



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA**

**ACADEMIA DE ESTADÍSTICA Y CÓMPUTO CIENTÍFICO**

**ESTADÍSTICA CIRCULAR: HERRAMIENTA PARA  
ANALIZAR DATOS ANGULARES  
EN BIOLOGÍA**

**Eloisa Reyes Sánchez**

**Patricia Rivera García**

**María José Marques Dos Santos**

**PAPIME PE201106**

**2009**

# **Estadística circular: Herramienta para analizar datos angulares en Biología**



# **Estadística circular: Herramienta para analizar datos angulares en Biología**

**Eloisa Reyes Sánchez**

**Patricia Rivera García**

**María José Marques Dos Santos**



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**Facultad de Estudios Superiores Zaragoza**

**PAPIME PE201106**

**México 2009**

**Primera edición: 2009**

**D.R. © Facultad de Estudios Superiores Zaragoza**

**ISBN: 970-32-3123-3**

**Impreso y hecho en México**

**Formación, Diseño editorial: Armando Cervantes Sandoval**

**Impresión con apoyo del proyecto PAPIIME PE201106**

**Material de uso libre para fines académicos, con la cita o referencia bibliográfica correspondiente.**

**Prohibida su reproducción total o parcial con fines de lucro.**

# CONTENIDO

---

Contenido	.....	1
Prólogo	.....	5
Capítulo I		
Introducción a la Estadística Circular	.....	7
¿Qué es la Estadística circular?	.....	7
¿Dónde se aplica la Estadística circular?	.....	7
Antecedentes históricos	.....	8
Capitulo II		
Fundamentos matemáticos de la Estadística Circular	.....	13
Direcciones	.....	13
Ángulos	.....	14
Características de la Estadística circular	.....	16
Presentación gráfica de los datos circulares	.....	16
Diagramas de rosa	.....	16
Gráfico de datos originales ( <i>Raw data plots</i> )	.....	17

<b>Histogramas circulares</b>	.....	<b>18</b>
<b>Histogramas lineales</b>	.....	<b>18</b>
<b>Histograma de tallo y hoja</b>	.....	<b>19</b>
<b>Distribución von Mises</b>	.....	<b>19</b>
<b>Capitulo III</b>		
<b>Técnicas Descriptivas de Estadística Circular</b>	.....	<b>21</b>
<b>El ángulo promedio</b>	.....	<b>21</b>
<b>Cálculo del ángulo promedio</b>	.....	<b>22</b>
<b>Descripción de la técnica del ángulo promedio</b>	.....	<b>22</b>
<b>Técnica del ángulo promedio para datos agrupados</b>	.....	<b>24</b>
<b>El promedio del ángulo promedio (Zar, 1996)</b>	.....	<b>24</b>
<b>La mediana circular o mediana angular</b>	.....	<b>26</b>
<b>La moda angular (Zar, 1996)</b>	.....	<b>27</b>
<b>Varianza angular y desviación estándar angular</b>	.....	<b>27</b>
<b>Capitulo IV</b>		
<b>Técnicas Inferenciales (una sola muestra)</b>	.....	<b>31</b>

---

<b>Límites de confianza para ángulos</b>	.....	<b>31</b>
<b>Descripción de la técnica de límites de confianza</b>	.....	<b>31</b>
<b>La prueba de Rayleigh</b>	.....	<b>33</b>
<b>La prueba <math>V</math></b>	.....	<b>36</b>
<b>Prueba de <math>R</math></b>	.....	<b>39</b>
<b>Prueba de Watson</b>	.....	<b>42</b>
<b>Prueba de Kuiper</b>	.....	<b>46</b>
<b>Prueba Ji-cuadrada</b>	.....	<b>48</b>
<b>Capítulo V</b>		
<b>Técnicas Inferenciales (dos o más muestras)</b>	.....	<b>53</b>
<b>Prueba de Watson y Williams</b>	.....	<b>53</b>
<b>Versión multimuestral de Watson y Williams</b>	.....	<b>59</b>
<b>Prueba Ji-cuadrada</b>	.....	<b>59</b>
<b>Versión multimuestral de Ji-cuadrada</b>	.....	<b>61</b>
<b>Prueba de Mardia-Watson-Wheeler</b>	.....	<b>62</b>
<b>Prueba multimuestral de Mardia-Watson –Wheeler</b>	.....	<b>65</b>

---

Prueba Bimuestral de Watson	.....	66
Prueba de Watson con valores empatados	.....	69
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	.....	73
<b>APENDICE</b>	.....	75
Tabla 1 Valores críticos de $z$ para la prueba de Rayleigh	.....	75
Tabla 2 Valores críticos de $u$ para la prueba de $V$	.....	76
Tabla 3 Valores críticos de Rao	.....	77
Tabla 4 Valores críticos $U^2$ para una muestras	.....	78
Tabla 5 Valores críticos para la prueba de Kupier	.....	79
Tabla 6 Valores críticos de la Ji-cuadrada	.....	80
Tabla 7 Factor de corrección $K$ para la prueba de Watson y Williams	.....	82
Tabla 8 Valores críticos de la distribución $F$ $g/l=1$	.....	86
Tabla 8.1 Valores críticos de la distribución $F$ $g/l=2$	.....	88
Tabla 9 Valores críticos de $U^2$ de Watson	.....	90

## PRÓLOGO

---

Dentro de las investigaciones que se realizan en Biología, es necesario estudiar el comportamiento de las variables, esto se puede hacer más fácilmente por medio del análisis estadístico, de ahí que la *Estadística* es el área de las matemáticas más ligada a la Biología. Una rama de esta área es la denominada **Estadística Circular** utilizada para el análisis de datos de tipo angular o de tiempo, que se distribuyen en una superficie circular o dispuestos por orientaciones en coordenadas polares, de ahí su importancia en la Biología, ya que muchos de los datos obtenidos en las investigaciones o de la propia naturaleza, son de este tipo. Algunas de las características de la Estadística Circular son parecidas a las de la Estadística tradicional, sólo hay que tomar en cuenta que tienen diferentes fundamentos teóricos.

En el presente escrito se describe la Estadística Circular, los fundamentos teóricos y prácticos de algunas técnicas de análisis estadístico, tal como el Ángulo Promedio, Mediana y Moda Angular, Desviación y Varianza Angular; dentro de los parámetros descriptivos; y Límites de Confianza, la Prueba de Rayleigh, Prueba **V**, Ji-cuadrada, Rao, Kuiper y Watson dentro de la estadística inferencial aplicada a una sola muestra. También se describe la prueba de Watson-Williams, Ji-cuadrada, Mardia-Watson-Wheeler y Watson dentro de la estadística inferencia aplicada a dos o más muestras, así como ejemplos representativos aplicados a la Biología.

Antes de entrar de lleno a la parte estadística, es conveniente mencionar el aporte de las Matemáticas y sus herramientas a la Biología; estas fueron introducidas en la Biología con el fin de establecer relaciones cuantitativas entre distintas entidades y procesos biológicos. En 1939 Kostitzin (citado por Borges y Esquivel, 1991) dijo: *“Todos estamos de acuerdo que las Matemáticas tienen el derecho de entrar a las Ciencias Naturales, pero cuando se llega a razonar el por qué usarlas, nos topamos con cierta resistencia (...) este comportamiento se debe a una actitud conservadora o sumisa”*. El razonamiento en general, no es un obstáculo para el biólogo, pero el razonamiento matemático lo sorprende, ya que está habituado a verificar paso por paso a través de la experimentación.

Así mismo Borges y Esquivel (1991) mencionan que las matemáticas en un principio jugaban un papel pobre en la Biología, sólo se utilizaban en trabajos de enumeración de especies y otras aplicaciones triviales; con el paso del tiempo las Matemáticas

---

fueron ganando terreno, gracias a las investigaciones realizadas en el área de la Medicina y la Biología, donde la aplicación de la estadística tiene mucho peso (Borges y Esquivel, 1991).

El desarrollo de la Biología ha hecho que se incrementen sus áreas de estudio, y en éstas se ha visto involucrada la Estadística, la cual se ha convertido en una herramienta indispensable para muchos de los científicos. **La Estadística se define como el arte de la decisión frente a la incertidumbre** (Milton, 2001). Se dice que es un arte por la habilidad y el conjunto de artificios necesarios para la recolección de datos y para ajustarlos lo mejor, posible a la realidad, eliminando y reduciendo todas las fuentes posibles de error (Reyes, 1995). La Estadística no sería necesaria si todos los organismos, fenómenos u objetos fueran idénticos, por lo tanto, la Estadística permite describir y comprobar **las variaciones** para poder llegar a una conclusión (Norman y Streiner, 1996).

La mayoría de los biólogos se familiarizan con parte de la Estadística, aquella que matemáticos como Zar (1996) y Batschelet (1981) entre otros denominan “Estadística lineal”, aunque este adjetivo no siempre se ajuste, también se le puede denominar “Estadística común” la cual permite tener una *evidencia estadística* de la variación de un fenómeno, pero no todos los datos que se obtienen de una investigación se pueden analizar con este tipo de Estadística. Existen mediciones dentro de la Biología donde los datos están dados en una escala diferente, por ejemplo las orientaciones las cuales se miden en grados, la frecuencia de los nacimientos los cuales se miden por escalas de tiempo cíclicas (día, semana, mes, año etcétera) de ahí que muchos matemáticos unieran conocimientos y esfuerzos y desarrollaran otra área en la Estadística, pero con fundamentos diferentes y característicos, que permitieran hacer análisis vectoriales tan parecidos a los tradicionales, que dan una particularidad de carácter circular.

La *Estadística Circular es una herramienta matemática* que se ha utilizado en diversas áreas científicas, como principal fuente para realizar análisis estadístico, sobre todo en áreas como la Medicina, Geología y Biología, pero estas pruebas no se localizan en muchos de los libros de Estadística, así como tampoco se mencionan sus fundamentos, de ahí la importancia de que los biólogos la conozcan y tengan nociones para su posterior aplicación.

En México es muy reducido el uso de la Estadística Circular, esto se debe a que su aplicación está enfocada a *estudios de orientación o de ritmos fisiológicos*, los cuales no tienen mucho auge ya que al estudiar un organismo no suelen tener mucho peso en el estudio del comportamiento direccional, el cual es muy importante dentro de la biología de la especie ya que se puede determinar patrones de comportamiento.

# Capítulo I

## Introducción a la Estadística Circular

---

### ¿Qué es la Estadística circular?

La Estadística circular es una herramienta matemática para el análisis de datos de tipo angular o cíclico o de tiempo, los cuales se distribuyen en una superficie circular dispuestos por orientaciones.

La Estadística circular tiene un enorme potencial, pero se ha aplicado poco, reflejándose este hecho en la literatura estadística, donde se le menciona como un área derivada tanto de la Estadística como de la Matemática. La bibliografía clásica que define y analiza a la Estadística circular de manera amplia es Zar (citado por Batschelet, 1981), quién dedica dos capítulos a las distribuciones circulares. La Estadística circular se ubica entre la Estadística tradicional (comúnmente conocida como estadística lineal) y la Estadística esférica (la cual se distribuye en tres dimensiones). Cuando se tiene una muestra de datos lineales se disponen grupos de datos en intervalos indefinidos mientras que datos esféricos son grupos dispuestos en un modelo gráfico tridimensional. En los últimos años se ha visto un desarrollo vigoroso de métodos estadísticos circulares para analizar registros de datos, se han desarrollado varios métodos estadísticos, particularmente no paramétricos y métodos básicos que contribuyen al análisis de datos (Fisher, 1993).

La Estadística circular es ideal para analizar datos de tiempo, trayectorias y orientaciones. Los datos en forma de ángulos en orientaciones bidimensionales se encuentran en casi todas las áreas de la ciencia, como: la Biología, Geografía, Geología, Medicina, Meteorología y Física, entre otras.

### ¿Dónde se aplica la Estadística circular?

La Estadística circular ha sido aplicada durante años en muchas áreas de la ciencia, aunque no tanto como otras herramientas matemáticas, sin embargo hay aplicaciones representativas como a continuación se muestran.

#### *Biología*

- 1.- Orientaciones de aves de sus nidos y migraciones.
- 2.- Trayectorias de animales a partir de un punto referencial.
- 3.- Orientación en animales, en respuesta a un determinado estímulo.
- 4.- Efectos de luz polarizada en orientación de animales marinos.

### *Geografía*

En geografía, la Estadística circular se aplica a estudios de la ocurrencia de terremotos en una región, en longitud y latitud de cada epicentro.

La variación de los terremotos se estudia por año y día por medio de análisis de tiempo, obteniéndose de estos estudios datos de tipo angular. También se observan datos angulares cuando se determinan direcciones microsísmicas en una localidad particular.

### *Geología.*

Los datos angulares se presentan en investigaciones de procesos geológicos que involucran el movimiento de materia de un lugar a otro en un determinado tiempo.

En estudios de direcciones magnéticas las técnicas de estadística circular se utilizan para interpretar estudios de paleomagnetismo de corriente y magnetismo polar en los tiempos geológicos, en estudios de orientaciones de fracturas y elementos presentes en rocas, se usan para interpretar fuerzas tectónicas.

### *Medicina*

En medicina la Estadística circular y sus datos angulares se aplican al número de muertes o nacimientos tomados cada mes o cada año así como en estudios cardiológico-cíclicos.

### *Meteorología*

La Estadística circular se utiliza en la representación de mapas estelares, además de basar su notación en el intervalo  $0^{\circ}$ - $360^{\circ}$ , esta representación se hace al norte ( $0^{\circ}$ ), al este ( $90^{\circ}$ ), al sur ( $180^{\circ}$ ), al oeste ( $270^{\circ}$ ).

### *Física*

Los datos angulares aparecen cuando se miden direcciones preferentes de ejes ópticos en los cristales de diferentes especímenes de rocas y también se presentan en varios problemas inferenciales de fases oscilatorias (Mardia, 1972).

Al igual que otras áreas de las matemáticas el desarrollo de esta herramienta abarca años de investigación en la historia donde la participación de ilustres matemáticos, entre otros aportadores, desarrollaron diferentes técnicas y aplicaciones.

### **Antecedentes históricos**

La Estadística circular no es relativamente nueva ya que desde el siglo X se encuentran registros de análisis con carácter circular. La demanda de métodos para estudios de orientaciones o de movimientos originó la búsqueda de métodos adecuados para estos

estudios, siendo mucho el tiempo para formar esta área de las matemáticas, hasta la fecha se siguen haciendo aportes novedosos a los ya desarrollados, también ya se cuenta con paquetes estadísticos, adecuados.

A finales del primer milenio se encontraron las primeras gráficas con características circulares. Funlkhouser (citado por Fisher, 1993) comenta que en el siglo X o el XI se realizaban estudios astrológicos con base en el movimiento de los planetas a través del zodíaco en diagramas oscilatorios (Fig.1).

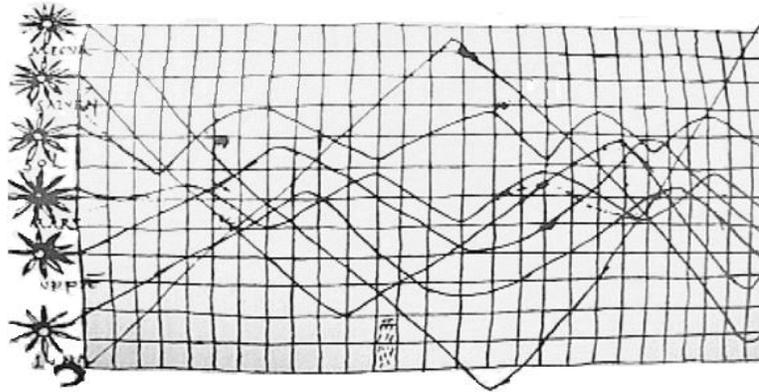


Figura 1.- Gráfica que indicaba los movimientos planetarios del siglo X

En 1767, el reverendo John Mitchell analizó las separaciones angulares entre las estrellas y encontró que el número de parejas cercanas era tan grande para ser consistente; formuló la siguiente hipótesis: las direcciones de las estrellas se distribuyen uniformemente. Mitchell infirió que tales direcciones se debían a fuerzas gravitacionales.

En 1996, Cox (citado por Fisher, 1993) comentó en su libro *“Elevación e Inflexión del Estrato”* que John Playfair puntualizó a finales siglo XVIII, que era necesario analizar datos direccionales que difirieran de la forma ordinaria y recomendó el uso de métodos vectoriales de direcciones promedio para obtener resultados.

En 1858, la enfermera Florence Nightingale, de la Armada Británica, durante la guerra de Crimea, usó una variedad de métodos que le ayudaron a registrar y analizar de manera más sencilla los registros sanitarios. En esa época el uso de la estadística no era muy común, pero se necesitaba avanzar en las reformas médicas y considerar que los fenómenos sociales podían ser objetivamente medidos haciendo análisis matemáticos.

Uno de estos fue una nueva gráfica, a la que llamó **CoxComb**, la cual consistía de un círculo dividido en doce partes iguales, con diferentes colores que representaban los

meses del año. Este diagrama es una primera referencia de lo que actualmente se conoce como *diagrama de rosa*; tenía como fin mejorar los registros sanitarios.

También se realizaron análisis de datos de tipo geológico pero en ese entonces no había métodos de análisis disponibles que dieran una mejor solución. En el siglo XIX, Lord Rayleigh desarrolló una prueba estadística para la uniformidad sobre un modelo alternativo de una dirección predilecta. Éste fue desarrollado durante veinte años, pero no llegó a oídos de los estadísticos. Posteriormente reapareció, para resolver problemas referentes a vibraciones en una misma frecuencia en una fase arbitraria.

En 1917 surgieron en el área de biogeografía, gráficas estándar de datos circulares conocidas como diagramas de rosa, para la representación de datos axiales. Schmidt (citado por Fisher, 1993) agrupó una muestra de datos axiales en intervalos de  $5^\circ$ , colocando los datos en radios secuenciales, comparando sus diagramas con trazos teóricos basados en versiones axiales bicartesianas.

A principios del siglo XX la utilización de métodos estadísticos para datos circulares se aplicaron y reportaron sólo en la literatura geológica, para el análisis de fracturas (Fig. 2).

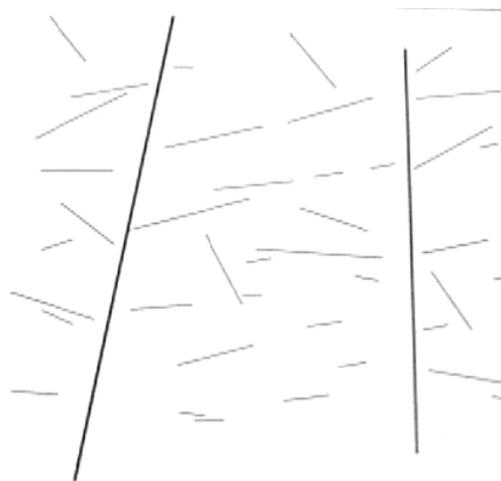


Figura 2.-Fracturas geológicas en análisis geológicos

En 1918 von Mises introdujo la distribución probabilística normal circular, base de la inferencia estadística paramétrica de datos circulares.

En 1939, Krumborn introdujo la idea básica del análisis de datos axiales por transformación de los resultados.

En los años 1950 se comenzaron a desarrollar las técnicas probabilísticas apropiadas para distribuciones de datos circulares.

Gumbel investigó la conveniencia de aplicar distribuciones en modelación de grupos de datos de diferente tipo. Sin embargo, el desarrollo de métodos estadísticos para analizar datos circulares se vuelven razonablemente acertados en 1956, con los trabajos pioneros de Watson y Williams (Fisher, 1993).

Watson y Williams no solamente unificaron los problemas inferenciales que planteaba von Mises, sino que también aportaron novedosas ideas y resultados. Watson introdujo el análisis de varianza, pruebas paramétricas y no paramétricas entre otras. Mardia en 1972 realizó avances en pruebas tales como la correlación y la regresión y recientemente series de análisis temporal de datos circulares. Posteriormente Batschelet unificó y simplificó diversas metodologías para casos que presentaran datos de tipo angular en Biología (Mardia, 1972; Fisher, 1993).

Batschelet (citado por Fisher, 1993), realizó estudios sobre los métodos de análisis circular para la resolución de problemas biológicos, tales como la navegación de aves, orientaciones generales seleccionadas por organismos y la respuesta a la variación experimental del hábitat natural o de parte de ellos mismos. Describió numerosos experimentos, particularmente realizados por Schmidt-Koenig en palomas y sus orientaciones con base al viento y sus palomares. Batschelet también menciona estudios de orientaciones de moscas de agua en respuesta a sonidos específicos, orientaciones de salamandras y libélulas.

Han sido muchas sus investigaciones en el ámbito de la Biología y sus aportaciones se consideran en todos los estudios que se han apoyado en la estadística circular (Fisher, 1993).

La Ecología es una de las ramas de la Biología que más ha hecho uso de la estadística circular, las primeras aplicaciones se realizaron en el vuelo de las aves y orientaciones de otros animales como salamandras, hormigas e insectos; con el tiempo se han encontrado más aplicaciones. En Biología se han presentado análisis estadísticos circulares; los estudios se aplican en el estudio botánico del crecimiento de inflorescencia y la disposición de parásitos en éstas (Fig. 3a).

Otras orientaciones son la presencia de disposición de semillas, con respecto a factores externos (Fig. 3b) y trayectorias de movimiento continuo, escape o de ataque de animales tales como ratones y crustáceos (Fig.3c).

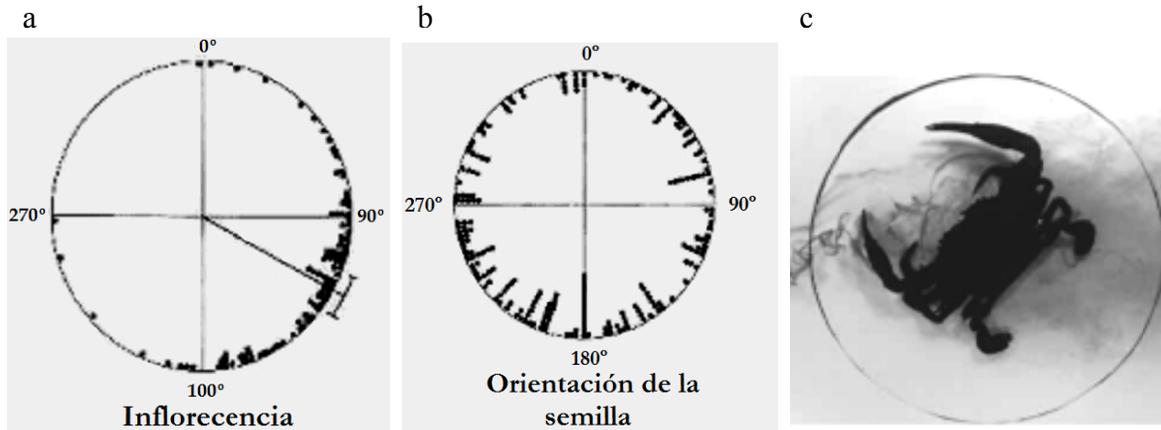


Figura 3.- Orientaciones de a) inflorescencia b) disposición de semillas c) movimiento direccional de un crustáceo.

Las aplicaciones de la estadística van en aumento pero para su utilización es necesario que se conozcan sus fundamentos matemáticos, los cuales son diferentes de la Estadística común, la Estadística circular tiene características únicas como se describen a continuación.

