Estrategias de intervención-rehabilitación en las dificultades con el APRENDIZAJE de las MATEMÁTICAS

Compiladores
Eduardo Alejandro Escotto Córdova
José Gabriel Sánchez Ruiz

Proyecto PAPIME
PE302111

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza

Datos para catalogación bibliográfica

Compiladores: Escotto Córdova, Eduardo Alejandro y Sánchez Ruiz José Gabriel.

Estrategias de intervención-rehabilitación en las dificultades con el aprendizaje de las matemáticas.

UNAM, FES Zaragoza, marzo de 2014.
Formato: PDF. Peso: 1,774 KB.
Diseño y formación de interiores: Claudia Ahumada Ballesteros
1. La propuesta de Galperin y la neuropsicología histórico-cultural en el abordaje del cálculo.
2. Factores psicológicos como las emociones, motivaciones y pensamiento lógico en el aprendizaje de las matemáticas.

ISBN: 978-607-02-5334-8

Estrategias de intervención-rehabilitación en las dificultades con el aprendizaje de las matemáticas.

D.R. © Universidad Nacional Autónoma de México
Av. Universidad # 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México, C.U., Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, D.F.

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza
Av. Guelatao # 66, Col. Ejército de Oriente, Delegación Iztapalapa, C.P. 09230, México, D.F.

PRESENTACIÓN

La aplicación de las matemáticas está en todos los productos culturales de la vida moderna, y es un componente inseparable de la actividad científica. Su utilidad es incuestionable y la necesidad de su enseñanza es una prioridad en las políticas educativas (Programa de Estudios 2011, Secretaría de Educación Pública, México). Sin embargo, el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la vida escolarizada en todos los niveles educativos, desde el pre-escolar hasta los posgrados, se enfrenta a dificultades de todo tipo: pedagógicas, psicológicas (de aprendizaje, motivacionales, afectivas, de razonamiento lógico, etc.), neuropsicológicas y hasta administrativas.

Los factores psicopedagógicos que influyen en el aprendizaje de las matemáticas son múltiples y su ubicación y afrontamiento es un paso necesario para llevar a planos superiores la enseñanza de las matemáticas. Las estrategias institucionales de enseñanza, los métodos pedagógicos de los profesores, los materiales de apoyo, las tecnologías, y la aplicación práctica de los avances y descubrimientos en la psicología son algunos de los elementos implicados en el proceso de enseñanza de las matemáticas.

La investigación psicológica ha encontrado que en el dominio mental y abstracto del lenguaje de las matemáticas, y las operaciones algorítmicas que con él se realizan, existe un proceso que recorre etapas de aprendizaje, además está presente tanto una estructura psicológica que subyace al proceso de aprendizaje matemático, como un sistema funcional complejo de orden neuropsicológico, es decir, conjunto de zonas cerebrales implicadas en su realización. Lo anterior significa que se puede mejorar sustancialmente la enseñanza de esta disciplina si se toman en cuenta las etapas del proceso de aprendizaje, la estructura psicológica, y los fundamentos neuropsicológicos del cálculo. Es un proceso de aprendizaje que se facilita si pedagógicamente se adecua la enseñanza a las etapas del proceso de dominio mental de los cálculos, operaciones y solución de problemas matemáticos. Sin embargo no es un proceso meramente abstracto o pedagógico. Factores motivaciones, emocionales, actitudinales están presentes en el acercamiento de los estudiantes al dominio de las matemáticas. Una mala estrategia pedagógica suele generar fracasos escolares en el dominio matemático, y esto a su vez, crea disposiciones motivacionales y emocionales ante el aprendizaje de la disciplina. Romper este círculo vicioso pasa por reformular la estrategia psicopedagógica en la enseñanza de las matemáticas. Esta estrategia puede utilizar los avances tecnológicos modernos, particularmente las computadoras y los programas especiales para el dominio matemático, sin embargo, por sí solo estos recursos no son suficientes para el aprendizaje.

Este texto trata de los aspectos antes mencionados. En el capítulo 1 se aborda una formulación teórica surgida en la psicología histórico-cultural del proceso del aprendizaje. Se trata de la formación de las imágenes mentales y sus etapas correspondientes. El capítulo vincula el conocimiento de estas etapas y su aplicación pedagógica a la enseñanza de las matemáticas.

El capítulo 2 aborda el papel de los factores emocionales y motivacionales en el aprendizaje de las matemáticas. Expone algunas de las investigaciones psicopedagógicas que han ponderado la importancia que tiene la reacción emocional ante el aprendizaje de las matemáticas, particularmente la ansiedad.

El capítulo 3 trata el alcance de la tecnología computacional en la enseñanza de las matemáticas. Expone un conjunto de investigaciones que han surgido para evaluar los proyectos de uso masivo de las computadoras en escuelas mexicanas con el fin de promover el aprendizaje de las matemáticas. El alcance de este recurso tecnológico se desmitifica y nos abre caminos para reconsiderar los métodos psicopedagógicos.

El capítulo 4 expone una propuesta socio-histórica sobre la estructura psicológica que subyace a la solución de los problemas matemáticos y atiende a los procesos psicológicos implicados en el cálculo. Analiza el acto del pensamiento y su importancia para el proceso de enseñanza. Expone el papel de la necesidad, de los motivos y de la formulación de objetivos que subyacen a todo proceso intelectual.

El capítulo 5 explica, desde la neuropsicología histórico—cultural, las estrategias neuropsicológicas para enfrentar los problemas del cálculo.. En este texto, la aplicación del método de la formación de imágenes mentales de Galperin tiene una utilidad práctica en la neuropsicología.

En el capítulo 6 presenta una propuesta para fomentar el desarrollo del pensamiento numérico en alumnos del primero al tercer año de educación básica. Se trata de un trabajo en el que se describe, entre otros componentes, una serie de actividades didácticas y acciones que debe realizar el facilitador de este tipo de conocimientos.

Aspiramos a que este texto sea útil para plantear nuevos recursos psicopedagógicos a ser tomados en cuenta en la enseñanza de las matemáticas.

ÍNDICE DE AUTORES POR ORDEN ALFABÉTICO

- **Dra. Ana Ma. Baltazar-Ramos**

  Carrera de Psicología de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza-Universidad Nacional Autónoma de México.

  Av. Guelatao 66, Col. Ejército de Oriente, Iztapalapa, 09239, México, D.F.

  E-mail: aniuxbaltazar@hotmail.com

- **Mtra. Julieta Becerra-Castellanos**

  Carrera de Psicología de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza-Universidad Nacional Autónoma de México.

  Av. Guelatao 66, Col. Ejército de Oriente, Iztapalapa, 09239, México, D.F.

  E-mail: juveka_mx@yahoo.com.mx

- **Dr. Álvaro V. Buenrostro Avilés**

  Carrera de Psicología de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza-Universidad Nacional Autónoma de México.

  Av. Guelatao 66, Col. Ejército de Oriente, Iztapalapa, 09239, México, D.F.

  E-mail: alvaroba@unam.mx

- **Dr. Eduardo Alejandro Escotto-Córdova**

  Carrera de Psicología de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza-Universidad Nacional Autónoma de México.

  Av. Guelatao 66, Col. Ejército de Oriente, Iztapalapa, 09239, México, D.F.

  E-mail: aescotto@unam.mx

- **Mtra. Emelia Lázaro García**

  Maestría en Diagnóstico y Rehabilitación Neuropsicológica.

  Facultad de Psicología, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), México.

  3 Oriente 403, Centro Histórico, Puebla, Pue., 72000

  E-mail: emelia.lazaro@correo.buap.mx

- **Mtro. Humberto Rosell-Becerril**

  Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Carrera de Psicología, Maestría de Neuropsicología.

  Av. Guelatao 66, Col. Ejército de Oriente, Iztapalapa, 09239, México, D.F.

  E-mail: resideneuropsicologiaclinica@gmail.com

- **Dr. José Gabriel Sánchez-Ruiz**

  Carrera de Psicología de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza-Universidad Nacional Autónoma de México.

  Av. Guelatao 66, Col. Ejército de Oriente, Iztapalapa, 09239, México, D.F.

  E-mail: josegsr@unam.mx

- **Dra. Yulia Solovieva**

  Maestría en Diagnóstico y Rehabilitación Neuropsicológica. Facultad de Psicología, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), México.

  3 Oriente 403, Centro Histórico, Puebla, Pue., 72000

  E-mail: yulia.solovieva@correo.buap.mx

- **Dr. Luis Quintanar Rojas**

  Maestría en Diagnóstico y Rehabilitación Neuropsicológica, Facultad de Psicología, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), México.

  3 Oriente 403, Centro Histórico, Puebla, Pue., 72000

  E-mail: luis.quintanar@correo.buap.mx

ÍNDICE TEMÁTICO

CAPÍTULO 1 1

El método de Galperin de la formación de las imágenes mentales y su importancia para la enseñanza de las matemáticas

Eduardo Alejandro Escotto Córdova, José Gabriel Sánchez Ruíz, Ana María Baltazar Ramos

CAPÍTULO 2 19

Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: el papel de los factores emocionales y la ansiedad

José Gabriel Sánchez Ruiz, Eduardo Alejandro Escotto Córdova, Julieta Becerra Castellanos

CAPÍTULO 3 49

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: la inserción de la tecnología computacional

José Gabriel Sánchez Ruiz

CAPÍTULO 4 61

Estructura psicológica de la solución de problemas aritméticos

Humberto Rosell-Becerril

CAPÍTULO 5 73

Propuestas y posibilidades de preparación para la adquisición de matemáticas

Yulia Solovieva, Emelia Lázaro García, Luis Quintanar Rojas

CAPÍTULO 6 105

Una aproximación para fomentar el pensamiento numérico en niños de los tres primeros grados de la escuela primaria

Álvaro V. Buenrostro Avilés

CAPÍTULO 1

EL MÉTODO DE GALPERIN DE LA FORMACIÓN DE LAS IMÁGENES MENTALES Y SU IMPORTANCIA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Eduardo Alejandro Escotto Córdova
José Gabriel Sánchez Ruíz
Ana María Baltazar Ramos

Introducción

Las matemáticas es una de las disciplinas fundamentales para el desarrollo de la sociedad moderna. Todas las ciencias y las derivaciones tecnológicas la utilizan y su alcance permea toda la vida escolarizada, sin embargo es la disciplina que presenta mayores dificultades para su aprendizaje. En el año 2013 en nuestro país, cerca del 63.7% de los estudiantes de Educación Media Superior tuvieron un desempeño insuficiente y elemental en matemáticas en la Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) (**http://www.enlace.sep.gob.mx/content/gr/docs/2013/ENLACE_Media_2013_nacionales_e_historicos.pdf**) Consultado el 11 de octubre del 2013). En el nivel de Educación Superior, en licenciatura de Psicología de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, los índices de reprobación de estadística de la primera generación del nuevo Plan de Estudios fueron como sigue: en estadística descriptiva, de un total de 548 alumnos reprobaron 108 (19.7%); y en estadística inferencial reprobaron 215 (39.3%), siendo la materia de más alta reprobación. La necesidad de investigar los factores que influyen en el bajo desempeño de las matemáticas y generar métodos de enseñanza que mejoren el dominio de esa disciplina nos ha llevado a la búsqueda de modelos psicopedagógicos más eficientes que nos permitan comprender y dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El desarrollo e implementación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es una de las actividades en la que confluyen psicólogos, pedagogos, matemáticos, maestros y educadoras. Una de las aproximaciones a esta problemática que se ha desarrollado en la psicología desde el siglo pasado, pero cuya difusión no ha sido suficiente, es la aproximación que sigue la tradición de Vigotski, Luria, Leontiev, Galperin y demás psicólogos soviéticos que no redujeron el psiquismo humano a sus meros fundamentos biológicos, sino que apreciaron e investigaron los factores histórico-culturales de su desarrollo, así como el papel del carácter semiótico de aquél. Dentro de esta tradición, destacan las investigaciones que el psicólogo Galperin desarrolló en torno a la formación de las imágenes mentales, las etapas por las que recorría y su uso en la implementación de diversos procedimientos didácticos para la enseñanza escolar, particularmente de las matemáticas. En este capítulo, exponemos las principales tesis en torno al aprendizaje de las imágenes mentales desarrolladas por ese psicólogo ruso y su importancia para desarrollar métodos psicopedagógicos que mejoren el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Las tesis de Galperin

Galperin P. Ya., psicólogo de la Universidad Estatal de Moscú a mediados del siglo XX, conceptualizó el aprendizaje como la formación de nuevos conocimientos y habilidades que se incorporan a los ya preexistentes (**Galperin, 1998/1965**). El proceso del aprendizaje no se concebía como mero conjunto de asociaciones estímulo-respuesta o solo un proceso de reforzamiento de respuestas emitidas bajo ciertas circunstancias. Si esto fuera así, la repetición mecánica de las tareas bastaría para acelerarlo. El aprendizaje humano implica la asimilación de conocimientos, representaciones de signos y significados, es decir, el aprendizaje humano está mediado semióticamente, por lo que los procesos que permiten la representación son fundamentales. Para Galperin el aprendizaje es un proceso que transcurre a partir de la formación de imágenes mentales, es decir, de la capacidad de realizar mentalmente una acción objetiva (**Galperin, 1998/1957**). El psicólogo ruso sostuvo que entre la imagen y la acción existe un fuerte vínculo, al grado de que la formación de cualquier acción conduce a la formación de una imagen de su objeto, y que toda imagen tiene las características de la propia acción. El sujeto actúa sobre los objetos del mundo formándose no sólo asociaciones de estímulos y respuestas, sino representaciones, imágenes mentales que coadyuvan en la formación de los conceptos. En su concepción, la formación de conceptos y conocimientos suponía la formación de imágenes mentales que orientan y guían la acción, esto no era un proceso súbito, sino que recorría etapas de ahí que, la

investigación de cómo se formaban éstas tendría un gran impacto en la educación. En sus investigaciones de la enseñanza escolar quedó claro que la formación de un nuevo concepto se realiza progresivamente, por lo que el descubrimiento de sus etapas implicó un avance en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Galperin se apoyó en las concepciones teóricas del psicólogo soviético L.S. Vigotski que concebía al psiquismo como un proceso mediado sígnicamente. Los signos funcionan como herramientas psicológicas con las que se potencia y reorganizan los procesos psicológicos, elevándolos a un plano superior. De esta concepción Vigotski desarrolló dos tesis centrales las cuales destacamos aquí por su importancia: la primera es la tesis de que las funciones psicológicas superiores son primeramente interpsíquicas (mediadas por otros) y después intrapsíquicas (generadas por el propio sujeto), es decir, que la conciencia, el lenguaje, la imaginación, el pensamiento, la voluntad etc., son primero reguladas socialmente, mediadas por otros, y después, en su desarrollo, se interiorizan y llegan a ser autorreguladas por el sujeto; son sociales en su origen antes de ser individuales en su desarrollo. A este proceso le llamó la ley genética general del desarrollo cultural y la definió como: “toda función en el desarrollo cultural del niño aparece en escena dos veces, en dos planos; primero en el plano social y después en el plano psicológico, al principio como categoría interpsíquica y luego, en el plano mental del niño como categoría intrapsíquicas” (**Vygotski, 1995/1931, p. 150**). Entre las implicaciones de esta ley genética estaba el hecho de que siendo sociales por su origen, las funciones psicológicas superiores podían desarrollarse más en la medida en que los otros orientaran la actividad del sujeto, fuera este un niño o una persona adulta, en ambos casos podía dirigirse y regularse el desarrollo ayudando al sujeto a la ejecución de sus procesos psicológicos en situaciones novedosas. Es decir, en situaciones novedosas se podía ayudar a cualquier persona a que conciencie, perciba, exprese verbalmente algo, piense o regule su voluntad hasta que él domine estos aspectos. Con esta concepción, la función del aprendizaje dejó de concebirse como un proceso meramente natural en donde la tarea de aprenderse algo estaría dependiendo del número de veces que se repetían las asociaciones de estímulo-respuesta implicadas en ello y pasó a concebirse como un proceso mediado histórica y culturalmente por la actividad social y semióticamente regulada. La implicación práctica de este cambio de modelo fue enorme, supuso la búsqueda y organización de la actividad pedagógica en la cual los procesos representacionales y sígnicos jugaban un papel fundamental en el proceso del aprendizaje, así mismo, repercutía directamente en la planeación de la actividad de los otros para la obtención de resultados más promisorios en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

La segunda tesis vigotskiana tiene que ver con el papel que juega la llamada *zona de desarrollo próxima* (ZDP) (**Vygotski, 1993/1934**). La ZDP es un concepto que habla del desarrollo psicológico y de los conocimientos; se refiere a la "distancia" que existe entre lo que un sujeto puede hacer por sí solo y lo que puede llegar a hacer con ayuda de otros. Esto es particularmente relevante en situaciones de enseñanza de contenidos nuevos, en las cuales un sujeto puede tener cierto dominio de los contenidos sin ayuda de otros, pero puede alcanzar mucho mayor dominio con su ayuda. Generalmente, la regulación verbal de la actividad (la explicación del qué, para qué y el cómo) y la modelación y ejemplificación de ello muestran el alcance de la ZDP, es decir, hasta dónde puede ir el aprendiz en el dominio de un contenido de aprendizaje con la orientación y modelamiento de otra persona. Esta zona de desarrollo puede ser mayor o menor en sujetos diferentes y detectarla es uno de los primeros pasos que uno debe hacer en el proceso educativo. Ubicada la ZDP, la formación de nuevas imágenes mentales requería el apoyo de los otros (adultos o compañeros) y en su elaboración de recorrían varias etapas.

Estas dos tesis ponen el énfasis en el papel fundamental que juega la influencia de otras personas en el desarrollo psicológico y conceptual. Galperin, basándose en estas dos tesis, va más allá al investigar cómo se forma la interiorización de

estas formas de regulación psicológica y al hacerlo descubre una serie de etapas que sistematiza en un modelo que se llamó "Formación de Imágenes Mentales".

Las etapas que concibió Galperin fueron:

1) La base orientadora de la acción;

2) La formación del aspecto material de la acción;

3) La formación del plano verbal-lingüístico;

4) La formación de la acción como acto mental o interiorizado.

La base orientadora de la acción *(*BOA*)* hace referencia al tipo de orientación conceptual que se le da a un sujeto (o genera el mismo sujeto) en torno al qué del nuevo aprendizaje; los objetivos, los alcances y los procedimientos que realizará. Se compone de tres formas a las cuales **Galperin (1998/1959)** llamó "tipos de orientación": el primer tipo ocurre cuando ni el sujeto puede formar una imagen orientadora, ni el orientador puede ayudarlo, lo que da por resultado una imagen incompleta; el segundo tipo ocurre cuando el orientador le da al sujeto una buena y completa orientación de la acción y el sujeto de aboca a ella; y el tercer tipo ocurre cuando el sujeto construye por sí mismo la base orientadora de la acción. La BOA significa que al sujeto se le explica que va a aprender, cual es el objetivo y bajo qué condiciones de aprendizaje estará. Dominada esta etapa en la formación de las imágenes mentales se pasa a la siguiente.

La etapa llamada formación del aspecto material de la acción (FAMA) hace referencia a que toda acción se expresa inicialmente en forma externa, material, y que esta forma es la condición de su asimilación. Esto significa que el aprendizaje en esta etapa pasa por operar directamente con las cosas o su representación material, por ejemplo si se está enseñando el sistema numérico, primero se muestran objetos, o en su defecto, la representación gráfica de ellos (dibujos) antes de pasar a su representación numérica. El aprendizaje de una nueva acción debe comenzar con la base orientadora de la acción e inmediatamente pasar a su etapa materializada. En esta etapa ocurren dos procesos, primero se generaliza al destacar los rasgos esenciales de la acción, y en la medida en que se domina la acción, se estereotipa, se automatiza; esto lleva al segundo componente que es su abreviación. La acción de realiza cada vez más rápida, estereotipada y abreviadamente. Cuando el sujeto ha asimilado y dominado esta etapa se pasa a la siguiente.

La etapa llamada formación de plano verbal-lingüístico (FPVL) significa que la acción se describe verbalmente, se dice oralmente lo que hay que hacer antes de hacerlo, liberándose así de la dependencia directa de los objetos (**Galperin, 1998/1959, p. 49**). La narrativa verbal de la acción sin ninguna ejecución material de ella lleva a tres cambios fundamentales: a) no sólo se describe detalladamente la acción, sino que se comunica a otros, subordinándose a la comprensión y el sentido que para los otros tenga la narración de la acción, concienciándose verbalmente. La acción se realiza en el plano verbal; b) a partir de ello, el concepto se constituye en la base de la acción, el concepto regula la acción; c) a partir del dominio de esta fase, la forma verbal tiende a abreviarse y estereotiparse convirtiéndose en lo que Galperin llamó “acción por fórmula”. Alcanzado este proceso de síntesis se pasa a la siguiente etapa.

La etapa llamada formación de la acción como acto mental (FAAM) es su interiorización, es decir, su expresión mediante el lenguaje interno. Aquí ya no se trata de comunicársela a otros, sino a sí mismo. En palabras de **Galperin (1998/1959, p. 50)**: “La tarea de comunicación es sustituida por la tarea de la reflexión y el ‘habla para sí’ se convierte en un medio no de transmisión del pensamiento al otro, sino en la transformación del mismo en un objeto para un mejor análisis”. La interiorización de la acción también tiende a abreviarse haciéndose más rápida

hasta su dominio completo. El mecanismo psicológico del concepto responde al “curso generalizado de esta acción generalizada, abreviada y trasladada al plano mental” (Ibíd. p.54).

Con base en estas etapas, la planificación del proceso de enseñanza de nuevos conceptos supone crear y organizar los materiales necesarios para llevar a cada alumno al dominio de todas y cada una de las etapas mencionadas: la orientación de la acción, la base materializada de la acción, el plano verbal oralizado y el plano del lenguaje interno. El criterio de cambio de una etapa a otra radica en el dominio que el sujeto tenga de la etapa previa, esto se manifiesta porque la acción se estereotipa, automatiza y abrevia.

La formación de nuevos conocimientos y conceptos de alumnos insertos en un proceso de enseñanza-aprendizaje puede ocurrir en forma desfasada para cada alumno participante, es decir, en algunos casos los alumnos pueden requerir aun el apoyo materializado (objetos o tarjetas con su representación), en otros casos los alumnos pueden estar en la etapa de la expresión oral, finalmente, otros alumnos ya dominarlo en el plano interno, es decir, mediante su lenguaje interno. Identificar estas etapas en la que se encuentra cada alumno es de gran ayuda para la planificación del proceso de enseñanza.

Desde un inicio Galperin y sus colaboradoras aplicaron las etapas de formación del concepto a temas de matemáticas y gramática. Uno de sus experimentos tuvo que ver con la enseñanza de la “perpendicular” (**Galperin, 1998/1957**). Primero explicaron a los alumnos el contenido del concepto, las condiciones de su realización y lo que se pretendía aprender (base orientadora de la acción). Después utilizaron tarjetas en donde dibujaron las condiciones de la perpendicular (etapa materializada de la acción). Después se le pedía al sujeto que aplicara el concepto y dijera oralmente las condiciones de su aplicación (etapa verbalizada de la acción), finalmente, en la medida en que en reiteradas aplicaciones de esta etapa los alumnos la realizaban rápido, abreviadamente y sin errores, se le pedía al sujeto que realizara mentalmente todo el proceso y dijera en voz alta sólo el resultado (etapa del lenguaje interno).

