.2436

```
--------------------------------------------------------------------------------

The StatAdvisor
---------------
   This table shows the mean Rendimiento for each level of the factors.  It also shows the standard
error of ach mean, which is a measure of its sampling variability.  The rightmost two columns show
95.0% confidence intervals for each of the means.  You can display these means and intervals by
selecting Means Plot from the list of Graphical Options.
```

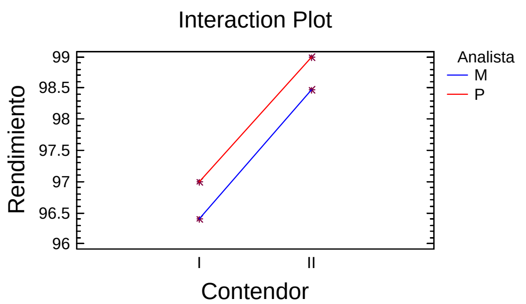
Esta tabla es de mucha utilidad para encontrar la combinación de factores que dan la mejor combinación, lo cual se puede complementar con el análisis de los gráficos de interacciones.

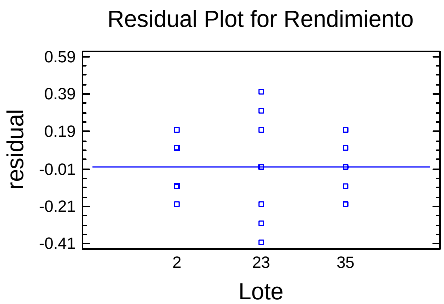
```
Multifactor ANOVA - Rendimiento
```

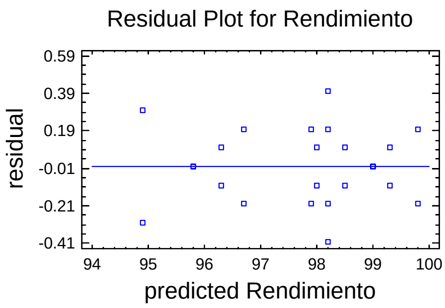


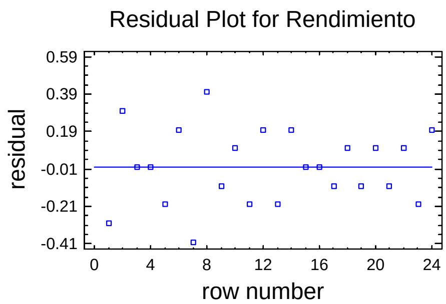



```
Multifactor ANOVA – Rendimiento
```









Del análisis de gráficos se tiene que la combinación de factores que genera los mejores rendimientos es: Lote 2, Contenedor II y Analista P

Los gráficos de residuales no muestran algún problema con el cumplimiento de supuestos, asi que se puede confiar en las conclusiones obtenidas.

NOTA: Aunque sólo se han presentado los diseños factoriales en el contexto de un DCA, también pueden presentarse variables de bloqueo, que conduzcan a diseños factoriales “dentro” de un bloques al azar o dentro de algún otro tipo de los diseños que se presentaron en el capítulo 3.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 4

Indicar en cada ejercicio el tipo de diseño, el modelo estadístico que mejor los describe, el par o pares de hipótesis a probar, la estructura de los datos para integrarlos a un software de análisis estadístico. RESOLVERLOS y ANALIZARLOS al contexto del problema.

1. Aumento en el peso de camarón cultivado en acuarios con diferentes niveles de temperatura (*T*), Densidad de Población (*D*) y Salinidad de Agua (*S*), luego de cuatro semanas.

T (°C)	D (organismos/40 litros)	S (%)	Aumento de Peso (mg)
25	80	10	86, 52, 73
		25	544, 371, 482
		40	390, 290, 397
	160	10	53, 73, 86
		25	393, 398, 208
		40	249, 265, 243
35	80	10	439, 436, 349
		25	249, 245, 330
		40	247, 277, 205
	160	10	324, 305, 364
		25	352, 267, 316
		40	188, 223, 281

Tomado de: Robert O. Kuehl, 2001, Diseño de experimentos. Principios estadísticos de diseño y análisis de investigación, 2ª. Ed., homson Leraning editores, México, pág. 201.

2. Para estudiar el efecto de la temperatura sobre el porcentaje de encogimiento de cuatro tipos de telas, se tienen los siguientes datos de un diseño completamente aleatorizado. ¿Cuál es la combinación más adecuada de temperatura y tela?

Tela	Temperatura			
	210º F	215º F	220º F	225º F
1	1.8, 2.1	2.0, 2.1	4.6, 5.0	7.5, 7.9
2	2.2, 2.4	4.2, 4.0	5.4, 5.6	9.8, 9.2
3	2.8, 3.2	4.4, 4.8	8.7, 8.4	13.2, 13.0
4	3.2, 3.6	3.3, 3.5	5.7, 5.8	10.9, 11.1

3. Se midió la corriente (en μA) necesaria para producir un cierto nivel de brillantez de un tubo para televisores para dos diferentes tipos de vidrios y tres diferentes tipos de fósforo, resultando los siguientes datos:

Tipo de vidrio	Tipo de fósforo		
	A	B	C
1	280, 290, 285	300, 310, 295	270, 285, 290
2	230, 235, 240	260, 240, 235	220, 225, 230

Tomado de: Jay L. Devore (2001) Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias, 5ª. Edición, Thomson Learning, México, Pag. 450

En los siguientes ejercicios utilice la información proporcionada para completar las tablas y responda las preguntas referentes al problema

4. A continuación se muestra una tabla de ANOVA incompleta para un experimento factorial 3×4 con dos repeticiones (réplicas)

Fuente de Variación (FV)	g.l.	Suma de Cuadrados (SC)	Cuadrados Medios (CM)	F_0
A		0.8		
B		5.3		
AB		9.6		
Error				
Total		18.1		

a) complete la tabla de ANOVA.

b) Plantee el par de hipótesis referente a la interacción.

c) Determine si existe efecto de interacción con α = 0.05 y dé una conclusión al respecto.

5. A continuación se muestra una tabla de ANOVA incompleta para un experimento factorial con dos factores

Fuente de Variación (FV)	g.l.	Suma de Cuadrados (SC)	Cuadrados Medios (CM)	F_0
A	3		0.75	
B	1	0.95		
AB			0.30	
Error				
Total	23	6.5		

a. Diga el número de niveles de cada uno de los factores.

b. ¿Cuántas repeticiones se realizaron en cada combinación de niveles de los dos factores?

c. Complete la Tabla de ANOVA.

d. Pruebe si existe efecto de los factores principales con $\alpha = 0.10$.

e. Determine si existe efecto de interacción con $\alpha = 0.10$.

Capitulo 5

ELEMENTOS PREVIOS A LOS DISEÑOS 2^k Y 3^k

Este tipo de diseños tienen amplia aplicación en áreas donde se tienen muchos factores por analizar y pocos recursos para hacer diseños experimentales completos o cuando se tienen muchos posibles factores de estudio y se quiere encontrar los más significativos. Principalmente se han aplicado en la industria automotriz y electrónica, aunque sus bondades se han hecho sentir en industrias como la farmacéutica y la de alimentos, por lo que vale la pena invertir un capítulo para motivar su uso y revisar algunas herramientas de utilidad, como el análisis de regresión. Ya que, aparte de todo, son la base de diseños más elegantes, como los de superficies de respuesta, incluyendo los diseños de mezclas.

5.1. Motivación

A continuación se hace la representación de un diseño de efectos fijos con un solo factor de estudio, figura 5.1. Así como la de un diseño factorial (dos o más factores) los cuales han mostrado su gran utilidad durante años y años de investigación. Pero, tienen el problema de explosión combinatoria que se representa al pasar de la figura 5.2 a la 5.3. Lo que genera experimentos muy costosos en el uso de recursos físicos, humanos o de tiempo.

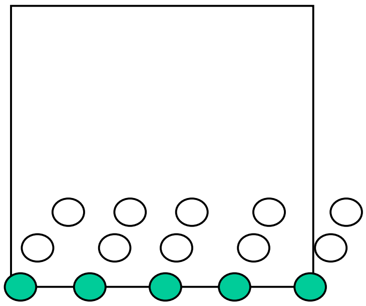


Figura 5.1. Diseño de un sólo factor, con 5 niveles (tratamientos). Nótese que es un diseño de efectos fijos, ya que en el espacio de experimentación, representado por el cuadro, se trabaja específicamente con los niveles marcados. Las repeticiones se indican con los círculos en blanco.

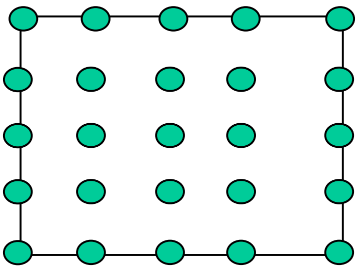


Figura 5.2. Diseño factorial 5X5, 2 factores con 5 niveles cada uno. Lo interesante es analizar el efecto de cada factor por separado y su acción conjunta (interacción). Nótese que no se representan las repeticiones, que si fueran 3 tendríamos un diseño con 75 unidades experimentales.

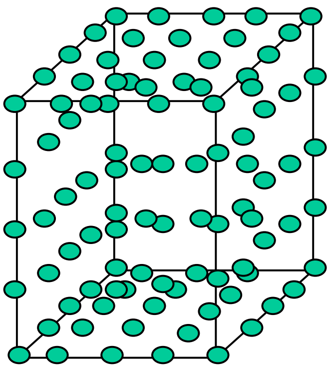


Figura 5.3. Diseño factorial clásico 5X5X5, cada círculo representa una unidad experimental de tal manera que para 3 repeticiones se necesitan 375 unidades experimentales, lo que no es difícil de lograr en agricultura donde una planta puede ser una unidad experimental, pero casi imposible de lograr en industrias como la farmacéutica donde el principio activo es muy costoso o donde un análisis requiere de varias horas de trabajo en el laboratorio.

Entonces, una opción es recurrir a diseños 2^k o 3^k, donde k representa el número de factores con sólo dos o tres niveles de estudio por factor

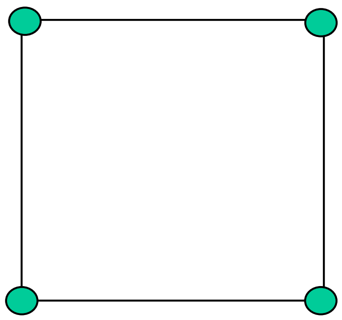


Figura 5.4. Diseño de dos factores a dos niveles, con un original y sin réplicas (según el lenguaje de statgraphics) o sin repeticiones, en términos generales. Diseño que sólo permite analizar los efectos principales, pero NO las interacciones. Estos diseños se analizan en un cuadrado semejante al de esta figura, con los resultados en los vértices.

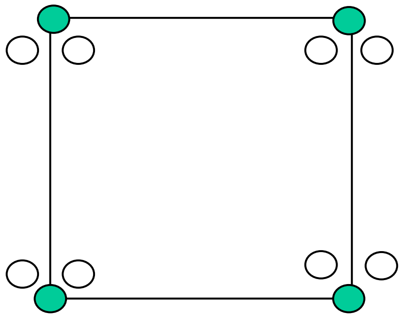


Figura 5.5. Diseño de dos factores a dos niveles, con un original y dos réplicas (según el lenguaje de statgraphics) o con tres repeticiones, en términos generales. Diseño que permite analizar los efectos principales y sus interacciones. Estos diseños se analizan en un cuadrado semejante al de esta figura, donde si los factores son de tipo discreto se colocan los promedios de la variable de respuesta en los vértices. Si los factores son de tipo continuo, también se puede generar un polinomio, mediante técnicas de regresión, el cual se optimiza en los vértices.

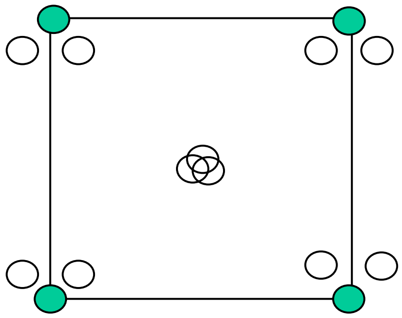


Figura 5.6. Diseño de dos factores a dos niveles, con un original y dos réplicas (según el lenguaje de statgraphics), así como tres repeticiones al centro. Diseño que analiza los efectos principales y sus interacciones y que por tener repeticiones al centro permite, mediante técnicas de regresión, generar una superficie de respuesta, al interior del cuadrado (siempre y cuando los factores sean cuantitativos), para encontrar la combinación de factores que optimicen la variable de respuesta.

5.2. Análisis de regresión simple y múltiple, como herramienta del diseño de experimentos

Problemas que se plantean:

1. ¿Cuál es el modelo matemático más apropiado para describir la relación entre una o más variables independientes (*X*´s) y una variable dependiente (*Y*)?

2. Dado un modelo específico, ¿qué significa éste y cómo se encuentran los parámetros del modelo que mejor se ajustan a los datos? Si el modelo es una línea recta: ¿cómo se encuentra la “mejor recta”?

   La ecuación de una línea recta es: $Y = f(X) = \beta_0 + \beta_1 X$

Con: β_0 = ordenada al origen y β_1 = pendiente

En un análisis de regresión lineal simple, el problema es encontrar los valores que mejor estimen a los parámetros β_0 y β_1. A partir de una muestra aleatoria.

La regresión simple hace referencia a una sola variable independiente, mientras que en la REGRESIÓN MÚLTIPLE se hace referencia al establecimiento de modelos cuando se consideran dos o más variables independientes

$$Y = f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = f(X)$$

Comparando la regresión simple contra la múltiple se tiene que en la regresión múltiple:

1. Es más difícil la elección del mejor modelo, ya que casi siempre hay varias opciones razonables.
2. Es casi imposible visualizar el modelo, por la dificultad de "pintar" más de tres dimensiones.
3. Los cálculos son complejos, requiere recursos computacionales con software especializado.

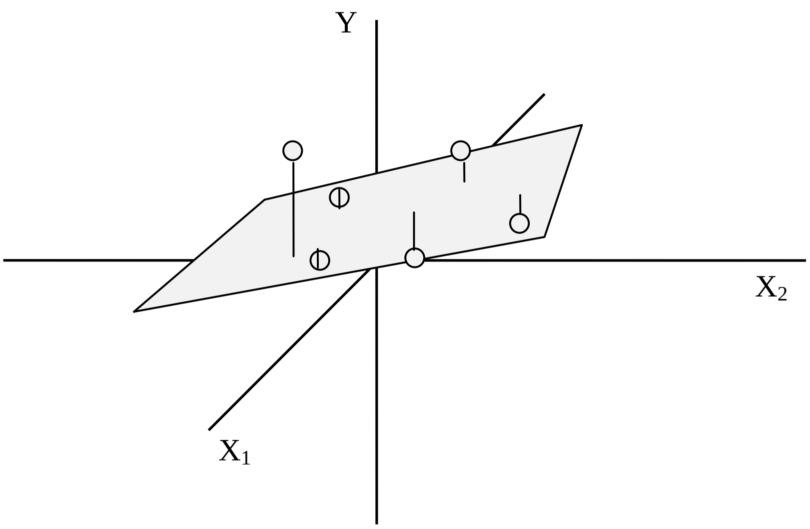


Figura 5.7. Ajuste de un plano lineal con dos variables independientes

5.2.1. Mínimos Cuadrados

Al igual que en la regresión lineal simple, se puede trabajar el método de mínimos cuadrados. Para esto:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + \varepsilon_i$$

donde:

$$\varepsilon_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k)$$

Con base en los datos muestrales

$$Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \cdots + \hat{\beta}_k X_k)$$

A esta diferencia se le conoce como residual y refleja la desviación de los datos observados con respecto al plano ajustado.

Elevando al cuadrado y sumando los elementos de la ecuación anterior, se llega a la siguiente suma de cuadrados.

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \cdots + \hat{\beta}_k X_k)\right]^2$$

Donde el método de mínimos cuadrados consiste, entonces, en encontrar los valores $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots$ llamados estimadores de mínimos cuadrados, para los cuales la suma de cuadrados anterior es mínima. De tal manera que, se pueda construir la siguiente tabla de ANOVA.

Para las hipótesis:

Ho: $\beta_i = 0$ (todos los coeficientes del modelo de regresión son iguales a cero, es decir que no hay un modelo lineal)
Ha: Al menos un $\beta_i \neq 0$ (al menos un coeficiente es diferente de cero, lo que implica que si hay modelo)

Fuente de variación	*g.l.*	*SC*	*CM*	*Fc*	*r²*
Regresión	k	$SC_{Tot\text{-}Error}$	$\frac{SC_{Reg}}{k}$	$\frac{CM_{Reg}}{CM_{Error}}$	$\frac{SC_{Reg}}{SC_{tot}}$
Error o Residual	*n–k–*1	$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2$	$\frac{SC_{Error}}{n-k-1}$		
Total	*n*–1	$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$			

Donde los supuestos del análisis de Regresión se pueden resumir en la siguiente expresión.

$$\varepsilon \sim \mathrm{NI}(\mu_{Y/X_1,X_2,\cdots,X_k}, \sigma^2)$$

Los errores o residuales se distribuyen normal e independientemente con desviaciones al ajuste lineal (media) igual a cero y varianza σ^2.

5.2.2. Coeficiente de correlación y determinación múltiple

$$R_{y/(x_1,x_2,\ldots,x_k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})^2}}$$

$$R^2_{Y/(X_1,X_2,\cdots,X_k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2 - \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2} =$$

$$= \frac{SC_{total} - SC_{Error}}{SC_{Total}} = \frac{SC_{Modelo}}{SC_{Total}}$$

Donde r y r^2 representan la correlación y determinación simple, mientras que R y R^2 se utilizan para la correlación y determinación múltiple. Estos valores se utilizan como una medida de la variación explicada en un modelo de regresión, expresada en porcentaje.

5.2.3. Pruebas de hipótesis en la regresión lineal

A menudo se desea probar que tan significativos son los parámetros del modelo de regresión, lo cual se logra al contrastar si dichos coeficientes son iguales a cero las hipótesis son:

$$H_0: \beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$$

$H_a: \beta_i \neq 0$, para algún i = 1, 2, … ,k

Rechazar *Ho* implica que al menos una de variables del modelo contribuye significativamente al ajuste.

En regresión se buscan:

1. Los valores de las betas (parámetros del modelo)
2. Probar que estos parámetros son diferentes de cero, para generar el modelo que sirve para optimizar la respuesta (pruebas de hipótesis sobre cada una de las betas)
3. Verificar el cumplimiento de supuestos, para darle confiabilidad a las conclusiones (analizar los residuales, para el cumplimiento de independencia, normalidad y homogeneidad de varianzas

Es importante aclarar que el objetivo del diseño de experimentos es encontrar efectos significativos (en los factores o niveles de un factor), mientras que la regresión tiene como objetivo encontrar un modelo de mejor ajuste. Entonces, la regresión como herramienta del diseño de experimentos ayuda a cuantificar la significancia de cada factor (cada factor representará una X en el modelo, con su respectiva pendiente) ya que a mayor valor de la pendiente más "peso" de la variable en el modelo. La combinación de estas herramientas conduce a la modelación empírica, lo que permite generar un modelo a partir de los datos, simular condiciones experimentales y regresar a las condiciones reales para resolver y analizar problemas.