## Capítulo II

### Fundamentos matemáticos de la Estadística Circular

---

La Estadística circular se basa en un círculo para realizar análisis de trayectorias, direcciones o de tiempo, tomando en cuenta que el círculo es una línea cerrada, esto implica que existen diferencias algebraicas entre la estructura de un círculo y la de una línea. Esto tiene como consecuencia diferentes teorías de límite central. Para comprender mejor los fundamentos de la Estadística circular es necesario saber que características se manejan y que tipo de datos.

#### Direcciones

La Estadística circular analiza direcciones con base en ángulos, de aquí la importancia de conocer que es una dirección y qué es un ángulo (Mardia, 1972).

Los datos de orientación reciben el nombre de “datos direccionales”, mientras que las observaciones hechas en dos dimensiones se llaman “datos circulares” y direcciones representadas en dos ángulos como vectores de tres dimensiones se denominan “datos esféricos” (Jammalamadaka y SenGupta, 2001).

Las direcciones se pueden ubicar espacialmente en un  $x$  número de dimensiones espaciales, donde se representan por puntos en la circunferencia de un círculo o bien en la superficie de una esfera respectivamente (Mardia, 1972).

La representación numérica de direcciones ya sea un vector o un ángulo, es con referencia a un punto cero y a una rotación en el sentido de las manecillas del reloj. Una dirección positiva (Fig.4) recibe el nombre de “azimutal” (Jammalamadaka y SenGupta, 2001).

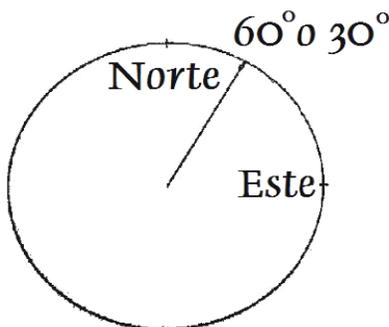


Figura 4.- El valor depende de un punto cero y un sentido de rotación (azimutal)

## Ángulos

Una observación hecha en un círculo de **radio 1**, donde un ángulo denominado  $a$  se localiza entre dos puntos  $P$  y  $P'$  ( $0^\circ < a < 360^\circ$ ) medidos en grados, le llama vector unitario y este dato puede describirse como un dato circular (Fig 5).

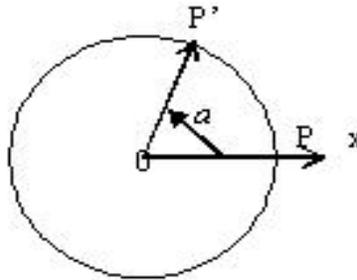


Figura 5.-- Representación de un ángulo  $a$

La posición de un ángulo  $a$  en un plano se determina por coordenadas (x,y respectivamente), para esto se hace uso del sistema de coordenadas cartesianas, el cual tiene su origen en el centro y dos ejes perpendiculares denominados X y Y.

En el círculo unitario (Mardia, 1972) el punto 0 se ubica en el centro del círculo, el eje vertical se convierte en el eje X, y el eje horizontal se convierte en el eje Y. La ubicación de X en un eje vertical en lugar del horizontal, es porque el álgebra de los ángulos es diferente de las reglas en otras ramas de la matemática; el punto cero ( $^\circ$ ) siempre se debe anclar hacia el norte en el eje positivo (Fig. 6).

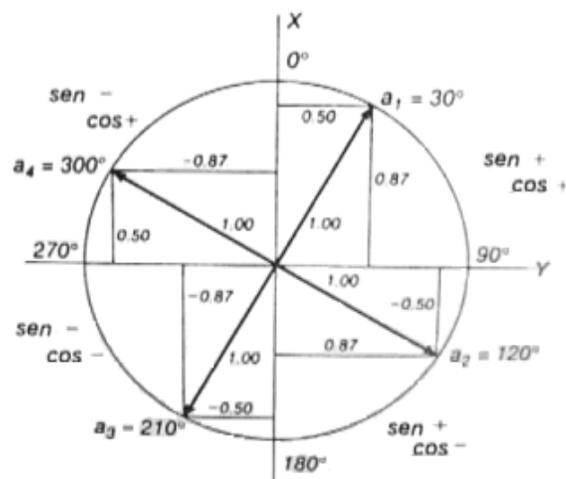


Figura 6.- Ubicación de ejes X y Y, con la relación de coordenadas rectangulares.

Los procedimientos circulares utilizan dos funciones básicas de la trigonometría: *seno* y *coseno*, los cuales se ubican en los ejes de las coordenadas cartesianas, así la ordenada  $x$  indica el valor de coseno y la abscisa  $y$  indica el valor de la función seno, por lo que matemáticamente en un círculo unitario es definido como:  $x = \cos a$  y  $y = \sin a$ , con estos valores se localizan los puntos referentes a los ejes  $X$  y  $Y$  en un círculo, con la ayuda del radio  $r$ , si no se trata de un círculo unitario, aplicando las siguientes ecuaciones:  $\cos a = \frac{x}{r}$  y  $\sin a = \frac{y}{r}$ .

Por lo que la localización de un punto en un plano circular (Fig. 7) está determinado por un radio ( $r$ ) y un ángulo ( $a$ ) localizados por las funciones trigonométricas *seno* y *coseno* (Zar, 1996).

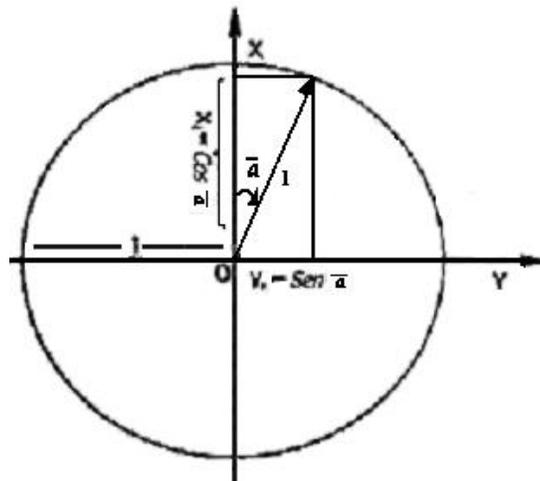


Figura 7.- Coordenadas rectangulares de un vector ( $r$ ) unitario.

### Características de la Estadística circular (Zar, 1996)

En contraste con otro tipo de escalas en la escala circular el punto cero se puede asignar en cualquier punto de un círculo, que está dividido en  $360^\circ$ , los cuales son intervalos del mismo tamaño. Un ejemplo clásico de escala circular, son las horas del día, donde cada hora equivale a  $15^\circ$ , ( $360^\circ/24$ ) los meses del año es otro ejemplo, donde cada intervalo es de  $30^\circ$  ( $360^\circ/12$ ). Para convertir  $x$  unidades de tiempo en medidas de escala circular se utiliza la siguiente ecuación:

$$a = \frac{(360^\circ)(x)}{k}$$

Donde  $x$  es la unidad a convertir en un ángulo y  $k$  es el total de las unidades dentro de un ciclo. Esto se representa de la siguiente forma:

$$x = 6 \text{ horas} \quad k = 24 \text{ horas}$$

$$a = \frac{(360^\circ)(6hrs)}{(24hrs)} = \frac{360^\circ(1)}{4} = 90^\circ$$

**Presentación gráfica de los datos circulares** (Mardia, 1972)

Los datos circulares se pueden representar de dos maneras en un círculo, una es por medio de puntos y otra es por radios que muestren la orientación, desde el origen (centro) hasta el dato angular (Fig 8 a,b).

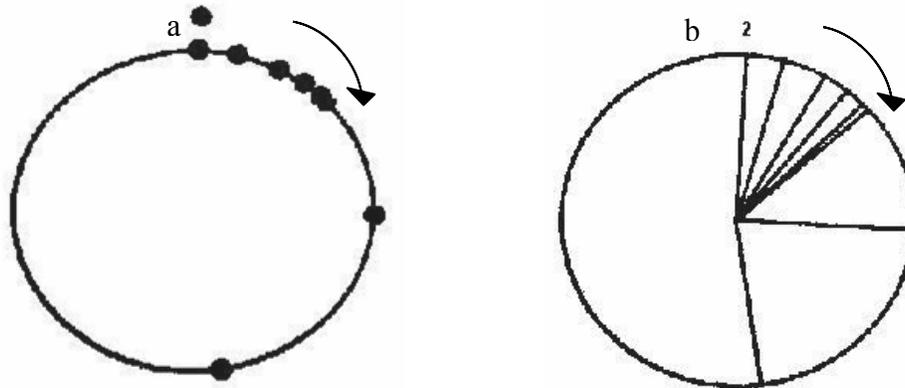


Figura 8.- Representación de datos a) por medio de puntos b) por medio de radios.

**Diagramas de rosa** (Mardia, 1972)

Los datos circulares se representan en diagramas circulares. Estos, a diferencia de las escalas lineales, no utilizan barras, sino sectores que no son de la misma área, pero pueden ser proporcionales. La frecuencia de las observaciones de cada clase se representa por radios.

En los siguientes diagramas (Fig. 9 a, b) se observan sectores de diferente tamaño, área y radios, los cuales representan la frecuencia de los datos donde el número de es indeterminado. Los ángulos se miden en la dirección de las manecillas del reloj con la dirección norte a 0°.

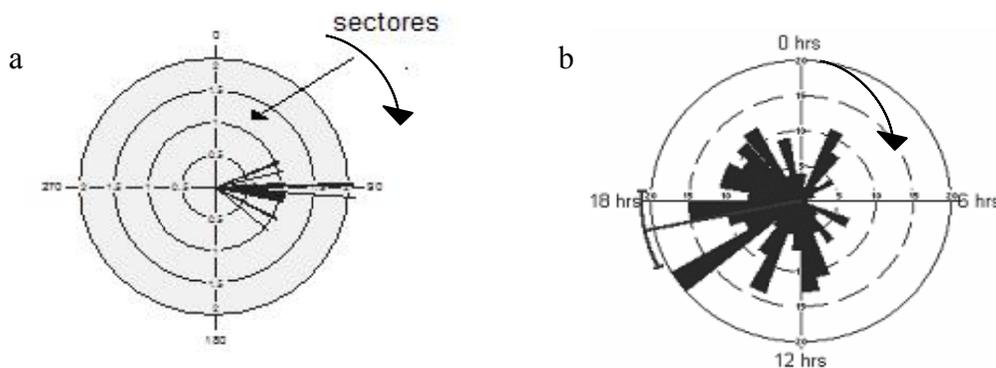


Figura 9 .- Diagramas de rosa mostrando sectores a) de 0.5 y área de 1 y b) de 5 con área de datos de 10°

### Gráfico de datos originales (*Raw data plots*) (Fisher, 1993)

Estos gráficos presentan datos de una muestra en forma de símbolos, esto permite evaluar el tamaño de la muestra de una ojeada, así como ver la distribución de los datos; por ejemplo, en muestras grandes, cada uno de los símbolos puede representar una observación múltiple.

Cada símbolo se puede representar con formas de triángulos para datos direccionales o en círculos llenos para datos bidireccionales trazando los datos en ambos lados del diagrama. Estos se pueden ubicar dentro o fuera del círculo y cuando el dato se repite se van alineando uno sobre otro en la dirección de los datos, estos se colocan dentro del círculo (Fig. 10 a, b), aunque también se pueden denotar externos.

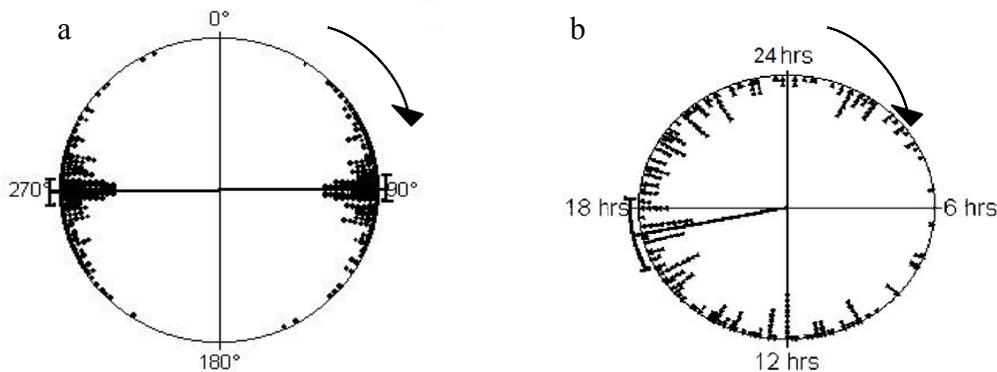


Figura 10.- Gráficos de datos originales, mostrando los datos en su orientación específica a) de un ciclo de 360°, b) y uno de 24 hr,

### Histogramas circulares (Fisher, 1993)

Estos gráficos se hacen mediante barras que muestren el número de observaciones dentro de cada intervalo de clase y que surgen a partir del círculo. El ancho de las barras se puede determinar según la conveniencia, ya que las barras pueden tener el ancho de más de 1°. El siguiente gráfico tiene anchuras de 1° (Fig. 11).

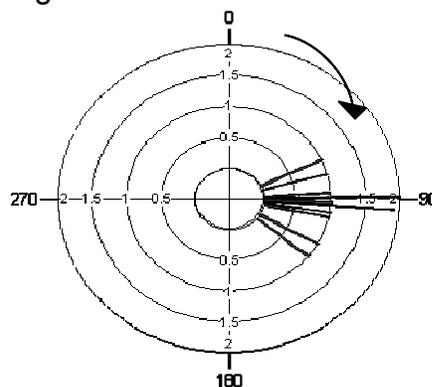


Figura 11.- Histograma circular de 360° con sectores de 0.5.

**Histogramas lineales** (Fisher, 1993)

Los histogramas lineales se construyen considerando los datos como si fueran lineales y no angulares, por lo que no se grafican en círculo sino en dos ejes (Fig. 12). Para construir los histogramas lineales, se selecciona el intervalo que va de 0° a 360° y se transforma en intervalos de tiempo, los cuales por comodidad también se agrupan en intervalos. En el eje de las ordenadas se grafican la frecuencia de los datos y en el eje de las abscisas los datos de tiempo o de orientación.

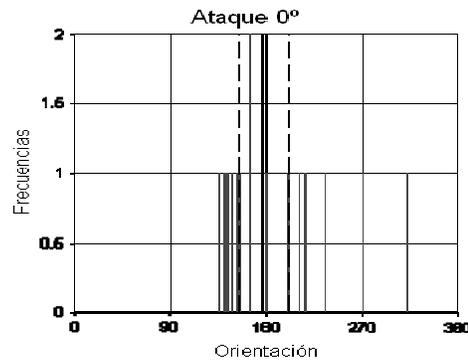


Figura 12.- Histograma lineal de 360° que muestra los datos frecuenciales.

**Histograma de tallo y hoja** (Fisher, 1993)

Existen también diagramas de tallo y hoja en los cuales se recomienda graficar los datos de manera individual; sin embargo, su notación es muy parecida a la de la estadística lineal ya que los datos se fraccionan en tallos de valores de 0 hasta 350, y en la hoja se colocan los datos unitarios que van desde el 0 hasta el 9 (Fig13).

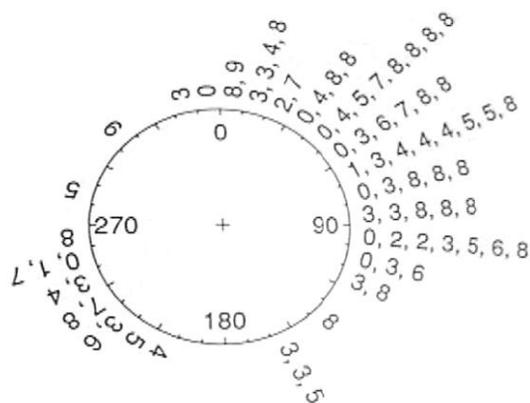


Figura 13.- Diagrama de tallo y hoja.

### Distribución von Mises (Batschelet, 1981)

La distribución de von Mises introducida en 1918, juega un papel similar a la de la distribución normal, por esta razón es la base para pruebas estadísticas circulares paramétricas.

La distribución de von Mises es un modelo estadístico llamado también “distribución circular normal”, que enfatiza la importancia y similitud con la distribución normal; sin embargo, este término y el llamado “normal circular” es poco popular.

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \exp^{[k \cos(\phi - \theta_1)]} \quad , k \geq 0$$

Donde  $k$  es el parámetro de concentración y  $\theta_1$  es el ángulo promedio, la distribución von Mises es simétrica con respecto al ángulo promedio. Cuando  $k = 0$ , la distribución de von Mises degenera en la distribución uniforme ( $\rho = 0$ ). Entre más grande sea  $k$ , la distribución se concentra más alrededor del ángulo promedio (Fig 14).

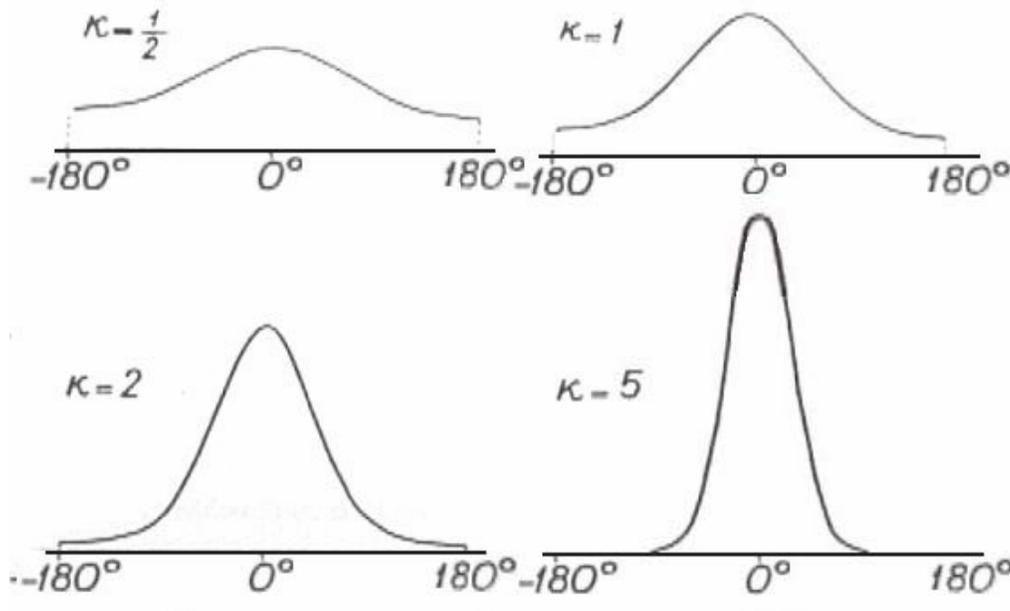


Figura 14.- Distribuciones de von Mises con diferentes parámetros de concentración

A continuación se introducen las técnicas de la estadística descriptiva, fundamentales para el análisis estadístico circular.



## Capítulo III

### Técnicas Descriptivas de Estadística Circular

---

En este apartado se examinarán las medidas de tendencia central como el promedio angular, mediana angular y moda angular así como medidas de dispersión tales como varianza y desviación estándar, describiendo su importancia y técnicas, así como algunas observaciones complementarias.

#### **El ángulo promedio** (Batschelet, 1981)

El ángulo promedio es una medida de tendencia central que indica un valor representativo, en la estadística circular; indica una orientación preferida en una muestra de datos angulares. Presenta dos propiedades, primero indica dirección y segundo indica la longitud del radio. Este hecho se refleja en las diversas técnicas de la estadística circular, las cuales analizan una muestra de datos tomando como característica principal el ángulo promedio y su posición con respecto a los datos circundantes. El análisis del promedio circular se puede efectuar en una o más muestras, asociadas a una frecuencia. Por lo antes mencionado, Jammalamadaka y SenGupta (2001) llaman al promedio angular “la medida de localización más importante”. El ángulo promedio es un valioso apoyo para localizar un dato angular representativo, ya sea de tiempo u orientación como lo muestra la Figura 15; que simboliza la hora en que ocurren los accidentes en un día y ubica la hora promedio de éstos, aproximadamente las 17:00, esto da pauta para poder entender que factores pudieran influir en ese horario para la presencia de accidentes, como la salida laboral, el cansancio, etcétera y poder plantear una posible solución.

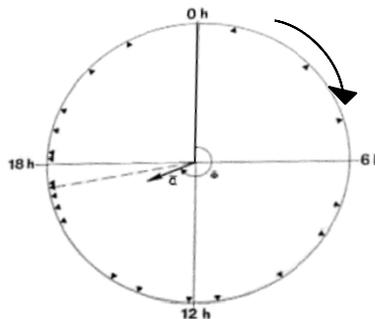


Figura. 15 Diagrama de la hora promedio de accidentes de tráfico durante el día.

#### **Cálculo del ángulo promedio**

Se define al ángulo promedio como la suma de todos los ángulos de una muestra dividida entre el número de éstos, sólo que la suma de los ángulos es diferente ya que

---

primero es necesario obtener las coordenadas cartesianas de cada ángulo, es decir el valor de seno y coseno.

**Descripción de la técnica del ángulo promedio (Zar, 1996)**

Cuando se tienen  $n$  ángulos desde  $a_1$  hasta  $a_n$  en una muestra, y se tienen sus coordenadas cartesianas (seno y coseno) se efectúa la suma de cada una de ellas, para obtener  $\sum \text{sen } a_i$  y  $\sum \text{cos } a_i$  los cuales se dividen entre el número de datos para obtener  $x$  e  $y$ .

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n \text{cos } a_i}{n} \qquad y = \frac{\sum_{i=1}^n \text{sen } a_i}{n}$$

Con estas coordenadas se obtiene la longitud del radio:

$$r = \sqrt{y^2 + x^2}$$

Y el valor del ángulo promedio designado como  $\bar{a}$  (donde  $\bar{a}$  es el ángulo promedio) se determina por la función inversa de:

$$\text{cos } \bar{a} = \frac{x}{r} \qquad \text{sen } \bar{a} = \frac{y}{r}$$

**Ejemplo 3.1** (tomado y modificado de Zar, 1996)

Se desea calcular el ángulo promedio direccional de la inclinación de las ramas de un árbol, tomando las direcciones en forma de ángulos. Tomando en cuenta las siguientes orientaciones: 45°, 55°, 81°, 96°, 110°, 117°, 132° y 154° (Fig. 16)

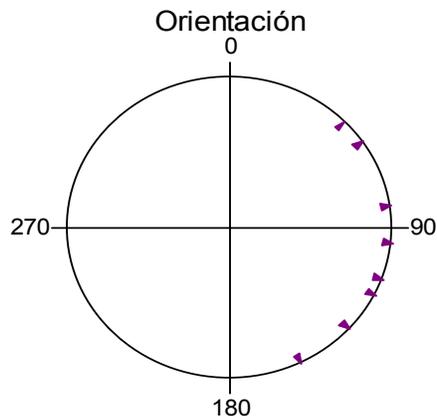


Figura 16.- Gráfico de Datos originales del ejemplo 1

El producto de la suma de cada una de las coordenadas cartesianas.