Galperin ponderó mucho el papel fundamental que tenía la etapa materializada de la acción para el proceso de asimilación de los conceptos, él decía que "la acción materializada constituye un contacto directo con la realidad" (*Ibíd.*, p. 37). La planeación de ésta (selección de objetos, materiales, tarjeas con representaciones gráficas) en la enseñanza de nuevos conceptos es de suma importancia. De igual importancia resultada la etapa de la verbalización oral de la actividad, ésta prepara el dominio mental, propiamente del lenguaje interno, de la acción. La realización de las cuatro etapas lleva finalmente a la generalización, abreviación y automatización del concepto, a grado tal que la rapidez con que llega a ocurrir su ejecución da la impresión de ser "percepción directa" del concepto (*Ibíd.,* p.39).

La psicología pedagógica

La teoría de Galperin fue la base del desarrollo de la llamada psicología pedagógica (**Talizina, 2000**) cuyo ámbito de aplicación es variado, pero destacamos su uso en la formación del pensamiento lógico y la enseñanza de matemáticas en niños escolarizados. Talizina desarrolló la teoría de Galperin de la formación de las acciones mentales incorporando nuevos elementos. Uno de ellos tuvo que ver con lo que llamó las características básicas de la acción y la forma de ella. Para **Talizina (2000, p. 117)** la forma básica de la acción puede ser material o bien materializada. Ambas poseen la forma material, pero mientras que la primera son los objetos en sí mismos, en la segunda, la materializada, son los modelos o representaciones de los objetos. La diferencia entre ambas es el nivel de abstracción en que se apoyan. Talizina reporta una investigación realizada por Salmina y Kolmogorova

en la enseñanza del sistema de numeración en niños escolares, y en la que se utilizaron diferencialmente la forma material y materializada de las acciones. En un caso utilizaron cubos materiales y en otros la representación de círculos, cruces y cuadrados. En ambos casos hubo la asimilación del concepto, por lo que parecía que no había diferencias entre ellas. Sin embargo, Talizina realizó otra investigación en la cual se enseñó geometría diferenciado también la acción material y la acción materializada. Los sujetos fueron 30 alumnos del quinto grado escolar divididos en tres grupos de 10 alumnos cada uno. En el primer grupo se utilizó la acción material con objetos reales (mesa, libro, etc.) y el modelo de las características se apoyaba en el objeto real (la línea recta se representaba por el filo de la pasta de un libro). En el segundo grupo los objetos y modos de acciones fueron modelos geométricos. Los alumnos comparaban el modelo y el objeto sobreponiendo el modelo al objeto. En el tercer grupo, como objetos de acciones y modelos se utilizaron dibujos geométricos. Los resultados mostraron que los tres grupos pudieron realizar la acción y asimilar los conceptos, no obstante el grupo que trabajo con objetos reales fue más exitoso que los demás, mientras que el grupo con dibujos geométricos mostró más errores, lo que implicaba que en este grupo había deficiencias en la conciencia de las diferencias de las características esenciales de los conceptos. En otras palabras, la etapa de acción manual física durante la enseñanza es un aspecto importante en los niños preescolares y escolares antes de pasar a las siguientes etapas en la formación de los conceptos, sin embargo, la investigación arrojó otro dato interesante. Cuando a todos los niños se les pusieron tareas de control (la representación de figuras geométricas en diferentes posiciones) los niños que trabajaron con objetos reales tuvieron peor desempeño. La explicación de Talizina fue que al trabajar solo con objetos reales y no también con modelos, los niños tuvieron poco acceso a la representación abstracta y no lograron separar las características de los objetos de manera independiente. Los niños identificaron las características pero no aprendieron a abstraerlas y separarlas en forma independiente. Esto significa que se deben combinar la acción material con objetos reales y la acción materializada con modelos de objetos reales para consolidar los procesos de abstracción. La forma materializada resulta más exitosa para descubrir las relaciones y conexiones básicas de los objetos, y después se pueden introducir los objetos reales para que los alumnos identifiquen y abstraigan los aspectos necesarios (**Talizina, 2000, p. 125**). Estos descubrimientos la llevaron a sostener que la etapa de la realización de acciones prácticas externas debe durar poco tiempo y se debe intentar pasar a la operación con el concepto (forma teórica) y con reglas lógicas sin la realización con objetos externos o, en caso de niños, la realización de operaciones matemáticas con las manos. Esto prepara la etapa de las acciones verbales externas, es decir, sin objetos o modelos, solo con descripciones verbales.

Otra observación de esta autora fue con respecto a la siguiente etapa en la formación de acciones mentales o conceptos; la forma verbal externa (oralizada) de la acción. La acción verbal debe expresar la acción material o materializada. Esto conduce a que los conocimientos se asimilen en su aspecto formal. Para ella, la formación de la acción verbal presupone la generalización de su forma material, los sujetos tienen que pronunciar las operaciones que realizan en la forma material hasta lograr establecer la habilidad de realizar la acción en la forma verbal. Las acciones son, en esta etapa, completamente desplegadas, es decir la descripción oral de la actividad. Cuando el alumno domina esta etapa se transita a la etapa del lenguaje interno para sí, en donde el alumno pronuncia todo el proceso de solución del problema en forma del lenguaje interno, es decir como soliloquio silencioso (**Talizina, 2000, p. 147**). Como lo hemos mencionado antes, el cambio de una etapa a otra depende del grado de automatización y reducción de la acción, lo cual se verifica por el incremento en la velocidad de ejecución de la tarea que se realiza (Ibíd., p. 167)

El aprendizaje de nuevos conocimientos y conceptos recorre las etapas mencionadas: motivación; base orientadora de la acción; acción materializada o material; la acción como expresión verbal oralizada; y la acción como expresión verbal mediante el lenguaje interno. En este proceso *la base orientadora de la acción* juega un papel importantísimo, incluye *las partes de la orientación, de ejecución, de control y corrección.*La parte orientadora de la acción se dirige fundamentalmente a dos aspectos: “a) la construcción correcta y racional de la ejecución y b) la elección de una de las ejecuciones posibles” (Op cit., p. 148).

Aplicaciones recientes del modelo de Galperin a la enseñanza matemática

Aplicaciones recientes del modelo de Galperin se han utilizado para la enseñanza de operaciones básicas algebráicas (**Rojas-Ortega, 2012**) y para el cálculo diferencial (**Ramos, del Valle & Ross, s/f**). Rojas utilizó en la primera fase (materializada de la acción) tres figuras o modelos geométricos, un cuadrado mayor, un cuadrado menor y un rectángulo realizados en seis modelos de plástico polímero de alta densidad de diferente color y medida, tres de ellos rugosos y tres lisos. Los modelos rugosos representaban lo positivo y los lisos lo negativo. Cada lado de un cuadrado rugoso representaba una x de tal forma que $x + x = x^2$ representando el área. En la fase del lenguaje externo, se utilizaba la descripción verbal de los modelos de plástico para expresar monomios y binomios por parte del profesor. En la tercera fase del lenguaje externo para sí, el alumno se hablaba “en voz baja a sí mismo” utilizando los modelos de plástico y las expresiones escritas de monomios y binomios. En la cuarta etapa “acción en forma de lenguaje interno”.

Por su parte, Ramos *et al.* se propusieron utilizar el modelo de Galperin para crear unas guías que propiciaran el estudio de forma significativa y autorregulada de los estudiantes, así como la autoevaluación de sus resultados en la materia de cálculo diferencial. La conducta estudiada fue el grado de reflexión y conciencia de la temática. El proceso de enseñanza se organizó en tres momentos, uno fue la presentación de los contenidos fundamentales por parte del docente; el segundo, práctica guiada donde el alumno explicitaba sus conocimientos; tercero, la práctica independiente y autónoma por parte del estudiante. Los resultados mostraron cambios significativos en la reflexión y conciencia de los temas estudiados, el 80% de los alumnos mostraron niveles alto y medio de reflexión.

Las etapas propuestas por Galperin y Talizina han tenido eco también en la neuropsicología, particularmente en las estrategias de rehabilitación (**Quintanar & Solovieva, 2001**). Así, por ejemplo, en la comprensión de la rehabilitación del lenguaje en la afasia sensorial (**Solovieva, Chávez, Pérez & Quintanar, 2001**) utilizan el análisis fonético materializado de las palabras como primera etapa. Su objetivo es la diferenciación consciente de los fonemas. También utilizan un círculo blanco que puede ser colocado en cada cuadrado al identificar un fonema. Utilizan esquemas materializados de las palabras representados por una serie de cuadrados, cada uno representando los fonemas correspondientes a las palabras que se practican. También usan objetos reales y tarjetas con la representación gráfica de los objetos, por ejemplo sol, gato, pájaro, etc. La base orientadora de la acción la da el experimentador al pronunciar la palabra (ejemplo, pato), pero le pide al sujeto que por cada fonema que escuche coloque el círculo blanco en el esquema de cuadrados. En este ejemplo se tiene la imagen de un pato, cuatro cuadrados uno para cada fonema de P-A-T-O, y cuatro círculos blancos que deben ser colocados en cada cuadrado cuando se escuche el fonema correspondiente. El experimentador dice cada fonema (no el nombre de la letra) y el paciente debe colocar los círculos blancos en los cuadrados correspondientes sin necesidad de pronunciar los fonemas. Este mismo procedimiento se utiliza para introducir la diferenciación entre vocales y consonantes, pero ahora utilizando círculos blancos y rojos. Este mismo esquema de materialización se utiliza para la escritura. Cada etapa es superada en la medida en que el sujeto puede dominarla, abreviarla y exponerla. Este método ha sido exitoso en la rehabilitación neuropsicológica y en la enseñanza de la lectoescritura a niños (**Solovieva y Quintanar, 2008**).

Conclusiones

La enseñanza de las matemáticas a todos los niveles de escolaridad requiere la incorporación de procedimientos pedagógicos que tengan un sustento en investigaciones científicamente reguladas. El continuo teórico que representan Vigotski, Luria, Galperin, Leontiev y Talizina, y sus continuadores en la lengua española, ha acumulado mucha investigación en torno a la aplicación de las etapas de formación de las acciones mentales en la enseñanza de las matemáticas, la lectoescritura y la gramática. Estas etapas también operan en condiciones de rehabilitación neuropsicológica, lo que fortalece su generalización. El conocimiento de estas etapas y su implementación con materiales adecuados a la enseñanza de tópicos específicos es un aporte de la psicología histórico-cultural a la pedagogía, éste puede ser utilizado en la aplicación generalizada a la solución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas en nuestro país.

El aprendizaje de métodos estadísticos para la investigación psicológica suele enfrentarse en nuestras instituciones académicas a altos niveles de reprobación. La enseñanza tradicional no parece resolver el problema de la reprobación en tales asignaturas. Las condiciones motivacionales de los estudiantes para dominar los conocimientos estadísticos no son suficientes para lograr bajar los índices de reprobación. La necesidad de fortalecer su aprendizaje con métodos pedagógicos que hayan demostrado su eficacia, puede satisfacerse con la implementación de las etapas de formación de las acciones mentales que propuso Galperin. Adecuar los contenidos específicos de la enseñanza de la estadística a las distintas etapas de formación de las acciones mentales (la base orientadora de la acción, la base material o materializada de la acción, la formación del plano verbal, y la base en el plano mental o del lenguaje interno) es un reto pedagógico que puede superarse al adecuar nuestros materiales de enseñanza a dichas etapas.

Referencias

- Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) http://www.enlace.sep.gob.mx/content/gr/docs/2013/ENLACE_Media_2013_nacionales_e_historicos.pdf
- **Galperin, P. Ya (1998/1957).** Sobre la formación de imágenes sensoriales y de los conceptos. En Quintanar Rojas L. (compilador) *La formación de las funciones psicológicas durante el desarrollo.* (pp. 45-56). México, Universidad Autónoma de Tlaxcala. Original en ruso, 1957.
- **Galperin, P. Ya (1998/1959).** Sobre la formación de imágenes sensoriales y de los conceptos. En Quintanar Rojas L. (compilador) *La formación de las funciones psicológicas durante el desarrollo.* (pp. 41-44). México, Universidad Autónoma de Tlaxcala. Original en ruso, 1959.
- **Galperin, P. Ya (1998/1965).** La dirección del proceso de aprendizaje. En Quintanar Rojas L. (compilador) *La formación de las funciones psicológicas durante el desarrollo.* (pp. 85-91). México, Universidad Autónoma de Tlaxcala. Original en ruso, 1965.
- **Quintanar, L. & Solovieva, Y. (2001).** *Métodos de rehabilitación en la neuropsicología del adulto.* México, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- **Ramos, C., del Valle Veliz, M. & Ross, S. P. (s/f).** El grado de reflexión de los alumnos de cálculo diferencial. Una experiencia. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias,* año 2, No. 2, 54-71.
- **Rojas Ortega, H. (2012).** *Estrategia para la enseñanza de las operaciones básicas algebraicas a través de prácticas de modelación*. Tesis de Maestría. México, Universidad Tangamanga, San Luis Potosí.http://www.universidadtangamanga.edu.mx/~tequis/images/tesis_biblioteca/enero2012/032.pdf. Consultado 21 de octubre del 2012.
- **Solovieva, Y. & Quintanar, L. (2008).** *Enseñanza de la lectura. Método práctico para la formación lectora.* México, Trillas.
- **Solovieva, Y., Chávez, O. M., Pérez, T. A. & Quintanar, L.(2001).** Propuesta para la rehabilitación de la comprensión del lenguaje en la afasia sensorial. En Quintanar, L. & Solovieva, Y. (2001). *Métodos de rehabilitación en la neuropsicología del adulto.* (pp. 159-185). México, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
- **Talizina, N. F. (2000).** *Manual de psicología pedagógica.* México, Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
- **Vygotski S. L. (1993/1934).** Pensamiento y Lenguaje. En L. S. Vygotski (A. Álvarez & P. del Río, Eds.) *Obras escogidas, T. II. Problemas de psicología general* (pp. 9-348) (Trad. José María Bravo). Madrid: Aprendizaje Visor. Primera edición en ruso, 1934.
- **Vygotski S. L. (1995/1931).** Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores. En L. S. Vygotski (A. Álvarez & P. del Río, Eds.) *Obras escogidas, T. III. Problemas del desarrollo de la psique* (pp. 11-340) (Trad. Lydia Kuper). Madrid: Aprendizaje Visor. Primera edición en ruso, 1931.

CAPÍTULO 2

DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: EL PAPEL DE LOS FACTORES EMOCIONALES Y LA ANSIEDAD

José Gabriel Sánchez Ruíz
Eduardo Alejandro Escotto Córdova
Julieta Becerra Castellanos

Varios autores, como **Gil, Blanco y Guerrero (2006)**, entre otros, consideran que las matemáticas, de manera genérica, es decir, el álgebra, la estadística, la geometría, la aritmética, entre otras ramas, son una parte esencial de la formación básica que han de compartir todos los miembros de la sociedad contemporánea. Incluso, para Galileo (citado en **Barrow, 1997**), la matemática es el lenguaje en el que parece estar escrito el libro de la naturaleza. Su competencia se hace imprescindible en tanto que aportan aprendizajes útiles para resolver constantemente problemas de la vida cotidiana y para atender a las demandas que la compleja sociedad actual exige. Al respecto, una reflexión de **Stewart (2006)** ilustra perfectamente lo anterior. Él menciona que nuestra sociedad consume muchas matemáticas, pero todo sucede entre bastidores. La razón es simple: ahí es donde funcionan. Al conducir un automóvil no queremos tener que preocuparnos por todas las cosas complicadas que hacen que funcione. Lo que deseamos es subir al coche y poder salir de viaje. Obviamente, ayuda a ser mejor conductor el que conozcamos los fundamentos de la mecánica del automóvil, sin embargo, eso no es esencial. Lo mismo pasa con las matemáticas. Nosotros queremos que el sistema GPS del automóvil nos dé las direcciones sin tener que hacer los cálculos matemáticos. Queremos que nuestro teléfono funcione sin tener que entender el sistema de procesamiento de señal del teléfono. El problema es que algunos de nosotros tenemos que saber cómo se hacen los cálculos matemáticos o ninguna de estas cosas maravillosas podría funcionar. Concluye mencionando que estaría bien que los demás, quienes no hacen matemáticas, fueran conscientes de lo mucho que nos valemos de las matemáticas en la vida cotidiana. El problema, dice Stewart, de poner a las matemáticas tan lejos entre bastidores es que mucha gente no sabe que están allí. No obstante lo anterior, llama poderosamente la atención que muchos estudiantes generan en el transcurso de su vida académica actitudes negativas hacia las matemáticas y asignaturas escolares cercanas observándose, no raras veces, una auténtica aversión y/o rechazo hacia esta disciplina.

En un trabajo realizado en España por **Gil, Blanco y Guerrero (2006)** con el propósito de poner de manifiesto el papel que desempeñan los afectos en el éxito o fracaso del aprendizaje matemático, aplicaron un cuestionario sobre creencias y actitudes sobre las matemáticas a una muestra de 346 estudiantes. Los hallazgos sugieren que gran parte de ellos conciben a las matemáticas como un conocimiento complejo que genera sentimientos de intranquilidad, miedo, ansiedad, inseguridad, desconcierto e incertidumbre y manifiestan con frecuencia sus "sentimientos" de rechazo acerca de ella, mediante expresiones como "odio las clases de matemáticas". Aunque otras veces esos "sentimientos" van dirigidos al profesor que las imparte, formulados en frases como "el profesor de matemáticas explica fatal", aún cuando en lugar del docente tal vez el objeto de sus sentimientos negativos sean más hacia los contenidos matemáticos, esto es hacia la asignatura misma y no dirigidos a la persona que los enseña. Estas expresiones ponen de relieve la influencia e importancia de factores afectivos en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas.

En cuanto a una de las posibles fuentes que originan el comportamiento emocional de los estudiantes hacia las matemáticas, **Sánchez, Becerra, García y Contreras (2010)** postulan que prácticamente en cualquier sector social no es raro escuchar fuertes críticas por los problemas que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, estos autores refieren que muchos investigadores señalan que dichas críticas, y el rechazo hacia esta disciplina, no obedece únicamente a aspectos relacionados con su naturaleza, tal como nivel de complejidad y de abstracción, sino que también son el resultado de una serie de estereotipos que se han creado a su alrededor y que se transmiten en el entorno familiar y educativo. Este hecho provoca que los estudiantes adquieran ciertos prejuicios hacia los aprendizajes matemáticos, los cuales afectan significativamente el proceso de su enseñanza y aprendizaje. Incluso, las repercusiones de esto son mayúsculas ya que, independientemente de la resistencia que existe para aprender la matemática, es considerada como un obstáculo para lograr una promoción o

una admisión en instituciones educativas (Ojeda, Medina y Peralta, 2001, cit. en **Martínez Padrón, 2005**). En este sentido, la misma sociedad se ha encargado de promover y divulgar ciertos sentimientos sobre las matemáticas, por ejemplo: las matemáticas son difíciles, complicadas y destinadas a los 'más inteligentes' (Gil et al., 2006).

Algunos autores, como **Gómez-Chacón (2000)**, desde hace algún tiempo han señalado que el fracaso escolar de los estudiantes en matemáticas no siempre se corresponde con su desarrollo cognitivo y que los aspectos emocional, motivacional y actitudinal juegan un papel facilitador, o debilitador del proceso de aprendizaje de las matemáticas. Incluso indica que cuando un estudiante aprende matemáticas recibe continuos estímulos asociados que le generan cierta tensión y ante ellos reacciona emocionalmente. De este modo sus reacciones:

- están condicionadas por sus creencias acerca de sí mismo y acerca de la matemática,
- pueden ser automatizadas y solidificadas en actitudes y emociones que influyen en dichas creencias y contribuyen con su formación.

En la conceptualización de que en el fracaso escolar en matemáticas pueden intervenir distintos factores, independientemente del intelectual, otros autores, entre ellos **Polya (1965)**, han sugerido que sería un error el creer que la solución de un problema es un asunto puramente intelectual ya que la determinación y las emociones juegan un papel importante.

Para Polya, en concordancia con **Gómez-Chacón (2000)**, el bajo desempeño escolar de los estudiantes no siempre se corresponde con su desarrollo cognitivo, dado que la dimensión afectiva juega un papel importante, facilitando o bloqueando el aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, un estudiante en una situación de aprendizaje de las matemáticas, reacciona emocionalmente a los continuos estímulos que recibe relacionados con esta asignatura y que le generan cierta tensión o ansiedad.

Para **Pérez-Tyteca, Castro, Segovia, Castro, Fernández y Cano (2009)** una considerable parte de la investigación tradicional en Educación Matemática, nombre de la disciplina interesada en la búsqueda del por qué y cómo resolver la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se enfoca al estudio de los aspectos que inciden en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina, centrándose sobre todo en el dominio cognitivo relegando el ámbito afectivo a un segundo plano. No obstante, en los últimos años se han proporcionado evidencias en un número creciente de publicaciones que relacionan lo que se ha denominado dimensión afectiva (creencias, actitudes y emociones del estudiante) y la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas (**Gairín, 1990**; **Miranda, Fortes y Gil, 1998**, **Mcleod, 1992 y 1994**, **Schoenfeld, 1992**, **Gómez-Chacón, 1997, 1999, 2000**; **Blanco y Guerrero, 2002**). Empezando a generar conciencia de la importancia de los aspectos afectivos en la educación, en la medida en que los educadores se dan cuenta del influjo que tienen sobre el aprendizaje escolar.

En este contexto, se considera que la ansiedad es una emoción natural, presente en todos los humanos que resulta ser adaptativa pues nos pone en alerta ante una posible amenaza; y, cuando la ansiedad se manifiesta en niveles moderados facilita el rendimiento e incrementa la motivación (**Keeley, Zayac y Correia, 2010**). Sin embargo, a veces se vive como una experiencia desagradable (emoción negativa), especialmente cuando alcanza una elevada intensidad. **Valero (1999)** considera que la ansiedad es un tema que también se ha discutido en el marco del ámbito escolar. El alumno con ansiedad tiene sentimientos de incompetencia pues

esta le plantea una exagerada amenaza a su autoestima; además, parece estar asociada con el bajo rendimiento académico.

La ansiedad es uno de los factores afectivo-emocionales presente en los estudiantes, sobre todo en situaciones evaluativas o al enfrentarse a asignaturas escolares especialmente difíciles para ellos, como pueden ser las matemáticas. Varias investigaciones se han centrado en el estudio de la ansiedad hacia esta materia, denominada en la literatura ansiedad matemática (**Hembree, 1990**).

La ansiedad matemática se caracteriza por la ausencia de confort que alguien podría experimentar cuando se le exige rendir en matemáticas (Wood, 1988, citado en **Pérez-Tyteca *et al.*, 2009**). Se manifiesta mediante tensión, nervios, preocupación, inquietud, irritabilidad, impaciencia, confusión, miedo y bloqueo mental, sensación de ahogo o falta de aliento, sensación de atragantarse, opresión o malestar torácico, náuseas o molestias abdominales, inestabilidad, miedo a perder el control, miedo a morir, parestesias -entumecimiento u hormigueo- entre otros.

De manera más específica, las manifestaciones de ansiedad se pueden presentar en tres niveles: fisiológico, motor y psicológico.