Capitulo 6

DISEÑOS 2^k Y 3^k

Estos son diseños factoriales donde se pueden analizar k factores a la vez, considerando sólo 2 o 3 niveles de cada factor. Esto los hace relativamente económicos y de mucha aceptación en la industria. Tema sobre el cual cada vez hay más libros y también cada vez más “gordos”, por lo que en este capítulo se dan los rudimentos básicos para entenderlos, pero sobre todo para aplicarlos, con la intención de motivarlos a consultar material más extenso o formal, pero con conocimiento de causa.

Para empezar, un diseño 2^4 implica analizar 4 factores a dos niveles (alto y bajo); de la misma forma, un diseño 3^5 estudia de manera conjunta 5 factores a tres niveles cada uno de ellos.

Como todo diseño factorial, se tendrán *K* hipótesis para efectos principales, más todas las interacciones dobles, triples, etc. Hasta agotar todas las posibilidades de análisis. Por ejemplo, para un diseño 2^k se tienen las siguientes posibilidades.

6.1. Tabla de ANOVA

***K* efectos principales**	***SC***	***gl***
A	SC_A	1
B	SC_B	1
⋮	⋮	⋮
K	SC_K	1
$\binom{k}{2} = \frac{k!}{2!(k-2)!}$ **= Interacciones dobles**		
AB	SC_{AB}	1
AC	SC_{AC}	1
⋮	⋮	⋮
JK	SC_{JK}	1
$\binom{k}{3} = \frac{k!}{3!(k-3)!}$ **= Interacciones triples**		
ABC	SC_{ABC}	1
ABD	SC_{ABD}	1
⋮	⋮	⋮
IJK	SC_{IJK}	1
$\binom{k}{k} = \frac{k!}{k!(k-k)!} = 1$ **= Interacciones de k factores**	$SC_{ABC \cdots K}$	1
ABC...K		
Error	SC_{Error}	$2^K(n-1)$
Total	SC_{Total}	$n2^K - 1$

La cantidad de cálculos se incrementa conforme aumenta el número de factores, aunque actualmente se cuenta con software de análisis estadístico que se encarga de todo el manejo numérico, dejando al investigador la tarea de interpretar todas las F's resultantes.

6.2. Notaciones en los diseños factoriales

Los niveles o tratamientos del factor se representan a partir de notaciones dcel tipo + para el nivel alto y – para el nivel bajo, como muestra el cuadro 6.1.

	Notación geométrica			Notación con letras
Corrida	A	B	C	
1	-1	-1	-1	(1)
2	+1	-1	-1	a
3	-1	+1	-1	b
4	+1	+1	-1	ab
5	-1	-1	+1	c
6	+1	-1	+1	ac
7	-1	+1	+1	bc
8	+1	+1	+1	abc

Cuadro 6.1. Notación de diseños 2^k, esto implica un valor alto y un valor bajo para cada factor, representándose con un -1 y +1 respectivamente. En los diseños 3^k, el nivel central es común representarlo con un cero.

En estos diseños se realiza el análisis de varianza, pero se le da prioridad a generar un modelo lineal o polinomial que describa el comportamiento de la variable respuesta, en función de los factores, lo que permite obtener un gráfico o superficie de respuesta, a partir del cual se pueden realizar las conclusiones correspondientes.

6.3. Representación gráfica de los diseños factoriales 2^k y 3^k

Los diseños factoriales 2^k se pueden representar con las siguientes figuras:

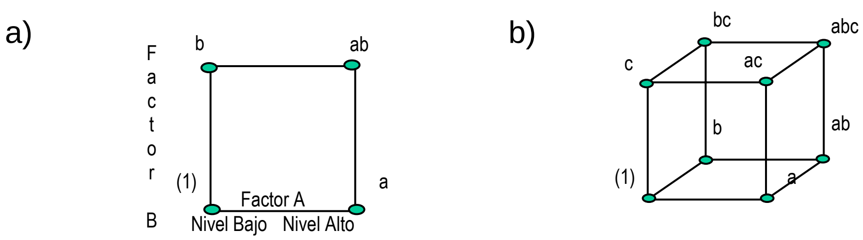


Figura 6.1. a.- Representación gráfica del diseño factorial 2^2 b. Representación gráfica del diseño factorial 2^3.

En los diseños donde se manejan tres factores, los efectos principales e interacciones corresponden a una cara del cubo como muestra la figura 6.2.

En este tipo de diseños, si los factores son cuantitativos, se puede explorar la superficie del cuadrado o el volumen del cubo, para lo cual se requieren repeticiones al centro, representadas por un cero.

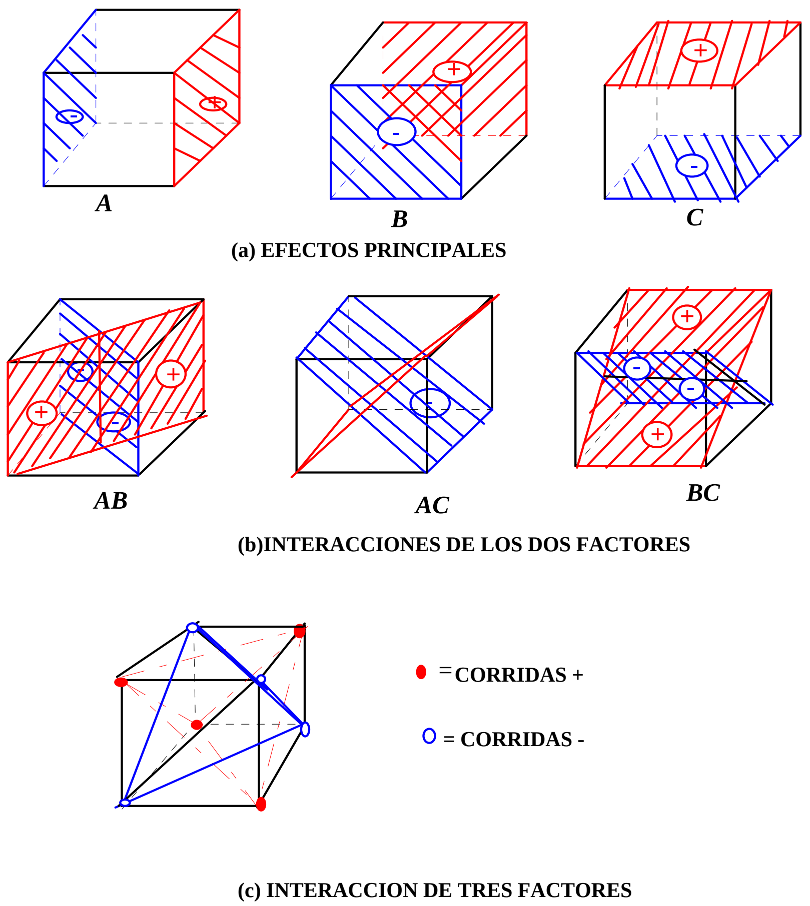


Figura 6.2. Representación gráfica de a) efectos principales, b) dobles interacciones y c) triple interacción de un diseño 2^3.

6.4. Codificación

Para representar los niveles de un factor es importante "pasar" los valores originales a +1's o -1's, así como en la interpretación o toma de decisiones regresar de esta notación a las unidades originales. Para lo cual se utiliza la siguiente expresión.

$$X_i^* = \frac{2X_i - (X_{BAJO} + X_{ALTO})}{X_{ALTO} - X_{BAJO}}$$

Donde X_i es el valor a codificar, mientras que X_{ALTO} y X_{BAJO}, corresponden a los valores del factor que se desea codificar, aquí X* corresponde al valor codificado (-1 o +1), para regresar de unidades codificadas a valores originales se debe despejar, de esta misma expresión, el valor de X_i.

Ejemplo 6.1. Para entrar en los detalles de cómo trabajar este tipo de diseños se tienen datos de la evaluación en estudios de estabilidad del Ácido Acetilsalicílico, para tres factores:

A Temperatura, B Excipiente (En compress %), C Tratamiento mecánico

FACTOR	VALOR	
	NIVEL BAJO	NIVEL ALTO
A	40°C	60°C
B	0%	50%
C	ASA Cristalino sin tratamiento	ASA molido 20 hrs.

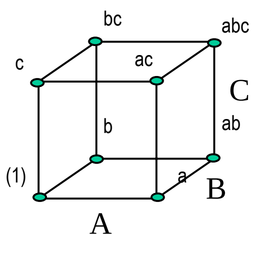
	MEDIA	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	Y_i
(1)	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	15.1
a	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	26.9
b	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	19.3
ab	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	10.7
c	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	22.9
ac	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	15.1
bc	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	26.7
abc	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	39.3

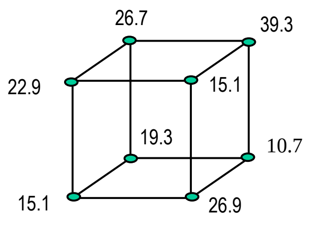
Cuadro 6.2. Representación extendida de un diseño 2^3.

Esta tabla muestra el arreglo de un diseño 2^3, sin repeticiones, donde lo más común es contar con las columnas de los efectos principales y la respuesta. Las columnas de las interacciones se agregan, en este caso, para apoyar la explicación de cómo calcular los efectos de cada factor y los coeficientes de regresión.

Este arreglo se conoce como diseño estándar donde el primer factor A, presenta la secuencia (-1, +1; un menos y un más), el segundo factor la secuencia (-1 -1, +1 +1; dos menos y dos más) y el tercer factor 4 menos, 4 más. Los signos de las interacciones se obtienen realizando la multiplicación de las columnas correspondientes (AB = valor de A por valor de B, ABC = AxBxC).

El primer paso consiste en visualizar el experimento en un cubo, con base en los resultados obtenidos





Ahora se puede obtener una medida del efecto de los factores, así como los coeficientes del modelo de regresión, de una manera relativamente sencilla.

6.5. Efecto de los factores

A continuación se muestra el cálculo numérico del efecto de los factores, con base en los datos del cuadro 6.2. Aclarando que no es el único método de cálculo, pero si uno de los más fáciles de entender.

Efecto promedio, la suma de todos los signos (+) entre el número de datos
MEDIA = (15.1 + 26.9 + 19.3 + 10.7 + 22.9 + 15.1 + 26.7 + 39.3)/8 = 22.0

Efecto del factor A, promedio de los signos (+) menos el promedio de los signos (-), con datos del cuadro 6.2.

A = (26.9 + 10.7 + 15.1 + 39.3)/4 - (15.1 + 19.3 + 22.9 + 26.7)/4 = 2.0

B = (19.3 + 10.7 + 26.7 + 39.3)/4 – (15.1 + 26.9 + 22.9 + 15.1)/4 = 4.0
C = 8.0
AB = 0.0
AC = 0.4
BC = 10.0
ABC = 10.2

6.6. Coeficientes del modelo

Estos valores conducen a los coeficientes del polinomio de ajuste

$$Y = \beta_o + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3$$

NOTA: Es importante notar que los coeficientes del modelo corresponden a la mitad de los valores calculados, anteriormente, para los efectos, esto se debe a que la pendiente indica una razón de cambio de la Y cuando la x cambia en una unidad. Entonces, como de -1 a +1 hay dos unidades el valor se debe dividir entre 2.

$$Y = 22 + 1.0A + 2.0B + 4.0C + 0.0AB + 0.2AC + 5.0BC + 5.1ABC$$

Donde los valores al ser pendientes indican razones de cambio, lo que permite ver que el factor C, por si sólo, como en interacción con B, es la que más incrementa el valor de Y, mientras que el factor A y su interacción con B, son las que menos incrementan el valor de Y.

A partir de este modelo se pueden obtener los residuales, cuya ecuación general es: $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$, donde Y_i es cada uno de los valores observados (última columna del cuadro 6.2) y los $\widehat{Y}$ estimados (ajustados o predichos) se calculan sustituyendo los valores de cada factor (-1's o +1's) en el modelo de regresión que se acaba de obtener.

Uno aspecto importante consiste en definir si todos los factores y sus interacciones son significativos, para lo cual se requiere calcular las sumas de cuadrados, las desviaciones estándar de cada estimador, el coeficiente de determinación del modelo y los residuales para analizar supuestos. Para construir un cuadro de ANVA.

6.7. Sumas de cuadrados

La suma de cuadrados, en un diseño 2^3, se obtiene mediante el cálculo de los siguientes contrastes. Cuya notación se basa en la última columna del cuadro 6.1 y n es el número de repeticiones, con n mayor o igual a 1.

$$A = \frac{1}{4n}\left[a - (1) + ab - b + ac - c + abc - bc\right]$$

$$B = \frac{1}{4n}\left[b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac\right]$$

$$C = \frac{1}{4n}\left[c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab\right]$$

$$AB = \frac{1}{4n}\left[abc - bc + ab - b - ac + c - a + (1)\right] = \frac{abc + ab + c + (1)}{4n} - \frac{bc + b + ac + a}{4n}$$

Representar la interacción AB de esta forma permite ver que ésta es la diferencia de los promedios entre las corridas de dos planos diagonales del cubo de la figura 6.2.

$$AC = \frac{1}{4n}\left[(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc\right]$$

$$BC = \frac{1}{4n}\left[(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc\right]$$

$$ABC = \frac{1}{4n}\left[abc - bc - ac + c - ab + b + a - (1)\right]$$

Después de calcular los contrastes, la suma de cuadrados se obtiene por la ecuación: $\frac{(Contraste)^2}{8n}$, por ejemplo, la suma de cuadrados de A se obtiene al elevar al cuadrado el resultado del contraste y dividir entre 8n. Es importante notar que cada factor o interacción presenta sólo un grado de libertad y que los grados de libertad del error es la resta de los grados de libertad total menos la suma de todos los demás grados de libertad.

Con esta información, el siguiente paso consiste en elaborar la tabla de Análisis de varianza.

6.8. Usando las sumas de cuadrados

La suma de cuadrados es útil para obtener las siguientes medidas

1. $F_0 = \frac{\text{Cuadrado medio Modelo}}{\text{Cuadrado medio Error}}$, para probar la hipótesis:

   $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = \beta_{123} = 0$ (No hay modelo)
   Ha: al menos una beta diferente de cero (Si hay modelo)

2. $R^2 = \dfrac{\text{Suma Cuadrados Modelo}}{\text{Suma Cuadrados Total}}$

3. Error estándar de cada coeficiente de regresión, definido por la expresión

$$e.e(\hat{\beta}) = \sqrt{V(\hat{\beta})} = \sqrt{\frac{\text{Cuadro medio del Error}}{n2^k}}$$

4. Intervalos de confianza para cada coeficiente de regresión, el cual se obtiene al aplicar la ecuación:

$$\hat{\beta} - t_{1-\frac{\alpha}{2},N-p}\left(e.e(\hat{\beta})\right) \le \beta \le \hat{\beta} + t_{1-\frac{\alpha}{2},N-p}\left(e.e(\hat{\beta})\right)$$

Con N-p = grados de libertad el error.

6.9. Utilizando el software de análisis estadístico STATGRAPHICS

A continuación se presentan los resultados del ejemplo 6.1, utilizando el Statgraphics, mencionando que los resultados son semejantes en otros "paquetes" estadísticos. Aunque todavía no se indica como hacerlo si se explican los resultados que se pueden encontrar

Screening Design Attributes

```
Design Summary
--------------
Design class: Screening
Design name: Factorial                    2^3
File name: <Untitled>
Comment: Ejemplo 1

Base Design
-----------
Number of experimental factors: 3  Number of blocks: 1
Number of responses: 1
Number of runs: 8                  Error degrees of freedom: 1
Randomized: No

Factors               Low         High        Units       Continuous
------------------------------------------------------------------------
Temperatura           -1.0        1.0         oC          Yes
Excipiente            -1.0        1.0         %           Yes
Tratamiento mecánico  -1.0        1.0                     No

Responses             Units
-----------------------------------
Respuesta

Analyze Experiment - Respuesta
The StatAdvisor
---------------
   You have created a Factorial design which will study the effects of 3 factors in 8 runs.  The design
is to be run in a single block. The order of the experiments has not been randomized.  If lurking
variables are present, they may distort the results.  Only 1 degree of freedom is available to estimate
the experimental error.  Therefore, the statistical tests on the results will be very weak.  It is
recommended that you add enough centerpoints to give you at least 3 degrees of freedom for the error.
   NOTE: if you have used Augment Design to add a fraction to a fractional factorial design, you should
check the Alias Pattern using Tabular Options.If unusual confounding exists, the number of degrees of
freedom for estimating experimental error may be larger than shown in the summary.
```

Primero está la definición del experimento, la cual se realiza con la opción CREATE del módulo especial de Diseño de Experimentos (asegurándose de salvar el diseño).

```
Analysis Summary
----------------

Estimated effects for Respuesta
----------------------------------------------------------------------
average               = 22.0
A:Temperatura         = 2.0
B:Excipiente          = 4.0
C:Tratamiento mecánico = 8.0
AB                    = 0.0
AC                    = 0.4
BC                    = 10.0
ABC                   = 10.2
----------------------------------------------------------------------
No degrees of freedom left to estimate standard errors.

The StatAdvisor
---------------
   This table shows each of the estimated effects and interactions. No estimate of sampling variability
is available since there are no degrees of freedom remaining to estimate the experimental error. To
plot the estimates in decreasing order of importance, select Pareto Charts from the list of Graphical
Options. To help determine which effects are significant, select Normal Probability Plots of Effects
from the list of Graphical Options. You can then remove insignificant effects by pressing the alternate
mouse button, selecting Analysis Options, and pressing the Exclude button.
```

Aquí se observa el efecto de cada uno de los factores, donde se aprecia que el factor que menos efecto tiene es el A y que C, BC y ABC son quienes presentan un mayor efecto. También se puede apreciar que la interacción AB tiene un valor de 0.0, lo que indica que se puede eliminar este efecto del modelo de regresión.

```
Analysis of Variance for Respuesta - Ejemplo 1
--------------------------------------------------------------------------------
Source                Sum of Squares     Df    Mean Square    F-Ratio    P-Value
--------------------------------------------------------------------------------
A:Temperatura                    8.0      1            8.0
B:Excipiente                    32.0      1           32.0
C:Tratamiento mecáni           128.0      1          128.0
AB                               0.0      1            0.0
AC                              0.32      1           0.32
BC                             200.0      1          200.0
ABC                           208.08      1         208.08
Total error                      0.0      0
--------------------------------------------------------------------------------
Total (corr.)                  576.4      7

R-squared = 100.0 percent
R-squared (adjusted for d.f.) = 0.0 percent

The StatAdvisor
---------------
   The ANOVA table partitions the variability in Respuesta into separate pieces for each of the
effects.  It then tests the statistical significance of each effect by comparing the mean square
against an estimate of the experimental error. Unfortunately, there are no degrees of freedom available
to estimate the error.    The R-Squared statistic indicates that the model as fitted explains 100.0% of
the variability in Respuesta.  The adjusted R-squared statistic, which is more suitable for comparing
models with different numbers of independent variables, is 0.0%.  The mean absolute error(MAE) of 0.0
is the average value of the residuals.  The Durbin-Watson (DW) statistic tests the residuals to
determine if there is any significant correlation based on the order in which they occur in your data
file.
```

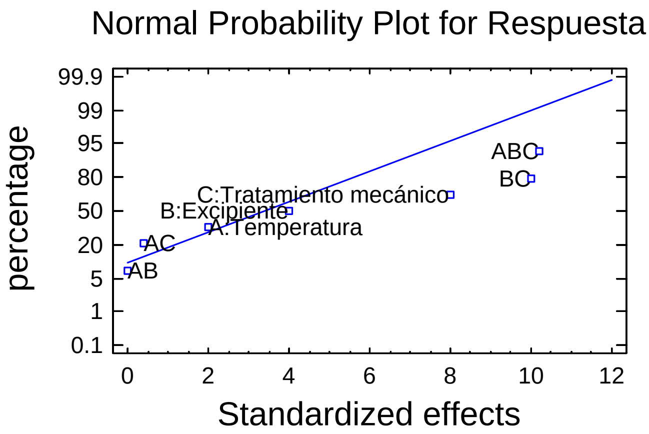
Se tiene la tabla de ANOVA y el valor de R^2, cuyos valores numéricos indican que no hay ningún efecto significativo y que no hay modelo ($R^2 = 0.0$). Lo cual no debe de "espantar" al investigador, ya que el experimento no tiene repeticiones y esto provoca que no se tenga un cuadrado medio del error confiable. Problema que se supera al tener un experimento con repeticiones.