$a_i$ (ángulo)	$\cos a_i$	$\text{sen } a_i$
45	0.70711	0.70711
55	0.57358	0.81915
81	0.15643	0.98769
96	-0.10453	0.99452
110	-0.34202	0.93969
117	-0.45399	0.89101
132	-0.66913	0.74315
154	-0.89879	0.43837

$$n=8 \quad \sum \cos a_i = -1.03134 \quad \sum \text{sen } a_i = 6.52069$$

Aplicando las ecuaciones descritas anteriormente para  $x$  y  $y$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n \cos a_i}{n} = -0.12892 \quad y = \frac{\sum_{i=1}^n \text{sen } a_i}{n} = 0.81509$$

Se obtiene  $r$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-0.12892)^2 + (0.81509)^2} = \sqrt{0.68099} = 0.82522$$

Las coordenadas cartesianas de  $\bar{a}$

$$\cos \bar{a} = \frac{-0.12892}{0.82522} = -0.15623 \quad \text{sen } \bar{a} = \frac{y}{r} = \frac{0.81509}{0.82522} = 0.98772$$

Con la función inversa del coseno y seno se obtiene un ángulo promedio  $\bar{a}$  de  $81^\circ$ , este ángulo es la orientación promedio de ramas inclinadas en el árbol., esto puede deberse a algún factor externo ubicado en esta dirección como el viento, la dirección de lluvia o por la salida del sol.

### Técnica del ángulo promedio para datos agrupados (Zar, 1996)

Para este tipo de datos se utiliza una tabla de frecuencias, donde los ángulos se presentan con su frecuencia. Para su cálculo se utilizan las ecuaciones anteriores con la variable  $f$  que representa la frecuencia de cada uno de los datos. La frecuencia se

multiplica antes de hacer la suma de coordenadas cartesianas de cada uno de los datos y se utiliza el mismo método que para datos no agrupados.

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cos a_i}{n} \qquad y = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \operatorname{sen} a_i}{n}$$

**El promedio del ángulo promedio** (Zar, 1996)

Cuando se tienen dos o más muestras ( $h$ ) y se desea localizar el promedio de los ángulos promedio, se realiza un análisis de segundo orden utilizando las siguientes ecuaciones y se utiliza el mismo método.

$\bar{x} = \frac{\sum r_j \cos \bar{a}_j}{h}$ $\bar{y} = \frac{\sum r_j \operatorname{sen} \bar{a}_j}{h}$	LA SUMA DE COORDENADAS CARTESIANAS
$r = \sqrt{y^2 + x^2}$	Longitud del Radio
$\cos \bar{a} = \frac{\bar{x}}{r} \qquad \operatorname{sen} \bar{a} = \frac{\bar{y}}{r}$	Coordenadas cartesianas

**Ejemplo 3.2** (tomado y modificado de Zar, 1996).

Suponga que se tienen siete muestras de orientaciones de siete diferentes libélulas bajo iluminación especial, durante 10 tiempos se les permitió volar desde un punto específico. Se registraron las orientaciones (Fig. 17), el promedio y el radio se muestran a continuación.

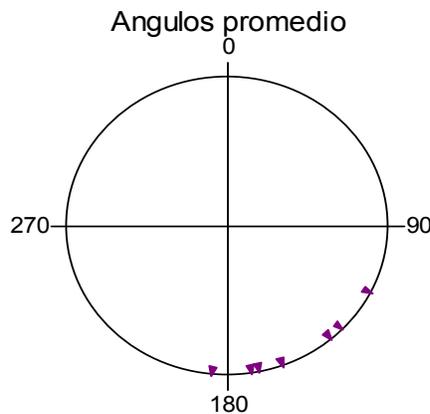


Figura 17.- Gráfico de datos originales del ejemplo 2

- Es necesario primero obtener el valor de  $\bar{a}$  y  $r$  de cada una de las  $h$  muestras. Con el método descrito anteriormente se calculan las coordenadas cartesianas de cada muestra y se obtienen los valores trigonométricos de cada una tomando en cuenta que  $h = 7$  y  $n = 10$

muestra ( $j$ )	$\bar{a}_j$	$r_j$
1	160°	0.9854
2	169°	0.7747
3	117°	0.4696
4	140°	0.8794
5	186°	0.3922
6	134°	0.6952
7	171°	0.3338

- Obtener la suma de las coordenadas cartesianas de cada muestra  $\sum x_j$  y  $\sum y_j$

$x_j = r_j \cos \bar{a}_j$	$y_j = r_j \sin \bar{a}_j$
-0.84140	0.30624
-0.76047	0.14782
-0.21319	0.41842
-0.67366	0.56527
-0.39005	-0.04100
-0.48293	0.5009
-0.32969	0.05222
$\sum x_j = 3.69139$	$\sum y_j = 1.94906$

- Aplicando las ecuaciones descritas anteriormente, para  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_j}{h} = \frac{-3.69139}{7} = -0.52734 \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_j}{h} = \frac{1.94906}{7} = 0.27844$$

- Con  $r$

$$r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} = \sqrt{0.35562} = 0.59634$$

- Se obtiene las coordenadas cartesianas de  $\bar{a}$ :

$$\cos \bar{a} = \frac{\bar{x}}{r} = \frac{-0.52734}{0.59634} = -0.88429 \qquad \text{sen } \bar{a} = \frac{\bar{y}}{r} = \frac{0.27844}{0.59634} = 0.46691$$

- La función inversa de este coseno y seno es de  $152^\circ$ , lo que indica que la dirección promedio de las siete libélulas es de  $152^\circ$ , este ángulo es la orientación promedio de las muestras de libélulas, la cual puede estar influenciada por factores ajenos, como luz, alimento o reproducción.

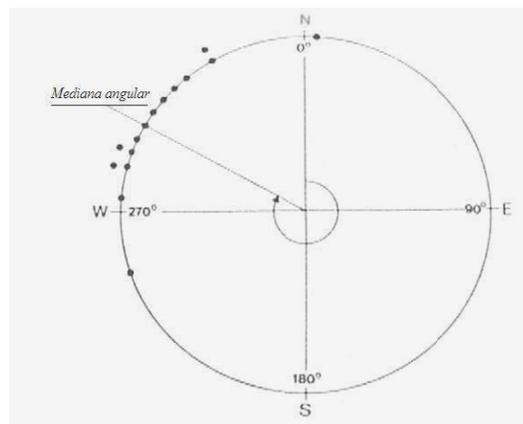
**La mediana circular o mediana angular**

Fisher (1993) menciona que la mediana circular es un parámetro difícil de calcular, sin embargo hace referencia del cálculo a partir de la siguiente ecuación:

$$d(\theta) = \pi - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\pi - |\theta_j - \theta||$$

Sin embargo, otros autores proponen para el cálculo de la mediana algo más sencillo. Batschelet (1981) menciona “que el ángulo formado a partir del origen ( $0^\circ$ ) hasta el lugar donde los datos estén más cercanos (agrupados) entre sí, determina la “mediana angular”. Zar (1996) define que la mediana es indicada por el radio más cercano a la mayoría de los puntos (Fig. 18).

Figura. 18. Representación de la mediana angular.



En la Figura 19 se ejemplifica una ave proveniente de China, la cual pasa por un corredor con cambio de dirección (ángulo  $\alpha$ ) dirigiéndose hacia la salida tomando direcciones similares a la original, el ángulo  $\beta$  indica el ángulo promedio de  $43^\circ$ , cercano a la mediana de  $47^\circ$  (Batschelet, 1981).

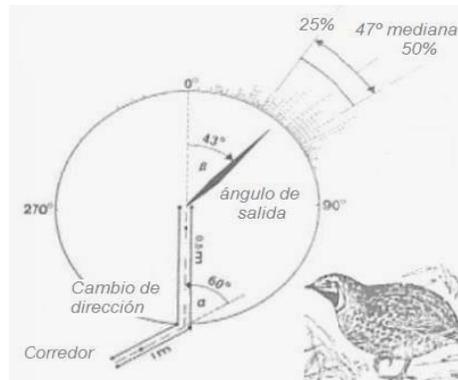


Figura 19. Mediana angular de orientaciones de aves provenientes de China.

### La moda angular (Zar, 1996)

El ángulo modal es el ángulo que más se repite y puede haber más de una moda en una muestra. La Figura 20 muestra una representación gráfica de la moda angular.

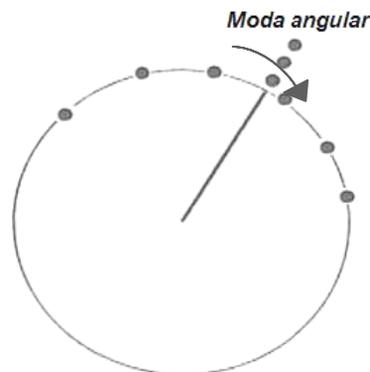


Figura 20. Moda angular

### Varianza angular y desviación estándar angular

El ángulo promedio de una muestra indica una dirección preferencial, pero no se puede obtener información sobre los valores circundantes al ángulo promedio, por esto, una medida de dispersión es tan importante como una de localización.

Cuando en una muestra los puntos se encuentran muy juntos, en un arco no más grande que  $20^\circ$ , se define un intervalo de dispersión cercano a 1 ya que las operaciones funcionales utilizan la  $r$  como una medida de concentración, así  $1-r$  es una medida de dispersión, donde  $1-r=0$  indica la ausencia de dispersión y  $r=1$  es la máxima dispersión. Batschelet (1981) define la *varianza angular* como:

$$s^2 = 2(1-r) \quad , \quad 0 \leq s^2 \leq 2$$

y la *desviación angular*, con un intervalo mínimo de  $0^\circ$  y un máximo de  $81.05^\circ$  como:

$$s = \frac{180^\circ}{\pi} \sqrt{2(1-r)}$$

Otra posibilidad de análisis y la más utilizada es la definida por Mardia (1972) como *varianza y desviación circular*, con el propósito de mostrar que una muestra de datos pequeña favorece una varianza angular pequeña y una desviación angular pequeña. El intervalo para la *varianza circular* es de  $0 \leq s_0 \leq 1$ .

$$s^2 = 1 - r \quad , \quad s_0 = \frac{180^\circ}{\pi} \sqrt{-2 \ln r}$$

La *desviación circular* es análoga a la desviación estándar lineal en grados (para radianes sólo hay que eliminar el cociente  $\frac{180^\circ}{\pi}$ ), según Zar (1996) los valores de  $s$  y  $s_0$  sólo difieren en no más de  $2^\circ$ .

La desviación estándar al ser una medida de dispersión está estrechamente ligada al radio, cuando la desviación es muy pequeña el radio es más grande. A su vez una desviación grande indica un radio pequeño y la presencia significativa de dispersión (Fig. 21).

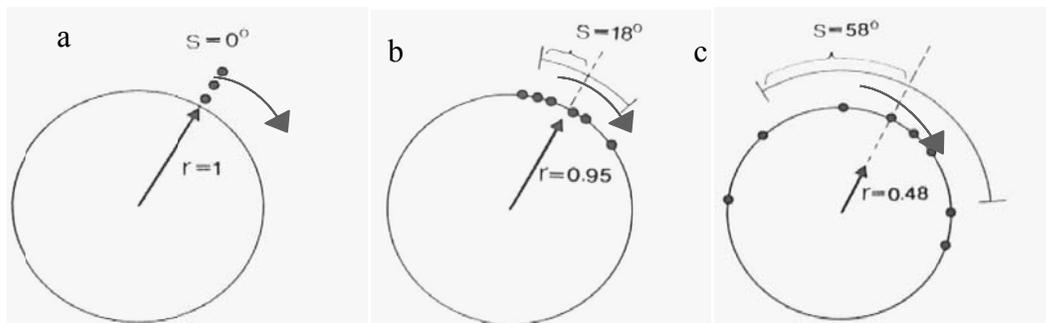


Fig. 21. Diferentes valores de desviación circular y radio asociado a) radio de 1 indica una desviación de  $0^\circ$  (sin presencia de distribución uniforme), b) radio de 0.95 indica una desviación de  $18^\circ$ , los datos presentan distancia entre sí, c) radio de 0.48 indica una desviación de  $48^\circ$  los datos están dispersos.

Con bases suficientes de la estadística circular descriptiva, como medidas de tendencia central y de dispersión, se puede comenzar a indagar dentro de la estadística inferencial, la cual ayuda a realizar análisis para la toma de decisiones. A continuación se revisan las pruebas más importantes y más utilizadas de la Estadística circular paramétrica y no paramétrica aplicadas a una muestra.

## Capítulo IV

### Técnicas Inferenciales (una sola muestra)

---

Las medidas de dispersión son importantes para analizar orientaciones, en la estadística inferencial se describen: límites de confianza, pruebas para una, dos o más muestras. En este capítulo se revisan algunas de las pruebas aplicables a una sola muestra las cuales basan su análisis en la distribución uniforme (aleatoriedad) o en el ajuste a la distribución teórica de von Mises. Con cada técnica se presentan uno o dos ejemplos, uno de análisis biológico descrito principalmente por Batschelet (1981) donde sólo se muestra su aplicación e importancia y otro de desarrollo numérico para describir la técnica por medio de pruebas estadísticas y valores críticos, éstos se puede consultar en las tablas de valores críticos del apéndice. Las pruebas para dos o más muestras se describirán en el Capítulo V, desglosadas de la misma manera que las de este capítulo.

#### Límites de confianza para ángulos (Batschelet, 1981)

Los intervalos de confianza se utilizan para encontrar la posición de un parámetro desconocido (Fig. 22).

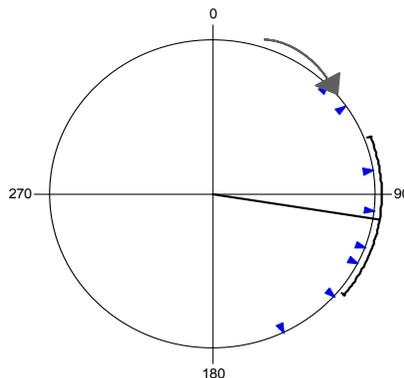


Figura 22. Límites de confianza en un diagrama circular

**Descripción de la técnica de límites de confianza** (tomado y modificado de Zar, 1996). Este procedimiento se basa en la distribución de von Mises, los límites de confianza son:

$$L_I = \bar{a} - d \quad L_S = \bar{a} + d$$

Para una $n$ pequeña:	Para una $n$ grande:
$\bar{a} \pm d$ $r > \frac{\chi_{\alpha,1}^2}{2n}$ $r \leq 0.9$	$\bar{a} \pm d$ $r > \frac{\chi_{\alpha,1}^2}{2n}$ $r \geq 0.9$
$d = \arccos \left[ \frac{\sqrt{\frac{2n(2R^2 - n\chi_{\alpha,1}^2)}{4n - \chi_{\alpha,1}^2}}}{R} \right]$	$d = \arccos \left[ \frac{\sqrt{n^2 - (n^2 - R^2)e^{\frac{\chi_{\alpha,1}^2}{n}}}}{R} \right]$

Donde  $d$  determina el límite inferior y superior,  $R = nr$  y  $r$  es el radio del ángulo promedio.

**Ejemplo 4.1** (tomado y modificado de Zar, 1996)

Determinar los límites de confianza para las orientaciones de las ramas inclinadas de un árbol con una confianza del 95%, usando los siguientes parámetros

$$\begin{aligned}
 n &= 8 \\
 \bar{a} &= 104^\circ \\
 r &= 0.87919 \\
 R = nr &= (8)(0.87919) = 7.03352 \\
 \chi_{\alpha,1}^2 &= 3.841
 \end{aligned}$$

Usando la ecuación anterior para  $n$  pequeña se tiene:

$$\begin{aligned}
 d &= \arccos \left[ \frac{\sqrt{\frac{2(8) \left[ 2(7.03352)^2 - 8(3.841) \right]}{4(8) - 3.841}}}{7.03352} \right] \\
 &= \arccos(0.88514) \\
 &= 28^\circ
 \end{aligned}$$

Con un 95% de confianza el intervalo es  $104^\circ \pm 28^\circ$  para las orientaciones de las ramas inclinadas.

$$L_l = 104^\circ - 28^\circ = 76^\circ \quad L_s = 104^\circ + 28^\circ = 132^\circ$$

Esto indica que la inclinación de las ramas se encuentra entre  $76^\circ$  y  $132^\circ$ .

### La prueba de Rayleigh<sup>1</sup> (Batschelet, 1981)

La significancia de  $R$  (llamada  $r$  de Rayleigh) fue estudiada por primera vez por Lord Rayleigh en 1880, posteriormente en 1905 Kluyer descubrió la prueba de hipótesis nula; esta prueba es utilizada principalmente para estudios en diversos grupos de organismos. La prueba de Rayleigh es una prueba paramétrica cuyo propósito es determinar si la población de un conjunto de datos difiere significativamente de la uniformidad, es decir si existe evidencia de unidireccionalidad en los datos.

Para obtener un intervalo de confianza en una distribución uniforme y cuantificarlo se usa la  $R$  de Rayleigh. La longitud de  $R$  es indicador de unidireccionalidad.

Por ejemplo en una distribución uniforme la  $R$  siempre es pequeña; una  $R$  grande indica agrupamiento o concentración de datos en determinada orientación por lo que la hipótesis de uniformidad puede ser rechazada en favor de un patrón de distribución unidireccional. La hipótesis a probar es:

$H_0$ : La población está uniformemente distribuida

$H_a$ : La población no está uniformemente distribuida.

Las ecuaciones y la prueba estadística a utilizar son las siguientes:

$y = \frac{\sum_{i=1}^n \text{sen } a_i}{n}$ $x = \frac{\sum_{i=1}^n \text{cos } a_i}{n}$	La suma de coordenadas cartesianas
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	Longitud del radio
$R = nr$	La $R$ de Rayleigh
$z = \frac{R^2}{n}$	El estadístico llamado $z$ de Rayleigh

### Valores tabulares y regla de decisión

Se compara el valor de  $z$  calculada con el valor crítico de  $z_{\alpha, n}$ , en la Tabla de valores críticos de  $z$  de Rayleigh<sup>2</sup>. Si el valor de  $z$  calculada es mayor al de  $z$  en tablas, la hipótesis nula se rechaza.

<sup>1</sup> Lord Rayleigh (1842-1919), físico y matemático que ganó fama al descubrir el elemento químico Argón, además de hacer algunas otras contribuciones físicas importantes (Zar, 1996)

<sup>2</sup> Ver Apéndice para consultar las tablas de valores críticos.

**Ejemplo 4.2** (tomado y modificado de Zar, 1996)

Realizar la prueba de Rayleigh para los siguientes datos direccionales de la inclinación de las ramas de un árbol, 45°, 55°, 81°, 96°, 110°, 117°, 132°, 154°, con el propósito de saber si su distribución es uniforme o presentan unidireccionalidad en el tronco (Fig. 23).

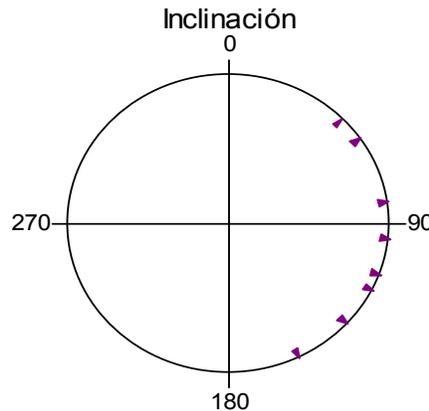


Figura 23.- Grafico de Datos originales del ejemplo 4

- Plantear el par de hipótesis:  
 $H_0 : \rho = 0$  (La distribución de las ramas inclinadas está distribuida uniformemente alrededor del tronco del árbol)  
 $H_a : \rho \neq 0$  (La distribución de las ramas inclinadas no está distribuida uniformemente alrededor del tronco del árbol)
- Obtener la suma de cada una de las coordenadas cartesianas.

$a_i(\text{ángulo})$	$\cos a_i$	$\text{sen } a_i$
<b>45</b>	<b>0.70711</b>	<b>0.70711</b>
<b>55</b>	<b>0.57358</b>	<b>0.81915</b>
<b>81</b>	<b>0.15643</b>	<b>0.98769</b>
<b>96</b>	<b>-0.10453</b>	<b>0.99452</b>
<b>110</b>	<b>-0.34202</b>	<b>0.93969</b>
<b>117</b>	<b>-0.45399</b>	<b>0.89101</b>
<b>132</b>	<b>-0.66913</b>	<b>0.74315</b>
<b>154</b>	<b>-0.89879</b>	<b>0.43837</b>

$$\sum \cos a_i = -1.03134$$

$$\sum \text{sen } a_i = 6.52069$$

- Aplicar las ecuaciones descritas anteriormente para obtener los valores de x y y

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n \cos a_i}{n} = -0.12892$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n \text{sen } a_i}{n} = 0.81509 \text{ Calcular } r$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-0.12892)^2 + (0.81509)^2} = \sqrt{0.68099} = 0.82522$$

- La  $R$  y la  $z$  de Rayleigh son:

$$n = 8$$

$$r = 0.825222$$

$$R = nr = (8)(0.82522) = 6.60176$$

$$z = \frac{R^2}{n} = \frac{(6.60176)^2}{8} = 5.448$$

- Se busca el valor crítico en tablas y se toma una decisión con respecto a la hipótesis

Usando las tablas de los valores críticos de  $z$  de Rayleigh tenemos que:  $z_{0.05,8} = 2.899$ , por lo tanto se rechaza  $H_0$  (Ya que  $z_{calculada} = 5.448 > z_{Tablas} = 2.899$ ). La prueba indica que la orientación de las ramas inclinadas no está uniformemente distribuidas en el tronco del árbol, lo cual implica que existe unidireccionalidad en el crecimiento de las ramas del árbol.

#### Ejemplo 4.3 (tomado de Batschelet, 1981)

Merkel (citado por Batschelet, 1981) observó petirrojos (*Erithacus rubecula*) en cautiverio expuestos a un campo magnético débil (Fig. 24), se observó que tenían direcciones preferidas; se realizó una prueba de Rayleigh al 5% de significación, con  $n = 33$  y  $r = 0.25$ , se rechazó la hipótesis nula de uniformidad, concluyendo que los campos magnéticos influyen en la dirección de las aves en cautiverio.

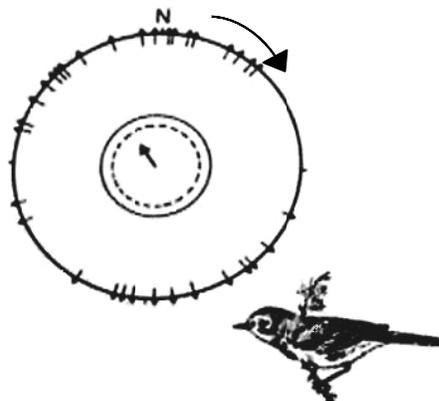


Figura 24. Distribución de Rayleigh de petirrojos europeos, en cautiverio expuestos a un campo magnético débil

**La prueba V** (Batschelet, 1981)

Esta prueba fue introducida por Greenwood y Durand (citados por Batschelet, 1981) en problemas de orientación de animales, comparando con un promedio hipotético. Esta prueba paramétrica tiene como propósito observar si los ángulos tienden a agruparse alrededor de un determinado ángulo y si difiere significativamente de la uniformidad. En algunos experimentos ya se tiene un antecedente direccional o se tiene una dirección esperada, esta prueba indica si existe o no uniformidad en la población de datos, pero tomando en cuenta ese antecedente. El planteamiento de hipótesis a probar es:

*H<sub>0</sub>*: La direcciones poblacionales se distribuyen uniformemente  $H_0 : \rho = 0$

*H<sub>a</sub>*: La direcciones poblacionales no se distribuyen uniformemente ( $\rho \neq 0$  y  $\mu_0 = 90^\circ$ )

En la hipótesis alterna entra el ángulo esperado, por ejemplo  $90^\circ$

Las ecuaciones y la prueba estadística a utilizar para el cálculo son las siguientes:

$\cos \bar{a} = \frac{x}{r}$ $\text{sen } \bar{a} = \frac{y}{r}$	El ángulo promedio
$R = nr$	La <b>R</b> de Rayleigh
$V = R \cos(\bar{a} - \mu_0)$	El estadístico <b>V</b> , donde $\mu_0$ es el ángulo supuesto
$u = V \sqrt{\frac{2}{n}}$	Prueba de la significancia de <b>V</b>

**Valores tabulares y regla de decisión**

Se compara el valor de **u** calculada con el valor crítico  $u_{0,n}$ , de la Tabla de valores críticos u de V para uniformidad circular. Si el valor de **u** calculada es mayor al de **u** de tablas, la hipótesis nula se rechaza.