Manifestaciones fisiológicas

- Dificultad para respirar o sensación de ahogo.
- Palpitaciones o ritmo cardíaco acelerado.
- Sudoración o manos frías y húmedas.

- Sequedad de boca.
- Mareos o sensaciones de inestabilidad.
- Náuseas, diarreas u otros trastornos abdominales.
- Sofocos o escalofríos.
- Micción frecuente.
- Dificultades para tragar o sensación de tener un nudo en la garganta.

Manifestaciones motoras

- Perturbaciones en la conducta motora verbal, tales como, temblor de la voz, repeticiones, tartamudeo, quedarse en blanco.
- Temblores.
- Evitación de situaciones temidas.
- Fumar, comer o beber en exceso.
- Intranquilidad motora (por ejemplo, movimientos repetitivos, rascarse, tocarse).
- Deambular.
- Llantos sin causa aparente.

Manifestaciones psicológicas

- Preocupación excesiva reflejada en pensamientos e imágenes negativas sobre la situación.
- Percepción de la situación como incontrolable.
- Evaluación negativa de los estímulos.

- Imaginación de la ejecución de respuestas de evitación.
- Preocupación excesiva e irrealista sobre sus síntomas físicos y los de las personas que los rodean.
- Temor.
- Dificultad para decidir.
- Pensamientos negativos sobre uno mismo.
- Temor a que se den cuenta de las propias dificultades.
- Dificultades para pensar, estudiar o concentrarse, entre otras.

De tal forma que la ansiedad es difícil de controlar e interfiere significativamente en la actividad general del individuo. El estudiante con ansiedad tiene sentimientos de incompetencia, pues le plantea una exagerada amenaza a su autoestima; además, esto es lo más delicado del tema, como ya se indicó, tiende a estar asociada con el bajo rendimiento académico (**Hadfield, Martin & Wooden, 1992**).

Para algunos estudiosos clásicos en ansiedad (**Beck, Emery y Greenbery, 1985**) diversas circunstancias provocan la sensación de ansiedad, por ejemplo, el realizar un examen, hablar (exponer un tema) en público o, algo tan cotidiano para muchos, realizar una salida a una excursión en una fecha determinada. Existe evidencia, que data de algunas décadas atrás (**Richardson y Suinn, 1972**), acerca de que se puede sufrir de formas específicas de ansiedad, como la ansiedad a los exámenes académicos y a las matemáticas. Incluso, dentro del escenario escolar, en la literatura se ha planteado que una variable que correlaciona negativamente con el rendimiento y la participación es la ansiedad a las matemáticas (**Betz, 1978**; **Dew, Galassi & Galassi, 1983**; entre otros).

El concepto de ansiedad a las matemáticas emergió a principios de los años setenta del siglo pasado de estudios que intentaban identificar las causas de la participación y el logro diferencial en matemáticas, entre hombres y mujeres (**Brown & Gray, 1992**). Sin embargo, la ansiedad no se circunscribe solo a las matemáticas sino a las asignaturas afines. La mayoría de los estudiantes en ciencias sociales como parte de los requisitos curriculares que establece el Plan de Estudios de su carrera profesional están obligados a tomar un curso de estadística. No obstante, muchos de estos estudiantes eligen asignaturas particulares, en un intento por evitar cursos con "más matemáticas". Es decir, los estudiantes a menudo temen a su curso de estadística y tratan de posponerlo hasta el final de sus carreras académicas. En este contexto, no pocas veces los profesores señalan la presencia de ansiedad estadística entre sus estudiantes y hacen referencia a sus efectos negativos. La literatura en el tema sugiere un consenso acerca de que la ansiedad hacia la estadística también tiene una relación inversa con el rendimiento en las clases de estadística.

Del trabajo realizado sobre ansiedad se han elaborado varios modelos teóricos para explicar la relación entre la ansiedad ante los exámenes y la ejecución en los mismos. Desde un modelo conductual se supone una inhibición de conductas académicas bajo una situación de castigo, con los componentes condicionados o emocionales habituales en un ambiente de ansiedad. Bajo una perspectiva cognitiva se plantea, entre las causas de esta problemática, la existencia de pensamientos negativos, dificultades en la resolución de problemas, déficits atencionales y baja autoestima.

Se ha planteado que los cuestionarios de ansiedad permiten investigar la ansiedad ante los exámenes bien como una variable mediadora, o bien como una experiencia de los estudiantes; la aplicación de los mismos indica que los niveles altos de ansiedad afectan la ejecución en los exámenes y que los estudiantes menos ansiosos suelen obtener mejores notas. De esta manera, la ansiedad constituye una variable que interactúa con las habilidades intelectuales, además, está asociada con una percepción de mayor dificultad de los exámenes.

Aunque es necesario puntualizar que la ansiedad a las matemáticas, definida como una reacción emocional de evitación a situaciones que requieren tareas numéricas o conceptos matemáticos, no está necesariamente relacionada con la inteligencia general, frecuentemente afecta a personas altamente exitosas en otras áreas; es decir, se trata de una ansiedad asociada con el campo particular de la manipulación de números y el uso de conceptos matemáticos, e involucra sentimientos de tensión y ansiedad que interfieren con la solución de problemas matemáticos en una amplia variedad de situaciones de la vida ordinaria y académica. Esto se complementa con evidencias encontradas referentes a que la ansiedad a las matemáticas se presenta en muchos individuos que no sufren ordinariamente de algún otro tipo de ansiedad.

Algunas investigaciones, como la de **Pérez-Tyteca *et al.*, (2009)**, sugieren diferencias significativas entre hombres y mujeres en su nivel de ansiedad ante las matemáticas. Los hombres sufren menos ansiedad al enfrentarse a tareas matemáticas. También que existen diferencias significativas en este tipo de ansiedad entre alumnos de distintas ramas del conocimiento, estas discrepancias se presentan entre los estudiantes de Enseñanzas Técnicas y Ciencias de la Salud y entre Enseñanzas Técnicas y Ciencias Sociales. Por área se ordenan de menor a mayor nivel de ansiedad de la siguiente manera: Enseñanzas Técnicas, Ciencias Experimentales, Ciencias Sociales y Ciencias de la Salud. El nivel de ansiedad es mayor para las mujeres que para los hombres en cada una de las áreas siendo más notables las diferencias entre sexos en Ciencias de la Salud y Ciencias Experimentales.

Sánchez y Ursini (2010) al analizar algunos factores actitudinales que actúan promoviendo un rechazo o desprecio por las matemáticas reportaron que esto representan un gran problema por su impacto dentro del ámbito escolar: un mayor índice de reprobación, incluso considerablemente más alto que en otras asignaturas. En México, las estadísticas de distintas evaluaciones nacionales e internacionales sobre aprovechamiento escolar, tal como la Evaluación Nacional de Logro Académico (ENLACE) o el *Program for International Student Assessment* (Informe PISA), constatan la magnitud del problema consistente en un panorama muy desalentador porque en matemáticas los estudiantes obtienen un rendimiento más bajo que en otras materias en el nivel básico y medio. **González (2005)** al comparar distintos informes sobre la evaluación escolar en estudiantes mexicanos confirmó lo anterior y planteó que tal situación no difiere al estudiarla en grados educativos superiores. Además, refiere que al parecer el rechazo por las matemáticas influye al elegir una carrera profesional, orientándose en este caso hacia carreras con escasa o nula presencia de contenidos matemáticos, afectando más a las mujeres que a los hombres; a pesar de la importancia que representa la formación de profesionistas en el área de ciencias para el desarrollo científico y tecnológico de un país.

Si bien no hay información de estadísticas sobre la magnitud o incidencia de la ansiedad matemática entre los estudiantes mexicanos, los resultados de investigaciones realizadas con estudiantes universitarios españoles constituyen un referente considerablemente confiable de esta problemática: seis de cada 10 estudiantes presentan ansiedad matemática o temor a las matemáticas (**Pérez-Tyteca *et al.*, 2009**). Por otra parte, cabe resaltar que cuando un individuo mantiene altos niveles de ansiedad, durante tiempos prolongados, su bienestar psicológico se ve seriamente perturbado; sus sistemas fisiológicos pueden verse alterados por un exceso de actividad, su sistema inmune puede verse incapaz de defenderse y sus procesos cognitivos pueden resultar trastornados provocando una disminución del rendimiento y la evitación de situaciones que provocan reacciones de intensa

activación que pueden afectar a la vida personal, académica y social (**Cano-Vindel y Miguel-Tobal, 2001**). La actividad cognitiva superior puede verse afectada por procesos emocionales con los que mantiene una estrecha relación. Así, por ejemplo, el rendimiento en los exámenes o en otra situación de evaluación, como la tarea matemática, puede verse deteriorada cuando el sujeto se ve desbordado por su reacción de ansiedad.

El cuestionamiento obvio ahora es: ¿Se puede hacer algo al respecto? La respuesta inmediata es sí y mucho. A pesar de que el sistema educativo ha estado tradicionalmente más interesado en enseñar conocimientos que en una psicopedagogía de la emociones, los afectos, las creencias, las motivaciones y las actitudes, entre otros aspectos, los autores de este trabajo consideran que la psicología dispone de una serie de conocimientos que se han transformado en procedimientos y técnicas con las cuales se puede intervenir para reducir la ansiedad matemática. Muchas estrategias que han surgido de la investigación psicológica han concluido en propuestas sólidas y muy prácticas orientadas al manejo o control de la ansiedad. Por ejemplo, la diseñada por **Rivera (2013)**, del Centro de Recursos Educativos para Matemáticas y Ciencias, expone una serie de recomendaciones como las siguientes:

- Mantén una mente positiva al pensar en la clase de matemáticas.
- Siéntate lo más cerca del pizarrón que puedas.
- Escucha las explicaciones que te da el profesor de matemáticas y luego copia.
- Pregunta, pregunta y pregunta.
- Considera que la matemática es como los idiomas extranjeros....debe ser practicada.
- No dependas de la memorización al estudiar matemática.

- Revisa a diario tu libro de texto y tus apuntes en tu libreta de la clase.
- Nunca, nunca faltes a la clase de matemáticas.
- Estudia la matemática según tu estilo de aprendizaje.
- Busca ayuda el mismo día que no entiendes algo.
- Mantente relajado y cómodo mientras estudias para la clase de matemáticas.
- Habla acerca de las clases de matemáticas.
- Busca a un compañero de la clase con quien hacer las asignaciones.
- Desarrolla responsabilidad por tus logros y fracasos.

Los autores de este trabajo proponen que al considerar que las situaciones donde se desencadena la respuesta de ansiedad tienen en común la posible previsión de consecuencias negativas o amenazantes para el sujeto y que la ansiedad supone la puesta en marcha de diferentes recursos cognitivos (atención, memoria, percepción, pensamiento, lenguaje, entre otros), fisiológicos (por ejemplo, activación autonómica) y conductuales (alerta, evitación, entre otros) un programa de intervención debe intentar influir en la dimensión cognitiva. De esta manera resultan adecuadas las siguientes acciones:

1. Trabajar en crear una actitud positiva hacia la matemática.

2. Volverse consciente de pensamientos o sentimientos irracionales relacionados con la matemática para reemplazarlos por otros más positivos y realistas.

3. Algunas creencias negativas con respecto a la matemática, en las que debe trabajarse para su modificación, son:

- *Las personas hábiles en matemática pueden resolver problemas mentalmente con rapidez.*

  La rapidez en resolver problemas matemáticos no es importante siempre y cuando el estudiante pueda resolverlos. Hasta los profesores revisan sus problemas de ejemplo antes de enseñarlos en clase.

- *Algunas personas tienen una mente matemática y otras no.*

  En realidad, la mayoría de las personas tiene mucho más potencial para la matemática de lo que cree.

- *Obtuve la respuesta correcta, pero lo hice de la forma equivocada.*

  No hay una única forma de resolver un problema.

Es importante modificar estas creencias particularmente porque pueden inhibir la confianza en sí mismo del estudiante y por lo tanto interferir con su capacidad real para aprender.

Entre la lista de opciones disponibles al respecto se pueden mencionar algunos programas de apoyo accesibles por internet. Al respecto, destaca el denominado Programa Autoaplicado para el Control de la Ansiedad ante los Exámenes (**Ministerio de Educación y Ciencia de España y la Universidad de Almería, 2013**).

También se cuenta con propuestas de intervención de un estilo más holístico, es decir que pretenden atender más elementos. En esta categoría se halla la de **Guerrero, Vicente y Blanco (2002)** cuyo objetivo es identificar distintas fuentes precursoras de ansiedad y ofrecer una manera de tratarla. Los puntos sobre los que gira la propuesta de estos autores son:

1. Condiciones Ambientales

- Apoyo Social

Se ha publicado recientemente abundante evidencia que relaciona el apoyo social con la salud física y psicológica y se ha señalado que favorece la salud bien porque se relaciona negativamente con el comienzo de enfermedades o bien porque facilita la recuperación de pacientes con algún tipo de trastorno.

Lo anterior, de acuerdo a **Guerrero *et al. (2002)***, ha dado origen a dos hipótesis: la de acción amortiguadora y la hipótesis de efectos directos. Según la hipótesis de la acción amortiguadora, el apoyo social actúa protegiendo al individuo durante los momentos de ansiedad potenciando la adaptación del sujeto, por ejemplo, mediante la facilitación y mejora de conductas de afrontamiento. El apoyo social puede reducir el impacto de la ansiedad de tres formas: a) eliminando o reduciendo el propio estresor, b) reforzando la capacidad del individuo para hacer frente al estrés o c) atenuando la experiencia de la ansiedad una vez que el estresor se ha puesto en marcha.

La hipótesis de los efectos directos presupone que el apoyo social ejerce efectos positivos sobre la salud y que el hecho de estar integrado en un grupo (redes sociales, grupo de amigos, familia, la pertenencia a “clubes”) facilita experiencias individuales positivas como la autoestima, afecto positivo, control sobre el medio. Estas experiencias protegen al sujeto de trastornos físicos y emocionales a través de mecanismos psicobiológicos, por ejemplo mejorando el funcionamiento inmunológico (**Guerrero *et al.*, 2002**). Actualmente se ha probado más ampliamente la hipótesis de la acción amortiguadora y se puede decir que los recursos sociales

en el momento de experimentar la situación estresante reducen los efectos nocivos de ésta. A los recursos sociales que hace referencia este modelo explicativo son:

- Situaciones de carácter positivo

Se refiere a situaciones que acontecen en la vida diaria que son de fácil acceso y que por razones de falta de tiempo, sobrecargas de trabajo o tareas no nos permitimos disfrutar. Estas situaciones incluyen actividades de ocio y tiempo libre tan sencillas como: pasear, descansar, oír buenas noticias, recibir sesiones de masaje, ir al teatro. Todas estas situaciones modularían la respuesta de ansiedad.

- Recursos utilitarios

El acceso a la información, a los servicios sociales y a programas de entrenamiento, va a facilitar la resolución de una situación estresante.

2. Condiciones fisiológicas

Cuantos más recursos físicos u orgánicos tenga el individuo mayor resistencia a la ansiedad tendrá, en contraparte, a menores recursos peores efectos tendrá la ansiedad sobre la persona. Se ha mencionado que existe cierta predisposición biológica o estereotipia de respuesta que puede o bien facilitar las consecuencias nocivas de ansiedad o bien protegerlas.

3. Hábitos conductuales sanos

Relacionados con comportamientos sanos, una dieta equilibrada, no fumar ni beber en exceso y no consumir excitantes ni fármacos psicoactivos mejoraría el estado de salud y el sistema inmunológico al mismo tiempo que modularía la respuesta de ansiedad.

También se ha mencionado la importancia del ejercicio físico. En este sentido, estados de ansiedad movilizan recursos orgánicos como ácidos grasos, colesterol, glucógeno que rara vez se van a utilizar ya que la vida moderna no exige respuestas físicas intensas. Estos recursos movilizados y no utilizados pueden llegar a depositarse en el sistema vascular tapizando paredes y vasos, disminuyendo así el paso de la sangre dando lugar a un aumento de la presión arterial, hipertensión y propensión a infartos. Con el ejercicio físico podemos utilizar y consumir estos recursos movilizados por la respuesta de ansiedad antes de ser depositadas e impedir deterioros en el sistema cardiovascular. Los ejercicios recomendables son los aeróbicos como correr, montar en bicicleta, nadar.

4. Aspectos cognitivos

Existen diferencias entre los individuos en su modo de evaluar las situaciones provocadoras de ansiedad, unos lo hacen centrándose en las demandas de la situación (denominados sujetos autoeficaces, quienes analizan cómo manejar la situación y se centran en el problema), otros lo hacen en sí mismo (sujetos autorreferentes, se preocupan cómo les afecta la situación, se centran en la emoción) y otros en cambio lo hacen negando el problema o las demandas del medio (sujetos negativistas). Los sujetos autoeficaces llevarían mucho mejor que los otros las situaciones estresante.

El optimismo es otra característica personal que amortigua el efecto de la ansiedad sobre el sujeto. Las personas optimistas seleccionarían estrategias de enfrentamiento centrándose en el problema, buscarían aspectos positivos de la situación desdramatizándola, viéndola como reto y no como amenaza.

La sensación de control, el *locus* de control interno, modularía los efectos de la ansiedad. Trabajar en las creencias de que podemos manejar la situación y que ésta depende mucho de nuestros esfuerzos, estrategias y habilidades nos ayudará a salir ilesos de ella. Al respecto, se pueden mencionar los experimentos de indefensión aprendida que demuestran cómo ratas sometidas a descargas inevitables y de las que no se puede escapar adolecen de úlceras y tumores (cf., **Maldonado y Ruiz, 1982**; **Seligman, 1983**; entre otros).

Tiene sentido intentar influir en el componente cognitivo, además, porque muchos estudiantes mantienen la idea de que las Matemáticas desarrollan el razonamiento lógico, contribuyendo así a la formación de cada persona. Esto apunta a una concepción de las Matemáticas como ciencia por excelencia que favorece la formación intelectual del individuo.

Sánchez, Becerra, García y Contreras (2010) diseñaron una propuesta para intervenir en trastornos de ansiedad en el aprendizaje de las matemáticas en general, pero sobre todo de la estadística.

El punto de partida de esta propuesta es la hipótesis de que las actitudes, las creencias, los pensamientos, los conocimientos y las emociones de los alumnos determinan el éxito y o el fracaso, es decir su rendimiento, en estadística. Las actividades que involucra están definidas por los objetivos que conforman dicha propuesta. Dichos objetivos son los siguientes:

Una vez realizada la evaluación del patrón de respuestas de ansiedad de los alumnos que llevan un curso de estadística, se propone que el alumno logre disminuir el estado de activación y tensión psicofisiológica que pueda interferir negativamente en el rendimiento a través del entrenamiento en relajación y en control de la respiración

Enseñar y entrenar en autoinstrucciones funcionales que permitan manejar pensamientos y emociones ante la tarea matemática, al mismo tiempo que perciban la situación como no amenazante.

En la propuesta referida se sugiere que para la evaluación de actitudes, afectos y creencias se pueden emplear los cuestionarios empleados por **Gómez Chacón (2000)**; especialmente útiles porque los cuestionarios hacen alusión a las opiniones sobre las matemáticas y a la conexión entre el alumno y las matemáticas. También son de utilidad el cuestionario de **Callejo (1994)** sobre concepciones de los alumnos de la resolución de problemas, y el de **Camacho, Hernández y Socas (1995)** acerca de comportamientos y actitudes hacia las matemáticas y su enseñanza (q.v., **Guerrero y Blanco, 2004**).

Para la evaluación de la ansiedad se recomienda un instrumento clásico para explorar la ansiedad en un escenario escolar la Escala de Evaluación de Ansiedad en Matemáticas (**Richardson y Suinn, 1972**).

El programa de intervención en conducta de ansiedad antes mencionado está diseñado para ser desarrollado dentro de un Taller-Seminario llamado *Reeducación para el enfrentamiento de estrategias personales ante la enseñanza de la estadística*. El objetivo, complementariamente al especificado previamente, es mostrarle al estudiante asistente la forma en que puede desarrollar habilidades que le permitan afrontar situaciones ansiógenas en el contexto de la enseñanza-aprendizaje de la estadística. La duración es de aproximadamente un mes y medio y se organiza en 10 sesiones de un promedio de una hora y media.

En síntesis, el programa está diseñado para que el alumno adquiera habilidades para afrontar situaciones generadoras de ansiedad; y, para aprender a relajarse

fisiológicamente y a manejar sus emociones en la clase de estadística, en situaciones de exámenes sobre estadística y otros contextos de esta índole. Fundamentalmente consiste en la aplicación de un modelo de inoculación de estrés, consta de cuatro fases y permite relajar la activación fisiológica y sustituir pensamientos, creencias y actitudes negativas por pensamientos funcionales. Se toma en cuenta que un alto grado de ansiedad facilita el aprendizaje mecánico, pero tiene efecto inhibitorio sobre los tipos de aprendizaje más complejos, que son menos familiares o que dependen más de habilidades de improvisación que de persistencia. La propuesta integra está publicada en *Un programa de Intervención en Factores Asociados al Éxito Matemático* de la autoría de **Sánchez, Becerra, García y Contreras (2010)**.

Es importante subrayar finalmente que no se postula que el alumno elimine totalmente la ansiedad ya que los resultados de investigaciones realizadas (**Gairín, 1990**) ha señalado que la ansiedad facilita el aprendizaje de tareas complejas cuando se dan las siguientes circunstancias: a) no amenazan la autoestima personal, b) no son tareas exageradamente novedosas o significativas, c) la ansiedad es sólo moderada, y d) cuando el estudiante posee mecanismos efectivos de superación de la ansiedad. Así, los estudiantes con un alto nivel de ansiedad se benefician más de las lecciones expositivas, mientras que los estudiantes con un bajo nivel de ansiedad se benefician más de los métodos de aprendizaje por descubrimiento. Por tanto, se plantea que es imprescindible dotar al estudiante de las habilidades y herramientas necesarias para manejar de forma adecuada la ansiedad que experimenta ante las matemáticas de tal forma que a la vez que logre un aprendizaje exitoso consiga un bienestar físico y emocional que le permita adaptarse de forma óptima a las exigencias que se le presenten.