Por otro lado, al "introducir" al modelo todos los posibles efectos se agotan los grados de libertad y no se puede calcular el efecto del error, lo que se puede superar si se elimina alguno de los efectos.

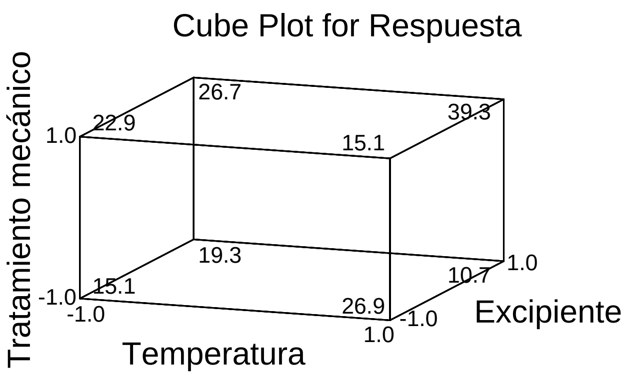
```
Regression coeffs. for Respuesta - Ejemplo 1
----------------------------------------------------------------------
constant                  = 22.0
A:Temperatura             = 1.0
B:Excipiente              = 2.0
C:Tratamiento mecánico    = 4.0
AB                        = 0.0
AC                        = 0.2
BC                        = 5.0
ABC                       = 5.1
----------------------------------------------------------------------

The StatAdvisor
---------------
   This pane displays the regression equation which has been fitted to the data.  The equation of the
fitted model is

Respuesta = 22.0 + 1.0*Temperatura + 2.0*Excipiente + 4.0*Tratamiento mecánico +
0.0*Temperatura*Excipiente + 0.2*Temperatura*Tratamiento mecánico + 5.0*Excipiente*Tratamiento mecánico
+ 5.1*Temperatura*Excipiente*Tratamiento mecánico

where the values of the variables are specified in their original units, except for the categorical
factors which take the values -1 for the low level and +1 for the high level. To have STATGRAPHICS
evaluate this function, select Predictions from the list of Tabular Options.  To plot the function,
select Response Plots from the list of Graphical Options.
```

Aquí se tiene el modelo de regresión a partir del cual se realiza la búsqueda de valores óptimos bajo las condiciones del experimento realizado. Aclarando que el óptimo puede corresponder a un valor máximo o un mínimo, dependiendo del problema en estudio.

Herramientas gráficas del análisis



Este gráfico es una de las mejores opciones para analizar un diseño sin repeticiones, ya que los efectos que "caen" sobre la línea recta o muy cerca de ella son aquellos cuyos efectos son aleatorios, mientras que los más alejados son los que tiene efectos significativos. En este caso, se tiene a los efectos de C, BC y ABC, como los más alejados (más significativos).



En el cubo se puede apreciar donde se encuentra el valor de respuesta mínimo o máximo, de acuerdo a los resultados de este experimento. Por ejemplo, el máximo está en el vértice del cubo abc (todos los factores en su nivel alto); es decir, Temperatura (+1), Excipiente (+1) y Tratamiento mecánico (39.3); y el mínimo en el vértice ab (factores AB en su nivel alto y C en su nivel bajo); es decir, Temperatura (+1), Excipiente (+1) y Tratamiento mecánico (10.7).

```
Optimize Response
-----------------
Goal: maximize Respuesta

Optimum value = 34.2

Factor               Low              High             Optimum
-----------------------------------------------------------------------
Temperatura          -1.0             1.0              1.0
Excipiente           -1.0             1.0              1.0
Tratamiento mecánico -1.0             1.0              1.0


The StatAdvisor
---------------
   This table shows the combination of factor levels which maximizes Respuesta over the indicated
region.  Use the Analysis Options dialog box to indicate the region over which the optimization is to
be performed.  You may set the value of one or more factors to a constant by setting the low and high
limits to that value.
```

Statgraphics presenta los resultados de una rutina numérica de optimización del modelo generado, con la opción de definir (en Pane options o en Analysis options) algunas opciones de trabajo, tales como si se requiere de un máximo o de un mínimo.

No hay que olvidar verificar supuestos, aunque hay que recordar que se está trabajando con modelación empírica y que los supuestos teóricos pueden no cumplirse. Ésta es una herramienta práctica cuya meta es resolver problemas reales, más que cumplir con requerimientos teóricos.

6.10. BLOQUES de un diseño 2^3

Por diversas causas (como las explicadas en el capítulo 3), en ocasiones no es posible realizar un experimento completo en una sola sesión experimental, entonces el experimento se puede realizar en bloques. Para lo cual se "sacrifica" alguna de las interacciones de mayor orden, aunque es práctica común "sacrificar" la mayor de las interacciones, I = ABC, donde a esta última expresión se le conoce como generador.

BLOQUE (+), considerando sólo el signo (+) de la columna ABC

	MEDIA	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	
a	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	26.9
b	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	19.3
c	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	22.9
abc	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	39.3

BLOQUE(-),considerando sólo el signo (-) de la columna ABC

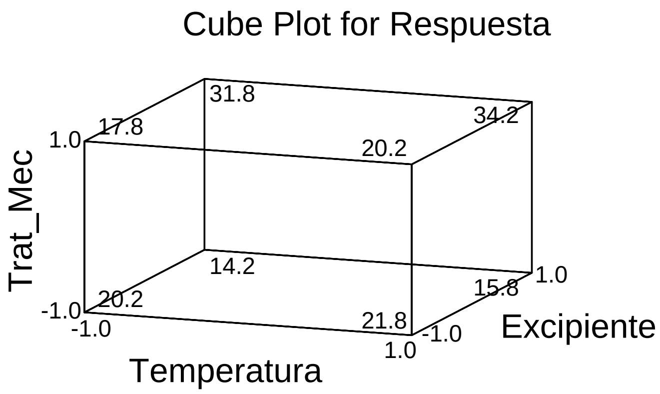
	MEDIA	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	
(1)	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	15.1
ab	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	10.7
ac	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	15.1
bc	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	26.7

Al “bloquear” un diseño se debe cuidar la igualdad en el número de signos positivos y negativos en cada columna. También es importante mencionar que no hay manera de distinguir entre el efecto de la interacción que se utiliza para “bloquear” y el bloque en sí. A esto último se le conoce como **confusión**. En este caso el efecto de la interacción ABC se confunde con el efecto de bloque.

```
Analysis of Variance for Respuesta
--------------------------------------------------------------------------------
Source                    Sum of Squares     Df     Mean Square     F-Ratio     P-Value
--------------------------------------------------------------------------------
A:Temperatura                      8.0        1             8.0
B:Excipiente                      32.0        1            32.0
C:Trat_Mec                       128.0        1           128.0
AB                                 0.0        1             0.0
AC                                0.32        1            0.32
BC                               200.0        1           200.0
blocks                          208.08        1          208.08
Total error                        0.0        0
--------------------------------------------------------------------------------
Total (corr.)                    576.4        7
R-squared = 100.0 percent
R-squared (adjusted for d.f.) = 100.0 percent
```

OBSERVAR QUE APARECE EL EFECTO DE BLOQUE, CUYO VALOR ES IGUAL AL DE LA TRIPLE INTERACCIÓN. Aunque, esto se puede apreciar porque se tienen los resultados del experimento completo en un solo bloque, pero en situaciones reales no es posible contar con los datos del experimento sin bloques y se debe confiar en los resultados del diseño en bloques.

```
Analysis Summary
----------------
File name: <Untitled>
Estimated effects for Respuesta
----------------------------------------------------------------------
average       = 22.0
A:Temperatura = 2.0
B:Excipiente  = 4.0
C:Trat_Mec    = 8.0
AB            = 0.0
AC            = 0.4
BC            = 10.0
block         = 10.2
----------------------------------------------------------------------
No degrees of freedom left to estimate standard errors.
```



El cubo muestra que el máximo sigue estando en el vértice abc, mientras que el mínimo ahora se encuentra en el vértice b. Entonces, si se busca un máximo, el diseño a pesar del bloqueo "manda" directo a la mejor opción, pero si se busca el mínimo ya no se tiene el mismo resultado que con el diseño sin bloques. Hay que aceptar que se "paga" en pérdida de información por el hecho de bloquear.

NOTA: SE PUEDE BLOQUEAR EN CUALQUIERA DE LAS INTERACCIONES Y DEPENDIENDO DE LA INTERACCIÓN ELEGIDA ES LA CONFUSIÓN DE EFECTOS QUE SE PRESENTA. ACEPTANDO CIERTA INCERTIDUMBRE EN LAS CONCLUSIONES POR EFECTO DE BLOQUEO, PERO AÚN ASÍ ESTOS DISEÑOS CUMPLEN PERFECTAMENTE SU PAPEL DE HERRAMIENTAS DE EXPLORACIÓN Y MODELACIÓN EMPÍRICA.

6.11. FRACCIÓN de un diseño 2^k (2^{k-p})

Otra de las opciones de trabajo es realizar alguna fracción de un experimento, cuya representación es 2^{k-p}, por ejemplo un diseño 2^{3-1}, un diseño con 3 factores, a dos niveles y a la un medio.

Un aspecto distintivo de los diseños en bloques, es que en bloques el experimento se hace en etapas o de "poquito" a "poquito", pero se hace todo el experimento. Mientras que en los **diseños fraccionados sólo se hace una parte (fracción) del experimento.**

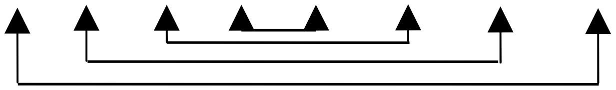
Si se considera la representación de un diseño 2^3 completo

	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
(1)	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
a	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
b	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
ab	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
c	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
ac	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
bc	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
abc	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Al igual que en un diseño en bloques se puede seleccionar cualquier interacción para obtener una fracción 2^{3-1}. Aunque también es común seleccionar la interacción mayor.

En el siguiente cuadro, se está considerando la fracción con el signo menos, pero también hay una fracción con base en los signos más de la interacción mayor.

	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
(1)	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1
ab	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
ac	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
bc	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1



Además, en las columnas señaladas sus efectos tienen la misma magnitud, pero signo contrario, por ejemplo:

$$A = \frac{(ab+ac)}{2} - (1+bc) \qquad \text{y} \qquad BC = \frac{(1+bc)}{2} - \frac{(ab+ac)}{2}$$

A este tipo de efectos se les conoce como alias, ya que al medir uno se está midiendo al otro pero con signo contrario.

A nivel de concepto, confusión y alias son lo mismo aunque por cuestiones pedagógicas: en bloques se habla de confusión y en fracciones de alias. En la bibliografía hay autores que se refieren a ellos de manera indiscriminada. También se debe mencionar que en un diseño se puede elegir una amplia gama de fracciones (dependiendo de la interacción que se elija) y que dependiendo de esta elección es la cantidad de información que se puede ganar o perder por efecto de hacer sólo una parte del experimento, por lo que es necesario hablar de la resolución de un diseño.

6.12. Resolución de un diseño

La resolución de un diseño se representa por un número romano como subíndice, por ejemplo 2_V^{4-1} representa la fracción un medio de un diseño de cuatro factores, con resolución V. Donde:

1. Un diseño de resolución R = III no confunde los efectos principales entre sí, pero los confunde con las interacciones de dos factores.

2. Un diseño de resolución R = IV no confunde los efectos principales con las interacciones de dos factores, pero confunde las interacciones de dos factores entre si.

3. Un diseño de resolución R = V no confunde los efectos principales con las interacciones de dos factores entre si, pero confunde las interacciones de dos factores con las de tres.

Un aspecto relevante es que actualmente el software ayuda a la definición, selección y aleatorización de este tipo de diseños, por lo que el trabajo del investigador se limita a seleccionar opciones en un paquete estadístico, siempre y cuando tenga bien claras las metas de la experimentación.

Como ejemplo del manejo de este tipo de diseños se realizará el análisis de la siguiente tabla de datos, una fracción de los datos que se han venido trabajando.

	MEDIA	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	Y
(1)	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	15.1
ab	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	10.7
ac	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	15.1
bc	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	26.7

Cuyos resultados son

Screening Design Attributes

```
Design Summary
--------------
Design class: Screening
Design name: Saturated half fraction      2^3-1

Base Design
-----------
Number of experimental factors: 3  Number of blocks: 1
Number of responses: 1
Number of runs: 4                  Error degrees of freedom: -3
Randomized: No

Factors                Low          High         Units        Continuous
------------------------------------------------------------------------
Temperatura            -1.0         1.0          Grados       Yes
Excipiente             -1.0         1.0          %            Yes
Trat_Mec               -1.0         1.0                       No


The StatAdvisor
---------------
   NOTE: if you have used Augment Design to add a fraction to a fractional factorial design, you should
check the Alias Pattern using Tabular Options.If unusual confounding exists, the number of degrees of
freedom for estimating experimental error may be larger than shown in the summary.
```

En este diseño se tienen 4 corridas (N=4) y 3 factores, de manera que se cumple la condición de k = N-1, lo que define a un diseño factorial fraccionado saturado (otros diseños saturados son los de 8 corridas para 7 factores o el de 16 corridas para 15 factores). También, a este tipo de diseños se les puede agregar secuencialmente alguna otra fracción en la que se han intercambiado ciertos signos (doblez, plegado o fold over) del diseño original, para romper la confusión de efectos (aumentar la resolución).

```
Alias Structure

Contrast  Estimates
--------  ---------
1         A+BC
2         B+AC
3         C+AB


The StatAdvisor
---------------
   The alias structure shows which main effects and interactions are confounded with each other.  Since
this design is resolution III, the main effects will be confounded with two-factor interactions. To
interpret the results, you will have to assume away all interactions between the factors. After running
the design, you can add additional runs to bring the design to resolution IV by selecting Augment
Design from the main menu.
```

```
Analyze Experiment - Respuesta

Analysis Summary
----------------

Estimated effects for Respuesta
----------------------------------------------------------------------
average           = 16.9
A:Temperatura+BC = -8.0
B:Excipiente+AC  = 3.6
C:Trat_Mec+AB    = 8.0
----------------------------------------------------------------------
No degrees of freedom left to estimate standard errors.


Analysis of Variance for Respuesta
--------------------------------------------------------------------------------
Source                Sum of Squares     Df    Mean Square    F-Ratio    P-Value
--------------------------------------------------------------------------------
A:Temperatura+BC                64.0      1           64.0
B:Excipiente+AC                12.96      1          12.96
C:Trat_Mec+AB                   64.0      1           64.0
Total error                      0.0      0
--------------------------------------------------------------------------------
Total (corr.)                 140.96      3

R-squared = 100.0 percent
R-squared (adjusted for d.f.) = 0.0 percent


Optimize Response
-----------------
Goal: maximize Respuesta

Optimum value = 26.7

Factor                Low              High           Optimum
-----------------------------------------------------------------------
Temperatura          -1.0              1.0             -1.0
Excipiente           -1.0              1.0              1.0
Trat_Mec             -1.0              1.0              1.0


The StatAdvisor
---------------
   This table shows the combination of factor levels which maximizes Respuesta over the indicated
region.  Use the Analysis Options dialog box to indicate the region over which the optimization is to
be performed.  You may set the value of one or more factors to a constant by setting the low and high
limits to that value.
```

El elemento clave para este tipo de diseños es la rutina de optimización en la cual se resume la combinación de niveles de los factores que optimiza la respuesta, sin perder de vista todos los demás elementos de interpretación.

6.13. Diseños 2^k en STATGRAPHICS

En esta sección se pretende mostrar las situaciones más comunes en la experimentación con diseños 2^k y 3^k, incluyendo comentarios y sugerencias de interpretación que faciliten su manejo y correcta aplicación.

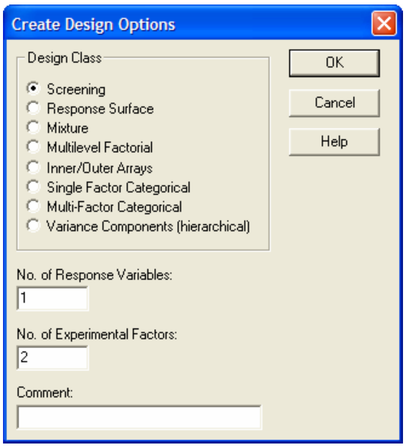
Ejemplo 6.2. Un bacteriólogo está interesado en los efectos de dos medios de cultivo diferentes y dos tiempos diferentes sobre el crecimiento de un virus particular. Para esto realiza seis réplicas de un diseño 2^2, haciendo las corridas de manera aleatoria. Analizar los datos del crecimiento viral que se presentan a continuación. (Douglas C. Montgomery, Diseño y análisis de experimentos, 2ª. Edición, Limusa-Wiley, 2002, pág. 278).

	Medio de cultivo			
Tiempo, horas	1		2	
12	21	22	25	26
	23	28	24	25
	20	26	29	27
18	37	39	31	34
	38	38	29	33
	35	36	30	35

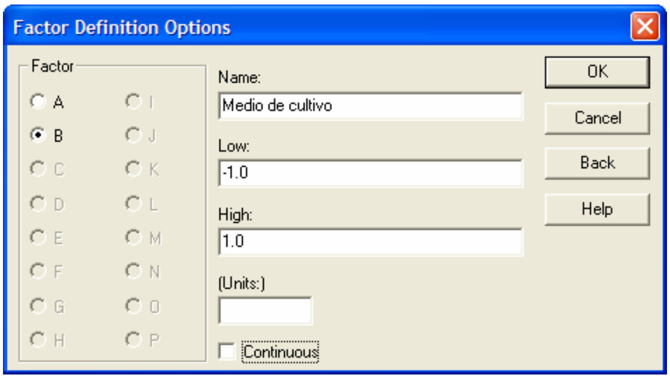
Diseño 2^2, completo y con 6 repeticiones.