**Ejemplo 4.4** (tomado y modificado de Zar, 1996)

Realizar la prueba **V** para los siguientes datos direccionales de salidas de ratones hacia su madriguera desde un punto de liberación, 66°,75°,86°, 88°,88°, 93°, 97°,101°, 118°, 130°, con el fin de saber si siguen un patrón de orientación cercano a su madriguera, la cual se localiza a 90° (Fig. 25).

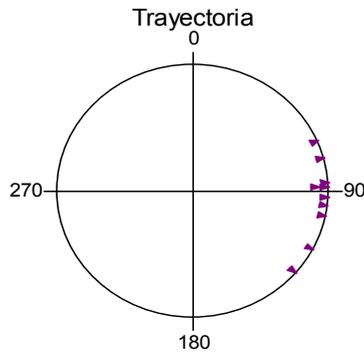


Figura 25.- Grafico de Datos originales del ejemplo 6

- Planteamiento de hipótesis:

$H_0: \rho = 0$  Las trayectorias de salida se distribuyen de manera uniforme alrededor del punto de salida (*aleatoriedad*)

$H_a: \rho \neq 0$  (Las trayectorias de salida no se distribuyen de manera uniforme alrededor del punto de salida)

- Obtener la suma de cada una de las coordenadas cartesianas

$a_i(\text{ángulo})$	$\cos a_i$	$\text{sen } a_i$
<b>66</b>	<b>0.40674</b>	<b>0.91355</b>
<b>75</b>	<b>0.25882</b>	<b>0.96593</b>
<b>86</b>	<b>0.06976</b>	<b>0.99756</b>
<b>88</b>	<b>0.03490</b>	<b>0.99939</b>
<b>88</b>	<b>0.03490</b>	<b>0.99939</b>
<b>93</b>	<b>0.05234</b>	<b>0.99863</b>
<b>97</b>	<b>0.12187</b>	<b>0.99255</b>
<b>101</b>	<b>0.19081</b>	<b>0.98163</b>
<b>118</b>	<b>0.46947</b>	<b>0.88295</b>
<b>130</b>	<b>0.64279</b>	<b>0.76604</b>
<b>n = 10</b>	$\sum \cos a_i = -0.6721$	$\sum \text{sen } a_i = 9.49762$

- Aplicando las ecuaciones descritas se obtiene  $x$ ,  $y$  y  $r$

$$x = -\frac{0.67216}{10} = -0.06722 \quad y = \frac{9.49762}{10} = 0.94976$$

$$r = \sqrt{(-0.06722)^2 + (0.94976)^2} = 0.95213$$

- El ángulo promedio

$$\cos \bar{a} = \frac{x}{r} = -0.07060 \quad \text{sen } \bar{a} = \frac{y}{r} = 0.99751$$

$$\bar{a} = 94^\circ$$

- La  $R$  de Rayleigh

$$R = (10)(0.95213)$$

- El estadístico  $V$ , donde  $90^\circ$  es el ángulo predicho

$$\begin{aligned} V &= R \cos (94^\circ - 90^\circ) \\ &= 9.5213 \cos (4^\circ) \\ &= 9.498 \end{aligned}$$

- Se realiza la prueba de la significancia de  $V$

$$u = V \sqrt{\frac{2}{n}} = (9.498) \sqrt{\frac{2}{10}} = 4.248$$

- Se busca el valor crítico en tablas y se toma una decisión con respecto a la hipótesis

Usando las tablas de valores críticos de  $u$ , para la prueba  $V$  de uniformidad circular con  $\alpha = 0.05$ ,  $n = 10$ , se tiene  $u_{0.05,10} = 1.648$ . Como el valor calculado  $u = 4.248$  es mayor que el valor crítico, se rechaza  $H_0$ .

- Interpretación

Al rechazar la hipótesis nula de uniformidad, indica que las salidas se orientan cercanamente a su nido.

**Ejemplo 4.5** (tomado de Batschelet, 1981)

Se realizó un experimento relacionado con palomas liberadas lejos de sus nidos, Keeton obtuvo una muestra de datos, donde el ángulo promedio se aproximaba a la dirección verdadera del nido, pero la longitud de  $r$  era pequeña, la prueba de Rayleigh indicaba no uniformidad, por lo que se decidió hacer una prueba  $V$  para corroborar esta hipótesis, tomando en cuenta la dirección del nido a  $274^\circ$ .

Las orientaciones registradas fueron  $0^\circ$ ,  $175^\circ$ ,  $195^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $260^\circ$ ,  $295^\circ$ ,  $330^\circ$ ,  $340^\circ$ ,  $345^\circ$  (Figura 26). Con estos datos se obtuvieron:  $n = 11$ ,  $r = 0.5104$ ,  $\bar{a} = 274^\circ$ , El valor de  $V$  es  $V = 0.50081$  y  $u = 2.38$ . Con esta prueba también se rechaza la hipótesis nula de uniformidad, pero es más exacta que la de Rayleigh, por la comparación de un ángulo promedio. En conclusión las palomas se orientan hacia su nido.

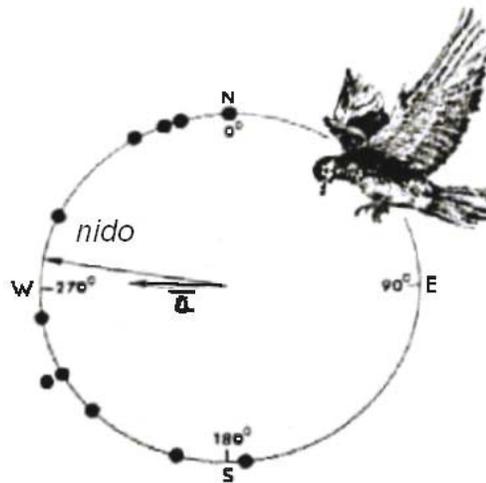


Figura 26.- Experimento de palomas con respecto a la orientación de su nido.

**Prueba de  $R$**  (Batschelet, 1981)

La prueba de espaciado de Rao, fue presentada en 1969 y tuvo sus primeras aplicaciones biológicas en 1976. Esta prueba de uniformidad se puede aplicar a distribuciones bimodales, como en orientaciones de hormigas, peces o aves. Esta prueba no paramétrica tiene como propósito saber si existe evidencia estadística de que la población de una muestra difiere significativamente de la uniformidad.

Bajo la hipótesis de uniformidad se espera que todos los datos estén espaciados de igual manera en el círculo, el segmento (espacio) entre dos puntos vecinos es  $360^\circ/n$ , las desviaciones pequeñas se pueden deber a fluctuaciones aleatorias, pero grandes desviaciones indican unidireccionalidad, se asume que los ángulos están arreglados de manera ascendente. Se calcula la longitud de los  $n$  arcos entre puntos consecutivos. El planteamiento de hipótesis a probar es:

$H_0$ : La muestra está uniformemente distribuida

$H_a$ : La muestra no está uniformemente distribuida

Las ecuaciones y la prueba estadística a utilizar, para el cálculo, son las siguientes:

$T_1 = \bar{a}_2 - \bar{a}_1$ $T_2 = \bar{a}_3 - \bar{a}_2$ $T_{n-1} = \bar{a}_n - \bar{a}_{n-1}$ $T_n = 360^\circ + \bar{a}_1 - \bar{a}_n$	<p>Calculo de longitud de los <math>n</math> segmentos entre puntos consecutivos</p>
$ T_i - (360^\circ/n) $	<p>Valor absoluto de las desviaciones de <math>T_i</math></p>
$\sum T_i = 360^\circ$	<p>Suma de las longitudes.</p>
$U = \sum  T_i - (360^\circ/n) $	<p>Suma de las desviaciones positivas y negativas es la misma por lo que se puede utilizar la misma ecuación</p>

### Valores tabulares y Regla de decisión

Se compara el valor de  $U$  calculada con el valor critico de  $U_{\alpha,n}$  de la Tabla de valores críticos de espacio de Rao, si el valor de  $U$  calculada es mayor a  $U$  de tablas, la hipótesis nula se rechaza.

#### Ejemplo 4.6 (tomado de Batschelet, 1981)

Un conjunto de 13 palomas fueron liberadas en el Valle de Toggenburg, las aves no se dirigieron inmediatamente a su nido, sino que volaron directamente sobre el eje del valle en las siguientes direcciones arregladas en forma ascendente: 20°, 135°, 145°, 165°, 170°, 200°, 300°, 325°, 335°, 350°, 350°, 350° y 355° (Fig. 27).

Se desea saber si las salidas se distribuyeron de manera uniforme ya que a simple vista las orientaciones toman una distribución bimodal, realizar la prueba de Rao.

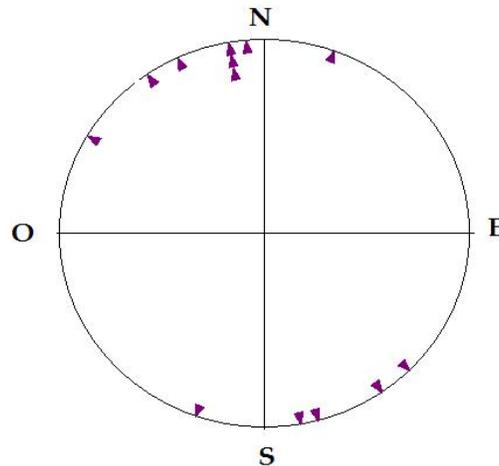


Figura 27.- Experimento de palomas con respecto a la orientación del valle

- Planteamiento de hipótesis:

$H_0$ : Las orientaciones se distribuyen de manera uniforme a lo largo del valle

$H_a$ : Las orientaciones no se distribuyen de manera uniforme a lo largo del valle

- Calcular la longitud de los segmentos entre puntos consecutivos.

$i$	$T_{n-1} = \bar{a}_n - \bar{a}_{n-1}$	$T_i$	$i$	$T_{n-1} = \bar{a}_n - \bar{a}_{n-1}$	$T_i$	$i$	$T_{n-1} = \bar{a}_n - \bar{a}_{n-1}$	$T_i$
1	20°-135°	-115°	5	170°-200°	-30°	9	335°-350°	-15°
2	135°- 145°	-10°	6	200°- 300°	-100°	10	350°- 350°	0°
3	145°- 165°	-20°	7	300°- 325°	-25°	11	350°- 350°	0°
4	165°- 170°	-5°	8	325°- 335°	-10°	12	350° - 355°	-5°
						13	360+(20-355)	$T_n = 25°$

- Calcular los valores absolutos de las desviaciones  $T_i$  y la suma de éstos.

Tomando en cuenta que  $360° / 13 = 27.7°$

$ T_i - (360^\circ/13) $	Desviaciones positivas	$ T_i - (360^\circ/13) $	Desviaciones negativas
115°-27.7°	87.3°	10°-27.7°	17.7°
30°-27.7°	2.3°	20°-27.7°	7.7°
100°-27.7°	72.3°	5°-27.7°	22.7°
		25°-27.3°	2.7°
		10°-27.7°	17.7°
		15°-27.7°	12.7°
		0°-27.7°	27.7°
		0°-27.7°	27.7°
		5°-27.7°	22.7°
		25°-27.7°	2.7°
<b>Suma</b>	<b>161.9°</b>		<b>162.0°</b>

El valor de  $U$  es la suma de las desviaciones positivas o negativas, por lo tanto el resultado de la prueba estadística es  $U = 162^\circ$ .

- Se busca el valor crítico en tablas y se toma una decisión con respecto a la hipótesis

El valor crítico en tablas con una  $\alpha = 0.05$  y  $n = 13$  es de  $167.8^\circ$ ;  $U$  calculada es menor que el valor crítico por lo que la diferencia no es significativa, la distribución se distribuye uniformemente aunque de manera bimodal. Se puede argumentar que la altura de las montañas en ambos lados del valle fuerza a las palomas a volar a lo largo del eje del valle en la misma preferencia pero en sentido contrario (Batschelet, 1981).

**Prueba de Watson (Batschelet, 1981)**

El método usado para los cuadrados de las desviaciones promedio fue propuesto por Cramer, von Mises y Smirnov (citado por Batschelet, 1981) ajustado a pruebas circulares. Esta prueba de bondad de ajuste tiene como propósito probar si la distribución de la muestra se ajusta a una distribución teórica.

En esta prueba se aplican los cuadrados de las desviaciones del promedio, como prueba estadística, una desviación suficientemente grande indica que la muestra no se ajusta a la distribución teórica, por lo que también es una prueba de bondad de ajuste.

El planteamiento de hipótesis a probar es:

$H_0$  : El patrón de distribución de la muestra coincide con una distribución teórica dada

$H_a$ : El patrón de distribución de la muestra no coincide con una distribución teórica dada

Las ecuaciones y la prueba estadística a utilizar para el cálculo son las siguientes:

$i$	$u_i = \frac{a_i}{360^\circ}$	$\sum u_i^2$	Orden ascendente del dato, Transformación a medida de tipo angular y suma de cuadrados de $u_i$
	$\sum iu_i$	$\bar{u} = \frac{\sum u_i}{n}$	Suma de Productos de $u_i$ por $i$ y Promedio $\bar{u}$
$U^2 = \sum u_i^2 - \frac{(\sum u_i)^2}{n} - \frac{2}{n} \sum iu_i + (n+1)\bar{u} + \frac{n}{12}$			Prueba de Watson

**Valores tabulares y regla de decisión**

Se compara el valor de  $U^2$  calculado con el valor crítico de  $U_{\alpha,n}^2$  de la Tabla de valores críticos de  $U^2$  de Watson, si el valor calculado de  $U^2$  es mayor que el valor de  $U^2$  de tablas, la hipótesis nula se rechaza.

**Ejemplo 4.7** (tomado y modificado de Zar, 1996)

Realizar la prueba de bondad de ajuste de Watson para los siguientes datos de trayectorias de aves liberadas cerca de un lago; las orientaciones fueron arregladas de forma ascendente con el fin de saber si la distribución de la muestra se ajusta a una distribución teórica. Registrándose las siguientes orientaciones: 45°, 55°, 81°, 96°, 110°, 117°, 132°, 154° (Fig. 28).

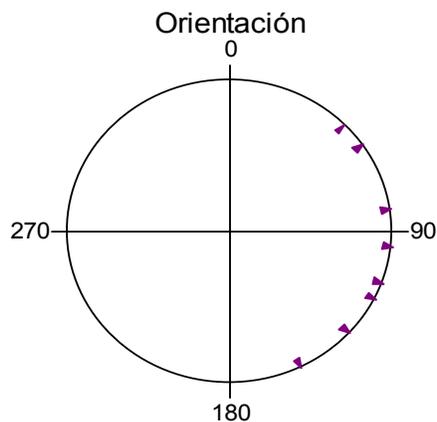


Figura 28.- Grafico de Datos originales del ejemplo 9

- Planteamiento de hipótesis:

$H_0$ : La muestra de datos proviene de una población que se ajusta a la distribución de von Mises.

$H_a$ : La muestra de datos proviene de una población que no se ajusta a la distribución de von Mises.

- Los datos se ordenan ascendentemente y se calculan los parámetros necesarios para cada dato

$i$	$a_i$	$u_i$	$u_i^2$	$iu_i$
1	45°	0.1250	0.0156	0.125
2	55°	0.1528	0.0233	0.305
3	81°	0.2250	0.0506	0.675
4	96°	0.2667	0.0711	1.066
5	110°	0.3056	0.0934	1.528
6	117°	0.3250	0.1056	1.950
7	132°	0.3667	0.1345	2.566
8	154°	0.4278	0.1830	3.422
$n=8$		$\sum u_i = 2.1946$	$\sum u_i^2 = 0.6771$	$\sum iu_i = 11.639$

- Cálculo promedio  $\bar{u}$  y la prueba de Watson:

$$\bar{u} = \frac{\sum u_i}{n} = \frac{2.1946}{8} = 0.2743$$

$$\begin{aligned} U^2 &= \sum u_i^2 - \frac{(\sum u_i)^2}{n} - \frac{2}{n} \sum iu_i + (n+1)\bar{u} + \frac{n}{12} \\ &= 0.6771 - \frac{(2.1946)^2}{8} - \frac{2}{8}(11.6397) + (8+1)(0.2743) + \frac{8}{12} \\ &= 0.6771 - 0.6020 - 2.9099 + 2.4687 + 0.6667 \\ &= 0.2989 \end{aligned}$$

- Se busca el valor crítico en tablas y se toma una decisión con respecto a la hipótesis

Dado que el valor de  $U^2$  calculada es mayor que valor crítico  $U_{0.05,8}^2 = 0.181$  se rechaza  $H_0$ , indicando que la distribución de la muestra de las orientaciones de las aves no se ajusta a la distribución de von Mises.

**Ejemplo 4.8** (tomado de Batschelet, 1981)

Se retoma la muestra bimodal del ejemplo 8 (Fig. 29) con las direcciones ordenadas en forma ascendente: 20°, 135°, 145°, 165°, 170°, 200°, 300°, 325°, 335°, 350°, 350° y 355°, para realizar la prueba de bondad de ajuste de Watson a fin de saber si la distribución de la muestra coincide con la distribución teórica de von Mises.

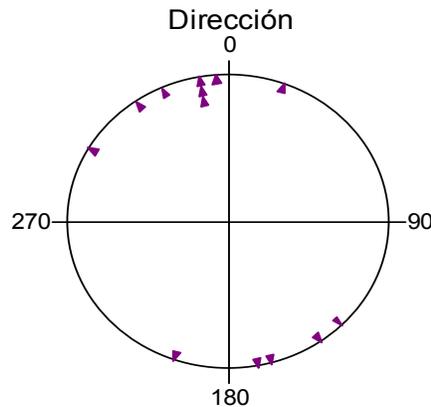


Figura 29.- Gráfico de datos originales del ejemplo 10

$i$	$a_i$	$u_i$	$u_i^2$	$iu_i$
1	20	0.0555	0.0030	0.0555
2	135	0.3750	0.1406	0.7500
3	145	0.4027	0.1622	1.2083
4	165	0.4583	0.2100	1.8333
5	170	0.4722	0.2229	2.3611
6	200	0.5555	0.3086	3.3333
7	300	0.8333	0.6944	5.8333
8	325	0.9027	0.8150	7.2222
9	335	0.9305	0.8659	8.3750
10	350	0.9722	0.9452	9.7222
11	350	0.9722	0.9452	10.6944
12	350	0.9722	0.9452	11.6666
13	355	0.9861	0.9724	12.8194
$n = 13$		$\sum u_i = 8.8889$	$\sum u_i^2 = 7.2310$	$\sum iu_i = 75.8746$

La  $U^2 = 0.1361$  de Watson calculada es menor que el valor crítico de  $U_{0.05,13}^2 = 0.1835$  aprox, indicando que no se rechaza  $H_0$ , es decir la distribución de la muestra se ajusta a la distribución teórica de von Mises.

**Prueba de Kuiper (Batschelet, 1981)**

Esta prueba de bondad de ajuste también se utiliza como prueba no paramétrica. Su propósito es probar si la muestra dada se ajusta a una distribución teórica.

Con base en la distribución teórica se compara la distribución funcional de la muestra, para saber que tanto difiere una de la otra.

La medida  $D^+$  es una medida de desviación vertical por encima de la curva y  $D^-$  es una medida de desviación vertical por debajo de la curva, definiendo como una suma de las dos desviaciones.

$$V_n = D^+ + D^-$$

Los valores de  $V_n$  están entre 0 y 1, un valor pequeño de  $V_n$  indica un buen ajuste, mientras que un valor grande puede ser significativo. Se asume que los datos no están agrupados. La hipótesis a probar es:

$H_0$  : El patrón de distribución de la muestra se ajusta a la distribución teórica.

$H_a$  : El patrón de distribución de la muestra no se ajusta a la distribución teórica.

Las ecuaciones y la prueba estadística a utilizar, son las siguientes:

$D_n^+ = \text{maximo de } (\frac{1}{n} - x_1, \frac{2}{n} - x_2, \dots, 1 - x_n)$	Diferencia de la distribución funcional de la muestra con respecto a la distribución teórica
$D_n^- = \text{máximo de } (x_1, x_2 - \frac{1}{n}, x_3 - \frac{2}{n}, \dots, x_n - \frac{n-1}{n})$	Diferencia de la distribución teórica con respecto a la de la distribución funcional de la muestra
$V_n = D^+ + D^-$	Suma de las dos desviaciones
$K = \sqrt{n} (V_n)$	Prueba $K$

### Valores tabulares y regla de decisión

Se compara el valor de  $K$  calculada con el valor crítico de  $K_{\alpha,n}$  de la Tabla de valores críticos de Kuiper para una muestra. Si el valor de  $K$  calculada es mayor que  $K$  de tablas, la hipótesis nula se rechaza.

### Ejemplo 4.9 (tomado de Batschelet, 1981)

Se aplicó la prueba de Kuiper para los datos del Ejemplo 8, se desea que la muestra esté uniformemente distribuida. Dado que la función teórica asciende linealmente de  $1^\circ$  a  $360^\circ$ , se tiene  $D^+ = 0.023$ ,  $D^- = 0.369$  (Fig. 30), usando la prueba estadística  $K$  se obtiene:

$$K = \sqrt{13} (0.023 + 0.369) = 1.413$$

De la tabla de valores críticos con  $\alpha = 0.05$  y  $n = 13$  se obtiene  $K_{0.01,13} = 1.642$ , como  $K$  calculada es menor que el valor crítico de  $K$ , no se rechaza la hipótesis de que existe ajuste de la muestra con respecto a la uniformidad.

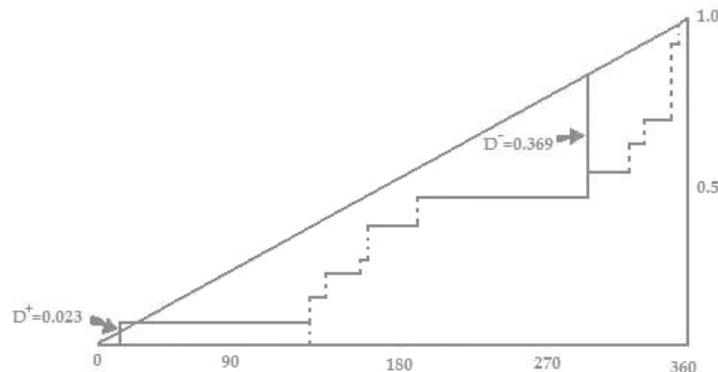


Figura 30.-. Aplicación de la prueba de Kuiper a una muestra circular.