Referencias

- **Beck, A. T. Emery, G. and Greenbery, R. L. (1985).** *Anxiety disorders and phobias: a cognitive perspective.* New York: Basic Books.
- **Betz, N. E. (1978).** Prevalence, distribution and correlates of math anxiety in college students. *Journal of Counseling Psychology. 25* (5), 441-448.
- **Blanco, L. y Guerrero, E. (2002).** Actitudes y creencias en la educación Matemática. En M. C. Penalva, G. Torregrosa y J. Vals (Eds.), *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp.121-143). Alicante: Universidad de Alicante.
- **Barrow, J. D. (1997).** ¿Por qué el mundo es matemático? Barcelona: Grijalbo-Mondadori.
- **Brown, M. & Gray, M. W. (1992).** Mathematics test, numerical, and abstraction anxieties and their relation to elementary teacher's views on preparing students for the study of algebra. *School Science and Mathematics. 92* (2), 69-73.
- **Callejo, M.L. (1994).** *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea.
- **Camacho, M., Hernández, J. y Socas, M. M. (1995).** Concepciones y actitudes de futuros profesores de secundaria hacia la Matemática y su enseñanza: un estudio descriptivo. En L.J. Blanco y V. Mellado. *La formación del profesorado de ciencias y matemáticas en España y Portugal*. Servicio de Publicaciones Diputación Provincial de Badajoz. 81-97.
- **Cano-Vindel, A., & Miguel-Tobal, J. J. (2001).** Emoción y Salud. Murcia: Compobell.
- **Dew, K. H., Galassi, J. P. & Galassi, M. D. (1983).** Mathematics anxiety: some basic issues. *Journal of Counseling Psychology. 30* (3), 443-446.
- **Gairín, J. (1990).** *Las actitudes en educación. Un estudio sobre la educación matemática.* Barcelona: Boixareu Universitaria.
- **Gil, I. N., Blanco, N. J. L. y Guerrero, B. E. (2006).** El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación, 340*. Mayo-agosto, 551-569.
- **Gómez-Chacón, I. (1997).** La alfabetización emocional en educación matemática: actitudes, emociones y creencias. UNO. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. nº 13.
- **Gómez-Chacón, I. (1999).** Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social: Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. En *MEC, Premios nacionales de Investigación e Innovación Educativa. Colección Investigación*. (pp.333-358). Madrid: Ministerio de educación y Cultura-CIDE.
- **Gómez-Chacón, I. (2000).** *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.
- **González, R. M. (2005).** Un modelo explicativo del interés hacia las matemáticas de las y los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática.17* (1), 107-128.
- **Guerrero, E. y Blanco, L. (2004).** Diseño de un programa psicopedagógico para la intervención en los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación*, *33*/5, 27. Disponible en: http://www.rieoei.org/deloslectores/707Guerrero.PDF
- **Guerrero, B. E., Vicente, C. F., y Blanco, N. J. (2002).** El tratamiento de la ansiedad hacia las matemáticas. En J. N. García Sánchez (coordinador). *Aplicaciones de intervención psicopedagógica*. España: Pirámide.
- **Hadfield, O. D, Martin, J. & Wooden, Sh. (1992)**. Mathematics Anxiety and Learning Style of the Navajo Middle School Student. *School Science and Mathematics. 92*, 4, 171-176.
- **Hembree, R. (1990)**. The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education, 21* (1), 33-46.

- **Keeley, J., Zayac, R. y Correia, Ch. (2010).** Curvilinear relationships between statistics anxiety and performance among undergraduate students: evidence for optimal anxiety. *Statistics Education Research Journal, 7* (1), 4-15.
- **Maldonado, A. y Ruiz, J.A. (1982).** Indefensión aprendida en humanos. Una revisión crítica. *Psicológica, 3,* 153-174.
- **Martínez Padrón, O. (2005).** Dominio afectivo en Educación Matemática. *Paradigma*, *XXIV* (2), 7-34.
- **McLeod, D. B. (1992).** Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.
- **McLeod, D.B. (1994).** Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (6), 637-647.
- Ministerio de Educación y Ciencia de España y la Universidad de Almería (2013). Recuperado de **http://www.ual.es/Universidad/GabPrensa/controlexamenes/**)
- **Miranda, A., Fortes, C. y Gil, M.D. (1998).** *Dificultades del aprendizaje de las Matemáticas. Un enfoque evolutivo.* Málaga: Aljibe.
- **Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Segovia, I., Castro, E., Fernández, F. y Cano, F. (2009).** El papel de la ansiedad matemática en el paso de la educación secundaria a la educación universitaria. *PNA, 4* (1), 23-35.
- **Polya, G. (1965).** *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- **Richardson, F. y Suinn, R. (1972).** The Mathematics Anxiety Rating Scale. *Journal of Counseling Psychology*. *19*, 551-554.
- **Rivera, L. M. (abril, 2013).** *Catorce formas para reducir la ansiedad matemática.* Recuperado de **http://cremc.ponce.inter.edu/ansiedad.htm**

- **Sánchez, R. J. G., Becerra, C. J., García, P. J. y Contreras, R. Ma. del S. (2009).** La dimensión afectiva y el rendimiento en estadística en estudiantes universitarios. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 23*, 427-437.
- **Sánchez, R. J. G., Becerra, C. J., García, P. J. y Contreras, R. Ma. del S. (2010).** *Un programa de Intervención en Factores Asociados al Éxito Matemático.* México: UNAM.
- **Sánchez, R. J. G. y Ursini, S. (2010).** Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13* (4, II), 303-318.
- **Seligman, M.E.P. (1983).** *Indefensión*. Madrid: Debate.
- **Schoenfeld, A.H. (1992).** Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics teachin and learning* (334-370). New York: MacMillan P.C.
- **Stewart, I. (2006).** *Letters to a young mathematician.*USA: Basic Books.
- **Valero, A. L. (1999).** Evaluación de ansiedad ante exámenes: Datos de aplicación y fiabilidad de un cuestionario CAEX. *Anales de psicología. 15* (2), 223-231.

CAPÍTULO 3

LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS: LA INSERCIÓN DE LA TECNOLOGÍA COMPUTACIONAL

José Gabriel Sánchez Ruíz

La preocupación por mejorar el aprendizaje de las matemáticas en los distintos niveles educativos ha propiciado el desarrollo de un número considerable de investigaciones a lo largo de las últimas cuatro décadas, sólo basta dar una mirada al contenido de la enorme lista de revista especializadas de matemática educativa, entre otras muchas: *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, Educación Matemática, Avances de Investigación en Matemática Educativa, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas, Journal for Research in Mathematics Education* y *Studies in Mathematics Education*. Esta problemática ha sido abordada desde distintas perspectivas y los temas estudiados derivados de ella han sido muy variados. Así, por ejemplo: se ha tratado de dilucidar en qué consiste la actividad matemática y se han examinado diversas estrategias de enseñanza con el propósito de mejorar el aprendizaje del alumnado, se han planteado distintos criterios de evaluación, así como estudiado la relación entre las matemáticas y la cultura y tratado de identificar los aspectos cognitivos y afectivos que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas, entre otras temáticas. Las investigaciones realizadas hasta ahora, de una forma resumida, han aportado ideas interesantes acerca de la naturaleza y de la génesis del conocimiento matemático, asimismo han provisto de información que ha llevado a reflexionar tanto acerca de la relación entre conocimiento matemático y sociedad (cf., **Camacho, 2006**; **Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006**; entre otros) como del papel que juegan las matemáticas en la justificación de las decisiones que afectan al individuo y a la sociedad en su conjunto (**Sánchez y Ursini, 2011**).

Gran parte de la investigación dedicada a esclarecer y documentar cuáles son los factores que influyen sobre el rendimiento y el fracaso académico de los estudiantes se ha concentrado en explorar, por una parte, un conjunto de factores denominados *variables distales*; entre ellos se encuentra el nivel socioeconómico, la escolaridad de los padres, el tipo de institución educativa, el ambiente social del lugar de residencia (**Casanova, Cruz, de la Torre y de la Villa, 2005**; entre otros). Además, por otro lado, un grupo de aspectos llamados *variables personales* tal como la organización y concentración en el estudio, también denominados hábitos de estudio, las actitudes hacia las matemáticas, la comprensión lectora, la capacidad para autorregular el aprendizaje, el género del estudiante y su edad, la motivación al estudio, la comprensión lectora y las atribuciones causales.

En ambos grupos de variables, en algunas aspectos se ha corroborado más consistentemente su papel en el rendimiento de asignaturas escolares, aunque en otras es necesario más evidencia que esclarezca su relación con el desempeño escolar. Tomando en cuenta la posibilidad de influir sobre ellas, mediante programas de intervención o reentrenamiento, para promover una mejoría en el aprendizaje de los estudiantes es comprensible la atención desigual que reciben los dos tipos de variables; por ejemplo, en la escolaridad paterna o en los ingresos económicos familiares es prácticamente imposible actuar. No obstante que en las variables personales es más factible influir no está resuelto todavía, de manera definitiva, su papel en el proceso de aprendizaje aún menos de asignaturas y niveles escolares específicos.

Por otra parte, los resultados obtenidos por estudiantes mexicanos en distintas evaluaciones nacionales e internacionales de logro académico, como la Prueba de Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (Enlace), impulsada en México por la Secretaría de Educación Pública (SEP), y PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes, aunque abreviado como PISA por sus siglas en inglés), por lo menos en los cinco años más recientes, muestran un panorama muy desalentador en cuanto al rendimiento en las asignaturas de matemáticas y de español, en los niveles básico y medio; así como una situación no muy diferente en grados educativos superiores, específicamente en matemáticas. Al reflexionar acerca de esta situación parece relevante evaluar el impacto que han tenido algunas estrategias, conformadas en muchas ocasiones

por programas de gran envergadura, como las auspiciadas por el gobierno y propiciados por el acontecer mundial del momento en que se puso en marcha. Entre ellos los proyectos *Enseñanza de la Física apoyada con Tecnología* (EFIT), *Enseñanza de las Matemáticas Apoyada con Tecnología* (EMAT) y *Enciclomedia*, que resultaron de la tendencia a nivel mundial por influir en el mejoramiento del aprendizaje del alumno a partir de incorporar la tecnología en el escenario escolar para apoyar la enseñanza.

Desde 1997 en México, en el caso de matemáticas, la SEP promovió, inicialmente en una fase piloto, el proyecto nacional llamado Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT) en el que la tecnología (básicamente computadoras y calculadoras TI-92) se usó para apoyar la enseñanza de las matemáticas en las escuelas secundarias públicas del país, en alumnos de 12 a 15 años de edad, con el fin de facilitar su enseñanza y aprendizaje conforme el currículo establecido y acercar a los alumnos a conceptos matemáticos avanzados. Para lograr este propósito, además de equipar las aulas con la tecnología adecuada se diseñaron y elaboraron actividades apropiadas para fomentar su empleo, igualmente se plantearon e implementaron los talleres para capacitar a los docentes que participaron en el proyecto. Si bien no hay suficiente claridad sobre el estado actual de EMAT, en cuanto a su vigencia, al parecer constituye uno de los antecedentes de programas de reciente creación promovidos por el gobierno mexicano y desarrollados bajo la misma premisa de incorporar la tecnología computacional para incidir en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos; aunque en la actualidad ha abarcado un número mayor de asignaturas, por ejemplo, mediante *Enciclomedia*. No obstante, dado que EMAT, antecedido por MicroSep, como tal tuvo presencia durante varios años dentro de los Planes Nacionales de Educación, representa una experiencia valiosa de la inclusión de la tecnología para la enseñanza de una de las asignaturas escolares donde se observa una problemática importante en el aprendizaje de los alumnos. Por ello, el autor de este trabajo considera: a) necesario revisar la manera en que la presencia de la tecnología incide en distintos aspectos del proceso de aprendizaje y b) que es importante desarrollar investigación enfocada a proporcionar suficiente evidencia empírica sobre el papel que ella desempeña específicamente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (**Ursini, Sánchez y Santos, 2005**) para hacer una valoración de la pertinencia de su papel como un elemento de una estrategia de intervención enfocada al mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas.

Un par de datos adicionales sobre el proyecto EMAT que como indicamos representa el esfuerzo más estructurado de vincular la tecnología a la enseñanza de las matemáticas en nuestro país: EMAT se desarrolló inicialmente de 1997 al 2000 en 8 escuelas, ubicadas en 8 estados mexicanos, con la participación de 16 profesores. Luego a mediados del 2004 se había extendido a 20 de los 32 estados de la república, incorporando un total de 1145 escuelas y 5778 profesores (**Ursini, Sánchez y Santos, 2005**).

Castillo (2008) considera que las tecnologías de información y comunicación están presentes en los sistemas que componen los diferentes ámbitos de la sociedad. Asimismo, que en la educación se puede decir que aunque ha sido lenta la inclusión de esas tecnologías algunas investigaciones sustentan la importancia de su uso. De tal manera que el debate no se centra en su necesidad sino en: a) las ventajas que ofrece su empleo, sobre todo partiendo de la premisa de que son medios o herramientas que tienen la propiedad de contribuir a enriquecer el proceso de enseñanza-aprendizaje, b) su incidencia en la cognición y procesos del pensamiento de los alumnos, y c) la manera como impactan en la reestructuración del currículo educativo.

Es importante recordar que la incorporación de la tecnología computacional al ámbito educativo abrió la posibilidad de vincularla a diversos campos específicos, entre ellos a la enseñanza de las matemáticas. El argumento principal para su inserción fue que la tecnología podía mejorar el aprendizaje de esta disciplina. En consecuencia, pasado algún tiempo, varios investigadores (**Fey, 1989**; entre otros) señalaron la necesidad de determinar el impacto real que tenía el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas así como en la vida cotidiana del aula.

Al revisar las conclusiones de algunas investigaciones sobre el aprendizaje de las matemáticas y el uso de la tecnología, se encontró fundamentalmente lo siguiente: la interacción tecnología computacional con la enseñanza de las matemáticas tiene contribuciones y limitaciones (**Vale y Leder, 2004**). En el primer caso, permite tanto una gran variedad de estrategias para la enseñanza como formas de *hacer* matemáticas (**Friel, 2000**). Sin embargo, algunos factores delimitan su uso: la accesibilidad al equipo computacional, la versatilidad y dificultad del *software*, la forma de incorporarla en el aula y el desconocimiento en determinados contextos escolares, en contraste con otros (como en estadística), de las implicaciones de programas computacionales específicos, como la hoja de cálculo, en el aprendizaje matemático.

En contraparte, varios autores han analizado lo que logran los alumnos al usar la tecnología (**Friel, 2000; Huntley, Zucker & Estey, 2000**). En esta dirección, **Lewis (2006)**, en niños de educación preprimaria, primaria y secundaria que utilizaban hojas de cálculo al aprender matemáticas, refiere una serie de habilidades que el uso de la tecnología promovía en los estudiantes y postula que la hoja electrónica, en particular el programa Excel, representa una poderosa herramienta de aprendizaje que los alumnos deben emplear si tienen acceso a ella. Lewis destaca que dicho programa ofrece un medio concreto para explorar conceptos abstractos en matemáticas, aunque también podría suceder en otras materias. En este caso, los conceptos matemáticos son mostrados de varias maneras diferentes, mediante el uso de imágenes, cuadrados de colores, etcétera. Especialmente la hoja de cálculo es una herramienta que ofrece ventajas para los estudiantes visuales. En particular, promueve habilidades de pensamiento avanzado entre ellas el desarrollo de solución de problemas y procesos de generalización, esto se origina cuando los estudiantes usan fórmulas ya diseñadas y posteriormente hacen sus propias representaciones para manipular números o cuando utilizan fórmulas para generalizar una regla, por ejemplo, para hacer conversiones, para computar los totales de un presupuesto y calcular razones. Otra ventaja del uso de la hoja de cálculo, según Lewis, es que los estudiantes al trabajar haciendo tablas y gráficos aprenden a organizar sus ideas y a presentar información, igualmente, les ayuda a desarrollar la capacidad de análisis e interpretación al efectuar ejercicios donde manipulan datos, por ejemplo pidiéndoles que definan el máximo y el mínimo, la media, la mediana y la moda de los datos. Además, el uso de la computadora aumenta la motivación para completar tareas, ya que plantea un entorno libre de riesgo donde los errores pueden ser fácilmente corregidos o editados, y propicia un aumento en la autoestima, por ejemplo, cuando el estudiante logra una presentación atractiva de su trabajo.

Entre la importante tendencia a nivel mundial de utilizar la tecnología en el escenario escolar en el proceso de aprendizaje, se ha observado uno que consiste en usarla como instrumento cognitivo, instrumentos mentales o, en palabras de **Jonassen (2000)**, como herramientas de la mente. Al respecto, **Lewis (2006)** menciona que la tecnología proporciona un medio para desarrollar distintas habilidades tal como resolver problemas, trabajar con diferentes modalidades representacionales, y formular y probar hipótesis, entre otras. Al tomar en cuenta resultados, como los anteriores, parece existir cierta garantía de que apoyar con tecnología la enseñanza de las matemáticas podría propiciar buenos resultados en el aprendizaje de los alumnos. Esta expectativa tiene como fundamento subyacente que la tecnología permite a los alumnos aprender de forma significativa, descubriendo y construyendo el conocimiento en forma colaborativa y en ambientes realistas y enriquecidos.

En lo relativo a la enseñanza de las matemáticas, algo más de la última década se ha caracterizado por una fuerte orientación a incorporar en su enseñanza a la tecnología. Las experiencias en este sentido se observan en distintas lugares del mundo. Si bien en algunos países desarrollados esto inició con antelación, por lo cual algunas investigaciones ya habían explorado las posibilidades que la tecnología ofrece para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diversos niveles escolares **(Mariotti, 2005)**.

Aunque se ha estudiado el papel de diferentes variables sobre el logro académico en matemáticas (cf., **Andrews & Hatch, 2000**, en creencias; **Carvallo, Caso y Contreras, 2007**, en variables contextuales; **Middleton & Spanias, 1999**, en motivación; **Schiefele & Csikzentmihalyi, 1995**, en variables cognitivas; **Hannula, 2002**; **McLeod, 1992**, en variables afectivas), pero teniendo como base que hay cierta evidencia de que las actitudes tienen una influencia especial en el rendimiento (**Fennema & Sherman, 1976**, **Hernández y Gómez-Chacón, 1997**), el autor de este trabajo con la colaboración de Ursini (**Sánchez y Ursini, 2008**) han incursionado en el tema de actitudes hacia las matemáticas en escenarios donde está involucrado el uso de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas.

En los trabajos realizados con estudiantes mexicanos, en que no interviene la tecnología, sistemáticamente se han encontrado actitudes neutrales o ligeramente positivas hacia las matemáticas (**Campos, 2006**; **Juárez, 2008**). Ante ello el interés natural que surge consiste en indagar si existen diferencias en el rendimiento en matemáticas entre estudiantes que emplean tecnología en el salón de clases de matemáticas para su enseñanza y estudiantes que no la usan; así como explorar posibles diferencias entre ambos grupos de estudiantes (empleo o no uso de la tecnología en la clase de matemáticas) en el rendimiento matemático.

Los resultados de distintos estudios efectuados por **Sánchez y Ursini (2007)**, **Ursini y Sánchez (2008)** y **Ursini, Sánchez y Ramirez (2007)** sugieren lo siguiente: En primer lugar, que es indiscutible que la introducción de la tecnología en el salón de clases promueve cambios importantes en la actuación del profesor y del alumno, en particular, el proceso se centra en este. El alumno tiene una responsabilidad crucial en su formación, en tanto el profesor adopta un papel de facilitador para el aprendizaje del alumno consistente principalmente en planear sus tareas y actividades. En segundo lugar, los hallazgos obtenidos indican ostensiblemente el nulo influjo sobre el rendimiento escolar en matemáticas de la tecnología computacional usada dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, a lo largo de la enseñanza media básica, es decir, el primero, segundo y tercer grado de secundaria. A pesar de los resultados observados los autores plantean que la importancia de estos trabajos radica en que retoman la experiencia desarrollada en nuestro país de implementar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. También señalan que independientemente del enorme potencial que la tecnología parece tener en el escenario escolar, favoreciendo diversos procesos cognitivos y habilidades del alumno, sus hallazgos no evidencian que este se refleje en el rendimiento matemático. Considerando que en los últimos años hay un particular interés de las autoridades educativas de instituciones privadas y públicas por diseñar proyectos para introducir el uso de la tecnología para apoyar el proceso de enseñanza, dando por sentado que ello garantiza un eficiente resultado en el aprendizaje de los estudiantes, es necesario desarrollar más investigación que evalúe y dilucide el rolespecífico de la tecnología en el salón de clases. Dentro de estas investigaciones sería pertinente incluir la participación de diferentes variables que quizás estarían mediando, o potenciando o inhibiendo, la relación tecnología-rendimiento académico, entre otras: el impacto emocional (v.gr., miedo) que genera la tecnología en el aula en los docentes; las variables contextuales, como el nivel socioeconómico del alumno; la motivación del alumno por el aprendizaje.

Ahora bien, un punto importante es que los resultados evidentemente no pretenden sugerir el retiro del uso de la computadora, y tal vez otras tecnologías en la educación, más bien se considera que constituye una alternativa rescatable para la enseñanza de las matemáticas pero que es elemental buscar formas efectivas de su incorporación para promover un mejor aprendizaje.

Además, la presencia de la tecnología en casi todos los aspectos de la vida diaria en la sociedad actual hace obligatorio, es decir más que necesario, que los alumnos interactúen con la tecnología dentro de su ámbito de estudio de un modo menos pasivo y más reflexivo.

Durante los últimos años ha sido muy común -afortunadamente- que las instituciones educativas emprendan distintos proyectos que implican la utilización de tecnologías modernas, como por ejemplo computadoras e Internet. Dando por sentado que estos proyectos pueden -y suelen- ser necesarios e importantes, es indispensable analizar una gran cantidad de factores a tener en cuenta antes, durante, y después de su implementación.

Algunos de estos factores no siempre son analizados, ponderados, o siquiera verbalizados. Constituyen *variables ocultas*, como por ejemplo el tiempo extra que a menudo necesitarán las personas que llevarán adelante el proyecto, el miedo que generan las nuevas tecnologías en muchos docentes, etcétera.

Cuando estas variables no son consideradas y analizadas por los miembros de la institución involucrados en el proyecto, el resultado es de una calidad inferior a la que podría obtenerse si se las hubiera traído a la luz y discutido abiertamente como única manera de superar su impacto negativo. Por ley de probabilidades, en algunas ocasiones, el proyecto resultará relativamente exitoso de todas formas, pero en otras muchas se producirá un fracaso costoso y frustrante. No son pocos los laboratorios de cómputo de distintos centros educativos con computadoras arrumbadas por recursos ineficiente o mal utilizados, escaso uso por parte de los docentes, monopolización por parte de los docentes de los centros o departamentos de informática, etcétera. Peor aún es que, en ciertos casos, incluso después del fracaso, no se reconocen sus causas reales sino que se le atribuye a una supuesta incapacidad de la tecnología para satisfacer las expectativas ingenuas o desmedidas que en ella se habían depositado.

Está en las autoridades educativas, los docentes y los alumnos de niveles de educación media a superior analizar profundamente todos los factores a tener encuenta para lograr una planificación y posterior implementación exitosa de proyectos educativos en los que se utilicen nuevas tecnologías.

Como conclusión, con una adecuada planeación del uso de la tecnología computacional en el salón de clases, respecto al tipo de actividades, el tiempo destinado a ellas, la evaluación sistemática de la pertinencia o no de su empleo para trabajar algunos conceptos matemáticos, el análisis de la paquetería computacional más adecuada para propiciar una mejor comprensión de los conceptos matemáticos tratados dentro de un curso, entre otros aspectos, y a pesar de los resultados obtenidos en los estudios de **Ursini y Sánchez (2010)**, no se descarta la posibilidad de que la tecnología aplicada en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas acerque este proceso, más que cualquier otra estrategia didáctica, o que permita diseñar ambientes de aprendizaje como los plantea Marcelo (2001, citado en **Castillo, 2008**). De acuerdo con él un aprendizaje debe ser: activo, autónomo, colaborativo, constructivo, orientado a metas, reflexivo, centrado en problemas y casos.

Sin embargo, se reitera, para alcanzar un aprendizaje con dichas características es indispensable repensar el perfil en cuanto a competencias del docente y las actividades que debe realizar para hacer uso de las tecnologías, aunque lo mismo se aplicaría al estudiante.