STATGRAPHICS

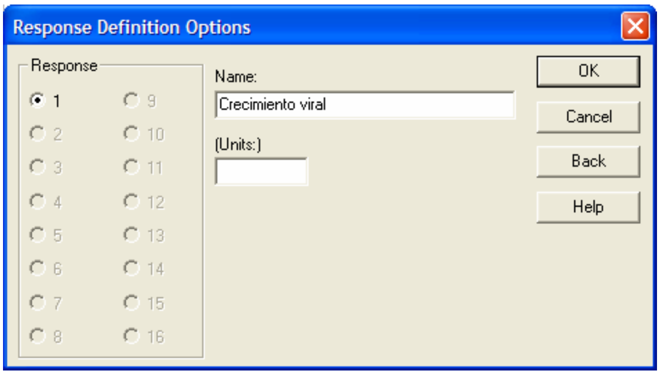
1. A partir de la barra del menú seguir la secuencia: Special -> Experimental Design -> Create Design



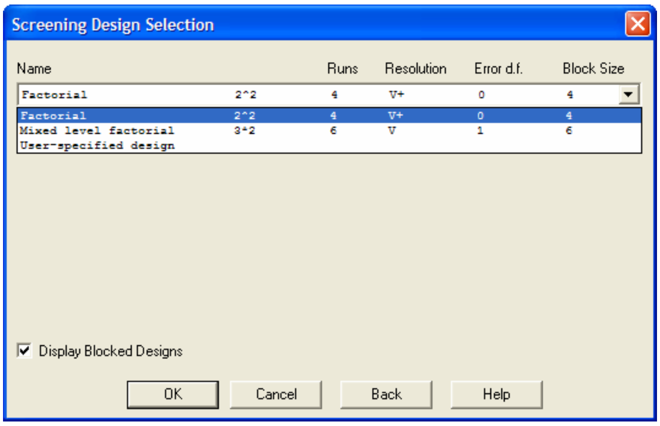
2. Seleccionar Screening de la lista de diseños posibles. Con una variable de respuesta y 2 factores experimentales.



3. Definir los factores, nombre, unidades y si son de tipo continuo.



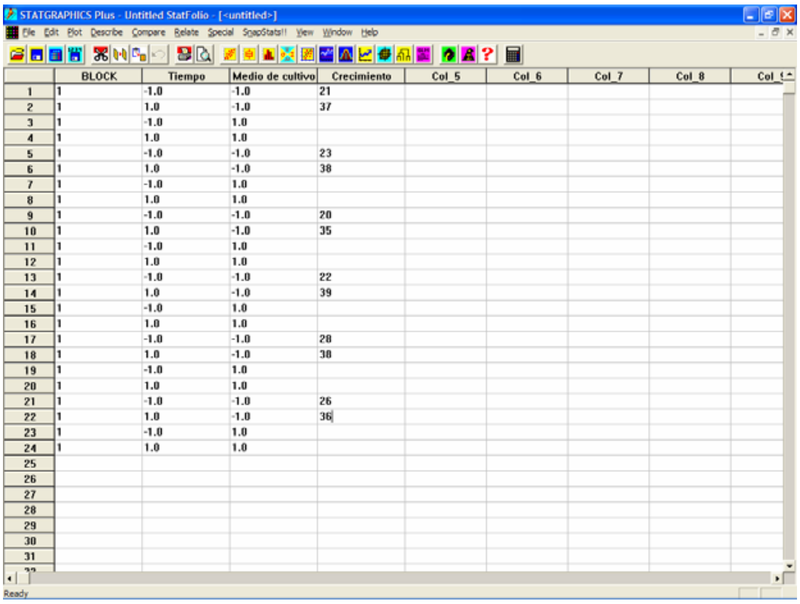
4. Definir la variable de respuesta.



5. Seleccionar el tipo de diseño, de la lista que aparece. Como sólo se despliegan opciones con bloques (ver ultima columna), se recomienda utilizar el diseño especificado por el usuario.

6. Al aparecer la definición del diseño, guardar el diseño, con la secuencia: FILE -> SAVE AS -> SAVE DESIGN FILE AS

7. Abrir el diseño ya guardado

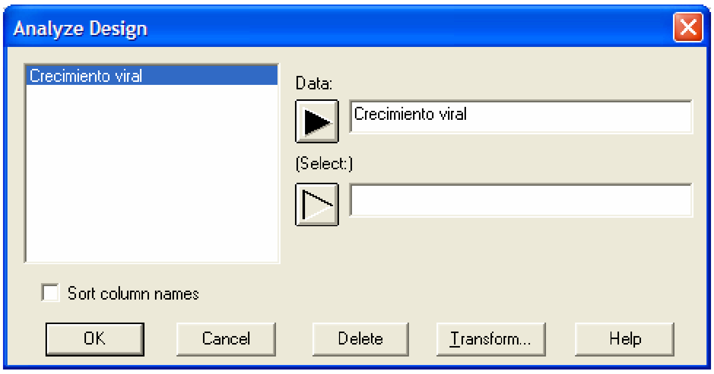


8. Ingresar datos, cuidando:

8.1. Que la columna Block sólo contenga 1's.

8.2. Por haber seleccionado el diseño definido por el usuario se deben "Teclear" tanto los 1.0 y los -1.0 (es importante asegurarse de teclear los puntos decimales), así como los valores de la variable de respuesta. Cuidar que coincidan los resultados con la combinación de factores que le corresponde.

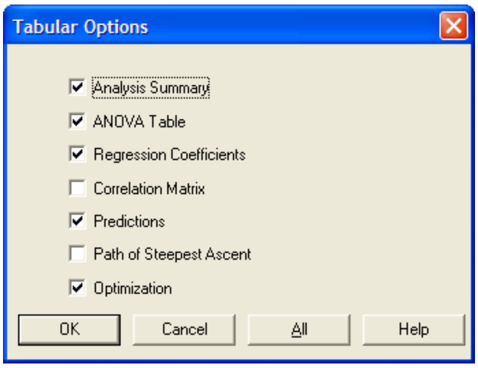
8.3. "Teclear" todos los datos, no sólo los de la figura.



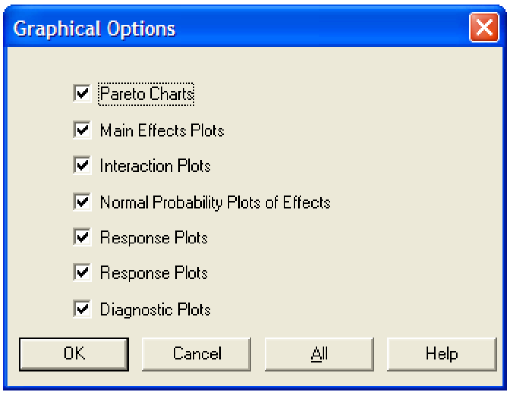
9. Analizar el diseño, con la secuencia

Special -> Experimental Design -> Analyze Design

Seleccionar la variable de respuesta y OK.



10. Seleccionar las opciones tabulares y gráficas del análisis



RESULTADOS

Screening Design Attributes

Design Summary

Design class: Screening
Design name: User-specified
File name: <Untitled>
Comment: Crecimiento viral

Base Design

Number of experimental factors: 2
Number of responses: 1

Factors	Low	High	Units	Continuous
Tiempo	-1.0	1.0	horas	Yes
medio	-1.0	1.0		No

Responses	Units
Crec_virus	

The StatAdvisor

You have asked to setup a user-specified design which will study the effects of 2 factors. The design is to be run in a single block. You are responsible for determining the experimental runs to be conducted. Enter them into the spreadsheet and then return to this procedure to examine their properties.

NOTE: if you have used Augment Design to add a fraction to a fractional factorial design, you should check the Alias Pattern using Tabular Options.If unusual confounding exists, the number of degrees of freedom for estimating experimental error may be larger than shownin the summary.

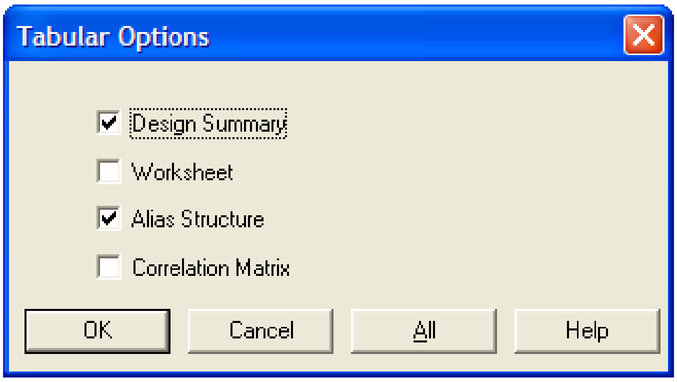
Alias Structure

Alias structure is not available for user-specified designs.

The StatAdvisor

The alias structure shows which main effects and interactions are confounded with each other. It is not available for user-specified designs. Select Correlation Matrix from the list of Tabular Options instead.

Se tiene la definición del diseño y en la ventana de opciones tabulares se le pide la estructura de los alias, en este caso como es un diseño completo y sin bloques no existen alias ni confusión de efectos.

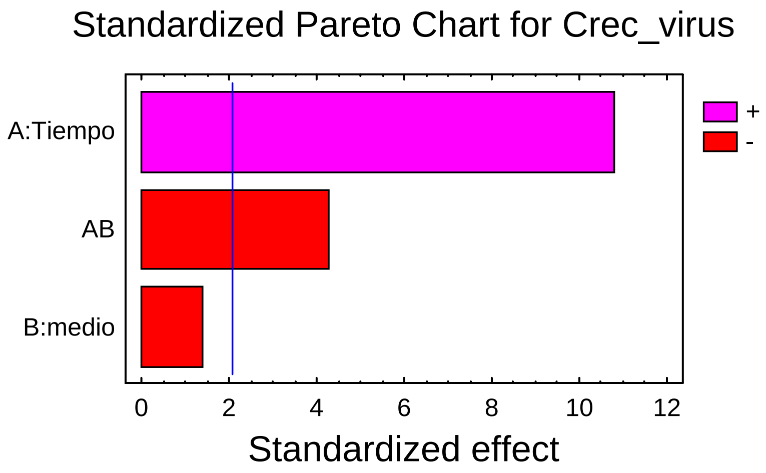



```
Analyze Experiment - Crec_virus

Analysis Summary
----------------
File name: <Untitled>
Comment: Crecimiento viral

Estimated effects for Crec_virus
----------------------------------------------------------------------
average  = 29.625   +/- 0.461354
A:Tiempo = 9.91667  +/- 0.922707
B:medio  = -1.25    +/- 0.922707
AB       = -3.91667 +/- 0.922707
----------------------------------------------------------------------
Standard errors are based on total error with 20 d.f.
```

Esta tabla muestra los efectos de cada factor y sus combinaciones, donde se aprecia que el factor que tiene mayor efecto en el experimento es la temperatura (A), después la interacción AB (Tiempo x Medio de cultivo) y que el medio de cultivo, factor B es el que muestra menos significancia. Aspectos que se deben cuantificar mediante el ANOVA y apoyar en el gráfico de Pareto.

The StatAdvisor

This table shows each of the estimated effects and interactions. Also shown is the standard error of each of the effects, which measures their sampling error. To plot the estimates in decreasing order of importance, select Pareto Charts from the list of Graphical Options. To test the statistical significance of the effects, select ANOVA Table from the list of Tabular Options. You can then remove insignificant effects by pressing the alternate mouse button, selecting Analysis Options, and pressing the Exclude button.



Este gráfico separa los efectos significativos de los No significativos, separándolos con una línea vertical. En este caso sólo son significativos A y AB. Lo que se corrobora con los P-value de la tabla de ANOVA que se presenta a continuación.

Analysis of Variance for Crec_virus - Crecimiento viral

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
A:Tiempo	590.042	1	590.042	115.51	0.0000
B:medio	9.375	1	9.375	1.84	0.1906
AB	92.0417	1	92.0417	18.02	0.0004
Total error	102.167	20	5.10833		
Total (corr.)	793.625	23			

R-squared = 87.1266 percent
R-squared (adjusted for d.f.) = 85.1956 percent
Standard Error of Est. = 2.26016
Mean absolute error = 1.73611
Durbin-Watson statistic = 2.06362 (P=0.2059)
Lag 1 residual autocorrelation = -0.102501

The StatAdvisor

The ANOVA table partitions the variability in Crec_virus into separate pieces for each of the effects. It then tests the statistical significance of each effect by comparing the mean square against an estimate of the experimental error. In this case, 2 effects have P-values less than 0.05, indicating that they are significantly different from zero at the 95.0% confidence level.

The R-Squared statistic indicates that the model as fitted explains 87.1266% of the variability in Crec_virus. The adjusted R-squared statistic, which is more suitable for comparing models with different numbers of independent variables, is 85.1956%. The standard error of the estimate shows the standard deviation of the residuals to be 2.26016. The mean absolute error (MAE) of 1.73611 is the average value of the residuals. The Durbin-Watson (DW) statistic tests the residuals to determine if there is any significant correlation based on the order in which they occur in your data file. Since the P-value is greater than 0.05, there is no indication of serial autocorrelation in the residuals.

Regression coeffs. for Crec_virus - Crecimiento viral

constant	=	29.625
A:Tiempo	=	4.95833
B:medio	=	-0.625
AB	=	-1.95833

The StatAdvisor

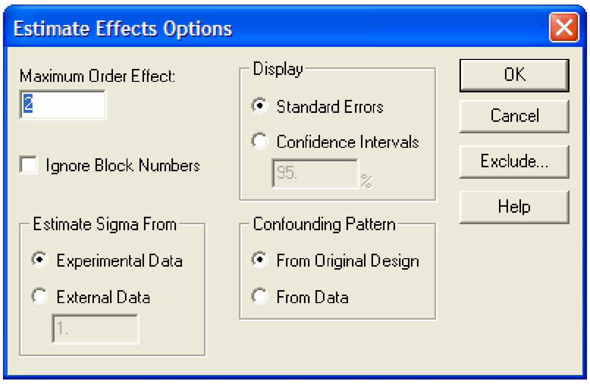
This pane displays the regression equation which has been fitted to the data. The equation of the fitted model is

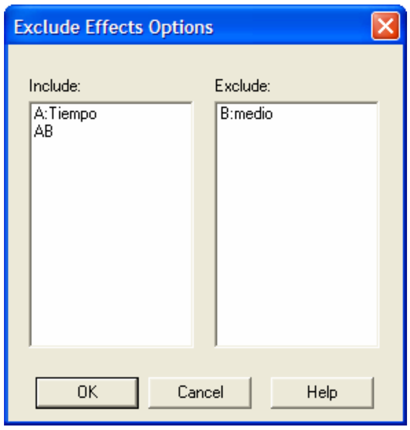
Crec_virus = 29.625 + 4.95833*Tiempo - 0.625*medio - 1.95833*Tiempo*medio

where the values of the variables are specified in their original units, except for the categorical factors which take the values -1 for the low level and +1 for the high level. To have STATGRAPHICS evaluate this function, select Predictions from the list of Tabular Options. To plot the function, select Response Plots from the list of Graphical Options.

Este polinomio es el que se utiliza para ajustar las respuestas esperadas y la rutina de optimización. Inclusive se tiene la opción de eliminar (excluir) o agregar (include) términos al polinomio.

Para agregar o eliminar términos, en la ventana de resultados dar un clic derecho y en **Analysis options** seleccionar el botón Exclude, para que aparezca el diálogo que permite excluir efectos.



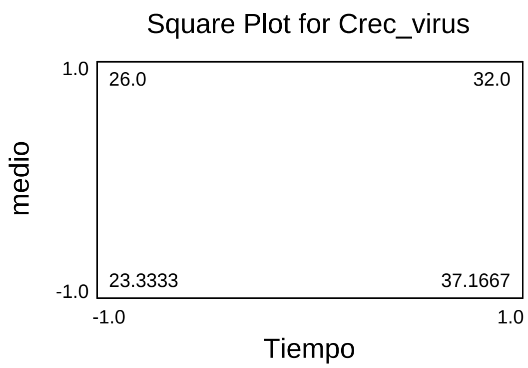


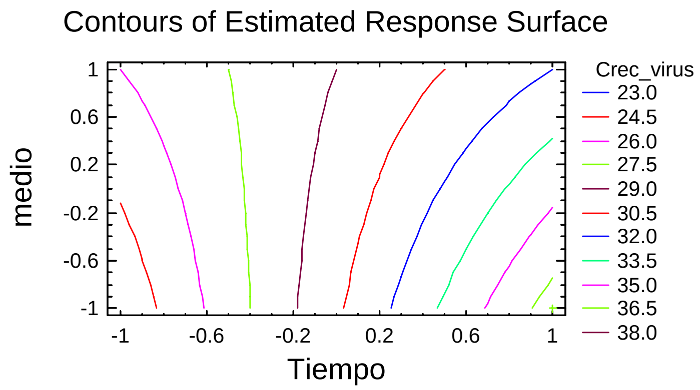
La recomendación es "jugar" con esta opción, que es fundamental en la búsqueda del modelo más adecuado.

Estimation Results for Crec_virus

Row	Observed Value	Fitted Value	Lower 95.0% CL for Mean	Upper 95.0% CL for Mean
1	21.0	23.3333	21.4086	25.2581
2	23.0	23.3333	21.4086	25.2581
3	20.0	23.3333	21.4086	25.2581
4	22.0	23.3333	21.4086	25.2581
5	28.0	23.3333	21.4086	25.2581
6	26.0	23.3333	21.4086	25.2581
7	25.0	26.0	24.0753	27.9247
8	24.0	26.0	24.0753	27.9247
9	29.0	26.0	24.0753	27.9247
10	26.0	26.0	24.0753	27.9247
11	25.0	26.0	24.0753	27.9247
12	27.0	26.0	24.0753	27.9247
13	37.0	37.1667	35.2419	39.0914
14	39.0	37.1667	35.2419	39.0914
15	38.0	37.1667	35.2419	39.0914
16	38.0	37.1667	35.2419	39.0914
17	35.0	37.1667	35.2419	39.0914
18	36.0	37.1667	35.2419	39.0914
19	31.0	32.0	30.0753	33.9247
20	34.0	32.0	30.0753	33.9247
21	29.0	32.0	30.0753	33.9247
22	33.0	32.0	30.0753	33.9247
23	30.0	32.0	30.0753	33.9247
24	35.0	32.0	30.0753	33.9247

```
The StatAdvisor
---------------
   This table contains information about values of Crec_virus generated using the fitted model.  The
table includes:
   (1) the observed value of Crec_virus (if any)
   (2) the predicted value of Crec_virus using the fitted model
   (3) 95.0% confidence limits for the mean response
Each item corresponds to the values of the experimental factors in a specific row of your data file.
To generate forecasts for additional combinations of the factors, add additional rows to the bottom of
your data file. In each new row, enter values for the experimental factors but leave the cell for the
response empty.  When you return to this pane, forecasts will be added to the table for the new rows,
but the model will be unaffected.
```






```
Optimize Response
-----------------
Goal: maximize Crec_virus

Optimum value = 37.1667
```

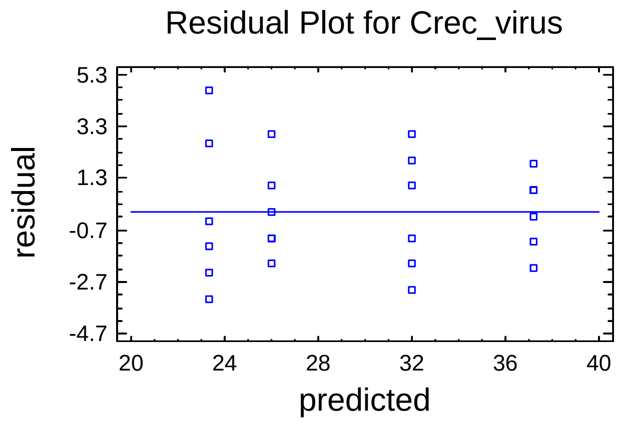
Factor	Low	High	Optimum
Tiempo	-1.0	1.0	1.0
medio	-1.0	1.0	-1.0

.