### Prueba Ji-cuadrada (Batschelet, 1981)

Prueba de bondad de ajuste y de uniformidad. Su propósito es, probar si la distribución de la muestra se ajusta a una distribución teórica.

Para realizar esta prueba se subdivide el círculo en un número determinado de categorías  $k$ , donde cada arco contiene la frecuencia de los datos de la muestra, los intervalos de  $k$  deben ser iguales.

Se considera satisfactoria la distribución, si las desviaciones frecuenciales no presentan mucha diferencia de las frecuencias esperadas. Esta técnica sirve como prueba de

bondad de ajuste y prueba de uniformidad. Las categorías  $k$  no deben ser del mismo tamaño y tienen que ser mayor que cuatro. La hipótesis a probar es:

$H_0$  : El patrón de distribución de la muestra se ajusta a la distribución teórica.

$H_a$  : El patrón de distribución de la muestra no se ajusta a la distribución teórica

Las ecuaciones y la prueba estadística a utilizar son las siguientes:

$\hat{f} = n/k$	Tamaño de frecuencia por categoría
$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \hat{f})^2}{\hat{f}_i}$	Prueba Ji-cuadrada

### Valores tabulares y regla de decisión

Se compara el valor de  $\chi^2$  calculada con el valor crítico de  $\chi^2_{\alpha, \nu}$  de la Tabla de valores críticos de Ji-Cuadrada, donde  $\nu = k - 1$ , si  $\chi^2$  calculada es mayor que  $\chi^2$  de tablas, la hipótesis nula se rechaza.

### Ejemplo 4.10 (tomado y modificado de Zar, 1996)

Realizar la prueba de bondad de ajuste  $\chi^2$  para los siguientes datos circulares, producto de los movimientos de hormigas hacia su hormiguero después de un estímulo sonoro, la muestra se dividió en 12 categorías. Se toma en cuenta que  $k = 12$  y  $n = 105$  y se plantea la hipótesis:

$H_0$ : El patrón de distribución es uniforme.

$H_a$ : El patrón de distribución no es uniforme.

$$k = 12$$

$$n = 105$$

$a_i$ (grados)	$f_i$	$\hat{f}_i$
0-30	0	8.7500
30-60	6	8.7500
60-90	9	8.7500
90-120	13	8.7500
120-150	15	8.7500
150-180	22	8.7500

<b>180-210</b>	<b>17</b>	<b>8.7500</b>
<b>210-240</b>	<b>12</b>	<b>8.7500</b>
<b>240-270</b>	<b>8</b>	<b>8.7500</b>
<b>270-300</b>	<b>3</b>	<b>8.7500</b>
<b>300-330</b>	<b>0</b>	<b>8.7500</b>
<b>330-360</b>	<b>0</b>	<b>8.7500</b>

- Se obtiene el tamaño de frecuencia.

$$\hat{f} = 105/12 = 8.7500, \text{ para todas las } i$$

- Se aplica la prueba  $\chi^2$

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(0 - 8.7500)^2}{8.7500} + \frac{(6 - 8.7500)^2}{8.7500} + \frac{(9 - 8.7500)^2}{8.7500} + \dots + \frac{(0 - 8.7500)^2}{8.7500} \\ &= 8.7500 + 0.8643 + 0.0071 + \dots + 8.7500 \\ &= 66.543 \end{aligned}$$

- Se busca y compara el valor crítico con el calculado

$$v = k - 1 = 11 \text{ (grados de libertad)}$$

$$\chi_{0.05,11}^2 = 19.675$$

- Interpretación

La hipótesis nula se rechaza ya que el valor de  $\chi^2$  calculado es mayor al valor crítico de  $\chi^2$  de tablas, indicando que el patrón de orientaciones no es uniforme, esto indica que los sonidos afectan las orientaciones de las hormigas.

#### **Ejemplo 4.11** (tomado de Batschelet, 1981)

Goodyear (citado por Batschelet, 1981) estudió la orientación de los peces *Fundulus notti*, encontrando, que estos peces son capaces de orientarse en un día soleado y que esta habilidad se anula cuando el día es nublado, se examinó parte de estos datos de

un día nublado, apoyando la hipótesis de uniformidad, el tamaño de la muestra fue de 50, se subdividió en 10 categorías ( $\hat{f} = n/k = 50/10 = 5$ ).

El valor de la prueba de  $\chi^2 = 5.6$ , ahora bien el valor crítico de tablas de  $\chi^2$  con  $v = k - 1 = 9$  grados de libertad y  $\alpha = 0.05$  es de  $\chi^2 = 16.919$ , el cual es un valor alto por lo que no se puede rechazar la hipótesis de uniformidad, indicando que los peces no se orientan en una dirección específica durante un día nublado (Fig 31).

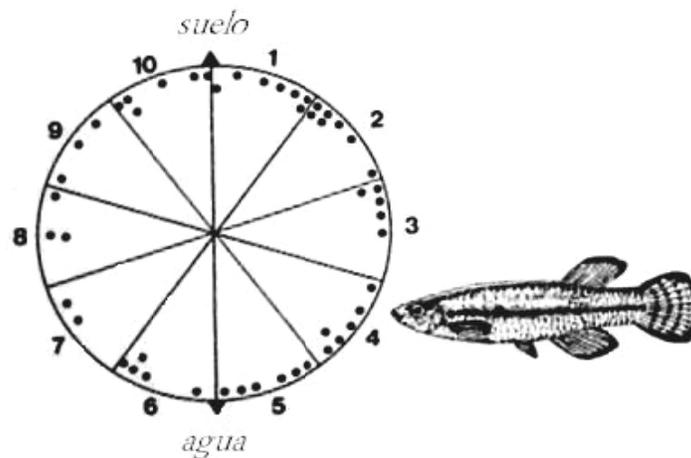


Figura 31.- Orientación de peces días nublados.

## Capítulo V

### Técnicas Inferenciales (dos o más muestras)

#### Prueba de Watson y Williams (Batschelet, 1981)

La prueba de Watson y Williams, originalmente fue propuesta para analizar dos muestras, con un solo grado de libertad, posteriormente el parámetro  $K$  fue sugerido por Stephens (citado por Batschelet, 1981). Existen dos modalidades: bimuestral y multimuestral.

Esta es la prueba bimuestral más utilizada en el campo de estudio de la biología, para analizar muestras de orientación en hormigas, aves o crustáceos, entre otros. Esta prueba paramétrica tiene como propósito ver si el promedio de dos muestras independientes difieren entre sí.

De cada muestra se calculan los componentes individuales para posteriormente compararlos y obtener un componente unificado de las dos muestras, se asume que las dos muestras se ajustan a la distribución von Mises.

La hipótesis a probar es:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

Las ecuaciones y la prueba estadística a utilizar para el cálculo son las siguientes:

Muestra 1		Muestra 2		
$\sum \text{sen } a_i$	$\sum \text{cos } a_i$	$\sum \text{sen } a_i$	$\sum \text{cos } a_i$	Suma de las funciones
$y_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \text{sen } a_i}{n_1}$	$x_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \text{cos } a_i}{n_1}$	$y_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \text{sen } a_i}{n_2}$	$x_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \text{cos } a_i}{n_2}$	Coordenadas
$r_1 = \sqrt{y_1^2 + x_1^2}$		$r_2 = \sqrt{y_2^2 + x_2^2}$		Radio muestral
$\bar{a}_1$		$\bar{a}_2$		promedio

$R_1 = n_1 + n_1$	$R_2 = n_2 + n_2$	R de Rayleigh
Por combinación de las dos muestras		
$\sum \text{sen } a_c = \sum \text{sen } a_1 + \sum \text{sen } a_2$		Suma de función seno combinada
$\sum \text{cos } a_c = \sum \text{cos } a_1 + \sum \text{cos } a_2$		Suma de función coseno combinada
$n_c = n_1 + n_2$		$n$ combinada
$y_c = \frac{\sum \text{sen } a_i}{n_c}$	$x_c = \frac{\sum \text{cos } a_i}{n_c}$	Coordenadas combinadas
$r_c = \sqrt{y^2 + x^2}$ y $R_c = (n_c)(r_c)$		Radio combinado y R de Rayleigh combinada
$r_w = \frac{n_1 r_1 + n_2 r_2}{n_c} = \frac{R_1 + R_2}{n_c}$		Longitud promedio de ambas muestras
$K$		Obtención por <u>Tablas del parámetro <math>K</math></u> ( $K_{r_w, 2}$ )
$F = K \frac{(n_c - 2)(R_1 + R_2 - R_c)}{n_c - R_1 - R_2}$		La prueba $F$

**Valores tabulares y regla de decisión**

Se compara el valor de  $F$  calculada con el valor crítico  $F_{\alpha, 1, n_c - 2}$  de la Tabla de valores críticos de la distribución  $F$ , si el valor de  $F$  calculada es mayor que la  $F$  de tablas, la hipótesis nula se rechaza.

**Ejemplo 5.1** (tomado y modificado de Zar, 1996)

Realizar la prueba de Watson y Williams, para buscar diferencias significativas en los promedios direccionales de las siguientes muestras, provenientes de las orientaciones de dos grupos de murciélagos (Fig.32), el segundo grupo bajo una onda sonora diferente, las orientaciones desde su madriguera son:

Control: 94, 65, 45, 52, 38, 47, 73, 82, 90, 40, 84.

Experimental: 77, 70, 61, 45, 50, 35, 48, 65, 36.

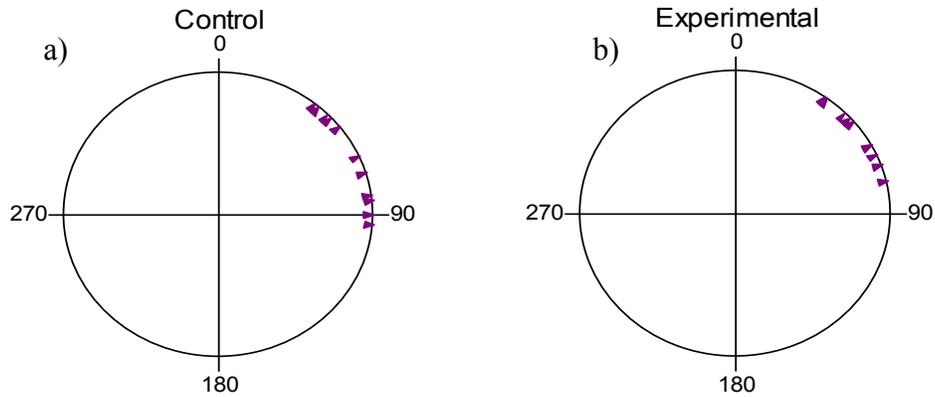


Figura 32.- Gráfico de datos originales del ejemplo 14, a) muestra control b) muestra experimental.

- Plantear el par de hipótesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$$

- Obtener los productos de la suma de cada una de las coordenadas cartesianas, el promedio y  $R$ .

Control			Experimental		
$a_1$ (ángulo)	$\text{sen } a_1$	$\text{cos } a_1$	$a_2$ (ángulo)	$\text{sen } a_2$	$\text{cos } a_2$
94	0.99756	-0.06976	77	0.97437	0.22495
65	0.90631	0.42262	70	0.93969	0.34202
45	0.70711	0.70711	61	0.87462	0.48481
52	0.78801	0.91866	45	0.70711	0.70711
38	0.61566	0.78801	50	0.76604	0.64279
47	0.73135	0.68200	35	0.57358	0.81915
73	0.95630	0.29237	48	0.74314	0.66913
82	0.99027	0.13917	65	0.90631	0.42262
90	0.00000	0.00000	36	0.58779	0.80902
40	0.64279	0.76604			
84	0.99863	0.05234			

$$n_1 = 11$$

$$n_2 = 9$$

$$\sum \text{sen } a_1 = 9.33399, \sum \text{cos } a_1 = 4.39556$$

$$\sum \text{sen } a_2 = 7.07265, \sum \text{cos } a_2 = 0.56907$$

$$y_1 = 0.84854, \quad x_1 = 0.3996$$

$$r_1 = 0.93792$$

$$\text{sen } \bar{a}_1 = 0.90470$$

$$\text{cos } \bar{a}_1 = 0.42605$$

$$\bar{a}_1 = 65^\circ$$

$$R_1 = 10.31712$$

$$y_2 = 0.78585, \quad x_2 = 0.56907$$

$$r_2 = 0.97026$$

$$\text{sen } \bar{a}_2 = 0.80994$$

$$\text{cos } \bar{a}_2 = 0.58651$$

$$\bar{a}_2 = 54^\circ$$

$$R_2 = 8.73234$$

- Por combinación de los 20 datos para ambas muestras:

$$\sum \cos a_i = 4.39556 + 5.12160 = 9.61716$$

$$\sum \text{sen } a_i = 9.33399 + 7.07265 = 16.40664$$

- $n$  combinada

$$n_c = 11 + 9 = 20$$

- Aplicando las ecuaciones descritas para  $y_c$  e  $x_c$

$$y_c = \frac{16.40664}{20} = 0.82033$$

$$x_c = \frac{9.51716}{20} = 0.47586$$

- Radio combinado y  $R$  de Rayleigh combinada

$$r_c = 0.94836$$

$$R_c = 18.96720$$

- Obtener la longitud promedio de ambas muestras el parámetro  $K$  y la prueba  $F$

$$r_w = \frac{10.317112 + 8.73234}{20} = 0.952$$

$$K_{0.952,2} = 1.0351$$

$$F = K \frac{(n_c - 2)(R_1 + R_2 - R_c)}{n_c - R_1 - R_2}$$

$$= (1.0351) \frac{(20 - 2)(10.31712 + 8.73234 - 18.96720)}{20 - 10.31712 - 8.73234}$$

$$= (1.0351) \frac{1.48068}{0.95054}$$

$$= 1.61$$

- Se busca el valor crítico en tablas y se toma una decisión con respecto a la hipótesis

El valor crítico es  $F_{0.05,1,18} = 4.41$ , por lo tanto, no se rechaza  $H_0$  ya que la  $F$  calculada es menor a la  $F$  de tablas, lo que indica que la onda sonora no afectó significativamente la orientación de murciélagos de la muestra experimental.

De esta manera se concluye, que el promedio de las dos muestras, se estima, en un mismo promedio poblacional, y que el mejor promedio estimado de estos promedios poblacionales se obtiene por:

$$\text{sen } \bar{a} = \frac{y_c}{r_c} = 0.86500$$

$$\text{cos } \bar{a} = \frac{x_c}{r_c} = 0.50177$$

Entonces:  $\text{sen}^{-1} a = \text{cos}^{-1} a = 60^\circ$ .

**Ejemplo 5.2** (tomado y modificado de Batschelet, 1981)

Duelli y Whehner (citados por Batschelet, 1981) examinaron hormigas provenientes del desierto, *Cataglyphis bicolor*. Se colocaron 10 hormigas bajo la luz solar y se observó su orientación hacia su hormiguero, otro grupo de 10 hormigas se colocó bajo luz artificial, y se observó su orientación hacia el hormiguero (Figura 33 y 34). Se asume que existe diferencia en la orientación de ambos grupos.

Muestra experimental:  $0^\circ, 0^\circ, 340^\circ, 350^\circ, 350^\circ, 350^\circ, 350^\circ, 350^\circ, 350^\circ, 350^\circ$ .

Muestra control:  $0^\circ, 0^\circ, 0^\circ, 10^\circ, 10^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 350^\circ, 350^\circ, 350^\circ$ .

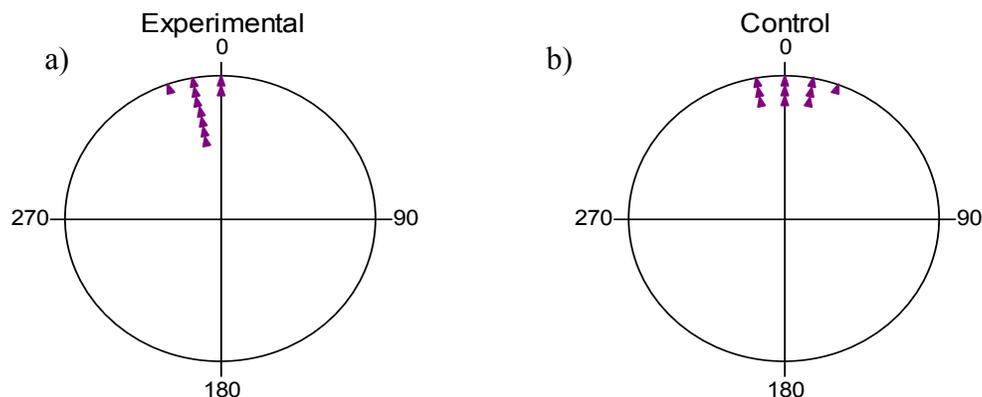


Figura 33.- Gráfico de datos originales del ejemplo 15, a) muestra experimental b) muestra control.

$H_0$  : Las hormigas se orientan de igual manera

$H_a$  : Las hormigas no se orientan de igual manera

Ángulo	Frecuencias observadas	
	Experimental	Control
-20 (340)	1	0
-10 (350)	7	3
0	2	3
+10	0	3
+20	0	1
	$n_1 = 10$	$n_2 = 10$

Aplicando la prueba de Watson y Williams, se tiene:

$$\begin{array}{llll}
 \text{Muestra exp.} & \sum \text{sen } a_i = -1.558 & \sum \text{cos } a_i = 9.833 & R_1 = 9.956 \\
 \text{Muestra cont.} & \sum \text{sen } a_i = 0.342 & \sum \text{cos } a_i = -1.558 & R_2 = 9.854 \\
 \text{Combinación} & \sum \text{sen } a_c = -1.216 & \sum \text{cos } a_c = 19.68 & R_1 + R_2 = 19.810 \\
 R_1 + R_2 - R = 0.091 & R_c = 19.719 & n_c - (R_1 + R_2) = 0.190 & K = 1
 \end{array}$$

Calculando el estadístico  $F$ :  $F = 1 \left( \frac{(18)(0.091)}{0.190} \right) = 8.6$

Con  $\alpha = 0.01$  de la tabla de valores críticos, resulta  $F_{0.01,1,18} = 8.29$ , como  $F$  calculada es mayor que el valor crítico de tablas, se concluye que el promedio direccional del experimento de hormigas es significativamente diferente del promedio direccional del grupo control.

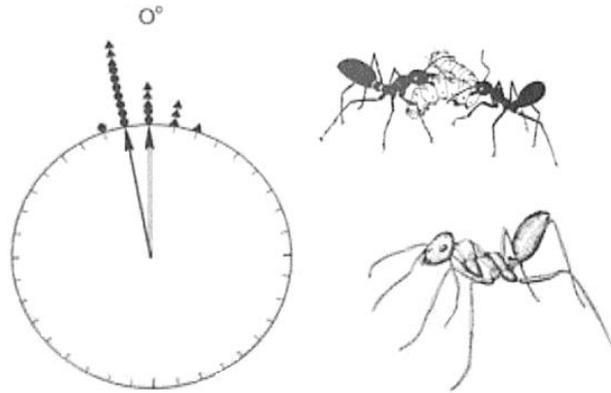


Figura 34. Orientaciones de hormigas hacia su hormiguero bajo diferentes condiciones de luz.

**Versión multimuestral de Watson y Williams (Zar, 1996)**

La prueba de Watson-Williams se puede usar para pruebas multimuestrales donde la hipótesis nula indica igualdad en todas la muestras,  $H_0: \mu_i = \mu_j = \dots = \mu_h$  y  $H_a: \mu_i \neq \mu_j$  para algún  $i \neq j$ , el procedimiento es semejante, se calculan los componentes individuales de cada muestra, para posteriormente combinarlos y obtener un componente unificado de todas las muestras. El valor crítico a comparar es  $F_{\alpha(1),k-1,h-k}$ . La prueba estadística se modifica y queda como:

$r_w = \frac{\sum_{j=1}^h n_j r_j}{n_c} = \frac{\sum_{j=1}^h R_j}{n_c}$	Longitud promedio de todas las muestras (Donde <b>h</b> es el numero de muestras)
$K$	Obtención por <u>Tablas del parámetro K</u>
$F = K \frac{(n_c - h) \left( \sum_{j=1}^h R_j - R \right)}{(h - 1) \left( n_c - \sum_{j=1}^h R_j \right)}$	Estadístico <b>F</b>

**Prueba Ji-cuadrada (Batschelet, 1981)**

Esta prueba se usa particularmente para obtener precisión en dos o más muestras de gran tamaño, independientes entre sí. Esta prueba no paramétrica tiene como propósito saber si las muestras difieren significativamente una de la otra, sin especificar el tipo de diferencia. La muestra se divide en  $k$  categorías las frecuencias de cada una se

despliegan a modo de tabla de contingencia. Por medio de esta tabla se calculan los parámetros asociados a la prueba estadística  $\chi^2$ .

Muestra	Categorías (k)				Total
#1	$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	$f_{1,3}$	$f_{1,4} \dots$ $f_{1,k}$	$n_1$
#2	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	$f_{2,3}$	$a_{2,4} \dots f_{2,k}$	$n_2$
Total	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4 \dots m_k$	$n_c$

La hipótesis a probar es:

$H_0$ : Las dos muestras son iguales o provienen de una misma población.

$H_a$ : Las dos muestras no son iguales o no provienen de una misma población.

Las ecuaciones y la prueba estadística a utilizar para el cálculo son las siguientes:

$f_{ij} = n_i m_j / n_c$	Frecuencia esperada
$a_{i,j} - f_{i,j}$	Resta de frecuencias
$\frac{(a_{i,j} - f_{i,j})^2}{f_{i,j}}$	Cociente de frecuencias
$\chi^2 = \sum_{i,j} \frac{(a_{i,j} - f_{i,j})^2}{f_{ij}}$	Estadístico Ji-cuadrada

### Valores tabulares y regla de decisión

Se compara el valor de  $\chi^2$  calculada con el valor crítico  $\chi^2_{\alpha, v}$ , donde  $v$  es  $k - 1$  de la Tabla de valores críticos  $\chi^2$ , si el valor de  $\chi^2$  calculada es mayor al de  $\chi^2$  de tablas, la hipótesis nula se rechaza.

### Ejemplo 5.3 (tomado y modificado de Zar, 1996)

Realizar la prueba de  $\chi^2$  suponiendo que las muestras provienen de la misma población de orientaciones de tortugas, la muestra 1 fue en tortugas jóvenes y la muestra 2 de tortugas mayores. Los siguientes datos se presentan a continuación dentro de la tabla de contingencia arreglados en  $n$  clases.

- Planteamiento de hipótesis:

$H_0$ : Las dos muestras de tortugas se orientan de igual forma.

$H_a$ : Las dos muestras de tortugas no se orientan de igual forma.