Referencias

- **Andrews, P. & Hatch, G. (2000).** A comparison of Hungarian and English teachers' conceptions of mathematics and its teaching. *Educational Studies in Mathematics.* 43 (1), 31-34.
- **Camacho, R. A. (2006).** Socioepistemología y prácticas sociales. *Educación Matemática, 18*, 1, 133-160.
- **Campos, C. (2006).** *Actitud hacia las matemáticas: Diferencias de género entre estudiantes de sexto de primaria y tercer grado de secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.
- **Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006).** Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. L. Radford & D'Amore, B. (Guess Editors), 27 – 46.
- **Carvallo, P. M., Caso, N. J. y Contreras, N. L. A. (2007).** Estimación del efecto de variables contextuales en el logro académico de estudiantes de Baja California. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*. *9* (2), 1-15.
- **Casanova, P., Cruz, M., de la Torre, M. & de la Villa, M. (2005).** Influence of family and socio-demographic variables on students with low academic achievement. *Educational Psychology, 25* (4), 423-435.

- **Castillo, S. (2008).** Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.11,* 2, 171-194.
- **Fennema, E. & Sherman, J. A. (1976).** Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes towards the learning of mathematics by females and males. *Catalog of Selected Documents in Psychology*. 6 (1), 31.
- **Friel, N. S. (2000).** *Identifying a research agenda: the interaction of technology with the teaching and learning of data analysis and statistics.*UNC-Chapel Hill.
- **Fey, J. T. (1989).** Technology and mathematics education: A survey of recent developments and important problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 237-272.
- **Hannula, M. S. (2002).** Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics*. *49*, 25-46.
- **Hernández, R. P. & Gómez-Chacón, I. M. (1997).** Las actitudes en educación matemática. Estrategias para el cambio. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *13*, 41-61.
- **Huntley, M. A., Zucker, A. A. & Estey, E. T. (January 2000).** A review of research on computer-based tools (Spreadsheets, graphing, data analysis, and probability tools) with an annotated bibliography.Arlington, VA: SRI International, Project PO3377.
- **Jonassen, D. (2000).** *Computers as mindtools for schools.* EUA.: Prentice-Hall.
- **Juárez, J. A. (2008).** *Actitudes y rendimiento en matemáticas usando la hoja electrónica de cálculo: Un estudio longitudinal*. Documento del examen pre-doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

- **Lewis, P. (2006).** *Spreadsheet magic.* (Second edition).USA: ISTE.
- **Mariotti, M.A. (2005).** New artefacts and mathematical meanings in the classroom. En F. Olivero y R. Sutherland (eds.) *Vision of mathematics education: embedding technology in learning*. Proceedings of ICTMT, Bristol (England), pp. 2-11.
- **McLeod, D. B. (1992).** Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: Macmillan.
- **Middleton, J. A. & Spanias, P. A. (1999).** Motivation for achievement in mathematics: Findings, generalizations and criticism of the research. *Journal for Research in Mathematics Education.30*, 65-88.
- **Sánchez, J. G. y Ursini, S. (2007).** Dos enfoques para medir la relación entre actitudes hacia las matemáticas y aprovechamiento matemático: La experiencia mexicana con EMAT. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 20*, 724-729.
- **Sánchez, J. G. y Ursini, S. (2008).** El papel de la tecnología en el rendimiento escolar estudiantil. La experiencia en la enseñanza de las matemáticas. *Memorias del Congreso Internacional de Evaluación Educativa.* Área temática ‘Evaluación del desempeño escolar’ Capítulo 4, 1-14[CD-ROM]. Tlaxcala, México.
- **Sánchez, J. G. y Ursini, S. (2011).** Actitudes y enseñanza de las matemáticas. En L. M. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta y A. R. Hernández-Ulloa (coord.) *Razonamiento matemático epistemología de la imaginación (Re) pensando el papel de la epistemología en la Matemática Educativa.* Barcelona (España): Gedisa.
- **Schiefele, U. S. & Csikzentmihalyi, M. (1995).** Motivation and ability as factors in mathematics experience and achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*. *26*, 163-181.

- **Stewart, I. (2006).** *Letters to a young mathematician.* USA: Basic Books.
- **Ursini, S., Sanchez, G. y Ramirez, M. P. (2007).** Using Technology in the Mathematics Class: How this Affects Students' Achievement and Attitudes. *Proceedings of the 8th ICTMT, (Integration of ICT into Learning Processes).* (Pp. 29) [CD-ROM]. University of Hradec Králové, Czech Republic.
- **Ursini, S., Sánchez, G. y Santos, D. (2005).** *Actitudes hacia y desempeño en matemáticas de alumnos de 1° de secundaria: diferencias por sexo y género.* 3ª Reunión Nacional de Investigación en Educación Básica, Proyectos Financiados por el Fondo Sectorial, SEP/SEB-CONACYT 2003, Tuxtla Gutiérrez, México.
- **Ursini, S. y Sánchez, G. (2008).** Gender, technology and attitude towards mathematics: a comparative longitudinal study with Mexican students. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education. 40* (4), 559-577.
- **Vale, C. M. & Leder, G. C. (2004).** Student views of computer-based mathematics in the middle years: Does gender make a difference? *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 287-312.

CAPÍTULO 4

ESTRUCTURA PSICOLÓGICA DE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS

Humberto Rosell-Becerril

Dada la naturaleza social de los procesos psicológicos humanos estos requieren de una adquisición y desarrollo complejos y dinámicos que tienen como base cerebral las conexiones nerviosas temporales (**Vigotsky, 1991**) que se conforman en redes corticales, y que dependen de los andamiajes que la psicopedagogía establece (**Talizina, 2009**; **Roselli y Matute, 2011**), considerando la propia naturaleza psicológica de las funciones (**Quintanar y Solovieva, 2005**). La estabilidad de la funcionalidad de los procesos no sólo depende de dichos andamiajes, además requieren de su uso adecuado en lo cotidiano, en la solución de problemáticas que enfrentamos a cada momento en nuestras acciones sociales (**Ortiz-Moncada, 2007**; **Solovieva, Ortiz-Moncada, y Quintanar, 2010**).

En cualquier actividad rectora -en este caso escolar superior- las personas aplicamos una gran serie de procesos mentales en la solución de problemas aritméticos y de cálculo, estos mantienen una estructura psicológica compleja (**Luria, 1995**; **Peña-Casanova, 2007**; **Rosas, Solovieva, García y Quintanar, 2012**), es decir se componen de diferentes eslabones que trabajan de manera concertada para la conclusión exitosa de la tarea asignada al sistema funcional correspondiente (**Luria, 1995**; **Rosas y Rosas, 2010**). Estos son parte de las habilidades intelectuales que hemos adquirido y mantenido activas. Su análisis como procesos psicológicos es multirreferencial pues son diversas las neurociencias involucradas en su estudio (**Radford y André, 2009**).

En el presente capítulo tomaremos como referencia a la teoría socio-histórica, tanto neuropsicológica (**Luria, 1995**; **Peña-Casanova, 2007**) como psicopedagógica (**Petrovski, 1980**; **Talízina, 2001; 2009**; **Salmina y Filimonova, 2002**), ya que establece características específicas del análisis de la estructura psicológica que se requiere para las tareas de tipo aritmético, incluidas en ello las de cálculo numérico (**Quintanar y Solovieva, 2005**). Es claro que, de antemano, el análisis psicológico o mejor dicho psicopedagógico, y el neuropsicológico se dirigen no a la estructura del pensamiento establecida por la lógica formal, o bien, al razonamiento silogístico, ya que en estos casos las formulas del acto mental están conformadas, los juicios del razonamiento están establecidos, son premisas que interactúan de forma determinada para dar cuenta de la conclusión deductiva, un ejemplo de ello es:

- Premisa general: *los excelentes psicólogos son zaragozanos*.
- Premisa particular: *Pascual es un buen psicólogo.*
- Por lo tanto se concluye: *el psicólogo Pascual no es zaragozano*.

En cada premisa, una general, la otra particular hay ya juicios acabados, de los cuales se deduce otro juicio de interacciones en la conclusión deductiva, no atendiendo el cómo se lleva a cabo la estructura del pensamiento para cada uno de los juicios, centrando su análisis en los conceptos, los juicios y conclusiones (**Petrovski, 1980**).

En este caso el interés se centra precisamente en la estructura del acto del pensamiento ya que es allí donde podemos identificar los eslabones desplegados de éste para establecer los andamiajes requeridos para su enseñanza, identificando sus cualidades para facilitar su aprendizaje y desarrollo (**Solovieva, Ortiz-Moncada y Quintanar, 2010**; **Rosas, Solovieva, García y Quintanar, 2012**). El interés en esta tarea, entonces, es adoptado por la psicopedagogía y actualmente, por los métodos y las técnicas neuropsicológicas, esto permite plantear, si no acabadamente, sí en mayor complejidad, diversas operaciones mentales establecidas en el desempeño psicológico de las personas en la solución de problemas aritméticos y de cálculo (**Radford y André, 2009**). Este estudio se dirige a identificar las causas internas, emotivas, cognitivas que conducen a unos u otros resultados, correctos o incorrectos, estables o no, además de las influencias externas que aportan elementos, buscando explicar el proceso. Ahora, si bien no desplegaré aspectos del desarrollo del pensamiento en la ontogenia de la persona, es fundamental el conocerlos para un entendimiento integral de dichas estructuras psicológicas, y no únicamente cognitivas, conformadas en la personalidad de los individuos.

Respecto a la estructura psicológica y los factores que le subyacen iniciaré diciendo que toda actividad humana, para su desempeño estable, requiere de ser identificada como una necesidad imperante, en el contexto inmediato o a largo plazo, que demanda ser satisfecha. Este hecho requiere de la conciencia y del proceso analítico sintético que permite identificarnos de forma dinámica en nuestra propia condición y del papel que jugamos en los diferentes grupos a los que pertenecemos, y de la o las funciones con las que participamos en las diversas relaciones que establecemos. Al identificar la necesidad establecemos motivos u objetivos generales y específicos, los cuales darán direccionalidad a nuestras acciones (**Tsvetkova, 1999**). Los motivos generales se relacionan con los contextos sociales y los específicos con los contextos cognoscitivos de la persona. Junto a estos motivos surgen actitudes emocionales para desplegar nuestras aptitudes intelectivas, facilitando enfrentar positivamente inconvenientes de nuestro desempeño cognitivo, manteniéndonos estables y tenaces en la tarea, este estado emotivo también se dirige hacia objetos y personas relacionadas con nuestras acciones, es decir con causas que son además externas. Ante estos motivos establecemos las cualidades de la problemática, conformada por diversos elementos y relaciones entre ellos. Esto es diferente a cuando el problema se nos presenta estructurado, en ambos casos requerimos de un proceso dinámico de análisis y síntesis, sin embargo en el segundo caso el análisis se dirige a establecer no el problema sino el algoritmo de solución al problema, por ejemplo, en el primer caso:

Un psicólogo educativo es contratado para establecer las características del desempeño del aprendizaje de la población de una escuela primaria.

En el problema general no se establecen sus cualidades, hay que investigarlas en el contexto dónde se dan sus elementos para establecer sus características y relaciones. Esto es diferente si planteamos la solución de un problema desplegado:

Un psicólogo educativo tiene que determinar a cuántos pequeños, de los 93 alumnos de los tres grupos de primer grado de primaria, hay que integrar al programa de estimulación del lenguaje dado su bajo desempeño en habilidades psicolingüística. Considerando que el 100 % obtuvo un CI general de entre 91 y 95, de los cuales el 13 % se benefició del CI ejecutivo, a cuántos alumnos tendrá qué integrar al programa.

Entonces, para dar solución a cualquiera de los problemas se deben analizar los datos que contiene el hecho, el problema dado verbalmente o por escrito. Este contenido del problema informa sobre los objetos y fenómenos que se encuentran en determinadas interrelaciones e interdependencias, algunas de ellas son explicitas, mientras otras quedan como incógnitas. La respuesta a la pregunta final del problema se puede encontrar solamente después del establecimiento de las dependencias entre los conjuntos dados en el problema, determinando sus nexos lógicos, expresados en relaciones matemáticas adecuadas. Frecuentemente los mismos objetos, palabras, e inclusive combinaciones de palabras, exigen diferentes operaciones aritméticas en dependencia de los contextos en que estas palabras se encuentran (**Tsvetkova, 1999**; **Radford y André, 2009**). Por eso la información completa la portan no las palabras aisladas sino las oraciones que forman expresiones coherentes del problema (**Tsvetkova, 1999**), por ejemplo:

Al finalizar el segundo bimestre escolar, dos de los nuevos grupos de preescolar, conformados por 27 alumnos cada uno, requieren de un reporte psicopedagógico por cada alumno. ¿Cuántos reportes deben entregar la psicóloga y el pedagogo del plantel?

En este caso el análisis de los elementos *"dos… grupos… de 27 alumnos cada uno" requieren de un…"* arroja como operación para la solución una adición. Estas mismas palabras en una estructura gramatical parecida, con una organización diferente, da como referencia operaciones matemáticas diferentes, por ejemplo:

Al finalizar el segundo bimestre escolar, 27 alumnos deben integrarse en dos nuevos grupos equivalentes, sin considerar los resultados de su reporte psicopedagógico. ¿Cuántos alumnos deben integrar cada grupo?

En este caso consideramos como información primaria *"27 alumnos… integrarse en dos… grupos"* por lo que la solución depende de una división.

Así, en el caso de la solución de los problemas aritméticos, de acuerdo con **Tsvetkova (1999)** y **Luria y Tsvetkova (1981)** cualquiera de ellos incluye una pregunta fundamental, cuya respuesta constituye el objetivo de la solución del problema, el cual se obtiene al analizar dinámicamente los datos, de los cuales tendrán que ser separados los irrelevantes de los importantes para determinar el tipo de nexos lógicos y matemáticos formulados en el problema. Estas formulaciones se presentan mediante construcciones gramaticales, su análisis permite la comprensión de las operaciones requeridas. La ejecución de las operaciones de cálculo requiere de una estructura particular, la cual se analizará en otro momento, no obstante de forma breve indicaremos la importancia del carácter simbólico: semántico y sintáctico del lenguaje matemático solicitado en la solución de las tareas aritméticas. Otros recursos son la espacialidad y la memoria operativa y de trabajo.

Entonces, sólo sobre la base de los datos, obtenidos como resultado de la actividad orientativo-investigativa, la persona que resuelve puede y debe construir el esquema general o plan desplegado del contenido para la solución del problema y, después de esto, encontrar las operaciones aritméticas concretas que se correspondan con el plan creado.

Tsvetkova (1999) refiere que la elaboración del esquema general, o del plan desplegado del contenido de la solución del problema, depende de muchos factores: a) del grado de complejidad de la tarea, b) del grado e automatización del proceso y de la habilidad de solución de los problemas aritméticos en general, o de la categoría dada de los problemas, c) del grado de desarrollo de los procesos del pensamiento, d) del nivel en el cual se resuelven las tareas: en el de las acciones externas, materializadas, desplegadas con una amplia utilización del lenguaje externo; el nivel de la acción mental compactada e interna; o el nivel de los procedimientos heurísticos de la solución, en el que con frecuencia surge el procedimiento del insight y otros.

El proceso de solución del problema transcurre con el obligatorio autocontrol sobre las acciones que se realizan, tanto en el curso, como al final de la solución del problema (**Tsvetkova, 1999**; **Radford y André, 2009**). Hasta aquí identificamos que la solución de problemas aritméticos se conforma por fases relacionadas entre sí, como son: la base orientadora de la acción, que planifica las actividades, las fases de la aplicación del sistema de las operaciones concretas y, finalmente, del control.

Un proceso fundamental que facilitará el mantener presente los objetivos y el plan original es la memoria verbal de trabajo, ésta facilita también los datos dados en el problema, nos permite mantener los resultados de las operaciones parciales para integrarlos y solucionar el problema.

Finalmente la verificación de los resultados respecto a los objetivos permitirá concluir el proceso dinámico, en caso de que la respuesta dada sea correcta, en caso contrario se tendrá que reiniciar el proceso de análisis de los diferentes niveles de acción intelectual para determinar en cuál de ellas se procedió inadecuadamente, creando un nueva respuesta.

De acuerdo con **Vigotsky (1991)**, **Luria (1981; 1995)** y **Tsvetkova (1999)**, el grado de comprensión del problema y de la automatización de las posibles acciones, genera que se abrevie la estructura de solución, tomando atajos en las operaciones mentales.

Entonces, a manera de conclusión, la estructura psicológica de la solución de problemas aritméticos es compleja en su estructura, es de naturaleza social, requiere de andamiajes complejos, externos en un inicio, internos en su consolidación y automatización. Por tanto, la psicopedagogía juega un papel fundamental en su enseñanza, en su establecimiento, en su consolidación. El contexto cultural y económico son dos variables que tienen también un efecto determinante en su estabilidad y desarrollo cognitivo-antropológico, en este contexto consideremos que el abuso de los nuevos recursos tecnológicos evidentemente afecta la adquisición y estabilidad de ellos **(Peña-Casanova, 2007)**, interfiriendo negativamente en habilidades que al ser humano le han costado miles de años de evolución y desarrollo.

Referencias

- **Luria, A. R. (1995).** *Las funciones corticales superiores del hombre*. México: Fontamara.
- **Luria, A. R. y Tsvetkova, L. S. (1981).** *La resolución de problemas y sus trastornos*. Barcelona: Fontanella.
- **Ortiz-Moncada, G. (2007).** *La formación del concepto de número en escolares de una comunidad de habla náhuatl-castellana*. Tesis para obtener el grado de Maestría en Diagnóstico y Rehabilitación Neuropsicológica. México; Facultad de Psicología, BUAP.
- **Peña-Casanova, J. (2007).** *Neurología de la conducta y neuropsicología.* España, Panamericana.
- **Petrovski, (1980).** *Psicología general*. Moscú; Progreso.
- **Quintanar, L y Solovieva, Y. (2005).** Análisis neuropsicológico de los problemas en el aprendizaje escolar. *Revista Internacional del Magisterio*, 15: 26-30.
- **Radford, L. y André, M. (2009).** *Cerebro, cognición y matemáticas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* 12(2): 215-250.
- **Rosas, D. y Rosas, Y. (2010).** *Formación del concepto de división partitiva en niños de tercer grado de primaria*. Tesis de licenciatura. México; FES-Zaragoza, UNAM.
- **Rosas, Y., Solovieva, Y., García, M. y Quintanar, L. (2012).** Gradual formation of concept of decimal systeminmexican school children. luria's continuing influence on international psychology. *Memorial workshop dedicated to 110 anniversaries from Luria's birth*. Moscow, Russia: September 20-22, 2012.
- **Roselli, M y Matute, E. (2011).** La Neuropsicología del desarrollo típico y atípico de las habilidades numéricas. *Revista Neuropsicología*, *Neuropsiquiatría y Neurociencias*, Abril, 11, (1), 123-140.
- **Salmina, N. y Filimonova, O. (2002).** *Problemas en el aprendizaje de las matemáticas básicas y su corrección.* México: Instituto Universitario de Estudios Avanzados. Centro Regional para el Desarrollo de las Habilidades Cognitivas.
- **Solovieva, Y., Ortiz-Moncada, G. y Quintanar, L. (2010).** Formación de conceptos numéricos iniciales en una población de niños mexicanos. *Cultura y Educación, 22* (3), 345-361.
- **Talízina, N. (2001).** *La formación de las habilidades del pensamiento matemático.* México: Editorial Universitaria Potosina.
- **Talizina, N. (2009).** *Teoría de la actividad aplicada a la enseñanza.* México: Universidad Autónoma de Puebla.
- **Tsvetkova, L. (1999).** *Neuropsicología del intelecto*. México; UAEM.
- **Vygotski, L. S. (1991).** *Sobre los sistemas psicológicos*. *Obras escogidas I.* Madrid: Visor.

CAPÍTULO 5

PROPUESTAS Y POSIBILIDADES DE PREPARACIÓN PARA LA ADQUISICIÓN DE MATEMÁTICAS

Yulia Solovieva
Emelia Lázaro García
Luis Quintanar Rojas

La presencia de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en la edad escolar y su persistencia frecuente hasta la educación superior, ha incrementado el interés de diversas disciplinas por este problema. La Secretaría de Educación Pública (SEP, 2013) reporta en sus resultados históricos, que de los niños de educación básica evaluados mediante la **Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) entre 2006 y 2013**, un porcentaje superior al 50% se ha aglutinado en los niveles más bajos (insuficiente y elemental) en el área de matemáticas. En 2006 el 82.4% de los niños se encontraron en los niveles insuficiente y elemental y en la evaluación de este año (2013) el porcentaje fue de 51.2%. De acuerdo a los datos 2010-2011 sólo el 8.4% de los niños de primaria, alcanzaron un nivel excelente, porcentaje que ha aumentado para la evaluación de 2013, en la que se reporta el 19.8%. No obstante, siguen existiendo dudas en relación con la forma a través de la cual se enseñan las matemáticas en la educación básica. Consideramos que permanece la necesidad urgente de elaborar e implementar propuestas metodológicas y didácticas innovadoras para la enseñanza de las matemáticas.

En México, la formación de las habilidades matemáticas básicas se desarrolla a través del modelo por competencias, a pesar de que este modelo no ha sido completamente adaptado al ámbito pedagógico. En la práctica pedagógica predomina el entrenamiento de los niños preescolares para la memorización mecánica de los números y de las operaciones matemáticas básicas (**Cázares, 2003**). No obstante que se han propuesto diversas metódicas de enseñanza, formalmente no existe una metodología clara que brinde a los docentes y a los pedagogos las herramientas necesarias para introducir la enseñanza de las matemáticas en los niveles de educación preescolar y primaria (**Solovieva y Quintanar, 2010**). En otros países de América Latina, los estudios reportan que la didáctica predominante en el nivel inicial y medio durante la adquisición de las matemáticas, es la memorización directa de lo que el profesor expone verbalmente en clase (**Saramaga de Oliveira & Baraúna, 2012**). Estos mismos autores concluyen que es urgente proponer estrategias innovadoras y modificar las formas de enseñanza antiguas de las matemáticas en la escuela.

Algo que es ampliamente reconocido en la actualidad, en relación al tema de la adquisición de las habilidades matemáticas, es la inclusión de los elementos previos necesarios para la adquisición inicial de los conceptos numéricos en los programas didácticos. Precisamente uno de los objetivos de este capítulo es tratar de esclarecer las preguntas fundamentales relacionadas con este tema: ¿en qué momento resulta prudente iniciar o introducir dichos elementos y a través de qué estrategias?

Es evidente que la comprensión de cuáles y en qué consisten estas habilidades previas y el cómo realizar la preparación, difiere de autor a autor. El punto de vista más común (y que forma parte del programa oficial de enseñanza básica) es que los niños en edad preescolar deben acumular experiencias empíricas sin poder acceder aún a los conceptos matemáticos formales. Por cierto, la promoción de la ampliación de la experiencia empírica continúa prácticamente sin cambio alguno a lo largo de la escuela primaria: el niño cuenta en orden directo e inverso, el niño suma, resta, multiplica, memoriza tablas de suma, multiplicación, sustracción y división, trabaja con números enteros y diversos tipos de fracciones (SEP, 2011). Los conceptos matemáticos, tales como el concepto de número y el sistema de numeración no se incuyen de manera explícita en los programas. Se postula formalmente la necesidad de la formación de conceptos, pero realmente no se trabaja con ello en el salón de clases, todas las actividades son técnicamente ejecutadas por copia en la mayoria de las casos y/o memorizadas en casa. La idea de que a partir de este tipo de actividad más tarde *surgirá espontáneamente el concepto de número*, es totalmente equivocada. La evidencia de ello es el bajo éxito escolar en la escuela secundaria, la deserción, el bajo rendimiento o el fracaso escolar.