El valor óptimo se encuentra para el factor Tiempo en su nivel alto y para el factor medio de cultivo en su nivel bajo

```
The StatAdvisor
---------------
   This table shows the combination of factor levels which maximizes Crec_virus over the indicated
region.  Use the Analysis Options dialog box to indicate the region over which the optimization is to
be performed.  You may set the value of one or more factors to a constant by setting the low and high
limits to that value.
```

Los valores "predichos" (Predicted), los gráficos de superficie de respuesta o el cuadrado (como en este caso) y los gráficos de contornos de respuesta, aunado a la rutina de optimización permiten ubicar las condiciones experimentales en que se optimiza la variable en estudio.



Puesto que hay 6 repeticiones, entonces es posible analizar la validez del modelo, confiar en los resultados del ANOVA y verificar los supuestos del diseño, apoyándose en el gráfico de residuales. En el cual no se detecta problema alguno.

Ejemplo 6.3. Se encuentra en estudio el rendimiento de un proceso químico. Se cree que las dos variables más importantes son la presión y la temperatura. Se seleccionan tres niveles de cada factor y se realizan dos réplicas. Obteniendo los siguientes resultados.

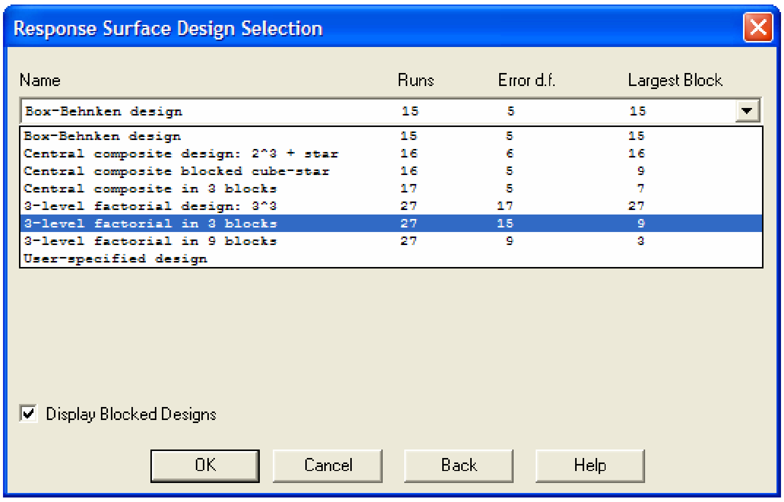
	Presión (psi)		
Temperatura	200	215	230
80 ºC	90.4	90.7	90.2
	90.2	90.6	90.4
90 ºC	90.1	90.5	89.9
	90.3	90.6	90.1
100 ºC	90.5	90.8	90.4
	90.7	90.9	90.1

Diseño 3^2, completo, sin bloqueo y con 2 repeticiones
(aquí los niveles se representan como -1.0, 0.0 y 1.0

1. A partir de la barra del menú seguir la secuencia: **Special -> Experimental Design -> Create Design**

2. Seleccionar **Response Surface**, en este tipo de diseño se asume que los factores son cuantitativos.

3. Definir los factores, nombre, unidades y si son de tipo continuo.

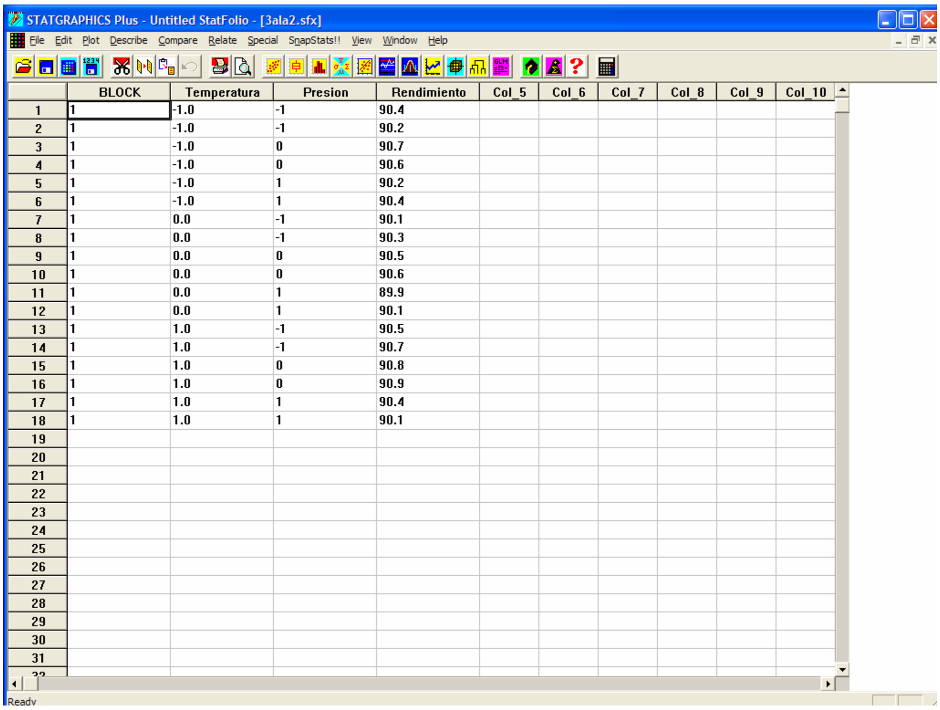


4. Definir la variable de respuesta.

5. Seleccionar el diseño especificado por el usuario, ya que en la lista no aparece el diseño 3^2 en un solo bloque de tamaño 18.

6. Una vez que aparece la definición del diseño, guardarlo con la secuencia: FILE -> SAVE AS -> SAVE DESIGN FILE AS

7. Abrir el diseño ya guardado



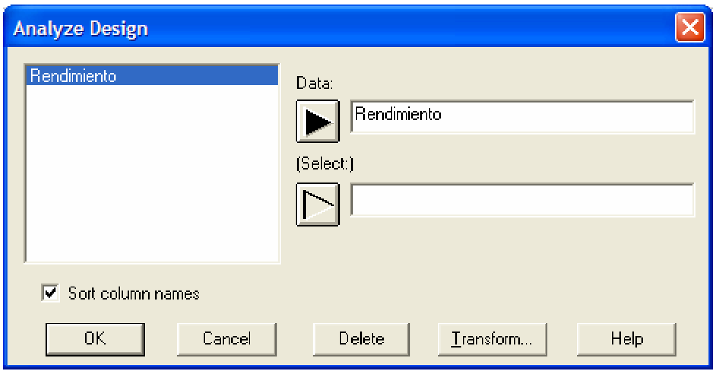
	BLOCK	Temperatura	Presion	Rendimiento	Col_5	Col_6	Col_7	Col_8	Col_9	Col_10
1	1	-1.0	-1	90.4						
2	1	-1.0	-1	90.2						
3	1	-1.0	0	90.7						
4	1	-1.0	0	90.6						
5	1	-1.0	1	90.2						
6	1	-1.0	1	90.4						
7	1	0.0	-1	90.1						
8	1	0.0	-1	90.3						
9	1	0.0	0	90.5						
10	1	0.0	0	90.6						
11	1	0.0	1	89.9						
12	1	0.0	1	90.1						
13	1	1.0	-1	90.5						
14	1	1.0	-1	90.7						
15	1	1.0	0	90.8						
16	1	1.0	0	90.9						
17	1	1.0	1	90.4						
18	1	1.0	1	90.1						

8. Ingresar datos, cuidando dos aspectos:

8.1. Que la columna Block sólo contenga 1's.

8.2. Por haber seleccionado el diseño definido por el usuario se deben "Teclear" tanto los 1.0, 0.0 y los -1.0 (es importante asegurarse de teclear los puntos decimales), así como los valores de la variable de respuesta.

8.3. Cuidar que coincidan los resultados con la combinación de factores que le corresponde.



9. Analizar el diseño, con la secuencia

Special -> Experimental Design -> Analyze Design

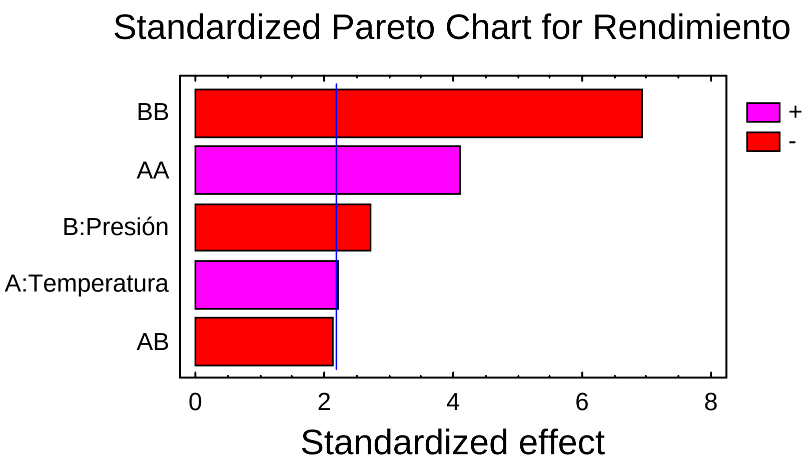
Seleccionar la variable de respuesta y OK.

10. Seleccionar las opciones tabulares y gráficas del análisis

11. Realizar el análisis de las opciones solicitadas y dar la conclusión final, al contexto del problema.

Resultados en Statgraphics

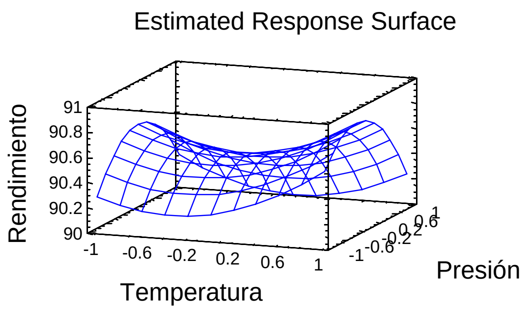
```
Analysis Summary
----------------
Estimated effects for Rendimiento
----------------------------------------------------------------------
average       = 90.5222   +/- 0.0622939
A:Temperatura = 0.15      +/- 0.0682395
B:Presión     = -0.183333 +/- 0.0682395
AA            = 0.483333  +/- 0.118194
AB            = -0.175    +/- 0.083576
BB            = -0.816667 +/- 0.118194
----------------------------------------------------------------------
Standard errors are based on total error with 12 d.f.


The StatAdvisor
---------------
   This table shows each of the estimated effects and interactions. Also shown is the standard error of
each of the effects, which measures their sampling error.  To plot the estimates in decreasing order of
importance, select Pareto Charts from the list of Graphical Options.  To test the statistical
significance of the effects, select ANOVA Table from the list of Tabular Options. You can then remove
insignificant effects by pressing the alternate mouse button, selecting Analysis Options, and pressing
the Exclude button.
```

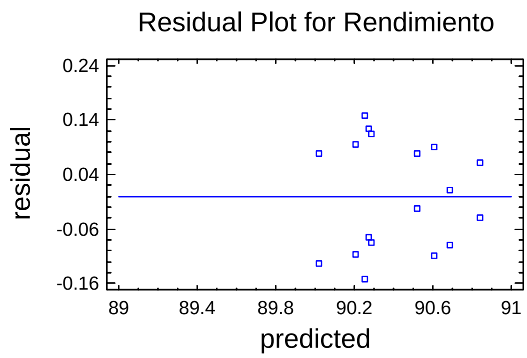


```
Analysis of Variance for Rendimiento
--------------------------------------------------------------------------------
Source                  Sum of Squares     Df     Mean Square     F-Ratio     P-Value
--------------------------------------------------------------------------------
A:Temperatura                  0.0675       1          0.0675        4.83      0.0483
B:Presión                    0.100833       1        0.100833        7.22      0.0198
AA                           0.233611       1        0.233611       16.72      0.0015
AB                            0.06125       1         0.06125        4.38      0.0582
BB                           0.666944       1        0.666944       47.74      0.0000
Total error                  0.167639      12       0.0139699
--------------------------------------------------------------------------------
Total (corr.)                 1.29778      17

R-squared = 87.0826 percent
R-squared (adjusted for d.f.) = 81.7004 percent
Standard Error of Est. = 0.118194
Mean absolute error = 0.0888889
Durbin-Watson statistic = 2.95257 (P=0.0002)
Lag 1 residual autocorrelation = -0.584277

The StatAdvisor
---------------
   The ANOVA table partitions the variability in Rendimiento into separate pieces for each of the
effects.  It then tests the statistical significance of each effect by comparing the mean square
against an estimate of the experimental error.  In this case, 4 effects have P-values less than 0.05,
indicating that they are significantly different from zero at the 95.0% confidence level.
   The R-Squared statistic indicates that the model as fitted explains 87.0826% of the variability in
Rendimiento.  The adjusted R-squared statistic, which is more suitable for comparing models with
different numbers of independent variables, is 81.7004%.  The standard error of the estimate shows the
standard deviation of the residuals to be 0.118194.  The mean absolute error (MAE) of 0.0888889 is the
average value of the residuals. The Durbin-Watson (DW) statistic tests the residuals to determine if
there is any significant correlation based on the order in which they occur in your data file. Since
the P-value is less than 0.05, there is an indication of possible serial correlation.  Plot the
residuals versus row order to see if there is any pattern which can be seen.
```

Hay efecto de factores principales y hay efectos cuadráticos, aunque la interacción es poco significativa, según se aprecia en la tabla de ANOVA y en el gráfico de Pareto.

```
Regression coeffs. for Rendimiento
----------------------------------------------------------------------
constant        = 90.5222
A:Temperatura   = 0.075
B:Presión       = -0.0916667
AA              = 0.241667
AB              = -0.0875
BB              = -0.408333
----------------------------------------------------------------------


The StatAdvisor
---------------
   This pane displays the regression equation which has been fitted to the data.  The equation of the
fitted model is


Rendimiento = 90.5222 + 0.075*Temperatura - 0.0916667*Presión + 0.241667*Temperatura^2 -
0.0875*Temperatura*Presión - 0.408333*Presión^2


where the values of the variables are specified in their original units.  To have STATGRAPHICS evaluate
this function, select Predictions from the list of Tabular Options. To plot the function, select
Response Plots from the list of Graphical Options.
```






```
Optimize Response
-----------------
Goal: maximize Rendimiento

Optimum value = 90.8585

Factor                Low             High            Optimum
-----------------------------------------------------------------------
Temperatura           -1.0            1.0             0.999999
Presión               -1.0            1.0             -0.219351


The StatAdvisor
---------------
   This table shows the combination of factor levels which maximizes Rendimiento over the indicated
region.  Use the Analysis Options dialog box to indicate the region over which the optimization is to
be performed.  You may set the value of one or more factors to a constant by setting the low and high
limits to that value.
```

El gráfico de superficie de respuesta, así como los resultados de optimización muestran que el óptimo (máximo) no se encuentra en un vértice, por lo que se deben “regresar” esos puntos óptimos a sus valores originales, aplicando la ecuación de conversión de unidades dada en la sección 6.4.

Es importante recalcar que cuando se tienen 3 niveles de un factor es preferible trabajar con diseños de superficies de respuesta y que el experimentador debe cuidar que los niveles de sus factores sean cuantitativos continuos, para que haga sentido encontrar un óptimo fuera de los vértices del diseño.

Ejemplo 6.4. Un fabricante de sopas instantáneas desea producir paquetes con mezclas de sopas secas con una variación mínima en el peso de los paquetes. Como se identificaron cinco factores que pueden influir en la variación del proceso de llenado, se realizó un experimento fraccionario 2^{5-1} con la relación de definición I = **-** ABCDE para evaluar los efectos de los factores y sus interacciones. Los factores y niveles son:

A = número de puertos en las mezcladoras por donde se agrega aceite vegetal (1 y 3)

B = La temperatura que rodea la mezcladora (- enfriado, + temperatura ambiente)

C = Tiempo de mezclado (60 y 80 segundo)

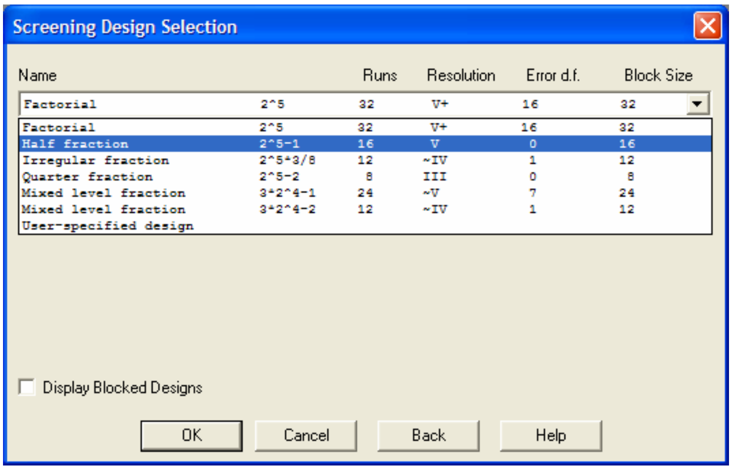
D = El peso del lote (1500 y 2000 libras)

E = Los días de retraso entre mezclar y empacar (1 y 7)

El tamaño de la muestra fue entre 125 y 150 paquetes de sopa de una corrida de producción de ocho horas por cada combinación. Se calculó la desviación estándar del peso de los paquetes como una medida de la variación en el proceso de llenado y se uso como variable de respuesta. Los niveles de los factores y la desviación estándar del proceso para cada una de las 16 combinaciones son las siguientes. (Robert O. Kuehl, Diseño de Experimentos. Principios estadísticos para el diseño y análisis de investigaciones, 2ª. Edición, Ed. Thomson-Lerarning, 2001, pág. 418-419.)