- Calcular las frecuencias observadas y obtener la suma de éstas

Intervalos (grados)	$a_{i,j}$ Frec. obs.		Total	$f_{ij} = n_i m_j / n_c$ Frec. esp.		$a_{i,j} - f_{i,j}$		$(a_{i,j} - f_{i,j})^2 / f_{i,j}$	
	#1	#2		#1	#2	#1	#2	#1	#2
0-45	0	0	0	0	0				
45-90	4	15	19	10.2	8.8	-6.2	6.2	3.8	4.3
90-135	0	27	27	14.5	12.5	-14.5	14.5	14.5	16.8
135-180	17	21	38	20.4	17.6	-3.4	3.4	0.6	0.7
180-225	28	5	33	17.7	15.3	10.3	-10.3	6.0	6.9
225-271	11	0	11	5.9	5.1	5.1	-5.1	4.4	5.1
270-315	15	0	15	8.0	7.0	7.0	-7.0	6.1	7.0
315-360	7	3	10	5.3	4.7	1.7	-1.7	0.5	0.6
<b>Total</b>	<b>82</b>	<b>71</b>	<b>153</b>	<b>82</b>	<b>71</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>35.9</b>	<b>41.4</b>

- Calcular el estadístico Ji-cuadrada

•

$$\chi^2 = 35.9 + 41.4 = 77.3$$

- Se busca el valor crítico en tablas y se toma una decisión con respecto a la hipótesis

El valor crítico de tablas con  $\alpha = 0.05$  y  $v = 7$  es de 14.449, este valor es menor a 77.3, se rechaza la hipótesis nula; es decir, las tortugas no se orientan de igual forma con respecto a la edad que presentan.

### Versión multimuestral de Ji-cuadrada (Batschelet, 1981; Zar, 1996)

Esta prueba se puede aplicar a más de dos muestras del mismo modo que para dos muestras, sólo se modifica la tabla de contingencia para  $h$  muestras.

Muestras	1	2	3	...	Total
#1	$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	$f_{1,3}$	$f_{1,4} \dots$ $f_{1,k}$	$n_1$
#2	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	$f_{2,3}$	$f_{2,4} \dots f_{2,k}$	$n_2$
...	...	...	...	$\ddots$	...
# h	$f_{h,1}$	$f_{h,2}$	$f_{h,3}$	$f_{h,4} \dots f_{h,k}$	$n_h$
Total	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4 \dots m_k$	$n_c$

Y se aplican las mismas ecuaciones y mismo estadístico tomando en cuenta el número de muestras y se compara con  $\chi^2_{\alpha, v}$ .

$f_{ij} = n_i m_j / n_c$	Frecuencia esperada
$a_{i,j} - f_{i,j}$	Resta de frecuencias
$\frac{(a_{i,j} - f_{i,j})^2}{f_{i,j}}$	Cociente de frecuencias
$\chi^2 = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k \frac{(a_{i,j} - f_{i,j})^2}{f_{ij}}$	Estadístico Ji-cuadrada

### Prueba de Mardia-Watson-Wheeler (Batschelet, 1981)

Esta prueba fue propuesta en 1964 por Wheeler, Watson y Mardia, quienes descubrieron una prueba de independencia cuando buscaban una prueba bivariada, se hizo aplicable con una tabla de valores críticos. Eventualmente en honor a esta aportación la prueba se le nombró prueba de Mardia-Watson-Wheeler. Prueba no paramétrica. Esta prueba tiene el propósito de ver que tan significativamente diferentes son las muestras una de la otra, siendo que la diferencia puede darse en el ángulo promedio, en la varianza angular o en ambos parámetros. Se asume que los datos son de una distribución circular y no presente datos con empate<sup>3</sup>. Se observa el orden en que los ángulos de una muestra y otra están arreglados con espacios entre ellos del mismo tamaño.

$$d = 360^\circ / n_c \quad n_c = n_1 + n_2$$

<sup>3</sup> Un dato empatado es aquel que tiene el mismo valor en las muestras diferentes y que se le asigna el mismo valor de intervalo

Si los datos de una muestra están suficientemente separados de los datos de la otra muestra, existe diferencia significativa entre ellas. A los valores de las muestras se les asigna un intervalo de dirección ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) concordante entre muestras en orden ascendente, tomando en cuenta que no estén empatados. La hipótesis a probar es:

$H_0$  = El origen de las poblaciones de dos muestras es idéntico

$H_a$  = El origen de las poblaciones de dos muestras no es idéntico

Las ecuaciones y la prueba estadística a utilizar para el cálculo son las siguientes:

$d = \frac{(360)(\text{rango de } a)}{n_c}$	Intervalo circular para cada dato
$\text{sen } d_i \quad \text{cos } d_i$	Funciones trigonométricas para el orden de cada intervalo circular
$c_i = \sum_{j=1}^{n_i} \text{cos } d_j \quad s_i = \sum_{j=1}^{n_i} \text{sen } d_j$	Suma de funciones trigonométricas
$W = 2 \left[ \frac{c_1^2 + s_1^2}{n_1} + \frac{c_2^2 + s_2^2}{n_2} \right]$	Estadístico $W$

### Valores tabulares y regla de decisión

La  $d$  puede tener diferentes niveles de significancia, se compara el valor calculado de  $W$  con el valor crítico  $\chi^2_{\alpha, v}$  de la Tabla de valores críticos de Ji-cuadrada, si el valor de  $W$  es mayor que el de tablas, la hipótesis nula se rechaza concluyendo que las dos muestras difieren una de la otra significativamente.

### Ejemplo 5.4 (tomado y modificado de Zar, 1996)

Aplicar la prueba de Mardia–Watson y Wheeler en los datos de las siguientes muestras que indican el desempeño direccional de dos grupos de pericos de su nido con respecto a la influencia de la dirección del viento, el grupo control estuvo en contacto con el viento, en el grupo experimental no había presencia de viento, muestra control: 35°, 45°, 50°, 55°, 60°, 70°, 85°, 95°, 105°, 120° y muestra experimental: 75°, 80°, 90°, 100°, 110°, 130°, 135°, 140°, 150°, 160°, 165° (Fig. 135).

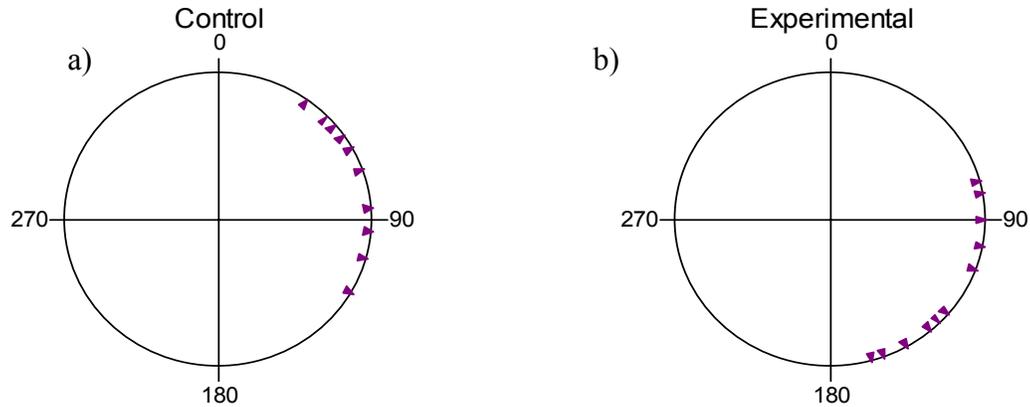


Figura 35.- Gráfico de datos originales del ejemplo 17, a) muestra control b) muestra experimental.

- Plantear el par de hipótesis:

$H_0$  = La orientación de las dos muestras de pericos es idéntica.

$H_a$  = La orientación de las dos muestras de pericos no es idéntica.

Se calcula la  $n_c$  y el intervalo circular para cada dato.

$$n_1 = 10 \quad n_2 = 11 \quad \text{y} \quad n_c = 21 \quad \frac{360^\circ}{n_c} = \frac{360^\circ}{21} = 17.1429^\circ$$

- Obtención de  $c$  y  $s$  para cada muestra

Muestra control			Muestra experimental		
Dirección (grados)	Intervalo de dirección (orden)	Intervalo circular (grados) $d = \frac{(360)(\text{rango de } a)}{n_c}$	Dirección (grados)	Intervalo de dirección (orden)	Intervalo circular (grados) $d = \frac{(360)(\text{rango de } a)}{n_c}$
35	1	17.14			
45	2	34.29			
50	3	51.43			
55	4	68.57			
60	5	85.71			
70	6	172.86			
			75	7	120.00
			80	8	137.14
85	9	154.29			

			<b>90</b>	<b>10</b>	<b>171.43</b>
<b>95</b>	<b>11</b>	<b>188.57</b>			
			<b>100</b>	<b>12</b>	<b>205.71</b>
<b>105</b>	<b>13</b>	<b>222.86</b>			
			<b>110</b>	<b>14</b>	<b>240.00</b>
<b>120</b>	<b>15</b>	<b>257.14</b>			
			<b>130</b>	<b>16</b>	<b>274.29</b>
			<b>135</b>	<b>17</b>	<b>291.43</b>
			<b>140</b>	<b>18</b>	<b>308.57</b>
			<b>150</b>	<b>19</b>	<b>325.71</b>
			<b>160</b>	<b>20</b>	<b>342.86</b>
			<b>165</b>	<b>21</b>	<b>360.00</b>
		$c_1 = -0.2226$ $s_1 = 3.1726$			$c_2 = 0.2226$ $s_2 = -3.1726$

- Se aplica la prueba estadística de Watson.

$$W = 2 \left( \frac{c_1^2 + s_1^2}{n_1} + \frac{c_2^2 + s_2^2}{n_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 W &= 2 \left( \frac{(-0.2226)^2 + (3.1726)^2}{10} + \frac{(0.2226)^2 + (-3.1726)^2}{11} \right) \\
 &= 2(1.0115 + 0.9195) = 2(1.9310) \\
 &= 3.862
 \end{aligned}$$

- Se busca el valor crítico en tablas y se toma una decisión con respecto a la hipótesis. Con  $\nu = 2$  el valor crítico es de  $\chi_{0.05,2}^2 = 5.991$ ; por lo tanto, no se rechaza  $H_0$  ya que el valor de la  $\chi^2$  calculada es menor que el valor crítico de  $\chi^2$ , indicando que no existe diferencia entre los orígenes de las dos muestras de pericos.

### Prueba multimuestral de Mardia-Watson –Wheeler (Batschelet, 1981; Zar, 1996)

Mardia (citado por Zar, 1996) extendió la prueba a más de dos muestras, este procedimiento es como el anterior donde todos  $n$  los datos para todas las  $h$  muestras están en intervalo circular y el intervalo circular,  $d$ , se calcula para cada dato, esto aplica a cada muestra.

La prueba se apega a una  $\chi^2_{\alpha,2(v)}$ . Este procedimiento es complejo y solo se aplica, si cada  $n$  es menor que 10 y no se debe usar si estos datos presentan algún empate.

$d = \frac{(360)(\text{rango de } a)}{n_c}$	Intervalo circular para cada dato
$\text{sen } d_i \quad \text{cos } d_i$	Funciones trigonométricas para el orden de cada intervalo circular
$c_i = \sum_{j=1}^{n_i} \text{cos } d_j \quad s_i = \sum_{j=1}^{n_i} \text{sen } d_j$ $W = 2 \sum_{i=1}^h \left[ \frac{c_i^2 + s_i^2}{n_c} \right]$	Suma de funciones trigonométricas y Estadístico $W$ multimuestral

**Prueba Bimuestral de Watson** (Batschelet, 1981)

La idea de usar la suma de cuadrados de desviaciones entre distribuciones funcionales fue de Kramer y Kolmogorov. Watson modificó a partir de ésta, una prueba de distribución circular, posteriormente se le nombró la prueba  $U^2$  de Watson. Esta prueba no paramétrica tiene el propósito de estimar si dos muestras difieren significativamente una de la otra. La diferencia se puede basar en el ángulo promedio, en la varianza angular o en algún otro parámetro. La prueba de Watson se aplica en muestras independientes de  $n$  datos en  $m$  observaciones circulares. Se recomienda usar la prueba de Watson en lugar de la prueba de Watson-Williams para dos muestras, cuando al menos una de las muestras no es unimodal. Se puede usar en datos agrupados en intervalos no más grandes que 5°.

Esta prueba usa sumas de desviaciones cuadradas, englobando las dos muestras en  $n_c = n_1 + n_2$ . Para los dos tamaños de muestras,  $n_1$  y  $n_2$  se denota la  $i$ -ésima observación en la muestra 1 como  $a_{1i}$  y el  $j$ -ésimo dato en la muestra 2 como  $a_{2j}$  ordenadas en forma ascendente (Para llevar a cabo este procedimiento cabe resaltar que los datos de ambas muestras se deben alinear una con la otra de modo que  $a_{1i}$  (ángulo de la muestra 1) coincida ascendentemente con el dato  $a_{2j}$ , obteniendo los valores de  $i/n_1$ ).

La hipótesis a probar es:

$H_0$  = Las dos muestras tienen el mismo patrón poblacional.

$H_a$  = Las dos muestras no tienen el mismo patrón poblacional

Las ecuaciones y la prueba estadística a utilizar para el cálculo son la siguiente.

Muestra 1 ( $n$ )	Muestra 2 ( $m$ )	
$i$	$j$	orden ascendente de los datos
$\frac{i}{n_1}$	$\frac{j}{n_2}$	frecuencia relativa acumulada
$d_k = \frac{i}{n_1} - \frac{j}{n_2}$		Diferencia entre las dos frecuencias relativas
$d_h^2 \quad \sum d_{2h}^2 \quad n_c = n_1 + n_2$		Valores $d$ y $n$ total
$U^2 = \frac{n_1 n_2}{n_c^2} \left[ \sum d_h^2 - \frac{(\sum d_h)^2}{n_c} \right]$		Estadístico $U^2$

### Valores tabulares y regla de decisión

Se compara el valor de  $U^2$  calculada con el valor crítico de  $U_{\alpha, n_1, n_2}^2$  el cual se obtiene de la Tabla de valores críticos de la  $U^2$  de Watson para dos muestras, si el estadístico  $U^2$  calculado es mayor al valor crítico de  $U^2$  de tablas, se rechaza la hipótesis, indicando que las muestras difieren significativamente.

### Ejemplo 5.6 (tomado y modificado de Zar, 1996)

Realizar la prueba bimuestral no paramétrica  $U^2$  de Watson para los siguientes datos de dos grupos de aves de una especie las cuales son transportadas de su lugar de origen en Francia a España. Un grupo  $i$  (control) fue transportado en contenedores con aire natural durante el viaje, y el grupo  $j$  (experimental) sólo se aplicó aire puro. Se liberaron en un sitio donde la dirección de su lugar de origen estaba a  $115^\circ$ , a una distancia de 500 kilómetros.

- Plantear el par de hipótesis:

$H_0$  = La forma de orientación de las muestras es igual

$H_a$  = La forma de orientación de las muestras no es igual

- Se ordenan los datos, se calcula la frecuencia relativa, la diferencia y la suma de valores  $d$ .

	Control $n_1 = 10$			Experimental $n_2 = 11$			
$i$	$a_{1i}$ (ángulo)	$\frac{i}{n_1}$	$j$	$a_{2j}$ (ángulo)	$\frac{j}{n_2}$	$d_k = \frac{i}{n_1} - \frac{j}{n_2}$	$d_h^2$
1	35	0.1000			0.0000	0.1000	0.0100
2	45	0.2000			0.0000	0.2000	0.0400
3	50	0.3000			0.0000	0.3000	0.0900
4	55	0.4000			0.0000	0.4000	0.1600
5	60	0.5000			0.0000	0.5000	0.2500
6	70	0.6000			0.0000	0.6000	0.3600
		0.6000	1	75	0.0909	0.5091	0.2552
		0.6000	2	80	0.1818	0.4182	0.1749
7	85	0.7000			0.1818	0.5182	0.2685
		0.7000	3	90	0.2727	0.4273	0.1826
8	95	0.8000			0.2727	0.5273	0.2780
		0.8000	4	100	0.3636	0.4364	0.1904
9	105	0.9000			0.3636	0.5364	0.2877
		0.9000	5	110	0.4546	0.4454	0.1984
10	120	1.0000			0.4546	0.5454	0.2975
		1.0000	6	130	0.5455	0.4545	0.2066
		1.0000	7	135	0.6364	0.3636	0.1312
		1.0000	8	140	0.7273	0.2727	0.0744
		1.0000	9	150	0.8182	0.1818	0.0331
		1.0000	10	135	0.9091	0.0909	0.0083
		1.0000	11	165	0.0000	0.0000	0.0000
						$\sum d_{2,h} = 7.8272$	$\sum d_{2,h}^2 = 3.5018$

- El valor total de N  $n_c = n_1 + n_2 = 21$
- Se aplica la prueba estadística  $U^2$

$$\begin{aligned}
 U^2 &= \frac{n_1 n_2}{n_c^2} \left[ \sum d_h^2 - \frac{(\sum d_h)^2}{n_c} \right] \\
 &= \frac{(10)(11)}{21^2} \left[ 3.5018 - \frac{(7.8272)^2}{21} \right] \\
 &= 0.1458
 \end{aligned}$$

- Se busca el valor crítico en tablas y se toma una decisión con respecto a la hipótesis

El valor crítico en tablas es:  $U_{0.05,10,11}^2 = 0.1856$ , este valor es mayor que  $U^2 = 0.1458$  por lo tanto, no se rechaza  $H_0$  ya que el valor de la  $U^2$  calculada es menor que el valor crítico de  $U^2$  de tablas, indicando que las dos muestras no se desvían significativamente una de la otra, aún con la diferencia de tipo de aire, el cual no influye en las orientaciones de las aves después de viajar.

**Prueba de Watson con valores empatados** (Zar, 1996)

Cuando una porción de los datos de las dos muestras tienen un mismo valor numérico, la prueba de Watson (bimuestral) se modifica en su técnica para datos que presenten empate, esta prueba no paramétrica contrasta si dos muestras difieren significativamente una de la otra, tomando en cuenta que los datos presentan empate. La diferencia se puede encontrar en el ángulo promedio, en la varianza angular o en algún otro parámetro.

El procedimiento es parecido al anterior sólo que al presentar datos con empate la forma de ordenar ascendentemente es diferente, se toma en cuenta que la muestra 1 es igual a  $n_1$  y la muestra 2 igual a  $n_2$ . La hipótesis a probar es:

$H_0$  = Las dos muestras tienen el mismo patrón poblacional.

$H_a$  = Las dos muestras no tienen el mismo patrón poblacional

Las ecuaciones y el estadístico a utilizar para el cálculo son las siguientes

Muestra 1 ( $n_1$ )	Muestra 2 ( $n_2$ )	
$i$	$j$	Orden ascendente de los datos
$a_{1j} f_{1,j}$	$a_{2j} f_{2,j}$	El dato y su frecuencia
$m_{1i}$	$m_{2j}$	Frecuencia relativa
$\frac{m_{1i}}{n_1}$	$\frac{m_{2j}}{n_2}$	Frecuencia relativa acumulada
$d_h = \frac{m_{1i}}{n_1} - \frac{m_{2j}}{n_2}$		Diferencia entre las dos frecuencias acumuladas
$d_h^2$		Valores $d$
$f_h$		Frecuencia de los datos empatados

$U^2 = \frac{n_1 n_2}{n_c^2} \left[ \sum f_h d_h^2 - \frac{(\sum_{h=1}^{n_c} f_h d_h)^2}{n} \right]$	Estadístico $U^2$
------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------

### Valores tabulares y regla de decisión

El valor crítico y la regla de decisión, es el mismo que para la prueba de Watson sin empate, la cual se obtiene de la Tabla de valores críticos de Watson para dos muestras. Si el estadístico calculado es mayor al valor crítico se rechaza la hipótesis nula, indicando que las muestras difieren significativamente.

### Ejemplo 5.7 (tomado y modificado de Zar, 1996)

Realizar la prueba  $U^2$  de Watson para los siguientes datos con empate suponiendo que representan las salidas de dos grupos de ratones ( $i, j$ ) capturados en la noche y liberados por la mañana (Fig. 36).

Muestra 1: 40°, 45°, 50°, 55°, 70°, 80°, 95°, 105°, 110°, 120°.

Muestra 2: 30°, 35°, 50°, 60°, 65°, 75°, 80°, 90°, 100°.

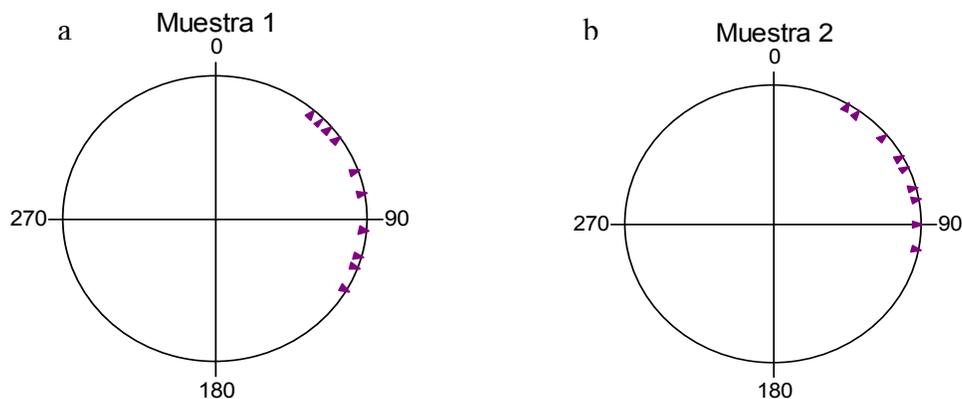


Figura 36.- Gráfico de datos originales del ejemplo 19, a) muestra 1 y b) muestra 2.

- Plantear el par de hipótesis:

$H_0$  = Las dos muestras son de una misma población, o de dos poblaciones que tienen la misma dirección.

$H_a$  = Las dos muestras no son de una misma población, o de dos poblaciones que no tienen la misma dirección

- Se ordenan los datos de cada muestra ascendentemente<sup>4</sup>, se calcula la frecuencia relativa, la diferencia y la suma de valores  $d$ .

$i$	$a_{1j}$	$f_{1,j}$	$m_{1i}$	$\frac{m_{1i}}{n_1}$	$j$	$a_{2j}$	$f_{2,j}$	$m_{2j}$	$\frac{m_{2j}}{n_2}$	$= \frac{m_{1i}}{n_1} - \frac{m_{2j}}{n_2}$	$d_h^2$	$f_h$
				0.0000	1	30	1	1	0.1000	-0.1000	0.0100	1
				0.0000	2	35	1	2	0.2000	-0.2000	0.0400	1
1	40	1	1	0.0833					0.2000	-0.1167	0.0136	1
2	45	1	2	0.1667					0.2000	-0.0333	0.0011	1
3	50	1	3	0.2500	3	50	1	3	0.3000	-0.0500	0.0044	2
4	55	1	4	0.3333					0.3000	-0.0333	0.0711	1
				0.3333	4	60	1	4	0.4000	-0.0667	0.0336	1
				0.3333	5	65	2	6	0.6000	-0.2677	0.0803	2
5	70	1	5	0.4167					0.6000	0.1833	0.0470	1
				0.4167	6	75	1	7	0.7000	-0.2833	0.1003	1
6	80	2	7	0.5833	7	80	1	8	0.8000	-0.2167	0.0544	3
				0.5833	8	90	1	9	0.9000	-0.3167	0.1111	1
7	95	1	8	0.6667					0.9000	-0.2333	0.0625	1
				0.6667	9	100	1	10	1.0000	-0.3333	0.0069	1
8	105	1	9	0.6667					1.0000	-0.2500	0.0000	1
9	110	2	11	0.9167					1.0000	-0.0833	0.0069	2
10	120	1	12	1.0000					1.0000	0.0000	0.0000	1
			$n_1 = 12$					$n_2 = 10$		$\sum f_h d_h =$ $= -3.5334$	$\sum f_h d_h^2 =$ $= 0.8144$	

- Se obtiene el valor total de

$$n_c = 12 + 10 = 22$$

- Se aplica la prueba estadística  $U^2$

<sup>4</sup> La forma de ordenar los datos es parecida al método anterior, los datos de ambas muestras se deben alinear una con la otra de modo que donde  $a_{1i}$  (ángulo de la muestra 1) coincida ascendentemente con el dato  $a_{2j}$ , en la alineación se toma en cuenta el dato empatado.

$$U^2 = \frac{n_1 n_2}{n_c^2} \left[ \sum f_h d_h^2 - \frac{(\sum_{h=1}^{n_c} f_h d_h)^2}{n} \right] = \frac{(12)(10)}{22^2} \left[ 0.8144 - \frac{(-3.5334)^2}{22} \right] = 0.0612$$

- Se busca el valor crítico en tablas y se toma una decisión con respecto a la hipótesis

El valor crítico de tablas es  $U_{0.05,10,12}^2 = 0.2246$ , por lo tanto no se rechaza  $H_0$ , ya que el valor de la  $U^2$  calculada es menor que el valor crítico de  $U^2$ , lo que indica que ambas muestras son de una misma población de ratones o de una población en la misma dirección y la hora del día no afecta su orientación.