Dicha idea se basa en la aceptación común, incuestionable, de la concepción de aprendizaje postulado a partir de las obras de Jean Piaget, acerca de que el pensamiento lógico formal no surge antes de los 12 años de edad y de que no se necesita hacer nada antes, salvo observar, registrar y brindar ciertas condiciones para la interacción (**Case, 1974**; **Demetriou, 1988**; **Inhelder & Cellérier, 1996**). A pesar de que Piaget no expresa esta idea de manera directa, es lo que normalmente de deduce de sus aportaciones. Es una conclusión implícita (no razonada) que se refleja en la actitud de los pedagogos y de los psicólogos, que simplemente aceptan de manera uniforme esta idea. La consecuencia de esta aceptación es la ausencia absoluta de una metodología para la introducción de conceptos matemáticos en la escuela primaria y de una incomprensión de qué es lo que se debe considerar como elementos previos, o como preparación para la adquisición de las matemáticas.

La ausencia de esta claridad se refleja incluso en los tipos de evaluación y de predicción del éxito en las matemáticas en la escuela. Los autores valoran diversos aspectos demasiado amplios y no precisamente relacionados con la adquisición de las matemáticas y no consideran las habilidades conceptuales de ninguna manera. A pesar de que la evaluación de las habilidades en esta edad es fundamental para comprender el desarrollo ulterior del niño y su desempeño en la escuela primaria, es bastante cuestionable la forma misma de la evaluación y de las conclusiones a las que se llega. Lo anterior debido a que algunos estudios longitudinales han reportado una alta predicción del éxito o fracaso escolar en el aprendizaje de las matemáticas a partir del diagnóstico en la edad preescolar (**Bull, Espy y Wiebe, 2008**; **Passolunghi, Mammarella y Altoe, 2008**; **Desoete y Cols., 2009**; **Andersson, 2010**; **LeFevre y Cols., 2010**). Otros estudios han relacionado las dificultades que presentan los niños escolares en la adquisición de las competencias matemáticas con el funcionamiento previo (en la edad preescolar) de la memoria de trabajo (**Schuchardt y Mahler, 2010**), de la memoria espacial secuencial (**Mammarella, Lucangeli y Cornoldi, 2010**), de la memoria a corto plazo y de las funciones ejecutivas (**Bull, Espy y Wiebe, 2008**). Una vez más se habla de memoria a corto y largo plazo y de las funciones ejecutivas, pero no hay nada preciso que tenga que ver con las matemáticas. Pareciera que el éxito escolar en todas las materias sin excepcion, dependen solo de la memoria y de las funciones ejecutivas, lo cual no parece muy convincente desde el punto de vista del contenido mismo de las materias de aprendizaje, ni de las posibildiades reales de la intervención.

A pesar que se destaca la importancia de la edad preescolar para la preparación para las matemáticas y la posibilidad de predicción del éxito futuro en esta materia, la realidad muestra que no existe un consenso en relación a los aspectos que deben ser desarrollados en esta etapa. La mayoría de las propuestas se enfocan al desarrollo específico en una área o de algún componente particular, pero el problema radica en que estas áreas o componentes parecen relacionarse más con aspectos cognitivos generales y no con el contenido propio de las matemáticas. Por ejemplo, algunos autores proponen como componentes básicos la representación espacial y la atención (**Mix, Huttenlocher y Levine, 2002**), la adquisición de competencias numéricas (**Gersten, Jordan y Fojo., 2005**), el reconocimiento de combinaciones de números (**Locuniak y Jordan, 2008**), el desarrollo de sistemas numéricos preverbales (**Levine, Jordan y Huttenlocher, 1992**), el desarrollo de la conciencia espacial, la secuencia, la comparación, la clasificación (**Aunola y Cols., 2004**) y la adquisición de vocabulario matemático (**Bryant, 2005**). Es posible observar que entre estas propuestas se mezclan términos de psicología cognitiva (conciencia espacial y atención) con ciertas habilidades propiamente numéricas y lógicas. Pero lo más grave es que todo ello se queda en el nivel de propuestas de evaluación y no de propuestas de intervención.

Nuestros estudios también han mostrado un nivel insuficiente del grado de preparación del niño para la adquisición de las matemáticas y un bajo éxito

escolar. Sin embargo, no señalamos a la memoria de trabajo o a las funciones ejecutivas, sino precisamente a la presencia o ausencia de la adquisición de los componentes de las habildiades matemáticas previas, entre los cuales incluimos al componente lógico, al numérico, al simbólico y al espacial (**Salmina & Filimonova, 2010**; **Solovieva, Ortíz y Quintanar, 2010**). En el caso de las evaluaciones de preparación de los niños mexicanos para la escuela primaria, se ha observado un nivel bajo o nulo en diversos niveles, desde el punto de vista socio-económico, de la función simbólica (**Solovieva, Lázaro y Quintanar, 2013**; **Bonilla, Solovieva y Jiménez, 2012**; **Solovieva y Quintanar, 2013**).

Todas estas evidencias indican la necesidad de implementar un trabajo didáctico específico de formación precisamente de estos componentes, antes de iniciar un curso formal de enseñanza de las matemáticas. En algunos de nuestros estudios hemos trabajado con programas pedagógicos interventivos con niños mexicanos preescolares y escolares. Debemos señalar que el material que exponemos en el presente capítulo es básicamente una descripción de los resultados de algunas investigaciones innovadoras realizadas por estudiantes bajo la dirección de los docentes de la Maestría en Neuropsicología de la BUAP.

Debemos aclarar que cuando nos referimos a los *componentes*, no se trata de *funciones cognitivas*, sino de la formación de acciones intelectuales específicas, relacionadas con el contenido propio de las matemáticas. De acuerdo al paradigma del desarrollo planteado por Vigotsky y sus seguidores (**Solovieva y Quintanar, 2004**), el niño puede realizar estas acciones inicialmente con ayuda y, ante motivación externa constante brindada por el pedagogo, después puede interiorizarlas, es decir, realizarlas de manera consciente, voluntaria e independiente. La elaboración de programas de intervención pedagógica precisamente implica la realización de una metodología didáctica que se ha propuesto desde el enfoque histórico-cultural y de la teoría de la actividad.

En general, en la propuesta histórico-cultural, diferentes autores y seguidores de este modelo (**Talizina, 2000, 2001**; **Salmina y Filimonova, 2010**) establecen que, para alcanzar un nivel óptimo de preparación psicológica del niño para la escuela, es necesario elaborar programas preventivos que garanticen su desarrollo y se orienten a incrementar el nivel básico durante el inicio del estudio de las matemáticas para evitar dificultades posteriores. Lo anterior debido a que los seguidores de este modelo defienden la idea de que la forma de la enseñanza de las matemáticas en la educación básica debería considerarse, no tanto desde las etapas generales de la inteligencia, ni del estado de sus *funciones cognitivas*, ni del contexto cultural concreto de cada niño, sino de las características generales de preparación psicológica necesaria para la escuela y los elementos que componen las habilidades particulares relacionadas con el aprendizaje de esta área (**Leontiev, 2005**; **Talizina, 2009**).

Una de las principales autoras que ha realizado importantes aportaciones al respecto, es **Salmina (1988, 2010)**. Ella propuso la organización de cursos propedéuticos para eliminar las dificultades básicas que surgen en los niños durante la etapa inicial del estudio de las matemáticas (**Salmina y Filimonova, 2010**). En algunos trabajos (**Solovieva, Ortíz y Quintanar, 2010**; **Lázaro, Solovieva y Quintanar, 2013**) hemos mencionado los componentes que, de acuerdo a la propuesta histórico-cultural, son necesarios para la adquisición del cálculo: lógico, simbólico, numérico y espacial. Si bien este último componente no es expresado como un componente básico de manera explícita en los trabajos de **Salmina y Filimonova (2010)**, resulta fundamental durante el proceso de formación de las habilidades matemáticas. Describiremos brevemente a qué se refiere cada uno de estos componentes y posteriormente mencionaremos algunas propuestas concretas que se han desarrollado para niños mexicanos.

1. *Componente lógico.* Este componente presupone los conocimientos y las operaciones lógicas básicas. Dicho componente fue descubierto por **Piaget (1975)**, como base de la adquisición de las habilidades matemáticas, con referencia básicamente a las operaciones de conservación y de seriación. Si bien Piaget destaca la importancia de estas operaciones para el aprendizaje futuro, no propone nada que pueda facilitar su adquisición. En los programas de educación preescolar se incluyen las tareas de conservación y seriación, pero estas tareas solo se ejecutan directamente sin que el niño tenga la opción de concientizar, ante el apoyo del adulto, el contenido propio de estas operaciones. Por ejemplo, para que la conservación y la seriación se puedan llevar a cabo en forma reflexiva y no mecanizada, el niño debe identificar diversas características de los objetos. Sin esta habilidad primaria, el niño nunca comprenderá la base de la conservación. De hecho, las dificultades con la acción de conservación la reportan diversos autores en edades más avanzadas que la edad preescolar, por ejemplo en adolescentes y en adultos (**Piaget, 1972**; **Carretero y Madruga, 1992**). La operación de seriación tampoco se puede realizar si el niño no descubre cuál es el rasgo, de acuerdo al cual se construye la seriación. Ningún tipo de ejecución mecánica de seriaciones ni de elaboración de secuencias puede ser considerada como estrategia adecuada de preparación para las matemáticas. Debemos subrayar que la operación no puede ser llamada como *lógica* desde el punto de vista psicológico, si no se realiza de manera reflexiva por parte de quien la realice. *El hecho de que el niño la copie o la imite, no significa que ésta se haya adquirido*.

Consideramos que ya no es suficiente referirse simplemente a los nombres de los componentes u operaciones, sino ofrecer formas procesuales y didácticas para su introducción. No obstante que la presentación detallada de estas estrategias rebasa las posibilidades de este capítulo, es importante señalar la necesidad de su precisa elaboración y aprobación en la práctica educativa. Por otro lado, tampoco tiene sentido hablar de las tareas sin proporcionar a los educadores los objetivos que ellos deben alcanzar a través de la realización de éstas con los niños. De manera breve comentaremos que las tareas indispensables para la adquisición de este componente, son aquellas que incluyen como contenido lo siguiente:

1) Identificación de características.
2) Diferenciación e igualación de objetos de acuerdo a las características.
3) Comparación de objetos de acuerdo a diversas características.
4) Seriación de objetos de acuerdo a diferentes características como base.
5) Agrupación de acuerdo a una de las características.
6) Agrupación de acuerdo a más de una característica.
7) Conservación ante el cambio de un parámetro (característica) y permanencia de otro.

Existen otros aspectos importantes del componente lógico, tales como el uso de diversas estructuras lógico-verbales, pero este aspecto rebasa los objetivos del presente capítulo.

Algunos ejemplos de las tareas con los objetivos que se deben alcanzar, como consecuencia de la realización de estas tareas, se muestran en la **tabla 1**.

Tabla 1. Tareas y objetivos que se deben utilizar para la adquisición del componente lógico.

Tareas	Objetivos
Identificación de características	Poder verbalizar y mostrar diversas características que tienen los objetos.
Diferenciación e igualación de características	Determinar verbalmente y mostrar semejanzas y diferencias en los objetos y fenómenos.
Comparación de objetos	Determinar verbalmente la base, de acuerdo a la cual se comparan los objetos.
Seriación de objetos	Determinar verbalmente la base, de acuerdo a la cual se realiza la seriación y variar estos parámetros.
Agrupación de objetos	Determinar verbalmente la base, de acuerdo a la cual se realiza la agrupación y variar estos parámetros.
Conservación	Determinar verbalmente la base de la conservación y de la característica que varía y la que se conserva.

Recordamos que no se trata de *funciones cognitivas* ni de propiedades de las etapas del desarrollo intelectual que espontáneamente aparecen en la *mente* del niño, sino de resultados de la actividad conjunta introducida por el adulto con un propósito específico y accesible para el niño. Sin dicha actividad no surgen estas acciones ni la reflexión de las mismas.

2. Componente numérico. Se trata de operaciones propiamente matemáticas, que se basan en la comprensión de las relaciones cuantitativas elementales que puedan ser expresadas verbalmente ante su realización. Tales relaciones cuantitativas se refieren a la posibilidad de comprender y expresar las situaciones en las que hay relaciones entre las cantidades: más, menos que, igual a, tanto como, tantos cuantos, etc. Indudablemente la operación conocida y referida en los estudios de **Piaget (1975)**, en relación con ello, es la correspondencia recíproca.

Como en el caso del componente lógico, la correspondencia recíproca no puede ser simplemente entrenada, sino introducida como una acción que tiene su propio contenido y estructura. El objetivo de su introducción es que el niño pueda no solo imitar las acciones del adulto, sino realmente realizar la acción de correspondencia entre los elementos de los conjuntos ordenados y desordenados y reflexionar sobre el hecho de que a cada elemento de un conjunto le corresponde un elemento de otro y, como consecuencia de ello, realizar la acción de igualación de conjuntos que tiene dos opciones: quitar el elemento sobrante o agregar el elemento faltante.

Existe un punto de vista cotidiano de que el componente numérico consiste en el reconocimiento de cifras y en su denominación por parte del niño. Sin embargo, así como sucede con las letras, el hecho de que el niño mencione o nombre cifras o números[1], no implica que el niño comprenda las relaciones cuantitativas como tales. Queremos subrayar que es importante no solo incluir cifras y operaciones de suma y resta, sino la reflexión de las relaciones cuantitativas. La **tabla 2** muestra algunas tareas con los objetivos educativos correspondientes.

1 Cabe señalar que ni en los programas educativos ni en la preparación de los maestros del nivel primaria se establece la diferencia entre “cifra” y “número”, lo cual conduce a confusiones conceptuales importantes en los alumnos de la escuela primaria.

Tabla 2. Tareas y objetivos que se deben utilizar para la adquisición del componente numérico.

Tareas	Objetivos
Relación recíproca de los elementos de conjuntos ordenados.	Reflexión de la situación ante la cual un elemento corresponde (no corresponde) a un elemento del otro ante los conjuntos ordenados.
Relación recíproca de los elementos de conjuntos desordenados.	Reflexión de la situación ante la cual un elemento corresponde (no corresponde) a un elemento del otro ante los conjuntos desordenados.
Comparación de conjuntos ordenados por la cantidad de los elementos en ellos.	Concientización verbal de las relaciones más o menos referentes a la cantidad de los elementos en los conjuntos ordenados.
Comparación de conjuntos desordenados por la cantidad de los elementos en ellos.	Concientización verbal de las relaciones más o menos referentes a la cantidad de los elementos en los conjuntos desordenados.
Conservación de cantidad ante cambios de la distribución espacial.	Posibilidad de elaboración de situaciones de cambios espaciales ante la permanencia de la cantidad de elementos en conjuntos.
Posibilidad de igualación de conjuntos	Verbalización y realización de la operación requerida de agregar (sumar) y quitar (restar) la cantidad requerida de elementos para lograr la igualación de conjuntos

3. Componente simbólico. Se refiere a la posibilidad del niño de operar con los signos y símbolos. En otras palabras, se trata de la adquisición de la función simbólica por etapas. Probablemente este es el componente al que menor atención se ha prestado y el que menos se ha utilizado en la práctica educativa tradicional. Incluso el mismo **Piaget (1973)**, a pesar de identificar la aparición de la función simbólica en la edad cercana a los 2 años, a partir de las observaciones de sus hijos, no la relacionó más adelante de manera decisiva con el desarrollo lógico-matemático, sino con la formación de la imagen mental de los objetos ausentes. A diferencia de ello, en el enfoque histórico-cultural se afirma que la función simbólica es una de las demostraciones de la existencia cultural de la psique humana, y las etapas de la adquisición de la función simbólica (en gran parte) pueden caracterizar el desarrollo cognitivo del niño en su totalidad. Sin duda, la adquisición de la función simbólica es uno de los indicadores esenciales de preparación del niño, no solo para las matemáticas, sino para cualquier tipo de conocimiento teórico en la escuela primaria. La introducción de códigos sintácticos formales requiere de la formación previa de la actividad de codificación – decodificación, inicialmente con la creación voluntaria e independiente de símbolos por parte de los niños, para pasar gradualmente a los símbolos convencionales.

Este componente se refiere a la posibilidad del niño de operar conscientemente con signos y símbolos como medios de su propia actividad (**Salmina, 1988, 2010**). Uno de los indicadores importantes de la adquisición de la función simbólica es la posibilidad de actuar de acuerdo a una regla simbólicamente expresada. Un ejemplo de esta posibilidad sería la participación en un juego de ajedrez. Un signo es decodificado cuando se realiza una acción que el signo codifica. Sin esto, solo es posible una imitación o mecanización de la operación sin que esta pase verdaderamente por el plano de la acción externa, compartida con un objetivo conscientizado.

Al tema del desarrollo simbólico, las posibilidades de su evaluación y la necesidad de su desarrollo, hemos dedicado varios textos recientes (**Bonilla, Solovieva y Jiménez, 2012**; **Solovieva y Quintanar, 2013**). En esta ocasión solo señalaremos algunas tareas que garantizan la adquisición efectiva de las operaciones con signos y símbolos a través de la actividad de juego en la edad preescolar. La información

acerca de la estructura y las etapas de adquisición de la actividad de juego, así como las estrategias de su introducción con inclusión de elementos simbólicos, se describen en otra publicación (**Solovieva y Quintanar, 2012a**). La **tabla 3** muestra ejemplos de estas actividades.

Tabla 3. Tareas y objetivos que se deben utilizar para la adquisición del componente simbólico.

Tareas	Objetivos
Ejecución de instrucciones de acuerdo a la presencia de un signo que las exige (decodificación).	Realizar tareas de acuerdo a lo acordado en el juego según flechas, fichas, señales, colores, etc. Posibilidad de verbalización de las situaciones simbólicas.
Proponer las mismas instrucciones de acuerdo a las necesidades del juego o modificar las ya existentes (codificación).	Las mismas situaciones, pero ante propuestas propias o ante ayuda mutua.
Ordenación simbólica (no numérica) de turnos, elementos, situaciones.	Comprensión de lo que implican los signos ordenados con medios no numéricos (o numéricos, pero no de acuerdo al rasgo cuantitativo).
Elaboración de modelos y esquemas como anticipación de la acción a realizar.	Reconocimiento reflexivo de realización de una acción (construcción) en base a un plan previo externo elaborado.

Debemos señalar que el tema de la adquisición de la función simbólica es un tema novedoso en la psicología del desarrollo, aún no demasiado explotado y prácticamente inexistente en pedagogía. Nuestros futuros esfuerzos se dirigirán a la elaboración e implementación de metodologías de evaluación y desarrollo de la función simbólica en la edad preescolar y en el inicio de la escuela primaria (**Rivera, Soloveva, Flores & Rojas, 2013**; **Solovieva, Rosas, Quintanar & García, 2013**).

4. *Componente espacial.* Este componente es una propuesta derivada de nuestros estudios con niños mexicanos, como una necesidad importante que favorece a la adquisición de las matemáticas. Identificamos este componente debido a que el conocimiento matemático se relaciona con la orientación del niño en el espacio. Las dificultades en la orientación espacial se reflejan de inmediato en la dificultad o imposibilidad para realizar operaciones de cálculo, lo cual fue demostrado en estudios con adultos con daño cerebral (**Tsvetkova, 1972**) y en niños con problemas de aprendizaje (**Akhutina y Zolotariova, 2001**). El eje numérico tiene una orientación espacial, al igual que el sistema de coordenadas cartesianas y la sensación de aumentar *hacia la derecha* y disminuir *hacia la izquierda*, como una base psicofisiológica o base del *esquema corporal* de todas las operaciones numéricas. Tanto ante las fallas de consolidación de la orientación en el espacio real, gráfico y verbal, como de la posibilidad de expresar verbalmente las relaciones espaciales y acceder a su comprensión, surgen necesariamente dificultades en la adquisición de las matemáticas.

Sin analizar en este momento las causas cerebrales diversas, ante las cuales estas fallas pueden producirse, señalamos que la formación gradual de la orientación en el espacio constituye uno de los objetivos primordiales de preparación del niño para la adquisición de las matemáticas.

Las estrategias de orientación pueden iniciarse en el espacio cotidiano que rodea al niño, si el adulto incluye la verbalización apoyada por las acciones objetales correspondientes. Sin embargo, el componente espacial debe considerar la orientación no solo en el plano de los objetos, sino también la orientación perceptiva, verbal y cuasi-espacial o lógica. La **tabla 4** presenta ejemplos de tareas útiles para la adquisición de la orientación espacial con sus objetivos correspondientes.

Tabla 4. Tareas y objetivos que se deben utilizar para la adquisición del componente espacial.

Tareas	Objetivos
Organización espacial de objetos cotidianos.	Posibilidad de seguir las instrucciones espaciales y ordenar los objetos “arriba de, abajo de, a la izquierda de, en la mitad, en el centro de la habitación”, etc.
Dibujo infantil con análisis de las relaciones espaciales entre los objetos.	Utilización concientizada de expresiones: “arriba de, abajo de, a la izquierda de, en la mitad de la hoja, en el medio de”, etc. Uso reflexivo del espacio gráfico.
Comprensión de frases, oraciones y textos que implican relaciones espaciales.	Posibilidad de hacer preguntas y expresar los hechos y sucesos.
Comparación de objetos de acuerdo a sus características espaciales.	Elaboración de estructuras lógico-gramaticales.

Al igual que en el caso del componente simbólico, debemos expresar que el tema del desarrollo de la relación espacial es un tema demasiado amplio y requiere de elaboración de monografías teóricas y metodológicas que puedan aportar al abordaje pedagógico correcto.

Con el fin de resumir el contenido de los cuatro componentes necesarios para la etapa previa a la introducción de los conceptos numéricos, lo mostramos de manera concentrada. La **tabla 5** muestra la posibilidad de organización del contenido temático general de acuerdo a los componentes que proponemos para el trabajo antes de iniciar el curso de adquisición de las matemáticas en la escuela primaria.

Tabla 5. Contenido general de los componentes de las habilidades matemáticas previas.

Componentes	Contenido
Lógico	- Identificación de diversas características en los objetos. - Identificación de diferencias y semejanzas generales. - Identificación de diferencias y semejanzas de acuerdo a una característica dada. - Necesidad de comparación sólo de acuerdo a un parámetro establecido. - Tareas de conservación con diverso contenido (cuerpos, líquidos, distribución del espacio, área, etc.).
Simbólico	- Posibilidad de sustitución de un objeto por otro. - Medios de representación (gesto, objeto, acción). - Uso de signos en las acciones. - Uso de sistemas de signos (signos relacionados jerárquicamente entre sí). - Simbolización de reglas de comportamiento. - Codificación. - Decodificación. - Elaboración de esquemas.
Espacial	- Orientación en el plano de objetos. - Orientación en el plano perceptivo (imágenes). - Simbolización de relaciones espaciales (más alto que, menos ancho que, etc.). - Correlación de relaciones entre los objetos y partes del cuerpo. - Uso de preposiciones relativas, temporales y de causa/efecto en el lenguaje del niño.