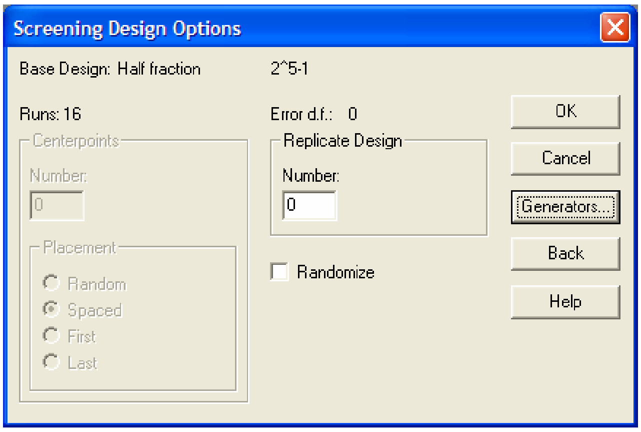
Corrida	A	B	C	D	E	Y
1	-1	-1	-1	1	1	0.78
2	1	-1	1	1	1	1.10
3	1	1	-1	-1	-1	1.70
4	1	-1	1	-1	-1	1.28
5	-1	1	-1	-1	1	0.97
6	-1	-1	1	-1	1	1.47
7	-1	1	-1	1	-1	1.85
8	1	1	1	1	-1	2.10
9	-1	1	1	1	1	0.76
10	1	1	-1	1	1	0.62
11	-1	-1	1	1	-1	1.09
12	-1	-1	-1	-1	-1	1.13
13	1	-1	-1	-1	1	1.25
14	1	1	1	-1	1	0.98
15	1	-1	-1	1	-1	1.36
16	-1	1	1	-1	-1	1.18

Statgraphics

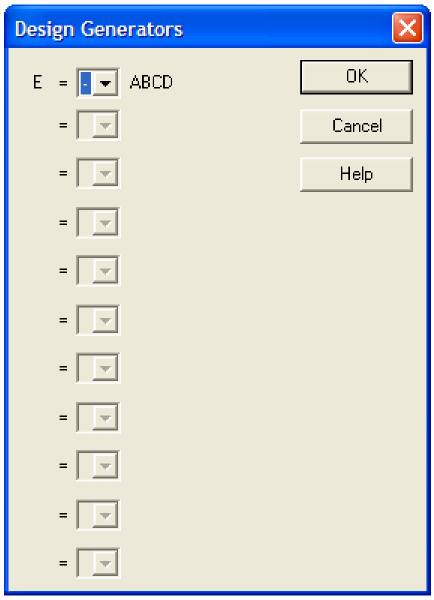


Seguir la misma secuencia de los ejemplos anteriores.

Al llegar a la selección del modelo desactivar la opción Display Blocked Designs (esquina inferior izquierda) y de la lista que se despliega seleccionar Half fraction (que corresponde a un diseño de resolución V, en un solo bloque de tamaño 16).



En la ventana de opciones del diseño aparece el botón Generators, el cual se utiliza para definir la interacción sobre la cual se va a elegir la fracción.



Por omisión aparece como generador la interacción mayor y con signo +, entonces hay que dar un clic en la ventana E = ABCD y teclear el signo **-**.

NOTA: E = ABCD es equivalente a I = ABCDE, por lo que debe recordarse este otro tipo de notación.

Resultados

```
Design Summary
--------------
Design class: Screening
Design name: Half fraction                2^5-1

Base Design
-----------
Number of experimental factors: 5  Number of blocks: 1
Number of responses: 1
Number of runs: 16                 Error degrees of freedom: 0
Randomized: No

Factors                Low         High         Units        Continuous
-----------------------------------------------------------------------
Puertos                -1.0        1.0                       No
Temperatura            -1.0        1.0                       No
Tiempo                 -1.0        1.0                       Yes
Peso_lote              -1.0        1.0                       Yes
Dias_retraso           -1.0        1.0                       Yes

Responses              Units
-----------------------------------
Desviación
```

```
The StatAdvisor
---------------
   You have created a Half fraction design which will study the effects of 5 factors in 16 runs.  The
design is to be run in a single block.  The order of the experiments has not been randomized. If
lurking variables are present, they may distort the results. No degrees of freedom are available to
estimate the experimental error. Therefore, you will not be able to do any statistical tests on the
results.  It is recommended that you add enough centerpoints to give you at least 3 degrees of freedom
for the error.
   NOTE: if you have used Augment Design to add a fraction to a fractional factorial design, you should
check the Alias Pattern using Tabular Options.If unusual confounding exists, the number of degrees of
freedom for estimating experimental error may be larger than shown in the summary.


Alias Structure

Contrast  Estimates
--------  ---------
1         A
2         B
3         C
4         D
5         E
6         AB
7         AC
8         AD
9         AE
10        BC
11        BD
12        BE
13        CD
14        CE
15        DE


The StatAdvisor
---------------
   The alias structure shows which main effects and interactions are confounded with each other.  Since
this design is resolution V, separate estimates of all main effects and two-factor interactions can be
obtained.
```

Resultados de la definición del modelo, solicitando la estructura de los alias. Como no hay repeticiones no hay medición del error y no se pueden aplicar pruebas estadísticas a estos datos.

```
Analyze Experiment - Desviación

Analysis Summary
---------------
Estimated effects for Desviación
----------------------------------------------------------------------
average        = 1.22625
A:Puertos      = 0.145
B:Temperatura  = 0.0875
C:Tiempo       = 0.0375
D:Peso_lote    = -0.0375
E:Dias_retraso = -0.47
AB             = 0.015
AC             = 0.095
AD             = 0.03
AE             = -0.1525
BC             = -0.0675
BD             = 0.1625
BE             = -0.405
CD             = 0.0725
CE             = 0.135
DE             = -0.315
----------------------------------------------------------------------
No degrees of freedom left to estimate standard errors.
```

The StatAdvisor

This table shows each of the estimated effects and interactions. No estimate of sampling variability is available since there are no degrees of freedom remaining to estimate the experimental error. To plot the estimates in decreasing order of importance, select Pareto Charts from the list of Graphical Options. To help determine which effects are significant, select Normal Probability Plots of Effects from the list of Graphical Options. You can then remove insignificant effects by pressing the alternate mouse button, selecting Analysis Options, and pressing the Exclude button.

Analysis of Variance for Desviación - Experimento de sopas . . .

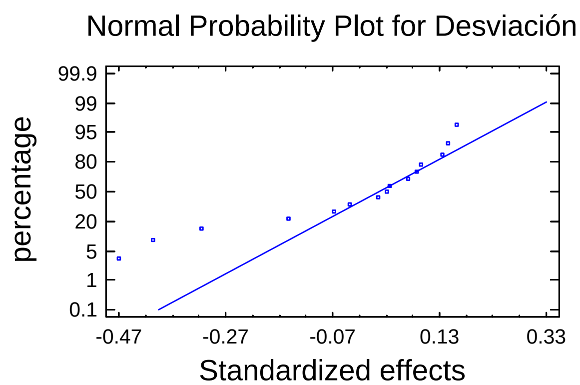
Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
A:Puertos	0.0841	1	0.0841		
B:Temperatura	0.030625	1	0.030625		
C:Tiempo	0.005625	1	0.005625		
D:Peso_lote	0.005625	1	0.005625		
E:Dias_retraso	0.8836	1	0.8836		
AB	0.0009	1	0.0009		
AC	0.0361	1	0.0361		
AD	0.0036	1	0.0036		
AE	0.093025	1	0.093025		
BC	0.018225	1	0.018225		
BD	0.105625	1	0.105625		
BE	0.6561	1	0.6561		
CD	0.021025	1	0.021025		
CE	0.0729	1	0.0729		
DE	0.3969	1	0.3969		
Total error	0.0	0			
Total (corr.)	2.41398	15			

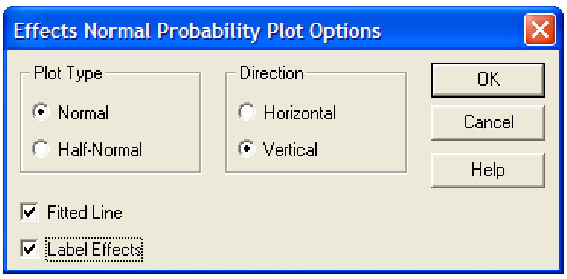
R-squared = 100.0 percent

R-squared (adjusted for d.f.) = 0.0 percent

The StatAdvisor

The ANOVA table partitions the variability in Desviación into separate pieces for each of the effects. It then tests the statistical significance of each effect by comparing the mean square against an estimate of the experimental error. Unfortunately, there are no degrees of freedom available to estimate the error. The R-Squared statistic indicates that the model as fitted explains 100.0% of the variability in Desviación. The adjusted R-squared statistic, which is more suitable for comparing models with different numbers of independent variables, is 0.0%. The mean absolute error (MAE) of 0.0 is the average value of the residuals. The Durbin-Watson (DW) statistic tests the residuals to determine if there is any significant correlation based on the order in which they occur in your data file.



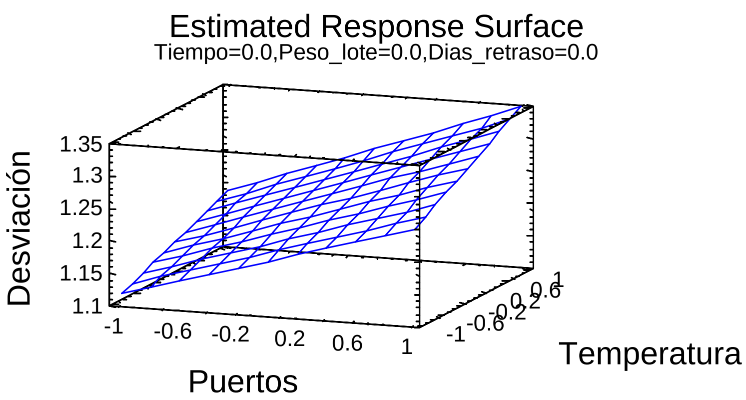


En la ventana del gráfico dar clic derecho y seleccionar Pane options, del diálogo que aparece seleccionar Label Effects, para etiquetar los valores de la gráfica.

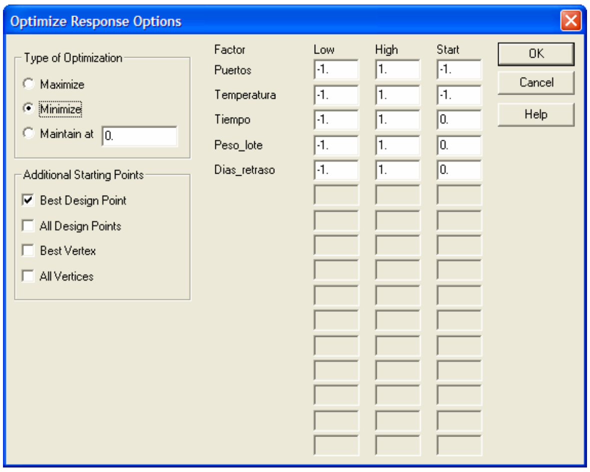
En diseños sin repetición, el gráfico de probabilidad normal es una herramienta fundamental para analizar la significancia de los efectos. En este caso son significativos aquellos efectos que se alejen de la línea recta.

```
Regression coeffs. for Desviación - Experimento de sopas . . .
----------------------------------------------------------------------
constant        = 1.22625
A:Puertos       = 0.0725
B:Temperatura   = 0.04375
C:Tiempo        = 0.01875
D:Peso_lote     = -0.01875
E:Dias_retraso  = -0.235
AB              = 0.0075
AC              = 0.0475
AD              = 0.015
AE              = -0.07625
BC              = -0.03375
BD              = 0.08125
BE              = -0.2025
CD              = 0.03625
CE              = 0.0675
DE              = -0.1575
----------------------------------------------------------------------


The StatAdvisor
---------------
   This pane displays the regression equation which has been fitted to
the data.  The equation of the fitted model is

Desviación = 1.22625 + 0.0725*Puertos + 0.04375*Temperatura + 0.01875*Tiempo - 0.01875*Peso_lote -
0.235*Dias_retraso + 0.0075*Puertos*Temperatura + 0.0475*Puertos*Tiempo + 0.015*Puertos*Peso_lote -
0.07625*Puertos*Dias_retraso - 0.03375*Temperatura*Tiempo + 0.08125*Temperatura*Peso_lote -
0.2025*Temperatura*Dias_retraso + 0.03625*Tiempo*Peso_lote + 0.0675*Tiempo*Dias_retraso -
0.1575*Peso_lote*Dias_retraso

where the values of the variables are specified in their original units, except for the categorical
factors which take the values -1 for the low level and +1 for the high level.  To have STATGRAPHICS
evaluate this function, select Predictions from the list of Tabular Options.  To plot the function,
select Response Plots from the list of Graphical Options.
```

Este Polinomio permite "pintar" superficies de respuesta y aplicar la rutina de optimización para encontrar la combinación de factores que conduzca al punto óptimo, en este caso a minimizar la desviación.



```
Optimize Response
-----------------
Goal: minimize Desviación

Optimum value = 0.62

Factor              Low             High            Optimum
-----------------------------------------------------------------------
Puertos             -1.0            1.0             1.0
Temperatura         -1.0            1.0             1.0
Tiempo              -1.0            1.0             -1.0
Peso_lote           -1.0            1.0             1.0
Dias_retraso        -1.0            1.0             1.0


The StatAdvisor
---------------
   This table shows the combination of factor levels which minimizes Desviación over the indicated
region.  Use the Analysis Options dialog box to indicate the region over which the optimization is to
be performed.  You may set the value of one or more factors to a constant by setting the low and high
limits to that value.
```



Dar un clic derecho sobre la ventana de respuesta óptima, seleccionar Pane options y en la ventana de diálogo que aparece seleccionar minimize, para buscar un mínimo.

Conclusión: La combinación de factores que minimiza la desviación es, todos los factores en su nivel alto a excepción del factor tiempo que debe estar en su nivel bajo.

NOTA DE FIN DE CAPÍTULO: Estos diseños constituyen la base de diseños como los de superficies o los de mezclas, cuya principal utillidad consiste en: 1) requerir pocas unidades experimentales, en ocasiones una sola repetición genera información interesante; 2) combinar herramientas del análisis de varianza y regresión múltiple para “pintar” un plano o superficie de la respuesta en estudio; 3) aplicar técnicas de optimización para encontrar la combinación de factores que maximiza o minimiza la respuesta en estudio, herramienta vital para darle soporte estadístico a la toma de decisiones.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO 6

Rehacer los ejemplos 6.1-6.3 y resolver los siguientes problemas, indicando en cada uno de ellos en modelo utilizado y su resolución. Concluir estadísticamente y en el contexto del problema. También es importante identificar variables importantes y aquellas no significativas, así como la dirección deseable en la cual realizar nuevos experimentos.

Ejercicio 1. Se desea optimizar cierta característica de calidad Y de un producto, y para ello se realiza un diseño factorial 2^3 en el que los factores A,B y C son las variables de las que se sospecha que pueden tener alguna influencia en Y. Las posibilidades de experimentación permiten la realización de cuatro réplicas en cada condición experimental pero como sólo pueden realizarse 16 experimentos diarios, la experimentación se bloquea por día. (Albert Prat Bartrés y coautores, Métodos estadísticos. Control y mejora de la calidad, Ed. Alfaomega-Ediciones UPC, 2000, pág. 164)

Los resultados que se obtienen son:

	A	B	C	Y1	Y2	Y3	Y4
DIA 1	-1.0	-1.0	-1.0	83	76	78	79
	-1.0	1.0	-1.0	86	82	87	81
	1.0	-1.0	1.0	84	79	81	76
	1.0	1.0	1.0	83	75	81	77
DIA 2	1.0	-1.0	-1.0	71	66	74	69
	1.0	1.0	-1.0	74	70	72	68
	-1.0	-1.0	1.0	88	84	91	85
	-1.0	1.0	1.0	94	87	91	88

Diseño 2^3, con 4 repeticiones y en 2 bloques

Ejercicio 2. Se realizó un experimento para producir un polímero. Los cuatro factores estudiados fueron la temperatura (A), la concentración del catalizador (B), el tiempo (C) y la presión (D). Se tienen dos respuestas, el peso molecular y la viscosidad. Cuyos resultados se presentan a continuación.

A	B	C	D	Peso molecular	Viscosidad
-	-	-	-	2400	1400
+	-	-	-	2410	1500
-	+	-	-	2315	1520
+	+	-	-	2510	1630
-	-	+	-	2615	1380
+	-	+	-	2625	1525
-	+	+	-	2400	1500
+	+	+	-	2750	1620
-	-	-	+	2400	1400
+	-	-	+	2390	1525
-	+	-	+	2300	1500
+	+	-	+	2520	1500
-	-	+	+	2625	1420
+	-	+	+	2630	1490
-	+	+	+	2500	1500
+	+	+	+	2710	1600
0	0	0	0	2515	1500
0	0	0	0	2500	1460
0	0	0	0	2400	1525
0	0	0	0	2475	1500

Factor	Nivel bajo	Nivel alto
A (ºC)	100	120
B (%)	4	8
C (min)	20	30
D (psi)	60	75

Se busca un producto con el mayor peso molecular y la menor viscosidad.

Diseño 2^4, con 4 repetiiones al centro

Ejercicio 3. Un investigador estudia el efecto de la lidocaína sobre el nivel de enzima en el músculo cardiaco de perros. En el experimento se usan tres marcas comerciales de lidocaína (A), tres dosis (B) y tres perros (C), con dos repeticiones. Los niveles de enzima se presentan en el siguiente cuadro. (Douglas C. Montgomery, Diseño y análisis de experimentos, 2ª. Edición, Limusa-Wiley, 2002, pág. 388)

		Perro		
Marca lidocaína	Fuerza de la dosis	1	2	3
1	1	96, 84	84, 85	85, 86
	2	94, 95	99, 97	98, 90
	3	101, 105	106, 104	98, 103
2	1	85, 80	84, 82	86, 84
	2	95, 93	98, 99	97, 95
	3	108, 110	114, 102	109, 100
3	1	84, 83	83, 880	81, 79
	2	95, 92	97, 96	93, 93
	3	105, 102	100, 111	106, 108

Diseño 3^3, con dos repeticiones

Capitulo 7

Diseños Anidados

En los **diseños factoriales** cada tratamiento de un factor se combina con los tratamientos de los demás factores. Algo que no sucede en situaciones en las que los tratamientos de un factor están "anidados" dentro de los tratamientos de otro factor. Cuando los niveles de un factor B, no son idénticos en todos los niveles de otro factor A. Cada nivel del factor A contendrá diferentes niveles del factor B. En este caso, se dice que los niveles del factor B están anidados dentro de los niveles del factor A, y recibe el nombre de **Diseños de factor anidado o jerárquico**.

Por ejemplo:

1. Al realizar pruebas ínter laboratorio con 3 técnicos por laboratorio.
   - En cada laboratorio hay 3 técnicos pero difícilmente son los mismos para los diferentes laboratorios.
2. Se toman al azar 10 pacas de lana de un embarque y se toman 3 partes centrales de cada una de las pacas
   - Nótese que estas partes están anidadas en la paca
3. Una compañía de capacitación en mecánica, que tiene escuelas en tres estados del país, con 2 instructores por escuela (cada instructor enseña solamente en una escuela), quienes dan cursos de 3 semanas a grupos de 15 participantes
   - ¿Hay efecto de escuela (factor A) e instructor (factor B) sobre el nivel de aprendizaje?