Nota: Aunque existe una Versión multimuestral de Watson, no se describirá ya que Mag (citado por Zar, 1996) extendió la prueba de  $U^2$  de Watson a  $k > 1$ , pero los valores críticos citados no se han aceptado como válidos.

## BIBLIOGRAFÍA

---

1. Batschelet, E. (1981). Circular Statistics in Biology. Ed. Academic Press Inc. Londres Inglaterra. 371 pp.
2. Borges. C. L. y H. A. Esquivel. (1991). Apuntes de introducción a los modelos matemáticos en ecología. U.A.M Xochimilco. Mexico D.F. I-15 – I-18.
3. Fisher, N, I. (1993). Statistical analysis of circular data. Ed. University of Cambridge, Cambridge Gran Bretaña. 277 pp.
4. Jammalamadaka, S. R. y A. SenGupta. (2001). “Topics in circular statistics”. Editorial Mundo Científico. Singapur. 322 pp.
5. Mardia, K.V. (1972). Statistics of directional data. Ed. Academic Press. Londres. 311pp.
6. Milton , S. J. (2001). Estadística para la biología y ciencias de la salud. Tercera edición. Edit. McGraw. Hill. Interamericana. España. 662 pp.
7. Norman, G. R. y D. L. Streiner. (1996). Bioestadística. Edit. Mosby /Dogma Libros. Madrid España. 260 pp.
8. Reyes, P. C. (1995). Bioestadística aplicada a Agronomía, Biología, Química. 2ª. Ed. Trillas México. 217 pp.
9. Zar, H. J. (1996). Biostatistical Analysis. 3ª Ed. Prentice Hall, New Jersey. 662 pp.



## APENDICE

Batschelet, E. (1981). Circular Statistics in Biology. Ed. Academic Press Inc. Londres, Inglaterra. 371 pp.

<b>Tabla 1. Valores críticos de z para la prueba de Rayleigh</b>					
<i>n</i>	$\alpha$ 0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
6	2.274	2.865	4.058	4.491	5.297
7	2.278	2.885	4.143	4.617	5.555
8	2.281	2.899	4.205	4.71	5.743
9	2.283	2.91	4.252	4.78	5.885
10	2.285	2.919	4.289	4.835	5.996
11	2.287	2.926	4.319	4.879	6.085
12	2.288	2.932	4.319	4.916	6.158
13	2.289	2.937	4.365	4.947	6.219
14	2.29	2.941	4.383	4.973	6.271
15	2.291	2.945	4.398	4.996	6.316
16	2.25	2.948	4.412	5.015	6.354
17	2.292	2.951	4.412	5.033	6.338
18	2.292	2.954	4.423	5.048	6.41
19	2.293	2.956	4.434	4.061	6.445
20	2.294	2.956	4.451	5074	6.469
21	2.294	2.96	4.459	5.085	6.491
22	2.295	2.961	4.466	5.095	6.51
23	2.295	2.963	4.472	5.104	6.528
24	2.295	2.964	4.478	5.112	6.544
25	2.296	2.966	4.483	5.12	6.559
26	2.296	2.967	4.488	5.127	6.573
27	2.296	2.965	4.492	5.133	6.586
28	2.296	2.969	4.496	5.139	6.598
29	2.297	2.97	4.5	5.145	6.609
30	2.297	2.977	4.504	5.15	6.619
40	2.298	2.981	4.529	5.159	6.692
50	2.299	2.981	4.545	5.21	6.736
55	2.299	2.982	4.55	5.218	6.752
60	2.3	2.983	4.555	5.225	6.765
65	2.3	2.984	4.559	2.231	6.776
70	2.3	2.985	4.562	5.235	6.786
75	2.3	2.986	4.565	5.24	6.794
100	2.301	2.988	4.575	5.254	6.822
500	2.302	2.994	4.599	5.29	6.891

<b>Tabla 2. Valores críticos de <math>u</math> para la prueba de <math>V</math></b>						
$n$	$\alpha$ 0.10	0.05	0.01	0.005	0.001	0.0001
5	1.3021	1.624	2.2505	2.4459	2.7938	3.0825
6	1.3009	1.6509	2.264	2.4695	2.8502	3.2114
7	1.298	1.6499	2.2734	2.4858	2.8886	3.297
8	1.2958	1.6492	2.2803	2.4978	2.9164	3.3578
9	1.2942	1.6484	2.2856	2.507	2.9375	3.4034
10	1.2929	1.6482	2.2899	2.5143	2.954	3.4387
11	1.2918	1.6479	2.2933	2.5201	2.9672	3.4669
12	1.2909	1.6476	2.2961	2.525	2.9782	3.4899
13	1.2902	1.6474	2.2985	2.529	29.987	3.5091
14	1.2895	1.6472	2.3006	2.5325	2.995	3.5253
15	1.289	1.647	2.3023	2.5355	3.0017	3.5392
16	1.2885	1.6469	2.3039	2.5381	3.0075	3.5512
17	1.2881	1.6467	2.3052	2.5404	3.0126	3.5617
18	1.2877	1.6466	2.3064	2.5424	3.0171	3.571
19	1.2874	1.6465	2.3075	2.5442	3.0211	3.5792
20	1.2871	1.6464	2.3085	2.5458	3.0247	3.5866
21	1.2868	1.6464	2.3093	2.5458	3.0279	3.5932
22	1.2866	1.6463	2.3101	2.5486	3.0308	3.5992
23	1.2864	1.6462	2.3108	2.5498	3.0335	3.6047
24	1.2862	1.6462	2.3115	2.5509	3.0359	3.6096
25	1.286	1.6461	2.3121	2.5519	3.0382	3.6142
26	1.2558	1.6461	2.3127	2.5529	3.0402	3.6184
27	1.2856	1.646	2.3132	2.5538	3.0421	3.6223
28	1.2855	1.646	2.3136	2.5546	3.0439	3.6258
29	1.2853	1.6459	2.3141	2.5553	3.0455	3.6292
30	1.2852	1.6459	2.3145	2.556	3.0471	3.6323
40	1.2843	1.6456	2.3175	2.651	3.058	3.6545
50	1.2837	1.6455	2.3193	2.564	3.0646	3.6677
60	1.2834	1.6454	2.3205	2.566	3.0689	3.6764
70	1.2831	1.6453	2.3213	2.5674	3.072	3.6826
100	1.2826	1.6452	2.3228	2.5699	3.0775	3.6936
500	1.2818	1.6449	2.3256	2.5747	3.0577	3.714
1000	1.2817	1.6449	2.326	2.5752	3.089	3.7165

<b>Tabla 3. Valores críticos de Rao</b>			
<i>n</i>	$\alpha$ 0.10	186.5	0.01
4	221	183.6	171.7
5	212	180.7	168.8
6	206	177.8	166.3
7	202.7	175.7	164.9
8	198.4	173.5	163.4
9	165.1	172.1	162.4
10	192.2	170.3	161.3
11	189.7	169.2	160.2
12	187.7	2.932	159.2
13	185.8	167.8	158.4
14	184	166.7	157.7
15	182.2	165.6	157
16	180.7	164.9	156.6
17	179.6	164.2	155.9
18	178.2	163.1	155.2
19	177.1	162.4	154.8
20	176	161.6	154.4
25	171.9	158.9	152.7
30	18.8	156.7	151.4
35	166.4	155	150.3
40	164.4	153.6	149.5
45	162.7	152.4	148.7
50	161.2	151.4	148.1
100	152.8	146.8	143.7
200	146.8	1042.6	140.4

<b>Tabla 4. Valores críticos <math>U^2</math> para una muestras</b>				
<b><math>n</math></b>	<b><math>\alpha</math> 0.10</b>	<b>0.05</b>	<b>0.01</b>	<b>0.005</b>
<b>2</b>	<b>0.143</b>	<b>0.155</b>	<b>0.164</b>	<b>0.165</b>
<b>3</b>	<b>0.145</b>	<b>0.173</b>	<b>0.213</b>	<b>0.224</b>
<b>4</b>	<b>0.146</b>	<b>0.176</b>	<b>0.233</b>	<b>0.252</b>
5	0.148	0.177	0.238	0.262
6	0.149	0.179	0.243	0.269
7	0.149	0.18	0.147	0.274
8	0.15	0.181	0.25	0.278
9	0.15	0.182	0.252	0.281
10	0.15	0.182	0.254	0.283
12	0.15	0.183	0.256	0.27
14	0.151	0.184	0.258	0.29
16	0.151	0.184	0.259	0.291
18	0.151	0.184	0.259	0.292
20	0.151	0.185	0.261	0.293
30	0.152	0.185	0.263	0.296
40	0.152	0.186	0.264	0.298
50	0.152	0.186	0.265	0.299
100	0.152	0.186	0.266	0.301
$\infty$	0.152	0.187	0.267	0.302

<b>Tabla 5. Valores críticos para la prueba de Kupier</b>							
<b><i>n</i></b>	<b><math>\alpha=0.50</math></b>	<b>0.10</b>	<b>0.05</b>	<b>0.02</b>	<b>0.01</b>	<b>0.005</b>	<b>0.001</b>
5	K( $\alpha$ )=1.102	1.458	1.565	1.682	1.763	1.838	1.970
6	1.109	1.471	1.582	1.711	1.793	1.867	2.020
7	1.116	1.483	1.598	1.727	1.814	1.894	2.051
8	1.122	1.493	1.608	1.741	1.830	1.911	2.077
9	1.127	1.500	1.618	1.752	1.843	1.926	2.097
10	1.131	1.507	1.625	1.761	1.854	1.938	2.113
11	1.134	1.513	1.631	1.769	1.862	1.948	2.126
12	1.138	1.517	1.637	1.776	1.870	1.957	2.137
13	1.141	1.522	1.642	1.782	1.876	1.964	2.146
14	1.143	1.525	1.646	1.787	1.882	1.970	2.154
15	1.146	1.529	1.650	1.791	1.887	1.976	2.161
16	1.148	1.532	1.653	1.795	1.892	1.981	2.168
17	1.150	1.534	1.657	1.799	1.896	1.986	2.173
18	1.152	1.537	1.659	1.802	1.899	1.990	2.178
19	1.154	1.539	1.662	1.805	1.903	1.993	2.183
20	1.155	1.541	1.664	1.808	1.906	1.997	2.187
21	1.157	1.543	1.667	1.810	1.908	2.000	2.191
22	1.158	1.545	1.669	1.813	1.911	2.003	2.194
23	1.159	1.547	1.670	1.815	1.913	2.005	2.198
24	1.161	1.549	1.672	1.817	1.916	2.008	2.201
25	1.162	1.550	1.674	1.819	1.918	2.010	2.203
30	1.167	1.556	1.681	1.826	1.926	2.019	2.215
35	1.171	1.561	1.686	1.832	1.933	2.026	2.223
40	1.174	1.565	1.690	1.837	1.938	2.032	2.230
45	1.177	1.568	1.694	1.841	1.942	2.036	2.235
50	1.179	1.571	1.697	1.844	1.946	2.040	2.239
100	1.191	1.588	1.714	1.862	1.965	2.060	2.262
200	1.200	1.600	1.726	1.876	1.979	2.075	2.279
500	1.208	1.610	1.737	1.887	1.990	2.087	2.292
$\infty$	1.216	1.620	1.747	1.898	2.001	2.098	2.303

**Tabla 6. Valores críticos de la Ji-cuadrada**

<b>v</b>	<b>0.999</b>	<b>0.995</b>	<b>0.99</b>	<b>0.95</b>	<b>0.9</b>	<b>0.5</b>	<b>0.1</b>	<b>0.05</b>	<b>0.010</b>	<b>0.005</b>	<b>0.001</b>
1	0.000	0.000	0.000	0.004	0.016	0.455	2.706	3.841	6.634	7.879	10.828
2	0.002	0.01	0.02	0.103	0.211	1.386	4.605	5.991	9.210	10.597	13.816
3	0.024	0.072	0.115	0.352	0.584	2.366	6.251	7.815	11.345	12.838	16.266
4	0.091	0.207	0.297	0.711	1.064	3.357	7.779	9.488	13.237	14.86	18.467
5	0.21	0.412	0.554	1.145	1.61	4.351	9.256	11.07	15.086	16.75	20.515
6	0.381	0.676	0.872	1.635	2.204	5.348	10.645	12.592	16.812	18.548	22.458
7	0.599	0.989	1.239	2.167	2.833	6.346	12.017	14.067	18.475	20.278	24.322
8	0.857	1.344	1.646	2.733	3.49	7.344	13.362	15.507	20.090	21.955	26.124
9	1.152	1.735	2.088	3.325	4.168	8.343	14.684	16.919	21.666	23.589	27.877
10	1.479	2.156	2.558	3.94	4.865	9.342	15.987	18.307	23.209	25.188	29.588
11	1.834	2.603	3.053	4.575	5.578	10.341	17.275	19.675	24.725	26.757	31.264
12	2.214	3.074	3.571	5.226	6.304	11.34	18.549	21.026	26.217	28.000	32.909
13	2.617	3.565	4.107	5.892	7.042	12.34	19.812	22.362	27.688	29.819	34.528
14	3.041	4.075	4.66	6.571	7.79	13.339	21.064	23.685	29.141	31.319	36.123
15	3.483	4.601	5.229	7.261	8.547	14.339	22.307	24.996	30.578	32.801	37.697
16	3.942	5.142	5.812	7.962	9.312	15.338	23.542	26.296	32.000	34.267	39.252
17	4.416	5.697	6.408	8.672	10.085	16.338	24.769	27.587	33.409	35.718	40.79
18	4.905	6.265	7.015	9.39	10.865	17.338	25.989	28.869	34.805	37.156	42.312
19	5.407	6.844	6.633	10.117	11.651	18.338	27.204	30.144	36.191	38.582	43.82
20	5.921	7.434	8.26	10.851	12.443	19.337	28.412	31.41	37.566	39.997	45.315
21	6.447	8.034	8.897	11.591	13.24	20.337	29.615	32.671	38.932	41.401	46.797
22	6.983	8.643	9.542	12.338	14.041	21.337	30.813	33.924	40.289	42.796	48.268
23	7.529	9.26	10.196	13.091	14.848	22.337	32.007	35.172	41.638	44.181	49.728
24	8.085	9.886	10.856	13.848	15.659	23.337	33.196	36.415	42.980	45.559	51.179
25	8.649	10.52	11.524	14.611	16.473	24.337	34.382	37.652	44.314	46.928	52.62
26	9.222	11.16	12.198	15.379	17.292	25.336	35.563	38.885	45.642	48.29	54.052
27	9.803	11.808	12.879	16.152	18.114	26.336	36.741	40.113	46.963	49.645	55.436
28	10.391	12.461	13.565	16.928	18.939	27.336	37.916	41.337	48.278	50.923	56.892
29	10.986	13.121	14.256	17.708	19.768	28.336	39.087	42.557	49.588	52.336	58.301
30	11.588	13.787	14.957	18.493	20.599	29.336	40.056	43.773	50.892	53.672	59.703
31	12.196	14.458	15.655	19.281	21.434	30.336	41.422	44.985	52.191	55.003	61.098
32	12.811	15.134	16.362	20.072	22.271	31.336	42.585	46.194	53.486	56.328	62.487
33	13.431	15.815	17.074	20.867	23.11	32.336	43.745	47.400	54.776	57.648	63.870

**Tabla 6. Valores críticos de la Ji-cuadrada (continuación)**

34	14.057	16.501	17.789	21.664	23.952	33.336	44.903	48.602	56.061	58.964	65.247
35	14.688	17.192	18.509	22.465	24.797	34.336	46.059	49.802	57.342	60.275	66.619
36	15.324	17.887	19.233	23.269	25.643	35.336	47.212	50.998	58.619	61.581	67.985
37	15.965	18.586	19.96	24.075	26.492	36.336	48.363	52.192	59.803	62.883	69.346
38	16.611	19.289	20.691	24.884	27.343	37.335	49.513	53.584	61.162	64.181	70.703
39	17.762	19.996	21.426	25.695	28.196	38.335	50.660	54.572	62.428	65.476	72.055
40	17.916	20.707	22.164	26.509	29.051	39.335	51.805	55.758	63.691	65.776	75.402
41	18.576	21.421	22.906	27.326	29.907	40.335	52.949	56.942	64.950	68.053	74.745
42	19.239	22.138	23.65	28.144	30.765	41.335	54.090	58.124	66.206	69.336	76.084
43	19.906	22.859	24.398	28.965	31.625	42.335	55.230	59.304	67.459	70.616	77.419
44	20.576	23.584	25.148	29.787	32.487	43.335	56.369	60.481	68.710	71.893	78.750
45	21.251	24.311	25.901	30.612	33.65	44.335	57.505	61.656	69.957	73.166	80.077
46	21.929	25.041	26.657	31.439	34.215	45.335	58.641	62.83	71.201	74.437	81.400
47	22.616	25.775	27.416	32.268	35.081	46.335	59.774	64.001	72.443	75.704	82.720
48	23.295	26.511	28.177	33.098	35.949	47.335	60.907	65.171	73.683	76.969	84.037
49	23.983	27.249	28.941	33.93	36.818	48.335	62.038	66.339	74.910	78.231	85.551
50	24.694	27.991	29.707	34.964	37.689	49.335	63.167	67.505	76.154	79.49	86.661

**Tabla 7. Factor de corrección K para la prueba de Watson y Williams**

<i>k</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		188.498	94.747	63.501	47.874	38.499	32.249	27.785	24.436	21.833
0.01	19.748	18.044	16.623	15.421	14.291	13.498	12.717	12.027	11.415	10.864
0.02	10.373	9.926	9.52	5.15	8.81	8.497	8.209	7.541	7.693	7.462
0.03	7.247	7.045	6.856	6.678	6.511	6.353	6.205	6.064	5.93	5.804
0.04	5.683	5.569	5.46	5.356	5.257	5.162	5.071	4.985	4.901	4.821
0.05	4.745	4.671	4.6	4.532	4.467	4.403	4.343	4.284	4.227	4.172
0.06	4.119	4.068	4.018	3.97	2.923	3.878	3.834	3.792	3.751	3.71
0.07	3.672	2.624	3.597	3.561	3.526	3.493	3.46	3.427	3.396	3.366
0.08	3.336	3.307	3.278	3.251	3.224	3.197	3.172	3.147	3.122	3.098
0.09	3.074	3.051	3.029	3.007	2.985	2.964	2.944	2.923	2.904	2.884
0.1	2.865	2.846	2.828	2.81	2.793	2.775	2.758	2.742	2.725	2.7
0.11	2.694	2.678	2.663	2.648	2.634	2.619	2.605	2.591	2.577	2.56
0.12	2.551	2.538	2.525	2.512	2.5	2.488	2.476	2.464	2.452	2.44
0.13	2.43	2.418	2.408	2.397	2.386	2.376	2.364	2.355	2.345	2.335
0.14	2.326	2.316	2.307	2.297	2.288	2.279	2.27	2.261	2.252	2.244
0.15	2.235	2.227	2.215	2.211	2.203	2.195	2.187	2.175	2.171	2.164
0.16	2.156	2.149	2.142	2.134	2.127	2.12	2.113	2.107	2.1	2.092
0.17	2.086	2.08	2.073	2.067	2.061	2.054	2.048	2.042	2.036	2.03
0.18	2.024	2.018	2.013	2.007	2.001	1.996	1.99	1.984	1.979	1.974
0.19	1.568	1.963	1.958	1.952	1.548	1.943	1.938	1.933	1.928	1.923
0.2	1.518	1.913	1.909	1.904	1.855	1.895	1.89	1.886	1.881	1.877
0.21	1.8729	1.868	1.864	1.86	1.855	1.851	1.847	1.843	1.839	1.832
0.22	1.8313	1.827	1.823	1.815	1.815	1.811	1.808	1.804	1.8	1.794
0.23	1.793	1.789	1.786	1.782	1.778	1.775	1.771	1.768	1.765	1.761
0.24	1.758	1.755	1.751	1.748	1.745	1.741	1.738	1.735	1.732	1.725
0.25	1.726	1.723	1.719	1.716	1.712	1.71	1.707	1.704	1.702	1.655
0.26	1.696	1.693	1.69	1.687	1.684	1.682	1.679	1.67	1.673	1.671
0.27	1.668	1.665	1.663	1.66	1.657	1.655	1.652	1.65	1.647	1.648
0.28	1.642	1.64	1.637	1.635	1.632	1.63	1.628	1.625	1.623	1.62
0.29	1.618	1.616	1.613	1.611	1.609	1.607	1.604	1.602	1.6	1.598
0.3	1.59	1.593	1.591	1.585	1.587	1.585	1.583	1.581	1.578	1.574

**Tabla 7. Factor de corrección K para la prueba de Watson y Williams (continuación)**

<i>k</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.31	1.574	1.572	1.57	1.568	1.566	1.564	1.562	1.56	1.558	1.55
0.32	1.554	1.552	1.57	1.545	1.545	1.545	1.543	1.541	1.539	1.537
0.33	1.536	1.534	1.551	1.53	1.53	1.527	1.525	1.523	1.521	1.52
0.34	1.518	1.516	1.514	1.512	1.512	1.509	1.508	1.5	1.504	1.502
0.35	1.501	1.499	1.498	1.496	1.496	1.493	1.491	1.49	1.488	1.487
0.36	1.485	1.483	1.482	1.48	1.48	1.477	1.476	1.474	1.473	1.471
0.37	1.47	1.468	1.467	1.465	1.465	1.463	1.461	1.46	1.458	1.457
0.38	1.455	1.454	1.453	1.451	1.451	1.449	1.447	1.44	1.444	1.442
0.39	1.442	1.44	1.439	1.436	1.436	1.435	1.434	1.432	1.431	1.43
0.4	1.429	1.427	1.426	1.425	1.425	1.422	1.421	1.42	1.418	1.417
0.41	1.416	1.415	1.414	1.412	1.412	1.41	1.409	1.408	1.406	1.405
0.42	1.404	1.403	1.102	1.4	1.4	1.398	1.397	1.396	1.395	1.354
0.43	1.392	1.359	1.39	1.385	1.385	1.387	1.386	1.385	1.384	1.362
0.44	1.381	1.38	1.379	1.378	1.378	1.374	1.375	1.374	1.373	1.372
0.45	1.371	1.37	1.369	1.368	1.368	1.366	1.365	1.364	1.363	1.362
0.46	1.36	1.36	1.359	1.358	1.358	1.356	1.355	1.354	1.353	1.352
0.47	1.351	1.25	1.349	1.348	1.348	1.346	1.345	1.344	1.343	1.342
0.48	1.341	1.34	1.339	1.338	1.338	1.336	1.336	1.335	1.334	1.332
0.49	1.332	1.331	1.33	1.325	1.325	1.327	1.327	1.326	1.325	1.324
0.5	1.323	1.322	1.321	1.32	1.32	1.315	1.318	1.217	1.31	1.315
0.51	1.314	1.314	1.313	1.311	1.211	1.31	1.309	1.309	1.308	1.307
0.52	1.06	1.305	1.304	1.303	1.303	1.302	1.301	1.3	1.3	1.299
0.53	1.298	1.297	1.296	1.295	1.295	1.254	1.293	1.292	1.292	1.291
0.54	1.29	1.289	1.289	1.287	1.287	1.286	1.285	1.285	1.284	1.282
0.55	1.282	1.282	1.281	1.279	1.279	1.279	1.278	1.277	1.27	1.27
0.56	1.275	1.274	1.27	1.272	1.272	1.271	1.231	1.27	1.269	1.268
0.57	1.268	1.267	1.266	1.265	1.265	1.264	1.263	1.263	1.262	1.261
0.58	1.261	1.26	1.259	1.258	1.256	1.257	1.256	1.256	1.255	1.254
0.59	1.254	1.253	1.252	1.251	1.251	1.25	1.25	1.249	1.248	1.248
0.6	1.2247	1.246	1.246	1.245	1.244	1.243	1.243	1.242	1.242	1.241