Numérico	- Elaboración de operaciones de seriación. - Organización de seriación de acuerdo a diversos parámetros. - Elaboración de operaciones de correspondencia. - Operación de correspondencia recíproca entre elementos de conjuntos ordenados. - Operación de correspondencia recíproca entre elementos de conjuntos desordenados. - Compresión de relaciones: “falta uno”, “sobra uno”, “es igual”, etc.

Es evidente que la participación de estos componentes refleja toda la complejidad y la riqueza conceptual que implica la enseñanza de las matemáticas. No obstante, los programas actuales en el nivel preescolar y primaria inicial no consideran esta complejidad y se limitan a una ejecución directa, empírica, ejecutiva, de ciertas operaciones, entre las cuales se incluyen indudablemente las establecidas en los trabajos de **Piaget (1975)**.

De esta manera, estamos intentando responder a la pregunta qué es lo que se debe considerar como base de preparación del niño para las matemáticas, es decir, qué es lo que deben incluir los programas didácticos cuyo objetivo es prevenir dificultades en la adquisición de las matemáticas. Sin duda estas mismas ideas deben tomarse en cuenta cuando se trata de una corrección pedagógica de aquellos niños con bajo redimiento escolar en la materia de matemáticas. En este capítulo no incluimos el tema propiamente de la formación de los conceptos numéricos en la escuela primaria y secundaria. En gran medida este material se contiene en un libro que se encuentra actualmente agotado y fuera de circulación (**Talizina, 2000**). Uno de nuestros objetivos futuros se relaciona con una actualización y reconsideración metodológica innovadora para la introducción pedagógica de los conceptos numéricos en la escuela primaria.

Respecto al problema de cuándo se pueden trabajar los componentes para la preparación para las matemáticas, pareciera obvio que se debe realizar en la edad preescolar. Sin embargo, existen diversas consideraciones que muestran que esto no es del todo sencillo.

Los métodos establecidos por los representantes de la escuela histórico-cultural parten de la idea de que es posible formar las habilidades necesarias en los niños a través de programas específicos dirigidos. Por ejemplo, **Obukhova (1972)** y **Talizina (1984)** formaron las acciones lógicas organizando la actividad del niño a través de la mediatización externa y la orientación requerida. **Talizina (2009)** mostró que es posible formar en niños preescolares y alumnos de la escuela primaria, que se encuentran en el estadio de las operaciones concretas, la operación lógica de conservación con las características de reflexión, concientización, reversibilidad, e incluso de generalización, es decir, el paso a otras situaciones y contenidos.

La propuesta de **Salmina y Filimonova (2010)** contiene, además de los apartados de diagnóstico, métodos concretos para la corrección (o desarrollo) de tres de los componentes: simbólico, lógico y matemático. Las autoras parten de la idea de que es necesario iniciar el trabajo, no de manera directa con las matemáticas, sino con los componentes previos de estas habilidades. Esto significa que es necesario diseñar actividades concretas, accesibles para niños de 5 a 7 años de edad, que incluyan estos componentes y que garanticen su gradual adquisición. La metódica incluye ejercicios de correspondencia, correspondencia "número-conjunto", serie numérica, cálculo ordinal, adición, conteo con agregación y sustracción, medición, estructura del número, seriación y clasificación. Queremos reforzar la idea de que cuando decimos que se trata de la edad de 5 a 7 años, estamos abarcando el último año de permanencia del niño en la institución preescolar y, probablemente, los 2 primeros años de la escuela primaria.

Sobre la base de las propuestas mencionadas, se han realizado diferentes investigaciones con niños preescolares mexicanos, orientadas a la formación de estos componentes para poder prevenir dificultades durante la etapa escolar.

En uno de los primeros estudios (**Solovieva, Ortíz y Quintanar, 2010**), se aplicó un programa formativo del concepto de número a niños del primer grado de primaria de una comunidad de habla náhuatl–castellana. El programa se orientó específicamente al desarrollo de los componentes matemático, lógico y simbólico y fue diseñado bajo los principios propuestos por **Salmina (1988, 2010)** y **Galperin (1987)**. El programa dirigido se aplicó a un grupo de niños indígenas bilingües de primer grado de una primaria suburbana y se contrastó con un grupo control, al cuál se le enseñó con la metodología tradicional. En el trabajo se elaboraron tareas concretas que permitieron incluir y trabajar con detalle cada uno de los componentes previos a la formación del concepto de número.

A continuación se presenta parte de la propuesta del programa formativo utilizado en este estudio (**Solovieva, Ortíz y Quintanar, 2010**). Dicho programa se dirige al trabajo con acciones de acuerdo al contenido de los componentes antes mencionados y el planteamiento metodológico general consiste en un modelo de formación de conceptos y acciones por etapas que implican su interiorización gradual por parte del alumno bajo la orientación del pedagogo (**Galperin, 2001**; **Solovieva y Quintanar, 2011**; **Talizina, 2000**).

El programa de actividades formativas incluye acciones que se llevan a cabo en los niveles material y materializado, perceptivo y lógico-verbal, a lo largo de las cuales se presenta el esquema de la base orientadora de la acción de acuerdo al método de formación por etapas (**Galperin, 2001**). La introducción y la realización de estas acciones implican la consolidación de varios componentes a la vez.

Entre las actividades del programa formativo se encuentran las siguientes:

a) Diferenciación de características relevantes e irrelevantes de los objetos. Se incluyen tareas de identificación del esquema corporal propio y de otros, de conformación del esquema corporal en el plano gráfico, de uso de la descripción para identificar y de diferenciación de objetos.

b) Diferenciación de características relevantes e irrelevantes de los objetos en los dibujos y representaciones de objetos (nivel simbólico). Se incluyen tareas similares a la previa enfatizando el plano gráfico y verbal en distintos objetos y esquema corporal. Se utilizaron símbolos diversos para señalar una misma situación, así como un mismo símbolo para diversas situaciones (una ficha sirve para señalar un fenómeno aislado y una cantidad determinada).

c) Representación material y materializada de objetos y sus relaciones espaciales. Se incluyen tareas de orientación espacial a partir de situaciones concretas, así como el uso de las relaciones espaciales entre los objetos y se realizan comparaciones y clasificaciones a nivel material, posteriormente gráfico y finalmente verbal.

d) Orientación espacial en el plano perceptivo. Se realizan tareas de organización y orientación visuo-motora y visuo-constructiva a partir del trabajo con las características espaciales en el dibujo y sus representaciones.

e) Orientación espacial en el plano lógico-verbal. Se incluyen tareas de construcción y comprensión orientada y voluntaria de frases y oraciones con contenido espacial, de causa-efecto, con conectivos y preposiciones gramaticales diversas.

f) Introducción en el sistema lógico-numérico. Se trabaja la construcción de acciones de correspondencia recíproca, ordenación de conjuntos, construcción de series numéricas, en el nivel concreto y materializado (simbólico externo).

g) Introducción del concepto de número. Se implementan tareas de acción de medición con ayuda de diversos parámetros, además de la medición de longitud de diversos objetos reales con medidas distintas y la medición de líquidos. Se utiliza la medición de un mismo objeto con diversas medidas (pequeñas y grandes) y la medición de diversos objetos con una misma medida.

h) Introducción del concepto de cantidad y de su conservación ante la elección de una misma medida. Se trabaja la conservación de líquidos, área y volumen a partir de la manipulación de objetos que facilitarán la igualación y comparación de cantidades.

i) Representación de cantidades a partir de su representación numérica y simbólica. Se incluyen tareas de identificación y uso de la seriación concreta como principio numérico para posteriormente trabajar en el nivel gráfico y verbal; se implementa el uso de grafías que representan números como principio simbólico. Se identifica y utiliza el orden directo e inverso del número como principio para su operacionalidad. Se trabaja la identificación del carácter inverso del número y la secuencia numérica para distinguir pares y nones, para posteriormente consolidar la secuenciación de números en orden directo e inverso. Se introduce la representación de números y su valor relativo a la posición que ocupa.

j) Solución de problemas en forma de ejemplos reales con el contenido estudiado para diversas situaciones materiales, gráficas y verbales.

La aplicación de este programa permitió obtener resultados positivos en los niños del grupo experimental, en comparación con los niños del grupo control. Recordamos que en este estudio fueron incluidos alumnos del primer grado de escuela primaria.

En un segundo estudio (**Zárraga, 2012**), que constituye el seguimiento de esta misma propuesta, también se desarrolló y aplicó un programa dirigido a la formación de las habilidades matemáticas básicas, pero ahora el programa estuvo dirigido a un grupo de preescolares mayores (tercero de preescolar), e incluyó el componente espacial. En ambos estudios, los resultados mostraron un mejor desempeño de los niños del grupo experimental, es decir, aquellos que recibieron el programa, en comparación con el grupo control. Estos resultados expresan que la aplicación de un programa basado en la teoría de la actividad aplicado a la enseñanza, permite un mejor desarrollo de los componentes lógico, matemático, simbólico y espacial, necesarios para la posterior adquisición del concepto de número (**Zárraga, Quintanar, García y Solovieva, 2012**). Sin embargo, consideramos que aún no es claro qué es lo que beneficia más: la aplicación de estas actividades en el primer grado de la escuela primaria o en el tercer grado de la educación preescolar.

Además, hemos comparado el éxito en las matemáticas en el grupo de niños preescolares que asistieron a nuestro programa, con el grupo control de una forma longitudinal. Dichos niños cursan actualmente el segundo grado de primaria y podemos observar que existe una ventaja a favor del grupo experimental, en cuanto a la solución de ejemplos y de problemas aritméticos, pero esto no es tan claro en la evaluación detallada de las funciones visuo-espaciales. Este último dato nos hace pensar que en la edad preescolar existen otros tipos de actividad que son indispensables para el desarrollo psicológico del niño, tales como el dibujo y las formas complejas de juegos (**Solovieva y Quintanar, 2012a, 2012b; 2013**; **Solovieva, Gonzáles y Quintanar, 2012**). El uso de estas actividades conduce a ventajas muy obvias en los grupos experimentales. Nuestra experiencia psicológica y pedagógica muestra que en la edad preescolar existen objetivos muy específicos, no necesariamente relacionados con la adquisición de las matemáticas de manera estrecha, sino más bien con la adquisición de rasgos esenciales de la personalidad y actividad del niño. En este caso, el momento ideal para el trabajo con las habilidades matemáticas previas sería el inicio mismo de la escuela primaria, por lo que uno de nuestros próximos objetivos, será poner a prueba esta idea.

Es indudable la necesidad de continuar con estudios que permitan describir las dificultades y detectar las causas de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel preescolar y escolar. Sin embargo, ante la situación actual de fracaso educativo, esto ya no es suficiente para superar estos problemas. Consideramos que la elaboración e implementación constante de propuestas metodológicas y didácticas constituye una de las necesidades más urgentes dentro de la pedagogía y la psicología. El futuro de la práctica educativa relacionada con la superación del fracaso en las matemáticas en la escuela, depende de los esfuerzos de los especialistas que realizan investigaciones aplicadas en la práctica educativa.

Referencias

- **Akhutina, T.V. y Zolotariova, E.V. (2001).** Acerca de la disgrafia visuo-espacial: Análisis neuropsicológico y métodos de corrección. En: Quintanar L. y Solovieva Yu. (Eds.) *Métodos de intervención en la neuropsicología infantil*. México, Universidad Autónoma de Puebla: 39-46.
- **Andersson, U. (2010).** Skill development in different components of arithmetic and basic cognitive functions: Findings from a 3-year longitudinal study of children with different types of learning difficulties. *Journal of Educational Psychology,* 102 (1), 115-134.
- **Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M. K. & Nurmi, J. E. (2004).** Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96, 699-713.
- **Bonilla, M., Solovieva, Yu. y Jiménez, N. (2012).** Valoración del nivel de desarrollo simbólico en la edad preescolar. *Revista CES Psicología*. 5(2): 56-69.
- **Bryant, D.P. (2005).** Commentary on early identification and intervention for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 340-345.
- **Bull, R., Espy, K.A., & Wibe, S.A. (2008).** Short-term memory, working memory, and executive functioning in preschoolers: Longitudinal predictors of mathematical achievement at age 7 years. *Developmental Neuropsychology*, 33 (3), 205-228.
- **Carretero, M. & García Madruga, J.A. (1992).** *Lecturas de psicología del pensamiento. Razonamiento, solución de problemas y desarrollo cognitivo*. Madrid: Alianza Editorial.
- **Case, R. (1974).** Mental strategies, mental capacity, and instruction: A neo-Piagetion investigation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 18: 372-379.
- **Cázares, J. (2003).** *La enseñanza y el aprendizaje de la aritmética en tercero de preescolar*. México: Investigación SEP–CONACYT.
- **Demetriou, A. (1988).** *The neo-Piagetian theory of cognitive development: Toward an integration*. Amsterdam: North-Holland.
- **Desoete, A., Stock, P., Schepens, A., Baeyens, D. & Roeyers, H. (2009).** Classification, seriation, and counting in grades 1, 2, and 3 as two-year longitudinal predictors for low achieving in numerical facility and arithmetical achievement? *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27 (3), 252-264.
- **Galperin, P. (1987).** Sobre la investigación del desarrollo intelectual. En: M. Shuare (Comp.). *Psicología evolutiva y pedagógica en la URSS. Antología*. Moscú: Progreso.
- **Galperin, P.Ya. (2001).** Tipos de orientación y tipos de formación de las acciones y de los conceptos. En L. Quintanar, *La formación de las funciones psicológicas durante el desarrollo del niño* (pp. 36-49). México: Universidad Autónoma de Tlaxcala.
- **Gersten, R., Jordan, N. C. & Flojo, J. R. (2005).** Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 293–304.
- **Inhelder, B. & Cellérier, G. (1996).** *Los senderos de los descubrimientos del niño*. Barcelona: Paidós.
- **Lázaro, E., Solovieva, Yu., Quintanar, L. (2013).** Premisas psicológicas para la adquisición del cálculo. En: J. Sánchez Ruiz y A. Escotto Córdova. *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: factores neuropsicológicos, afectivos y socioepistemológicos*. México: UNAM: 57-91.
- **LeFevre, J.A., Fast, L., Smith-Chant, B., Kamawar, D., Penner-Wilger, M., Skwarchuk, S. & Bisanz, J. (2010).** Pathways to mathematics: Longitudinal predictors of performance. *Child Development,* 81 (6), 1753-1767.

- **Leontiev, A. N. (2005).** On the development of arithmetical thinking in the child. *Journal of Russian and East European Psychology*, 43 (3), 78-95.
- **Levine, S. C., Jordan, N. C. & Huttenlocher, J. (1992).** Development of calculation abilities in young children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 53, 72–103.
- **Locuniak, M.N. & Jordan, N.C. (2008).** Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities*, 41(5), 451–459.
- **Mammarella, I.C., Lucangeli, D. & Cornoldi, C. (2010).** Spatial working memory and arithmetic deficits in children with nonverbal learning difficulties. *Journal of Learning Disabilities,* 43 (5), 455-468.
- **Mix, K.S., Huttenlocher, J. & Levine, S.C. (2002).** *Quantitative development in infancy and early childhood*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- **Obukhova, L.F. (1972).** *Etapas del desarrollo del pensamiento infantil*. Moscú: Universidad Estatal de Moscú.
- **Passolunghi, M.C., Mammarella, I.C. & Altoe, G. (2008).** Cognitive abilities as precursors of the early acquisition of mathematical skills during first through second grades. Developmental Neuropsychology, 33 (3), 229-250.
- **Piaget, J. (1972).** Intellectual evolution from adolescence to adulthood. Human development, 15: 1-12.
- **Piaget, J. (1973).** La formación del símbolo en el niño. México, Fondo de Cultura Económica.
- **Piaget, J. (1975).** *Introducción a la epistemología genética 1. El pensamiento matemático*. Buenos Aires, Paidos.
- **Rivera, R., Soloveva, Ju., Flores, G., Rojas, L. (2013).** Formation of concept of decimal system in Mexican school children. *Clinical Psychology and Special Education #1*. Moscú: MGPU: http://psyjournals.ru/en/psyclin/2013/n1/59041.shtml

- **Salmina, N.G. (1988).** Signo y símbolo en la enseñanza. Moscú: Universidad estatal de Moscú.
- **Salmina, N.G. (2010).** La función semiótica y el desarrollo intelectual. En: Yulia Solovieva y Luis Quintanar (Eds.) Antología del desarrollo en la edad preescolar. México: Trillas, 75-86.
- **Salmina, N.G. y Filimonova, O.G. (2010).** Problemas en el aprendizaje de las matemáticas básicas y su corrección. México: Instituto universitario de estudios avanzados.
- **Saramaga de Oliveira G. & Baraúna S.M. (2012).** Reflexoes sobre a práctica pedagógica de maetmática no ensino médio. En: Roberto Valdés Puentes, Orlando Fernándes Aquino & Amdréa Maturano Longarezi. Ensino Medio. Processos, sujetos e docencia. Uberlandia: EDUFU, 267-290.
- **Schuchardt, K. & Maehler, C. (2010).** Do dyscalculia subgroups differ in their working memory, basic arithmetical knowledge and numerical competencies? Zeitschrift Fur Entwicklungspsychologie Und Padagogische Psychologie, 42 (4), 217-225.
- SEP, (2011). Programa de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria, primer grado. México, Secretaría de Educación Pública.
- SEP, (2013). Resultados históricos Nacionales 2006-2013. México, Secretaría de Educación Pública: http://www.enlace.sep.gob.mx/resultados_historicos_por_entidad_federativa/
- **Solovieva Yu., Gonzales J., y Quintanar L. (2012).** Juego de roles en la actividad reflexiva en preescolares. Experiencia y resultados. Editorial Académica Española.
- **Solovieva, Y., Rosas Rivera, Y., Quintanar, L. & García, M. A. (2013).** Symbolic representation for introduction of decimal system in Mexican School Children. International Education Studies. 6 (10), 102-111.

- **Solovieva, Yu. y Quintanar L. (2012a).** Actividad de juego en la edad preescolar. México: Trillas.
- **Solovieva, Yu. y Quintanar, L. (2012b).** Formation of Drawing Activity in Mexican Pre-school Children. Psychology Research, 2 (8), 479-489.
- **Solovieva, Yu. y Quintanar, L. (2004).** La utilización de la zona del desarrollo próximo durante el diagnóstico del desarrollo de la actividad intelectual. En: S. Castañeda. Educación, aprendizaje y cognición. Teoría en la práctica. Manual moderno: 75-92.
- **Solovieva, Yu. y Quintanar, L. (2010).** El desarrollo del niño y los métodos de enseñanza. Elementos. 77 (17), 9-15.
- **Solovieva, Yu. y Quintanar, L. (2011).** Enseñanza de lectura. Método práctico para la formación lectora. México: Trillas.
- **Solovieva, Yu. y Quintanar, L. (2013).** Evaluación del desarrollo simbólico en niños preescolares mexicanos. Cultura y Educación. 25 (2), 167-182.
- **Solovieva, Yu., Lázaro, E. y Quintanar. L. (2013).** Evaluación de las habilidades matemáticas en niños preescolares urbanos y rurales. Cultura y Educación. 25 (2), 199-212.
- **Solovieva, Yu., Ortíz, G. y Quintanar, L. (2010).** Formación de conceptos numéricos iniciales en una población de niños mexicanos. Cultura y Educación, 22 (3), 345-361.
- **Talizina, N.F. (1984).** Proceso de dirección de asimilación de conocimientos. Moscú: Universidad Estatal de Moscú.
- **Talizina, N.F. (2000).** Manual de psicología pedagógica. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
- **Talizina, N.F. (2001).** *La formación de las habilidades del pensamiento matemático.* México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
- **Talizina, N.F. (2009).** *La teoría de la actividad aplicada a la enseñanza.* México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.
- **Tsvetkova, L.S. (1972).** *Alteraciones y rehabilitación del cálculo en casos de lesiones locales cerebrales*. Moscú: Universidad Estatal de Moscú.
- **Zárraga, S. (2012).** Formación de las habilidades matemáticas básicas en preescolares mayores de una comunidad suburbana. Tesis de grado. México: BUAP.
- **Zárraga, S., Quintanar, L., García, M. y Solovieva, Yu. (2012).** Formación de las habilidades matemáticas básicas en preescolares mayores de una comunidad suburbana. Revista Educacao e Filosofia. 26: 157-178.

CAPÍTULO 6

UNA APROXIMACIÓN PARA FOMENTAR EL PENSAMIENTO NUMÉRICO EN NIÑOS DE LOS TRES PRIMEROS GRADOS DE LA ESCUELA PRIMARIA

Álvaro V. Buenrostro Avilés

En escritos anteriores (**Buenrostro y Figueras, 2011**) se definió al pensamiento numérico como un conjunto de concepciones, conocimientos y habilidades que los niños construyen al entrar en contacto con el mundo de los números, su representación, propiedades y operaciones.

Se delimitaron los contenidos aritméticos y los aspectos del pensamiento numérico que se han trabajado con niños reportados como alumnos con bajo rendimiento escolar por parte de sus maestros: sistemas de numeración (verbal y escrito), adición y substracción, multiplicación y reparto, y los procesos de cuantificación, comparación y parte todo.

Para dar cuenta de la complejidad que implica tanto la comprensión como el fortalecimiento del pensamiento numérico, se hizo una descripción de las características de tres temas relevantes: el conteo, las palabras numéricas y los números escritos, y el planteamiento de problemas aritméticos. También se proporcionaron sugerencias específicas de trabajo en cada uno de éstos.

En este escrito se describe una aproximación, concebida como un modelo de intervención, que promueve diferentes aspectos del pensamiento numérico de los niños. Para tal fin se consideran los siguientes componentes:

- Lineamientos de intervención.
- Áreas de intervención.
- Identificación de los conocimientos y estrategias de los niños.
- Actividades y recursos didácticos.
- Acciones y discurso del facilitador.

A continuación se hace una descripción de cada componente con apoyo de la inclusión de algunos ejemplos con los que se pretende contribuir a una mejor comprensión de éstos.

Lineamientos de intervención

Al llevar a cabo una intervención educativa con niños, cualquiera que ésta sea, las acciones emprendidas responden inevitablemente, ya sea de manera implícita o explícita, a concepciones sobre el niño, el aprendizaje, la manera en la que éste se promueve, la valoración de los conocimientos, etc. Estas concepciones orientarán la intervención en uno u otro sentido.

Por tanto, es necesario especificar con claridad los lineamientos que respaldan una intervención. A continuación se exponen los que guían la intervención que se realiza con los niños:

- Tomar distancia de modelos explicativos y de intervención basados en supuestas patologías individuales o culturales.
- Enfatizar las habilidades y estrategias empleadas por los niños en la solución de situaciones aritméticas.
- Realizar evaluaciones en función de la identificación de los procesos aritméticos más que en la formulación de una etiqueta.
- Reencuadrar los errores como concepciones y estrategias que fueron útiles en momentos y situaciones distintas a la actual.
- Emplear una variedad de experiencias para promover el pensamiento numérico.
- Apoyar la intervención en investigaciones sobre el pensamiento numérico.