7.1. Motivación

Considerando el último caso, para investigar estos efectos, las clases en cada escuela se organizan de la forma usual y aleatoriamente se asigna el curso a cada uno de dos instructores. Se realiza una evaluación al final de cada una de dos sesiones.

Para analizar la posibilidad de aplicar un diseño de 2 factores se presenta el siguiente cuadro. Si se consideran las escuelas como un factor A y los instructores como el otro factor B, entonces se requieren 18 datos e instructores con capacidades estadísticamente semejantes.

Escuela (Factor A)	Instructor Factor B					
	1	2	3	4	5	6
Escuela 1	Y_{111} Y_{112}	Y_{121} Y_{122}	Y_{131} Y_{132}	Y_{141} Y_{142}	Y_{151} Y_{152}	Y_{161} Y_{162}
Escuela 2	Y_{211} Y_{212}	Y_{221} Y_{222}	Y_{231} Y_{232}	Y_{241} Y_{242}	Y_{251} Y_{252}	Y_{261} Y_{262}
Escuela 3	Y_{311} Y_{312}	Y_{321} Y_{322}	Y_{331} Y_{332}	Y_{341} Y_{342}	Y_{351} Y_{352}	Y_{361} Y_{362}

¿De dónde se obtienen los valores de los instructores? ya que se necesitarían 18 instructores, 6 por escuela. Pues, si sólo fueran 6 instructores, se tendría un diseño de bloques, con el instructor como la variable de bloqueo.

¿Es acaso esta estructura de la del diseño de factores anidados? A continuación se muestra la estructura general de un diseño anidado.

Escuela (i)	1 i = 1				2 i = 3				3 i = 3			
Instructor (j)	1 j=1 j=2		2 j=1 j=2		3 j=1 j=2		4 j=1 j=2		5 j=1 j=2		6 j=1 j=2	
Clase (k)	1 k=1 k=2	2 k=1 k=2	3 k=1 k=2	4 k=1 k=2	5 k=1 k=2	6 k=1 k=2	7 k=1 k=2	8 k=1 k=2	9 k=1 k=2	10 k=1 k=2	11 k=1 k=2	12 k=1 k=2

Es importante notar que cada instructor enseña en solamente una escuela, de aquí que el factor B está anidado en el factor A.

Escuela (Factor A)	Instructor Factor B					
	1	2	1	2	1	2
Escuela 1			Y_{111} Y_{112}	Y_{121} Y_{122}		
Escuela 2	Y_{211} Y_{212}	Y_{221} Y_{222}				
Escuela 3					Y_{311} Y_{312}	Y_{321} Y_{322}

Acomodando este diseño en un cuadro como en el que se presentó el diseño factorial, se notan algunos huecos (cuadro anterior) que permiten hacer la distinción entre ambos tipos de diseños.

Dándole datos a este ejemplo, es importante notar los promedios de cada celda, además de los promedios por fila y por columna.

Factor A. Escuela i	Factor B, Instructor j		Promedio
	1	2	
1	25 29	14 11	
Promedio	$\overline{Y}_{11\bullet} = 27$	$\overline{Y}_{12\bullet} = 12.5$	$\overline{Y}_{1\bullet\bullet} = 19.75$
2	11 6	22 18	
Promedio	$\overline{Y}_{21\bullet} = 8.5$	$\overline{Y}_{22\bullet} = 20$	$\overline{Y}_{2\bullet\bullet} = 14.25$
3	17 20	5 2	
Promedio	$\overline{Y}_{31\bullet} = 18.5$	$\overline{Y}_{32\bullet} = 3.5$	$\overline{Y}_{3\bullet\bullet} = 11.00$
			$\overline{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = 15.00$

7.2. Modelo Estadístico

Sea μ_{ij} la respuesta promedio, cuando:

El factor A está en el nivel i (i = 1, 2, . . ., a) y
El factor B en el j-ésimo nivel (j=1,2, . . ., b)

De tal forma que $\mu_{i\bullet} = \dfrac{\sum_{j=1}^{b} \mu_{ij}}{b}$, donde el efecto principal del i-ésimo nivel del **factor** A se representa por,

$$\alpha_i = \mu_{i\bullet} - \mu_{\bullet\bullet} \text{ con } \mu_{\bullet\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \mu_{ij}}{ab} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \mu_{i\bullet}}{a} \text{ y } \sum_{i=1}^{a} \alpha_i = 0 .$$

Para el factor B es más importante analizar el anidamiento que el efecto principal, de manera que se tiene la siguiente notación.

$\beta_{j(i)} = \mu_{ij} - \mu_{i\bullet}$; que se lee, el j-ésimo nivel del factor B está anidado en el i-ésimo nivel del factor A

Esta última expresión se puede rescribir como: $\beta_{j(i)} = \mu_{ij} - \alpha_i + \mu_{\bullet\bullet}$; de donde se tiene que $\sum_{j=1}^{b} \beta_{j(i)} = 0$

Entonces

$$\mu_{ij} \equiv \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)} \equiv \mu_{..} + (\mu_{i.} - \mu_{..}) + (\mu_{ij} - \mu_{i.})$$

En relación al experimento

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}$$

De donde
$\hat{Y}_{ij} = \bar{Y}_{...} + (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...}) = \bar{Y}_{ij.}$

Con residuales
$e_{ijk} = Y_{ijk} - \hat{Y}_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.}$

De tal forma que

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_{...} = (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}) + (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..}) + (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})$$

Desv. Total = Efecto principal de A + Efecto anidado de B en A + Residual

Que aplicando la suma correspondiente conduce a: $SC_{Total} = SC_A + SC_{B(A)} + SC_{Error}$

Cuya tabla de ANVA es:

Fuente de variación	g.l.	Suma de Cuadrados	Cuadrados Medios	F
Factor A	a-1	$SC_A = bn\sum_i (\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...})^2$	$CM_A = \frac{SC_A}{a-1}$	$\frac{CM_A}{CM_E}$
Factor B(A)	a(b-1)	$SC_{B(A)} = n\sum_i \sum_j (\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..})^2$	$CM_{B(A)} = \frac{SC_{B(A)}}{a(b-1)}$	$\frac{CM_{B(A)}}{CM_E}$
Error	ab(n-1)	$SC_{Error} = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2$	$SC_{Error} = \frac{SC_E}{ab(n-1)}$	
Total	abn-1	$SC_{Total} = \sum_i \sum_j \sum_k (Y_{ijk} - \bar{Y}_{...})$		

7.3. Tipos de Diseños Anidados Balanceados y estadísticos adecuados

Pruebas para	A fijo B fijo	A fijo B aleatorio	A aleatorio B aleatorio
Factor A	$\frac{CM_A}{CM_E}$	$\frac{CM_A}{CM_{B(A)}}$	$\frac{CM_A}{CM_{B(A)}}$
Factor B(A)	$\frac{CM_{B(A)}}{CM_E}$	$\frac{CM_{B(A)}}{CM_E}$	$\frac{CM_{B(A)}}{CM_E}$

Es importante resaltar que en este tipo de diseños se tienen varias opciones con base en las características del factor. Todos los factores pueden ser fijos, pueden ser aleatorios (componentes de varianza) o pueden ser fijos + aleatorios. A este último tipo de diseño se le conoce como de efectos mixtos, combinados o mezclados (diferentes a los diseños de mezclas del capítulo anterior).

7.4. Análisis del efecto de los factores

1. Para $\mu_{i\bullet}$; $\overline{Y}_{i..} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2},g.l}(S)(\overline{Y}_{i..})$

donde

$$S^2\overline{Y}_{i..} = \frac{CM_E}{bn}$$; *g.l.* = *ab*(*n*-1), con *A* y *B* fijos

$$S^2\overline{Y}_{i..} = \frac{CM_{B(A)}}{bn}$$; *g.l.* = *a*(*b*-1), con *A* fijo y *B* aleatorio

2. Para μ_{ij} ; $\overline{Y}_{ij.} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2},(n-1)ab}(S)(\overline{Y}_{ij.})$

donde

$$S^2\overline{Y}_{ij.} = \frac{CM_E}{n}$$

3. Para $\mu_{\bullet\bullet}$; $\overline{Y}_{...} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2},g.l}(S)(\overline{Y}_{...})$

donde

$$S^2\overline{Y}_{...} = \frac{CM_E}{abn}$$; *g.l.* = *ab*(*n*-1), con *A* y *B* fijos

$$S^2\overline{Y}_{...} = \frac{CM_A}{abn}$$; *g.l.* = *a*(*b*-1), con *A* fijo y *B* aleatorio

$$S^2\overline{Y}_{...} = \frac{CM_{B(A)}}{abn}$$; g.l. = a(b-1), con A fijo y B aleatorio

Como ya se vio en los estimadores de los parámetros de este modelo, los diseños anidados pueden trabajar, además de los efectos fijos, sobre efectos aleatorios (cuyo análisis se realiza mediante técnicas de Componentes de Varianza).

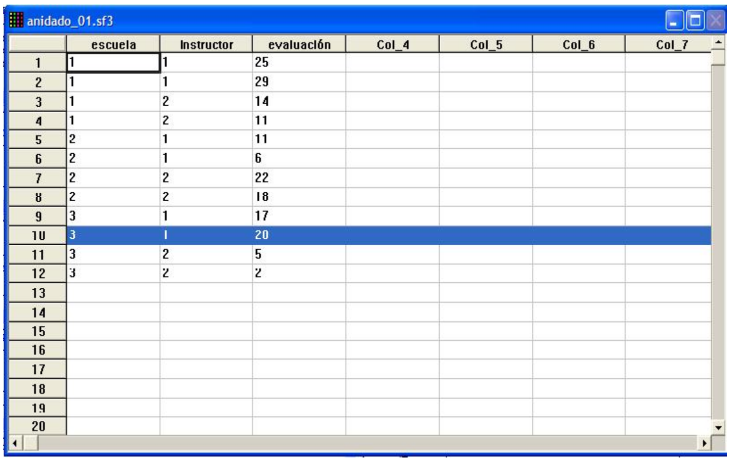
También se puede hablar de diseños que combinan efectos aleatorios y efectos fijos, a los que se les conoce como diseños mixtos, combinados o mezclados (mixed). Se debe recalcar que un diseño mezclado es diferente a un diseño de mezclas.

Además se pueden tener diseños de efectos cruzado-anidados (de efectos fijos, aleatorios o combinados). Lo que conduce a las siguientes notas:

a. Los factores de efectos cruzados se representan con un asterisco, por ejemplo A*B
b. Los factores de efectos anidados se representan con un paréntesis, por ejemplo B(A); que se lee B está anidado en A.

7.5. Diseños anidados con efectos fijos y sin interacción en Statgraphics

Ejemplo 7.1. Considerar los datos del único ejemplo revisado hasta el momento y realizar su análisis como diseño anidado.



anidado_01.sf3

	escuela	instructor	evaluación	Col_4	Col_5	Col_6	Col_7
1	1	1	25				
2	1	1	29				
3	1	2	14				
4	1	2	11				
5	2	1	11				
6	2	1	6				
7	2	2	22				
8	2	2	18				
9	3	1	17				
10	3	1	20				
11	3	2	5				
12	3	2	2				
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

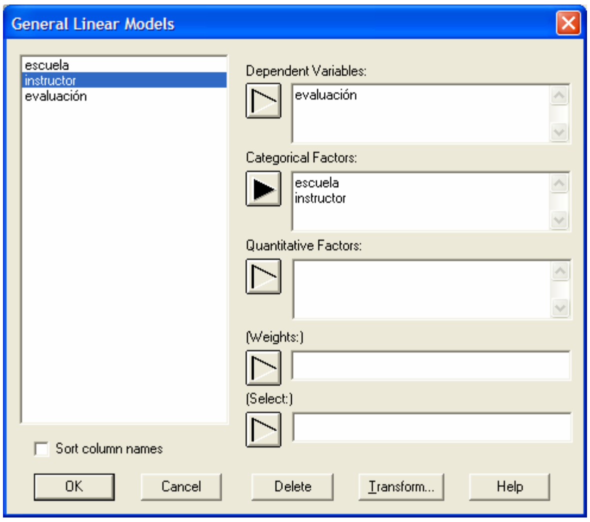
La secuencia es:

Ingresar los datos con una columna para cada factor y una por cada respuesta.

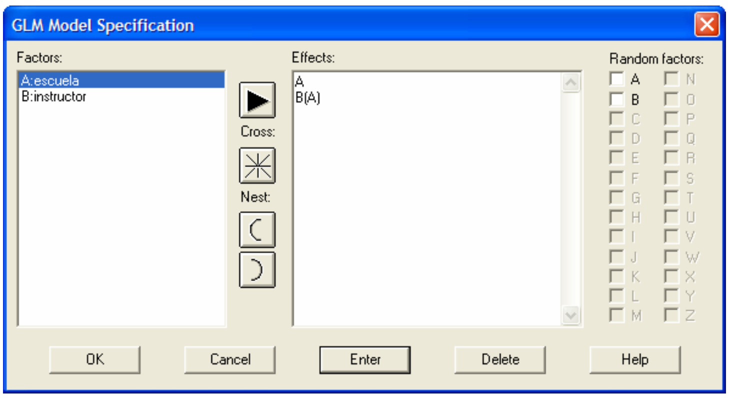
En este caso se tiene tres columnas: escuela, instructor y evaluación. Con 12 datos o renglones. Después de ingresar los datos y guardarlos en disco, seguir la secuencia.

1. Del menú seleccionar

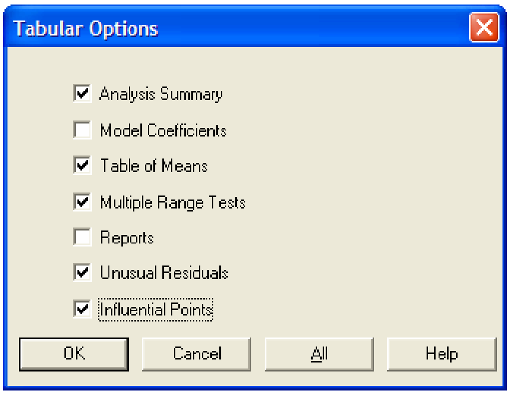
Special -> Advanced Regression -> General Linear Models



Al aparecer la caja de diálogo, ingresar las variables de respuesta y los factores de estudio, en los lugares correspondientes. Presionar el botón OK.

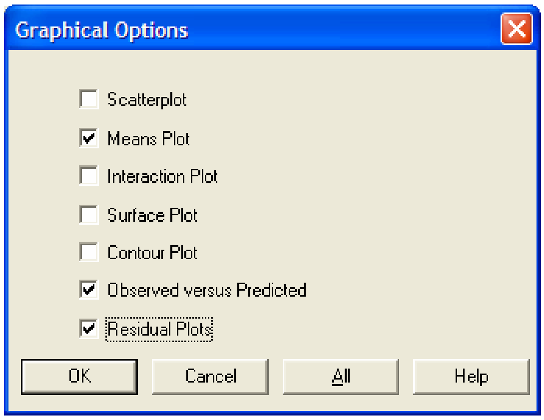


En la caja de diálogo que aparece definir el modelo, de tal manera que se indiquen los efectos principales y los efectos anidados. Es importante recalcar que en este caso no se tienen factores aleatorios.



En las opciones tabulares no marcar Model Coefficients y Reports

En las opciones gráficas seleccionar Means Plot, Observed versus Predicted y Residual Plots.



Resultados

General Linear Models

General Linear Models
Number of dependent variables: 1
Number of categorical factors: 2
Number of quantitative factors: 0

Analysis of Variance for evaluación

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	724.0	5	144.8	20.69	0.0010
Residual	42.0	6	7.0		
Total (Corr.)	766.0	11			

Type III Sums of Squares

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
escuela	156.5	2	78.25	11.18	0.0095
instructor(escuela)	567.5	3	189.167	27.02	0.0007
Residual	42.0	6	7.0		
Total (corrected)	766.0	11			

El primer análisis de varianza muestra que si hay un modelo que describa el comportamiento de estos datos. El segundo ANOVA muestra que hay diferencia entre las escuelas y que hay diferencias de los instructores dentro de las escuelas.

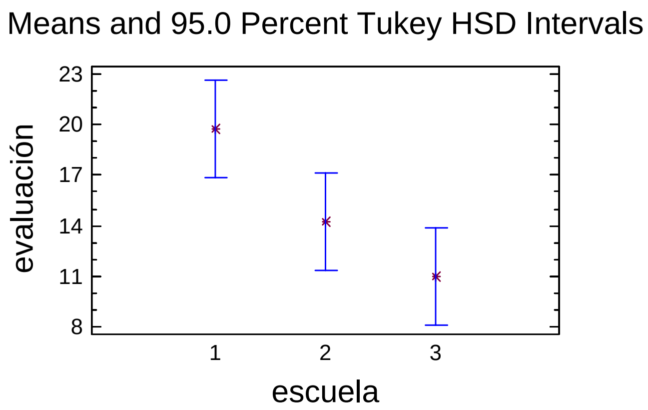
```
Expected Mean Squares
--------------------------------------------------------------------------------
Source                      EMS
--------------------------------------------------------------------------------
escuela                     (3)+Q1
instructor(escuela)         (3)+Q2
Residual                    (3)
--------------------------------------------------------------------------------

F-Test Denominators
--------------------------------------------------------------------------------
Source                      Df        Mean Square     Denominator
--------------------------------------------------------------------------------
escuela                     6.00      7.0             (3)
instructor(escuela)         6.00      7.0             (3)
--------------------------------------------------------------------------------

Variance Components
--------------------------------------------------------------------------------
Source                      Estimate
--------------------------------------------------------------------------------
Residual                    7.0
--------------------------------------------------------------------------------

R-Squared = 94.517 percent
R-Squared (adjusted for d.f.) = 89.9478 percent
Standard Error of Est. = 2.64575
Mean absolute error = 1.83333
Durbin-Watson statistic = 2.875 (P=0.0000)

Residual Analysis
---------------------------------
      Estimation       Validation
n     12
MSE   7.0
MAE   1.83333
MAPE  20.4306
ME    0.0
MPE   -5.94239

The StatAdvisor
---------------
```

This pane summarizes the results of fitting a general linear statistical model relating evaluación to 2 predictive factors. Since the P-value in the first ANOVA table for evaluación is less than 0.01, there is a statistically significant relationship between evaluación and the predictor variables at the 99% confidence level.

The second ANOVA table for evaluación tests the statistical significance of each of the factors as it was entered into the model. Notice that the highest P-value is 0.0095, belonging to A. Since the P-value is less than 0.01, that term is statistically significant at the 99% confidence level. Consequently, you probably don't want to remove any variables from the model.