**Tabla 7. Factor de corrección  $K$  para la prueba de Watson y Williams (continuación)**

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.61	1.24	1.24	1.239	1.238	1.238	1.237	1.236	1.236	1.235	1.235
0.62	1.234	1.233	1.233	1.272	1.221	1.231	1.23	1.229	1.229	1.228
0.63	1.228	1.227	1.226	1.226	1.225	1.224	1.224	1.223	1.223	1.222
0.64	1.221	1.221	1.22	1.215	1.219	1.218	1.218	1.217	1.216	1.216
0.65	1.215	1.215	1.214	1.212	1.212	1.212	1.212	1.211	1.21	1.21
0.66	1.209	1.209	1.208	1.207	1.207	1.206	1.206	1.205	1.204	1.204
0.67	1.203	1.203	1.202	1.201	1.201	1.2	1.2	1.155	1.198	1.198
0.68	1.197	1.197	1.196	1.196	1.195	1.194	1.194	1.53	1.193	1.192
0.69	1.92	1.191	1.19	1.19	1.185	1.189	1.188	1.187	1.187	1.186
0.7	1.86	1.185	1.185	1.184	1.184	1.182	1.182	1.182	1.181	1.181
0.71	1.18	1.18	1.179	1.178	1.178	1.177	1.77	1.176	1.176	1.175
0.72	1.174	1.174	1.173	1.172	1.172	1.172	1.171	1.171	1.17	1.165
0.73	1.169	1.168	1.168	1.167	1.167	1.166	1.166	1.165	1.164	1.164
0.74	1.163	1.163	1.162	1.162	1.161	1.161	1.16	1.155	1.159	1.158
0.75	1.156	1.157	1.157	1.156	1.156	1.55	1.55	1.154	1.153	1.152
0.76	1.152	1.152	1.151	1.151	1.15	1.15	1.149	1.148	1.148	1.147
0.77	1.547	1.146	1.146	1.145	1.145	1.144	1.143	1.143	1.142	1.142
0.78	1.141	1.141	1.14	1.14	1.139	1.138	1.138	1.137	1.137	1.136
0.79	1.136	1.135	1.135	1.134	1.124	1.133	1.132	1.132	1.131	1.131
0.8	1.13	1.13	1.129	1.128	1.128	1.127	1.127	1.126	1.126	1.125
0.81	1.125	1.124	1.123	1.122	1.122	1.122	1.121	1.121	1.12	1.115
0.82	1.119	1.118	1.118	1.117	1.117	1.116	1.115	1.115	1.114	1.114
0.83	1.113	1.113	1.112	1.111	1.111	1.11	1.11	1.105	1.109	1.106
0.84	1.107	1.107	1.106	1.106	1.105	1.104	1.104	1.103	1.03	1.102
0.85	1.101	1.101	1.1	1.1	1.099	1.098	1.098	1.097	1.097	1.096
0.86	1.095	1.095	1.094	1.094	1.093	1.092	1.092	1.091	1.091	1.09
0.87	1.089	1.089	1.088	1.087	1.087	1.086	1.086	1.085	1.084	1.084
0.88	1.083	1.082	1.082	1.081	1.081	1.08	1.079	1.075	1.078	1.077
0.89	1.077	1.076	1.075	1.075	1.074	1.074	1.073	1.072	1.072	1.071
0.9	1.07	1.07	1.069	1.066	1.068	1.067	1.066	1.066	1.065	1.064
0.91	1.064	1.063	1.062	1.062	1.061	1.06	1.06	1.055	1.058	1.058
0.92	1.057	1.056	1.056	1.055	1.054	1.053	1.052	1.052	1.051	1.051
0.93	1.05	1.049	1.049	1.048	1.047	1.047	1.046	1.045	1.044	1.044

**Tabla 7. Factor de corrección  $K$  para la prueba de Watson y Williams (continuación)**

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.94	1.043	1.042	1.042	1.041	1.04	1.04	1.037	1.036	1.037	1.037
0.95	1.036	1.035	1.035	1.034	1.023	1.032	1.032	1.031	1.03	1.03
0.96	1.029	1.028	1.027	1.027	1.026	1.025	1.025	1.024	1.023	1.022
0.97	1.022	1.021	1.02	1.02	1.019	1.018	1.017	1.017	1.0116	1.015
0.98	1.014	1.01	1.013	1.012	1.011	1.011	1.01	1.005	1.008	1.008
0.99	1.007	1	1.006	1.005	1.004	1.003	1.003	1.002	1	1

**Tabla 8. Valores críticos de la distribución  $F_{g/1}$**

$\alpha(2)$	<b>0.5</b>	<b>0.2</b>	<b>0.1</b>	<b>0.05</b>	<b>0.02</b>	<b>0.005</b>	<b>0.001</b>
$\alpha(1)$	<b>0.25</b>	<b>0.1</b>	<b>0.05</b>	<b>0.025</b>	<b>0.01</b>	<b>0.0025</b>	<b>0.0005</b>
$g/1$	5.83	39.9	161	648	4050	64800	1620000
2	2.57	8.53	18.5	38.5	98.5	399	2000
3	2.02	5.54	10.1	17.4	34.1	89.6	267
4	1.81	4.54	7.71	12.2	21.2	45.7	106
5	1.59	4.06	6.61	10	16.3	31.4	63.6
6	1.62	3.78	5.99	8.81	13.7	24.8	46.1
7	1.57	3.59	5.59	8.07	12.2	21.1	37
8	1.54	3.46	5.52	7.57	11.3	18.8	31.6
9	1.51	3.36	5.12	7.21	10.6	17.2	28
10	1.48	3.29	4.96	6.94	10	16	25.5
11	1.47	3.23	4.84	6.72	9.65	15.2	23.7
12	1.46	3.18	4.75	6.55	9.35	14.5	22.2
13	1.45	3.14	4.67	6.41	9.07	13.9	21.2
14	1.44	3.1	4.6	6.3	8.86	13.5	20.2
15	1.43	3.07	4.54	6.2	8.68	13.1	19.5
16	1.42	3.05	4.49	6.12	8.53	12.8	18.9
17	1.42	3.03	4.45	6.04	8.4	12.6	18.4
18	1.41	3.01	4.41	5.98	8.29	12.3	17.9
19	1.41	2.99	4.38	5.92	8.18	12.1	17.5
20	1.4	2.97	4.35	5.87	8.1	11.9	17.2
21	1.4	2.96	4.32	5.83	8.02	11.8	16.9
22	1.4	2.95	4.3	5.79	7.95	11.6	16.6
23	1.39	2.94	4.28	5.75	7.88	11.5	16.4
24	1.39	2.93	4.26	5.62	7.82	11.4	16.2
25	1.39	2.92	4.24	5.69	7.37	11.3	16
26	1.38	2.91	4.23	5.66	7.62	11.2	15.8
27	1.38	2.9	4.21	5.63	7.68	11.1	15.6
28	1.38	2.89	4.2	5.61	7.64	11	15.5
29	1.38	2.89	4.18	5.59	7.6	11	25.3
30	1.38	2.88	4.17	5.57	7.56	10.9	15.2
35	1.37	2.85	4.12	5.48	7.42	10.6	14.7
40	1.36	2.84	4.08	5.42	7.31	10.4	14.4
45	1.36	2.82	4.06	5.38	7.23	10.3	14.1
50	1.35	2.81	4.03	5.34	7.17	10.1	13.9
60	1.35	2.79	4	5.29	7.08	9.96	13.5
70	1.35	2.78	3.98	5.25	7.01	9.84	13.3
80	1.34	2.77	3.96	5.22	6.96	9.75	13.2
90	1.34	2.76	3.95	5.2	6.93	9.68	13
100	1.34	2.76	3.94	5.18	6.9	9.62	12.9
120	1.34	2.75	3.92	5.15	6.85	9.54	12.8
140	1.33	2.74	3.91	5.13	6.82	9.48	12.7
150	1.33	2.74	3.9	5.12	6.8	9.44	12.6
180	1.33	2.73	3.89	5.11	6.78	9.4	12.6
200	1.33	2.73	3.89	5.1	6.76	9.38	12.5

300	1.33	2.72	3.87	5.07	6.72	9.3	12.4
500	1.33	2.72	3.86	5.05	6.69	9.23	12.3
$\infty$	1.32	2.71	3.84	5.02	6.64	9.14	12.1

**Tabla 8.1. Valores críticos de la distribución  $F$   $gl=2$**

$\alpha(2)$	<b>0.5</b>	<b>0.2</b>	<b>0.1</b>	<b>0.05</b>	<b>0.02</b>	<b>0.005</b>	<b>0.001</b>
$\alpha(1)$	<b>0.25</b>	<b>0.1</b>	<b>0.05</b>	<b>0.025</b>	<b>0.01</b>	<b>0.0025</b>	<b>0.0005</b>
<i>gl</i> 1	7.5	49.5	200	800	5000	80000	2000000
2	3.0	9	19	39	99	399	2000
3	2.28	5.46	9.55	16	30.8	79.9	237
4	2	4.32	6.94	10.6	18	38	87.4
5	1.85	3.78	5.79	8.43	13.3	25	49.8
6	1.76	3.46	5.14	7.26	10.9	19.1	34.8
7	1.7	3.26	4.74	6.54	9.55	15.9	27.2
8	1.66	3.11	4.46	6.06	8.65	13.9	22.7
9	1.62	3.01	4.26	5.71	8.02	12.5	19.9
10	1.6	2.92	4.1	5.46	7.56	11.6	17.9
11	1.58	2.86	3.98	5.26	7.21	10.8	16.4
12	1.56	2.81	3.89	5.1	6.93	10.3	15.3
13	1.55	2.76	3.81	4.97	6.7	9.84	14.4
14	1.53	2.73	3.74	4.86	6.51	9.47	13.7
15	1.52	2.7	3.68	4.77	6.36	9.17	13.2
16	1.51	2.67	3.63	4.69	6.23	8.92	12.7
17	1.51	2.64	3.59	4.62	6.11	8.7	12.3
18	1.5	2.62	3.55	4.56	6.01	8.51	11.9
19	1.49	2.61	3.52	4.51	5.93	8.35	11.6
20	1.49	2.59	3.49	4.46	5.85	8.21	11.4
21	1.48	2.57	3.47	4.42	5.78	8.08	11.2
22	1.48	2.76	3.44	4.38	5.72	7.96	11
23	1.47	2.55	3.42	4.35	5.66	7.86	10.8
24	1.47	2.54	3.4	4.32	5.61	7.77	10.6
25	1.47	2.53	3.39	4.29	5.57	7.69	10.5
26	1.46	2.52	3.37	4.27	5.53	7.61	10.3
27	1.46	2.51	3.35	4.24	5.49	7.54	10.2
28	1.46	2.5	3.34	4.22	5.45	7.48	10.1
29	1.45	2.5	3.33	4.2	5.42	7.42	9.99
30	1.45	2.49	3.32	4.18	5.39	7.36	9.9
35	1.44	2.46	3.27	4.11	5.27	7.14	9.52
40	1.44	2.44	3.23	4.05	5.18	6.99	9.25
45	1.43	2.42	3.2	4.01	5.11	6.86	9.04
50	1.43	2.41	3.18	3.97	5.06	6.77	8.88
60	1.42	2.39	3.15	3.93	4.98	6.63	8.65
70	1.41	2.38	3.13	3.89	4.92	6.53	8.49
80	1.41	2.37	3.11	3.86	4.88	6.46	8.37
90	1.41	2.36	3.1	3.84	4.85	6.41	8.28
100	1.41	2.36	3.09	3.83	4.82	6.37	8.21
120	1.4	2.35	3.07	3.8	4.79	6.3	8.1
140	1.4	2.34	3.06	3.79	4.76	6.26	8.03
160	1.4	2.34	3.05	3.78	4.74	6.22	7.97
180	1.4	2.33	3.05	3.77	4.73	6.2	7.93
200	1.4	2.33	3.04	3.76	4.71	6.17	7.9
300	1.39	2.32	3.03	3.73	4.68	6.11	7.8

500	1.39	2.31	3.01	3.72	4.65	6.06	7.72
$\infty$	1.39	2.3	3	3.69	4.61	5.99	7.7

Tabla 9. Valores críticos de $U^2$ de Watson						
$n_1$	$n_2$	$\alpha=0.5$	0.1	0.05	0.01	0.005
4	4	0.117	----	----	----	----
4	5	0.081	0.203	----	----	----
4	6	0.087	0.216	0.216	----	----
4	7	0.084	0.168	0.227	----	----
4	8	0.09	0.163	0.236	----	----
4	9	0.085	1.175	0.243	----	----
4	10	0.08	0.157	0.201	----	----
4	11	0.082	0.155	0.194	----	----
4	12	0.078	0.156	0.203	0.2	----
4	13	0.079	0.157	0.185	0.264	----
4	14	0.078	0.153	0.193	0.268	----
4	15	0.078	0.156	0.18	0.271	0.271
4	16	0.078	0.153	0.183	0.275	0.275
4	17	0.077	0.153	0.183	0.277	0.277
4	18	0.076	0.149	0.181	0.248	0.28
4	19	0.075	0.153	0.179	0.251	0.282
4	20	0.076	0.153	0.184	0.245	0.284
4	21	0.075	0.151	0.181	0.248	0.286
4	22	0.075	0.15	0.182	0.251	0.288
4	23	0.075	0.15	0.181	0.239	0.263
4	24	0.075	0.149	0.179	0.241	0.266
4	25	0.075	0.149	0.181	0.244	0.26
4	26	0.075	0.148	0.181	0.239	0.262
4	27	0.075	0.15	0.178	0.236	0.264
4	28	0.074	0.149	0.177	0.238	0.266
4	29	0.074	0.149	0.179	0.236	0.255
4	30	0.074	0.149	0.179	0.239	0.257
5	5	0.089	0.225	0.225	----	----
5	6	0.084	0.181	0.242	----	----
5	7	0.085	0.171	0.199	----	----
5	8	0.084	0.165	0.215	----	----
5	9	0.079	0.159	0.19	0.279	----
5	10	0.083	0.16	0.195	0.288	0.288
5	11	0.081	0.156	0.19	0.296	0.296
5	12	0.078	0.154	0.186	0.26	0.303
5	13	0.077	0.156	0.183	0.269	0.31
5	14	0.078	0.153	0.182	0.257	0.276
5	15	0.078	0.151	0.183	0.251	0.283
5	16	0.076	0.155	0.182	0.255	0.289
5	17	0.076	0.152	0.182	0.247	0.278
5	18	0.076	0.153	0.179	0.246	0.271
5	19	0.075	0.151	0.182	0.252	0.274
5	20	0.076	0.152	0.182	0.241	0.276
5	21	0.075	0.151	0.181	0.244	0.271
5	22	0.075	0.152	0.182	0.242	0.268
5	23	0.075	0.151	0.181	0.245	0.273

**Tabla 9. Valores críticos de  $U^2$  de Watson (continuación)**

$n_1$	$n_2$	$\alpha=0.5$	0.1	0.05	0.01	0.005
5	25	0.075	0.151	0.181	0.246	0.267
5	26	0.074	0.151	0.18	0.244	0.267
5	27	0.074	0.15	0.18	0.244	0.267
5	28	0.074	0.151	0.18	0.241	0.269
5	29	0.074	0.151	0.18	0.244	0.266
5	30	0.074	0.151	0.18	0.241	0.267
6	6	0.088	0.171	0.206	----	----
6	7	0.08	0.153	0.194	0.282	----
6	8	0.083	0.16	0.196	0.297	0.297
6	9	0.081	0.155	0.192	0.261	0.311
6	10	0.077	0.156	0.189	0.247	0.322
6	11	0.078	0.156	0.187	0.262	0.288
6	12	0.08	0.155	0.182	0.259	0.274
6	13	0.076	0.153	0.184	0.249	0.278
6	14	0.076	0.153	0.188	0.25	0.282
6	15	0.076	0.152	0.185	0.248	0.273
6	16	0.075	0.153	0.182	0.25	0.278
6	17	0.075	0.152	0.183	0.247	0.274
6	18	0.076	0.153	0.184	0.246	0.273
6	19	0.075	0.152	0.183	0.249	0.274
6	20	0.074	0.152	0.182	0.249	0.273
6	21	0.075	0.152	0.183	0.247	0.273
6	22	0.074	0.151	0.182	0.247	0.275
6	23	0.074	0.151	0.182	0.246	0.272
6	24	0.074	0.151	0.182	0.248	0.271
6	25	0.074	0.151	0.181	0.247	0.273
6	26	0.073	0.151	0.181	0.246	0.271
6	27	0.074	0.151	0.182	0.246	0.273
6	28	0.073	0.15	0.182	0.246	0.273
6	29	0.073	0.151	0.181	0.247	0.271
6	30	0.073	0.16	0.182	0.247	0.272
7	7	0.079	0.157	0.198	0.303	0.303
7	8	0.079	0.155	0.181	0.272	0.322
7	9	0.078	0.156	0.181	0.255	0.29
7	10	0.077	0.154	0.186	0.262	0.277
7	11	0.077	0.155	0.183	0.253	0.28
7	12	0.076	0.154	0.185	0.251	0.275
7	13	0.076	0.154	0.184	0.252	0.277
7	14	0.076	0.156	0.184	0.253	0.274
7	15	0.075	0.152	0.184	0.25	0.78
7	16	0.075	0.153	0.184	0.25	0.277
7	17	0.074	0.152	0.182	0.25	0.75
7	18	0.074	0.152	0.184	0.25	0.276
7	20	0.074	0.152	0.183	0.249	0.278
7	21	0.075	0.153	0.184	0.249	0.278
7	22	0.074	0.151	0.183	0.251	0.276

Tabla 9. Valores críticos de $U^2$ de Watson						
$n_1$	$n_2$	$\alpha=0.5$	0.1	0.05	0.01	0.005
7	23	0.073	0.152	0.183	0.249	0.278
8	8	0.078	0.156	0.183	0.25	0.295
8	9	0.078	0.155	0.186	0.258	0.282
8	10	0.077	0.154	0.185	0.249	0.279
8	11	0.076	0.154	0.184	0.252	0.279
8	12	0.076	0.155	0.185	0.252	0.28
8	13	0.075	0.153	0.185	0.253	0.277
8	14	0.075	0.153	0.185	0.251	0.279
8	15	0.074	0.153	0.185	0.25	0.278
8	16	0.076	0.154	0.185	0.253	0.279
8	17	0.074	0.152	0.184	0.252	0.278
8	18	0.074	0.152	0.184	0.251	0.281
8	19	0.074	0.152	0.183	0.252	0.279
8	20	0.074	0.152	0.183	0.252	0.279
9	9	0.077	0.155	0.186	0.266	0.285
9	10	0.076	0.154	0.186	0.253	0.286
9	11	0.076	0.154	0.184	0.255	0.281
9	12	0.076	0.154	0.185	0.254	0.28
9	13	0.075	0.153	0.185	0.252	0.279
9	14	0.075	0.153	0.184	0.252	0.28
9	15	0.075	0.153	0.185	0.254	0.283
9	16	0.074	0.153	0.185	0.253	0.282
10	10	0.075	0.154	0.185	0.254	0.282
10	11	0.075	0.154	0.185	0.254	0.279
10	12	0.075	0.153	0.184	0.254	0.281
10	13	0.074	0.153	0.185	0.254	0.281
10	14	0.074	0.153	0.184	0.255	0.282
10	15	0.074	0.153	0.185	0.254	0.283
11	11	0.076	0.154	0.185	0.254	0.282
11	12	0.075	0.153	0.185	0.254	0.283
11	13	0.074	0.153	0.185	0.254	0.283
12	12	0.075	0.152	0.186	0.255	0.284
14	14	0.07	0.151	0.183	0.256	0.289
16	16	0.07	0.151	0.184	0.259	0.291
18	18	0.07	0.151	0.184	0.26	0.292
20	20	0.069	0.151	0.185	0.261	0.293
25	25	0.069	0.152	0.185	0.262	0.295
30	30	0.069	0.152	0.186	0.263	0.296
35	35	0.069	0.152	0.186	0.264	0.297
40	40	0.069	0.152	0.186	0.264	0.298
50	50	0.069	0.152	0.187	0.265	0.299
60	60	0.069	0.152	0.187	0.266	0.299
80	80	0.069	0.152	0.187	0.266	0.3
100	100	0.069	0.152	0.187	0.267	0.3
$\infty$	$\infty$	0.0171	0.151	0.186	0.2683	0.303

**Estadística circular: Herramienta para analizar  
datos angulares en Biología**

1ª. Edición

Se imprimió en el Laboratorio de Aplicaciones  
Computacionales de la FES Zaragoza

Con un tiraje de 50 ejemplares y su edición en formato electrónico  
para difundirlo en el sitio electrónico:

[enlinea.zaragoza.unam.mx/biomat](http://enlinea.zaragoza.unam.mx/biomat)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA





Con el enfoque de un curso, se revisan los aspectos teóricos y prácticos de la Estadística Circular, empezando con las medidas de tendencia central (medias, medianas y modas); medidas de dispersión (varianza y desviación estándar).

En otros capítulos se revisan las técnicas inferenciales paramétricas y no paramétricas para una muestra y para dos muestras.

Se consideran los aspectos teóricos de cada técnica y luego se desarrollan ejemplos numéricos, resaltando las estrategias de cálculo. Cabe aclarar que ya existe software de análisis estadístico circular el cual realiza mucho del trabajo numérico, pero aún sigue siendo importante que el usuario (estudiante, profesor o investigador) defina de antemano el formato para digitalizar sus datos, la o las técnicas estadísticas a aplicar, pero sobre todo la interpretación que se le debe dar a los resultados obtenidos.

Sirva este manual como una invitación a revisar materiales más formales, desde el punto de vista teórico. Y adentrarse en esta fascinante rama de la Estadística