Cada uno de estos lineamientos tiene una implicación directa en la intervención. Alejarse de ellos puede dar lugar a concepciones y acciones que en lugar de contribuir a fomentar el pensamiento numérico se convierten en obstáculos que inhiben estrategias que los niños utilizan para resolver situaciones aritméticas.

La prohibición del uso de los dedos ha sido una práctica que se mantiene vigente en muchas de las escuelas. Incluso, cuando se solicita a los niños que resuelvan una suma sencilla, la mayoría de ellos oculta debajo de la mesa sus dedos, sabedores de que emplearlos no está permitido. Si en lugar de considerar el empleo de los dedos como algo negativo e indicador de una presunta inmadurez por parte del niño, favorecemos su uso, podremos estimular el dominio de diversas habilidades. Los niños pequeños al sumar 5+4 utilizan sus dedos para representar ambos números y utilizan una estrategia denominada *Contar todo*. Una estrategia más avanzada es la de *Contar hacia delante*: Dicen “cinco”, representan con los dedos el número cuatro y los cuentan: “seis, siete, ocho, nueve”. Estas estrategias pueden ser de enorme ayuda antes de que el niño responda de manera automática a la pregunta planteada.

Áreas de intervención

Las áreas de intervención son los aspectos seleccionados que corresponden tanto a los contenidos aritméticos como a las estrategias y habilidades que forman parte del pensamiento numérico en niños de los primeros grados escolares. La selección se hizo tomando en cuenta las exigencias escolares de los tres primeros grados y los aspectos del pensamiento numérico que, en la literatura especializada, se han señalado como relevantes. A éstos últimos se le dio el nombre de procesos básicos dada la importancia que tienen en la formación del pensamiento numérico.

Tanto los contenidos como los procesos interactúan de manera indisociable. Aquí se presentan separados para tener mayor claridad de los mismos.

Contenidos aritméticos

1. Sistemas de numeración

1.1. Sistema de numeración verbal

1.2. Sistema de numeración escrito

2. Adición y substracción

2.1. Problemas aditivos verbales

2.2. Algoritmos convencionales y no convencionales

3. Multiplicación y reparto

3.1. Problemas multiplicativos verbales

3.2. Hechos multiplicativos

3.3. Algoritmo convencional de la multiplicación

3.4. Problemas de reparto verbales

Procesos básicos

1. Relaciones de comparación: Mayor, menor e igual

2. Relación parte-parte todo

3. Procesos de cuantificación: Reconocimiento súbito, estimación, conteo

Identificación de los conocimientos y estrategias de los niños

En el contacto con situaciones aritméticas escolares y de la vida cotidiana, los niños despliegan una diversidad de acciones, conocimientos y creencias que, con la práctica y la intervención adecuada, van consolidando un pensamiento numérico más sólido. Para percatarse de esta consolidación es necesario recurrir a diferentes procedimientos que, en su conjunto, arrojen información acerca de las habilidades matemáticas de los niños en un momento determinado.

El uso de una lista cotejable o de chequeo permite identificar habilidades específicas que el niño ya domina o está en proceso de dominar. La lista tiene diversas ventajas. Por una parte, incluye comportamientos fácilmente verificables y las fechas en las que éstos se adquirieron, de tal manera que se tiene un registro actualizado del progreso del niño. Por otra, la información recabada sirve de apoyo para tomar decisiones respecto a las actividades idóneas para fomentar el pensamiento numérico del niño.

A continuación se presenta un fragmento de la lista cotejable (**figura 1**) que se utiliza para conocer las habilidades numéricas de los niños. Éste incluye los aspectos de Serie Numérica Oral y Conteo.

1. Serie numérica oral	
Enunciar la serie:	
1.1. De uno en uno hasta el cien	
1.2. De dos en dos hasta el veinte	
1.3. De cinco en cinco hasta el cincuenta	
1.4. De diez en diez hasta el cien	
1.5. De cien en cien hasta el mil	

1.6. De mil en mil hasta el diez mil	
1.7. A partir de un segmento, de uno en uno, hasta cinco números después	
2. Conteo	
Contar:	
2.1. Colecciones de veinte objetos o su representación de uno en uno	
2.2. Colecciones de veinte objetos o su representación de dos en dos	
2.3. Hacia adelante con un dado numérico y otro de puntos	
2.4. Hacia adelante a partir del número mayor	
Contar colecciones (objetos o su representación) de diez y cien elementos:	
2.5. Objetos agrupados	
2.6. Bloques de base diez	
2.7. Fichas con diferente valor (amarillo=100; rojo=10)	
2.8. Monedas y billetes	

Figura 1. Fragmento de lista cotejable.

Además de la lista cotejable, es posible recabar información acerca de las habilidades numéricas del niño a través del planteamiento de una variedad de situaciones aritméticas; éstas sirven no sólo para fomentar el pensamiento numérico sino para identificar las estrategias que utiliza el niño para resolver estas situaciones.

Una actividad como la de contar de 2 en 2 hasta el 20 permite indagar acerca de los conocimientos que los niños tienen sobre la serie numérica oral y su vinculación con otros hechos numéricos. Algunos niños que todavía no dominan el conteo salteado llevan a cabo el conteo de uno en uno, emitiendo los números impares en voz baja y los números pares en voz alta. Otros cuentan en forma correcta. Otros más, por medio de una intervención específica, vinculan este conteo con el dominio de los hechos multiplicativos (tablas de multiplicar). Si se les pregunta cuánto es 2 X 8, ellos levantan ocho dedos, los cuentan de dos en dos dando como resultado

dieciséis. Esto se puede considerar como un paso previo para la automatización de los hechos multiplicativos.Como puede observarse, una situación sencilla como la aquí planteada, es una oportunidad para acercarse al pensamiento numérico de los niños.

Es necesario enfatizar que la identificación de los conocimientos y habilidades numéricas debe servir para llevar acciones que las promuevan más que para asignarles una etiqueta a los niños que obstruya su desempeño. Es por esto que mientras mayor conocimiento se tenga de las características del pensamiento numérico y de las diversas formas de identificar sus manifestaciones, se contará con mejores herramientas para favorecer su desarrollo.

Cuando el propósito de la identificación de los conocimientos y habilidades numéricas se centra en los procesos y acciones de los niños más que en los resultados, es necesario contar con los medios para registrarlos o reconstruirlos de tal manera que se pueda hacer un análisis de los mismos. El audio, el video, la imagen fija y la descripción gráfico-textual son herramientas cuya utilización contribuyen a este fin.

La ventaja del grabar en audio y video las ejecuciones de los niños consiste en la posibilidad de repetir las grabaciones tantas veces como sea necesario, lo que permite no sólo analizar con más detenimiento las acciones de los niños sino compartir las grabaciones con otros para enriquecer el análisis. Cuando sólo se tienen las producciones escritas, se pueden tratar como imágenes que al fotografiarlas, escanearlas o fotocopiarlas se facilita el acceso a éstas. Muchas veces los cuadernos escolares contienen producciones ricas en información acerca de las concepciones de los niños.

La descripción gráfico-textual, utilizada de manera independiente o en conjunción con el video, favorece la reconstrucción de las acciones del niño, lo que se traduce en una mejor comprensión de éstas. A su vez, el proceso de reconstrucción promueve, lo que podríamos denominar como un *adiestramiento de la mirada*, al hacer que el psicólogo o maestro pongan mayor atención a detalles que antes no se tomaban en cuenta.

En la **figura 2** se muestra una guía para elaborar estas descripciones y un ejemplo de éstas (**Buenrostro, 2003**).

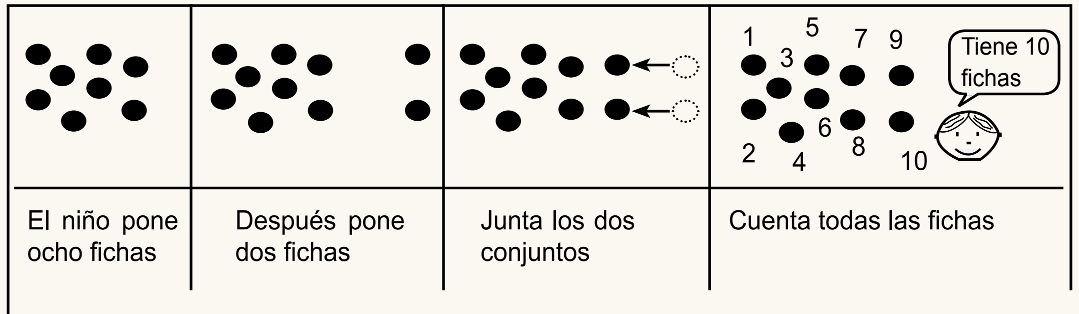
Guía para la descripción de estrategias

Al describir una estrategia es importante que se consideren los siguientes elementos:

1. Descripción de la situación didáctica planteada al niño.
2. Descripción de la ejecución del niño ante la situación.
   Por cada una de las acciones realizadas por el niño hay que incluir:
   - Un dibujo que represente la acción.
   - Un texto que describa la acción.
3. Observaciones del instructor en relación con las caracrerísticas de la ejecución.

Ejemplo

Se le planteó al niño el siguiente problema: Juan tiene 8 canicas, luego su hermana le regaló 2 canicas más. ¿Cuántas canicas tiene ahora Juan?



Observaciones

Como puede apreciarse en la ilustración, para resolver el problema planteado el niño utilizó una estrategia de modelado directo denominada contar todo.

Figura 2. Guía para elaborar descripciones gráfico-textuales.

Actividades y recursos didácticos

La promoción del pensamiento numérico de los niños puede hacerse por distintas vías, de manera conjunta o separada, y con múltiples recursos. En este sentido, no es conveniente limitarse a una sola opción. En nuestro caso, se han puesto en práctica las siguientes:

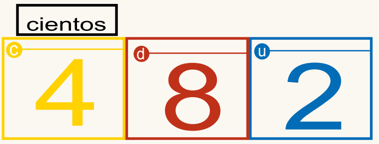
- Actividades matemáticas estructuradas. Estas actividades están diseñadas para lograr la adquisición de un concepto o una habilidad en específico. Es importante la interacción entre el niño y el adulto ya que a través de ésta se puede orientar al niño hacia el uso de una estrategia más compleja o un procedimiento más eficiente (**Figura 3**).

- Hojas de trabajo. Con éstas se promueve el trabajo independiente y la ejercitación que, llevada adecuadamente, siempre es necesaria para el aprendizaje. De igual manera y dependiendo del tipo de actividad contenida en la hoja, sirven para favorecer la comprensión de los conceptos matemáticos. En la **figura 4** se muestra un fragmento de una hoja de trabajo en la que se plantean dos situaciones. Cada una contiene una imagen, a partir de la cual se formulan dos problemas multiplicativos: uno de agrupamiento y otro de precio. Estas situaciones tienen diversos propósitos. Para el niño, le permite tener contacto con este tipo de problemasy practicar los hechos multiplicativos básicos y al psicólogo le permite apreciar el tipo de estrategia utilizada por el niño al resolver los problemas, ya sea aditiva, multiplicativa o de otro tipo.

Lectura de números con diferentes cifras

Propósito
Leer números de dos, tres y cuatro cifras.

Materiales
Tarjetas numéricas del cero al nueve.
Dos tarjetas con las palabras mil y cientos.



Conocimientos previos
Lectura de números de una cifra.
Conteo oral de diez en diez, de cien en cien y de mil en mil.
Lectura de las palabras *cientos* y *mil*.

Secuencia
1. Para números de dos cifras. Ejemplo: 37.
1.1. Pida que el niño lea la cifra de la derecha: 7.
1.2. Pídale que alce tres dedos y que los cuente de diez en diez.
1.3. Cuando el niño diga *treinta*, usted diga *y* señalando el número 7 para que lo enuncie de corrido.
1.4. Practique el procedimiento con diferentes números.
2. Para números de tres cifras. Ejemplo: 482.
2.1. Pida que el niño lea las dos cifras de la derecha: 82.
2.2. Arriba del número 4 coloque la tarjeta con la palabra cientos.
2.3. Pida al niño que lea el número 4, después la palabra cientos y a continuación el número 82. Si el niño tiene dificultad para lee, utilice el conteo de cien en cien: pídale que alce cuatro dedos y los cuente de cien en cien.
2.4. Practique el procedimiento con varios números.
3. Para números de cuatro cifras siga el procedimiento indicado en el paso 2, sustituyendo la palabra *cientos* por la palabra *mil*.

Figura 3. Ejemplo de Actividad matemática estructurada.

Una canasta tiene 6 guabayas.
Si se compran 7 canastas,
¿cuántas guayabas habrá en total?

________ x ________ = ________

Una canasta de guabayas cuesta 9 pesos.
Si se compran 3 canastas,
¿cuánto habrá de pagarse total?

________ x ________ = ________

Un montón tiene 4 manzanas.
Si se compran 5 montones,
¿cuántas manzanas habrá en total?

________ x ________ = ________

Un montón cuesta 9 pesos.
Si se compran 3 montones,
¿cuánto habrá de pagarse total?

________ x ________ = ________

Figura 4. Ejemplo de Hoja de trabajo.

- Escenificación de actividades de la vida cotidiana. Estas representaciones vinculan los conocimientos matemáticos de los niños con actividades de su entorno y constituyen una oportunidad para el intercambio de opiniones facilitando el aprendizaje cooperativo. Un ejemplo de esta actividad es la de compraventaen la que, los niños llevan a cabo acciones que contribuyen a desarrollar distintas habilidades matemáticas. En la **figura 5** se detallan algunos de los aspectos que se toman en cuenta al llevar a cabo esta actividad.

Contextos de compraventa	Personajes	Acciones básicas	Habilidades matemáticas
Mercado Farmacia Librería Juguetería	Cajero o repartidor de dinero Vendedor Comprador	Asignar precios Contar dinero Dar y recibir cambio	Lectura de números Conteo de grupos Resolución de problemas aditivos, multiplicativos y de reparto. Hechos aditivos y multiplicativos Cálculo mental

Figura 5. Aspectos de la actividad de compraventa.

- Juegos. El ingrediente motivacional de éstos es aprovechado para favorecer diversas acciones que promueven el pensamiento numérico. Existen juegos con un componente numérico intrínseco (turista, dominó, la perinola, el juego del uno) y otros que se pueden adaptar para favorecer alguna habilidad matemática (la oca, serpientes y escaleras, la lotería). Estos juegos pueden utilizarse de manera independiente o como un motivador externo al terminar alguna de las actividades anteriores.

Además de las actividades anteriores es importante considerar algunos recursos didácticos que por sí mismos o en conjunto con aquéllas contribuyen a favorecer el pensamiento numérico de los niños. A continuación enlistamos algunos de estos recursos y las habilidades que se pueden fomentar con ellos. En la figura 6 se ilustra cada uno de éstos.

- Palillos chinos:Conteo de grupos de diez, cien y mil.
- Fichas de colores. Conteo de grupos, además del conteo de uno en uno.
- Dados numéricos y de puntos:Conteo hacia adelante.
- Bloques de base diez: Conteo de grupos, valor posicional, representación de operaciones aritméticas.
- Cubos unifijos: Concepto Parte-Parte-Todo.
- Cartas de valor posicional: Valor posicional, representación numérica.

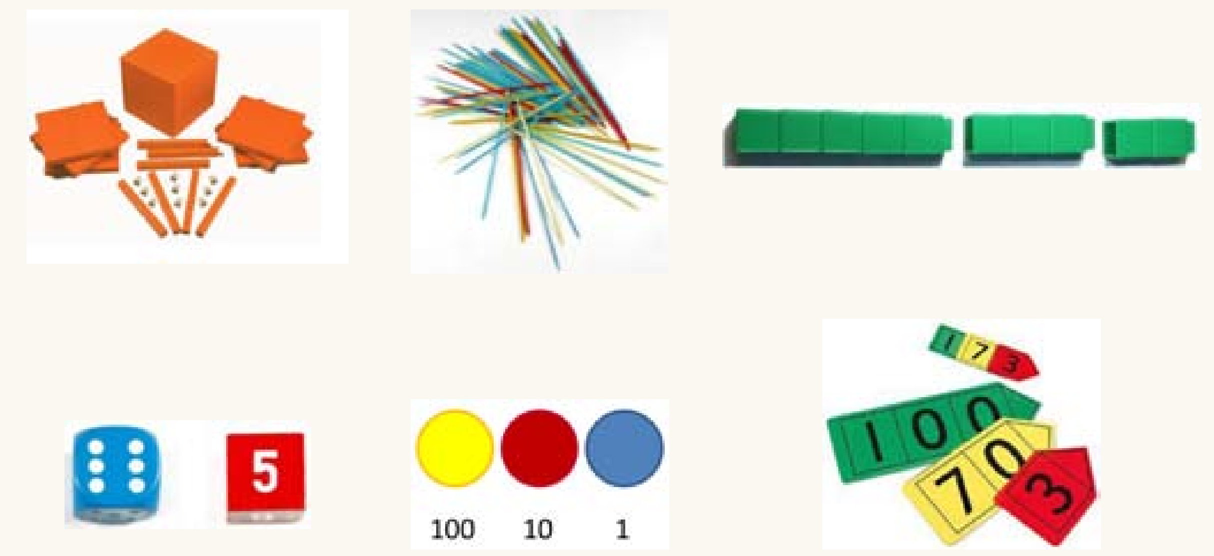


Figura 6. Recursos didácticos.

Acciones y discurso del facilitador

Las acciones y el discurso del facilitador (la persona que promueve el pensamiento numérico: psicólogo, maestro o padre de familia), son factores clave en el avance, estancamiento o retroceso en los conocimientos y habilidades de los niños. Desafortunadamente, son frecuentes las acciones y concepciones que corresponden a una orientación tradicional que privilegia la enseñanza de los procedimientos de cálculo sobre la comprensión de las características, propiedades y relaciones de los números. También se pone escasa atención a las concepciones y estrategias que despliegan los niños al enfrentarse a situaciones matemáticas. La riqueza de esta información se pierde en aras de un énfasis en lo correcto o incorrecto de las ejecuciones de los niños.

Es por esto que conviene precisar, las acciones y el discurso del facilitador que favorecen el pensamiento numérico de los niños.A continuación se enumeran algunas de estas acciones seguidas de algunos ejemplos de expresiones verbales útiles para lograr este cometido. Esta recopilación se basa en los trabajos de diversos autores (**Buenrostro, 2003; Clements y Sarama, 2007; Merrill, 2002; NRC, 2000**).

Acciones

- Favorecer la integración del conocimiento que se está promoviendo con las experiencias cotidianas.
- Usar situaciones que tengan un significado práctico y matemático para el niño.
- Vincular el conocimiento que se quiere promover con experiencias previas.
- Utilizar una variedad de situaciones para que el niño ponga en práctica el conocimiento adquirido.
- Establecer un balance adecuado entre las actividades que promueven el conocimiento conceptual y el de procedimientos.
- Promover el uso de estrategias más sofisticadas y económicas para resolver situaciones matemáticas.
- Hacer uso de la demostración como una forma de mostrarle al niño la manera en que se resuelve una situación o problema.

- Reformular una situación en el caso de que el niño no comprenda lo que se le está comunicando.
- Aceptar y promover el uso de estrategias no convencionales ya que constituyen un indicador de la flexibilidad numérica.

Expresiones verbales

Existen diferentes expresiones que favorecen el pensamiento numérico. Entre las más importantes están las preguntas que el facilitador hace cuando el niño resuelve una situación matemática. A continuación reproducimos lo expuesto en otro escrito (**Buenrostro, 2003**) en relación con este tema. Se muestran una serie de preguntas agrupadas en cinco categorías.

1. Reflexión acerca de la estrategia empleada ante una situación planteada.

- ¿Me puedes decir cómo le hiciste?
- ¿Cómo encontraste la respuesta?
- Para que yo sepa cómo hacerlo dime ¿cómo lo resolviste?

2. Uso de una estrategia diferente.

- ¿Crees que puedas hacerlo de otra manera?
- ¿Quién lo hizo de otra forma? (Cuando se trabaja en grupo).
- Y si hago esto (modificar la situación planteada inicialmente) ¿cómo lo puedes resolver?

3. Recuerdo de acciones hechas con anterioridad.

- ¿Te acuerdas como lo acabas de resolver?
- ¿Te acuerdas cómo lo hicimos ayer?

4. Recuerdo de los pasos en una secuencia de acciones.

- Ya hiciste esto. Ahora ¿qué más tienes que hacer?
- Después, ¿qué sigue?

5. Comparación de estrategias

- Vamos a fijarnos como lo hicieron los demás compañeros. ¿Es igual o diferente a como tú lo hiciste? ¿Por qué?
- Esto que acabas de hacer ¿en qué es diferente a como lo habías hecho antes?

Otra expresión que es recomendable utilizar y que tiene un efecto positivo en los niños es la *alabanza descriptiva* que consiste en elogiar al niño resaltandola descripción de suejecución, lo cual permite al niño tener claridad respecto al motivo por el cual se le está elogiando. Ésta alabanza se diferencia de la simple afirmación "muy bien" en que con ésta es probable que el niño no se percate de la razón por la que se le da el reconocimiento.

Consideraciones finales

El pensamiento numérico es complejo y difícil de analizar. Sin embargo, es necesario comprenderlo de la mejor manera para ofrecer soluciones a los desafíos matemáticos que encaran los niños en los ambientes escolares y de la vida cotidiana. En esta oportunidad se han esbozado algunas propuestas contenidas en cinco componentes de una orientación cuyo propósito central es favorecer el pensamiento numérico en niños de los primeros grados de la escuela primaria.

Cada uno de los aspectos tratados en este escrito tiene matices en los que es necesario profundizar. Por el momento, se espera que estas líneas sirvan como un incentivo para promover la indagación y el intercambio de ideas acerca de un tema tan relevante y fascinante como lo es el pensamiento numérico.

Referencias

- **Buenrostro, A. (2003)**. Aritmética y bajo rendimiento escolar. Diseño e implementación de dos modelos de enseñanza. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN: México.
- **Buenrostro, A. & Figueras, O.** (2011).Children's numerical thinking in the early school grades and how to foster and understand its development. In B. Atweh, M. Graven, W. Secada, P. Valero (Eds.), *Mapping Equity and Quality in Mathematics Education*.New York: Springer.
- **Buenrostro, A. (En prensa)**. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en los primeros grados escolares.
- **Clements, D. H. & Sarama, J. (2009)**. *Learning and teaching early math. The learning trajectories approach*. New York: Routledge.
- **Merrill, M. D. (2002)**. First principles of instruction.*Educational Technology Research and Development. 50*, 43-59.
- **National Research Council (2000)**.*How people learn: brain, mind, experience, and school*, J. D. Bransford, A. L. Brown, and R. R. Cocking, eds. Committee on Learning Research and Educational Practice. Washington, D.C: National Academy Press.

Este texto aborda factores neuropsicológicos y psicológicos implicados en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Se reflexiona sobre la propuesta de Galperin de la formación de las imágenes mentales y su utilidad práctica en la enseñanza de las matemáticas. Se analizan el papel de las emociones y motivaciones en la dinámica del aprendizaje matemático, así como el papel de la tecnología. Se proponen procedimientos para el proceso del cálculo desde la neuropsicología histórico-cultural. Finalmente, se analiza el papel del pensamiento lógico.

ISBN: 978-607-02-5334-8
9 786070 253348