The R-Squared statistic indicates that the model as fitted explains 94.517% of the variability in evaluación. The adjusted R-squared statistic, which is more suitable for comparing models with different numbers of independent variables, is 89.9478%. The standard error of the estimate shows the standard deviation of the residuals to be 2.64575. This value can be used to construct prediction limits for new observations by selecting the Reports option from the text menu. The mean absolute error (MAE) of 1.83333 is the average value of the residuals. The Durbin-Watson (DW) statistic tests the residuals to determine if there is any significant correlation based on the order in which they occur in your data file. Since the P-value is less than 0.05, there is an indication of possible serial correlation. Plot the residuals versus row order to see if there is any pattern which can be seen.

The output also summarizes the performance of the model in fitting the data, and in predicting any values withheld from the fitting process. It displays:
   (1) the mean squared error (MSE)
   (2) the mean absolute error (MAE)
   (3) the mean absolute percentage error (MAPE)
   (4) the mean error (ME)
   (5) the mean percentage error (MPE)
Each of the statistics is based on the residuals. The first three statistics measure the magnitude of the errors. A better model Will give a smaller value. The last two statistics measure bias. A better model will give a value close to 0.0.



En el gráfico anterior se pone en evidencia que la primera escuela es la que presenta evaluaciones más altas y que las escuelas 1 y 3 son diferentes entre si

NOTA: Vale la pena tomarse un tiempo para revisar el Statadvisor de Statgraphics, ya que es una pista para ponerse a estudiar y entender todas las salidas del paquete.

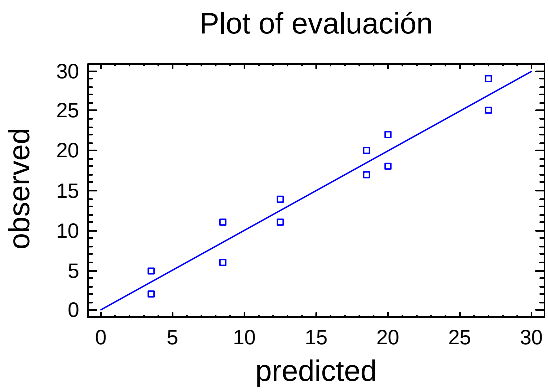
Table of Least Squares Means for evaluación
with 95.0 Percent Confidence Intervals

Level		Count	Mean	Stnd. Error	Lower Limit	Upper Limit
GRAND MEAN		12	15.0	0.763763	13.1311	16.8689
escuela						
1		4	19.75	1.32288	16.513	22.987
2		4	14.25	1.32288	11.013	17.487
3		4	11.0	1.32288	7.76303	14.237
instructor within escuela						
1	1	2	27.0	1.87083	22.4222	31.5778
1	2	2	8.5	1.87083	3.92224	13.0778
1	3	2	18.5	1.87083	13.9222	23.0778
2	1	2	12.5	1.87083	7.92224	17.0778
2	2	2	20.0	1.87083	15.4222	24.5778
2	3	2	3.5	1.87083	-1.07776	8.07776

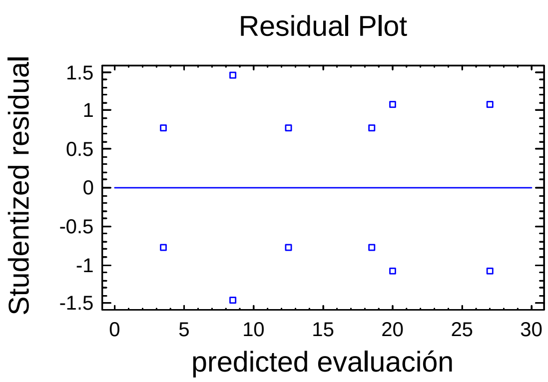
The StatAdvisor

This table shows the mean evaluación for each level of the factors.It also shows the standard error of each mean, which is a measure of its sampling variability. The rightmost two columns show 95.0% confidence intervals for each of the means. You can display these means and intervals by selecting Means Plot from the list of Graphical Options.

En este último cuadro se puede apreciar la semejaza o diferencia de los instructores dentro de cada escuela, considerando los intervalos de confianza. Se puede apreciar que en la escuela 1 los dos instructores son estadísticamente semejantes, pero el instructor 1 presenta mejores evaluaciones. En la escuela 2 el instructor 2 tiene evaluaciones más altas y en la escuela 3 el instructor 1 es notoriamente mejor que el 2.




```
Multiple Comparisons for evaluación by escuela

--------------------------------------------------------------------------------
Method: 95.0 percent Tukey HSD
escuela         Count     LS Mean       LS Sigma      Homogeneous Groups
--------------------------------------------------------------------------------
3               4         11.0          1.32288       X
2               4         14.25         1.32288       XX
1               4         19.75         1.32288        X
--------------------------------------------------------------------------------
Contrast                                 Difference           +/-  Limits
--------------------------------------------------------------------------------
1 - 2                                     5.5                 5.74026
1 - 3                                    *8.75                5.74026
2 - 3                                     3.25                5.74026
--------------------------------------------------------------------------------
* denotes a statistically significant difference.
```



The StatAdvisor

This table applies a multiple comparison procedure to determine which means are significantly different from which others. The bottom half of the output shows the estimated difference between each pair of means. An asterisk has been placed next to 1 pair, indicating that this pair shows a statistically significant difference at the 95.0% confidence level. At the top of the page, 2 homogenous groups are identified using columns of X's. Within each column, the levels containing X's form a group of means within which there are no statistically significant differences. The method currently being used to discriminate among the means is Tukey's honestly significant difference (HSD) procedure. With this method, there is a 5.0% risk of calling one or more pairs significantly different when their actual difference equals 0.

```
Unusual Residuals for evaluación
--------------------------------------------------------------
                         Predicted                 Studentized
Row                Y             Y      Residual      Residual
--------------------------------------------------------------


The StatAdvisor
---------------
   The table of unusual residuals lists all observations which have Studentized residuals greater than
2.0 in absolute value.  Studentized residuals measure how many standard deviations each observed value
of evaluación deviates from a model fitted using all of the data except that observation.   In this
case, there are no Studentized residuals greater than 2.0.


Influential Points for evaluación
--------------------------------------------------------------
                       Mahalanobis                      Cook's
Row           Leverage       Distance           DFITS      Distance
--------------------------------------------------------------
     5             0.5       9.09091         1.45556     0.0744048
     6             0.5       9.09091        -1.45556     0.0744048
--------------------------------------------------------------
Average leverage of single data point = 0.5


The StatAdvisor
---------------
   The table of influential data points lists all observations which have leverage values greater than
3 times that of an average data point, or which have an unusually large value of DFITS or Cook's
distance.  Leverage is a statistic which measures how influential each observation is in determining
the coefficients of the estimated model. DFITS is a statistic which measures how much the estimated
coefficients would change if each observation was removed from the data set.  Cook's distance measures
the distance between the estimated
coefficients with and without each observation.  In this case, an average data point would have a
leverage value equal to 0.5.  There are no data points with more than 3 times the average leverage.
There are 2 data points with unusually large values of DFITS.  There are no data points with unusually
large values of Cook's distance.
```

Ejemplo 7.2. Una compañía compra materia prima en lotes de tres proveedores diferentes. La pureza de esta materia prima varía considerablemente, lo que ocasiona problemas en la manufactura del producto terminado. Se quiere determinar si la variabilidad de la pureza se le puede atribuir a la diferencia entre los proveedores. Los datos que se obtienen son.

	Proveedor 1				Proveedor 2				Proveedor 3			
Lotes	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
	94	91	91	94	94	93	92	93	95	91	94	96
	92	90	93	97	91	97	93	96	97	93	92	95
	93	89	94	93	90	95	91	95	93	95	95	94

RESULTADOS

```
General Linear Models

General Linear Models
---------------------
Number of dependent variables: 1
Number of categorical factors: 2
Number of quantitative factors: 0
```

Analysis of Variance for pureza

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Model	84.9722	11	7.72475	2.93	0.0135
Residual	63.3333	24	2.63889		
Total (Corr.)	148.306	35			

Type III Sums of Squares

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
proveedor	15.0556	2	7.52778	2.85	0.0774
lote(proveedor)	69.9167	9	7.76852	2.94	0.0167
Residual	63.3333	24	2.63889		
Total (corrected)	148.306	35			

Se tiene evidencia de la semejanza entre lotes, aunque hay efecto de anidamiento de los lotes dentro de cada proveedor.

Expected Mean Squares

Source	EMS
proveedor	(3)+Q1
lote(proveedor)	(3)+Q2
Residual	(3)

F-Test Denominators

Source	Df	Mean Square	Denominator
proveedor	24.00	2.63889	(3)
lote(proveedor)	24.00	2.63889	(3)

Variance Components

Source	Estimate
Residual	2.63889

R-Squared = 57.2954 percent
R-Squared (adjusted for d.f.) = 37.7224 percent
Standard Error of Est. = 1.62447
Mean absolute error = 1.09259
Durbin-Watson statistic = 2.36842 (P=0.0002)

Residual Analysis

	Estimation	Validation
n	36	
MSE	2.63889	
MAE	1.09259	
MAPE	1.16845	
ME	-2.36848E-15	
MPE	-0.0200556	

The StatAdvisor

This pane summarizes the results of fitting a general linear statistical model relating pureza to 2 predictive factors. Since the P-value in the first ANOVA table for pureza is less than 0.05, there is a statistically significant relationship between pureza and the predictor variables at the 95% confidence level.

The second ANOVA table for pureza tests the statistical significance of each of the factors as it was entered into the model. Notice that the highest P-value is 0.0774, belonging to A. Since the P-value is less than 0.10, that term is statistically significant at the 90% confidence level. Depending on the confidence level at which you wish to work, you may or may not decide to remove A from the model.

The R-Squared statistic indicates that the model as fitted explains 57.2954% of the variability in pureza. The adjusted R-squared statistic, which is more suitable for comparing models with different numbers of independent variables, is 37.7224%. The standard error of the estimate shows the standard deviation of the residuals to be 1.62447. This value can be used to construct prediction limits for new observations by selecting the Reports option from the text menu. The mean absolute error (MAE) of 1.09259 is the average value of the residuals. The Durbin-Watson (DW) statistic tests the residuals to determine if there is any significant correlation based on the order in which they occur in your data file. Since the P-value is less than 0.05, there is an indication of possible serial correlation. Plot the residuals versus row order to see if there is any pattern which can be seen.

The output also summarizes the performance of the model in fitting the data, and in predicting any values withheld from the fitting process. It displays:

(1) the mean squared error (MSE)
(2) the mean absolute error (MAE)
(3) the mean absolute percentage error (MAPE)
(4) the mean error (ME)
(5) the mean percentage error (MPE)

Each of the statistics is based on the residuals. The first three statistics measure the magnitude of the errors. A better model will give a smaller value. The last two statistics measure bias. A better model will give a value close to 0.0.

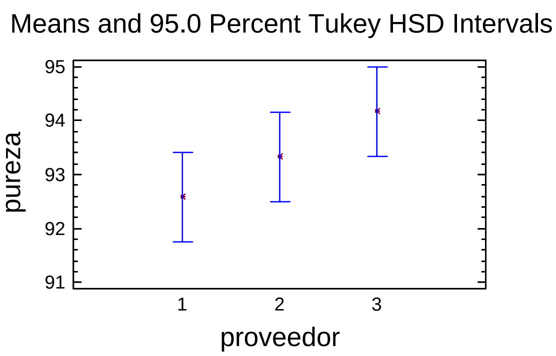


Table of Least Squares Means for pureza
with 95.0 Percent Confidence Intervals

Level		Count	Mean	Stnd. Error	Lower Limit	Upper Limit
GRAND MEAN		36	93.3611	0.270744	92.8023	93.9199
proveedor						
1		12	92.5833	0.468943	91.6155	93.5512
2		12	93.3333	0.468943	92.3655	94.3012
3		12	94.1667	0.468943	93.1988	95.1345
lote within proveedor						
1	1	3	93.0	0.937886	91.0643	94.9357
1	2	3	91.6667	0.937886	89.731	93.6024
1	3	3	95.0	0.937886	93.0643	96.9357
2	1	3	90.0	0.937886	88.0643	91.9357
2	2	3	95.0	0.937886	93.0643	96.9357
2	3	3	93.0	0.937886	91.0643	94.9357
3	1	3	92.6667	0.937886	90.731	94.6024
3	2	3	92.0	0.937886	90.0643	93.9357
3	3	3	93.6667	0.937886	91.731	95.6024
4	1	3	94.6667	0.937886	92.731	96.6024
4	2	3	94.6667	0.937886	92.731	96.6024
4	3	3	95.0	0.937886	93.0643	96.9357

Se recomienda a partir de este cuadro de resultados hacer un concentrado que permita ver más claramente las semejanzas o anidamientos dentro de cada lote.

Lotes anidados en el proveedor 1

1	1	3	93.0	0.937886	91.0643	94.9357
2	1	3	90.0	0.937886	88.0643	91.9357
3	1	3	92.6667	0.937886	90.731	94.6024
4	1	3	94.6667	0.937886	92.731	96.6024

Lotes anidados en el proveedor 2

1	2	3	91.6667	0.937886	89.731	93.6024
2	2	3	95.0	0.937886	93.0643	96.9357
3	2	3	92.0	0.937886	90.0643	93.9357
4	2	3	94.6667	0.937886	92.731	96.6024

Lotes anidados en el proveedor 3

1	3	3	95.0	0.937886	93.0643	96.9357
2	3	3	93.0	0.937886	91.0643	94.9357
3	3	3	93.6667	0.937886	91.731	95.6024
4	3	3	95.0	0.937886	93.0643	96.9357

The StatAdvisor

This table shows the mean pureza for each level of the factors. It also shows the standard error of each mean, which is a measure of its sampling variability. The rightmost two columns show 95.0% confidence intervals for each of the means. You can display these means and intervals by selecting Means Plot from the list of Graphical Options.

Se aprecia que el efecto está en el proveedor 1, donde la mayor pureza está en el lote 4, que es semejante a los lotes 1 y 3, pero diferente al lote 2.

Multiple Comparisons for pureza by proveedor

Method: 95.0 percent Tukey HSD

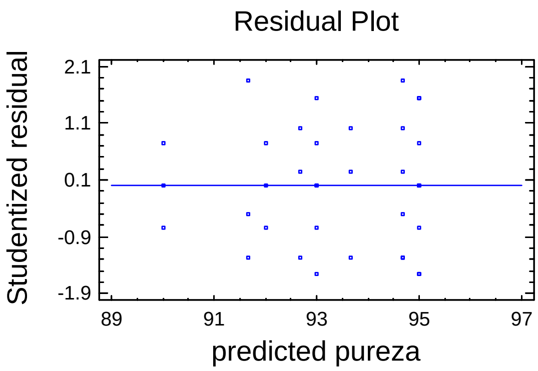
proveedor	Count	LS Mean	LS Sigma	Homogeneous Groups
1	12	92.5833	0.468943	X
2	12	93.3333	0.468943	X
3	12	94.1667	0.468943	X

Contrast	Difference	+/- Limits
1 - 2	-0.75	1.65669
1 - 3	-1.58333	1.65669
2 - 3	-0.833333	1.65669

* denotes a statistically significant difference.

The StatAdvisor

This table applies a multiple comparison procedure to determine which means are significantly different from which others. The bottom half of the output shows the estimated difference between each pair of means. There are no statistically significant differences between any pair of means at the 95.0% confidence level. At the top of the page, one homogenous group is identified by a column of X's. Within each column, the levels containing X's form a group of means within which there are no statistically significant differences. The method currently being used to discriminate among the means is Tukey's honestly significant difference (HSD) procedure. With this method, there is a 5.0% risk of calling one or more pairs significantly different when their actual difference equals 0.



Como en todos los modelos que se han revisado, es importante verificar el cumplimiento de supuestos mediante gráficos de residuales o cualquier otra técnica.

COMENTARIOS FINALES. Con la información revisada, se tienen las bases para entender y aplicar algunos modelos más elegantes como los diseños de parcelas divididas, diseños secuénciales o los diseños de Cross-Over.

En otras palabras, sirva este material como base para manejar diseño más complejos, pero también más potentes y cada vez más comunes en la investigación científica, ya que las situaciones jerárquicas de investigación siempre han existido, pero es en los útimos cinco años que han proliferado las herramientas software para preocuparnos más por plantear el experimento y analizarlo que por los cálculos numéricos.

EJERCICIO DEL CAPÍTULO 7

Para cerrar este material, sólo un ejercicio final:

Al estudiar el acabado superficial de piezas metálicas fabricadas en cuatro máquinas se realiza un experimento en el que cada máquina es operada por tres operadores diferentes, después se colectan y prueban dos ejemplares de cada operador. Por la ubicación de las máquinas, se trabaja con operadores diferentes en cada máquina. Los datos se muestran en el siguiente cuadro. Analizar los datos y obtener conclusiones.

	Máquina 1			Máquina 2			Máquina 3			Máquina 4		
Operador	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
	79	94	46	92	85	76	88	53	46	36	40	62
	62	74	57	99	79	68	75	56	57	53	56	47

Bibliografía

1. Anderson L. V. and R. A. Mc Lean, 1974, Design of experiments. A realistic approach, Marcel Dekker Inc., USA, 418 pp.

2. Prat B. A. y coautores, 2000, Métodos estadísticos. Control y mejora de la calidad, Ed. Alfaomega-Ediciones UPC, México.

3. Box E. P. G., 2001, Estadística para investigadores. Introducción al diseño de experimentos. Análisis de datos y construcción de modelos, 2ª reimpr., Reverté Ediciones, México, 675 pp.

4. Box E. P. G. and N. R. Draper, 1987, Empirical model-building and response surfaces, John Wiley & Sons, USA, 669 pp.

5. Cochran G. W. y G. M. Cox, 1981, Diseños experimentales, Editorial Trillas, México, 661 pp.

6. Devore J. L., 2001, Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias, 5ª. edición. Ed. Thomson Learning, México, 762 pp.

7. Fisher L. D. and G. van Belle, 1993, Biostatistics. A metodology for the health sciences, John Wiley & Sons, USA, 991 pp.

8. Kirk E. R., 1968, Experimental design: Procedures for the behavioral sciences, Wadsworth Publishing Co., USA, 577 pp

9. Kuehl O. R., 2001, Diseño de experimentos. Principios estadísticos de diseño y análisis de investigación, 2ª edición, Thomson Learning, México, 666 pp.

10. Milton J. S. y J. O. Tsokos, 1987, Estadística para biología y ciencias de la salud, Ed. Interamericana McGraw-Hill, España, 527 pp.

11. Marques M. J., 2004, Probabilidad y Estadística para Ciencias Químico Biológicas, 2ª. edición, FES Zaragoza UNAM, México, 626 pp..

12. Montgomery C. D., 2002, Diseño y análisis de experimentos, 2ª edición, Ed. Limusa-Wiley, México, 686 pp.

13. Neter J., Kutner H. M., Nachtsheim J. C. and Wasserman W., 1996, Applied Linear Statistical Models, WCB-Mc Graw-Hill,, USA, 1206 pp.

Diseño de Experimentos.

Curso Práctico.

1era. Edición

Se imprimió en el Laboratorio de Aplicaciones

Computacionales de la FES Zaragoza.

Con un tiraje inicial de 100 ejemplares.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA