UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

CAMPUS II

CARRERA DE INGENIERÍA QUÍMICA

CICLO BÁSICO

GUÍA DE MATEMÁTICAS PRE-UNIVERSITARIAS PARA EL CURSO DE MATEMÁTICAS I

AUTORES:

DR. LUIS ANTONIO RAMÍREZ TORRES

DR. FAUSTO CALDERAS GARCÍA

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

Contenido

1 Operaciones básicas con números reales y números complejos

1.1 Números reales y recta numérica

Los números reales se colocan en correspondencia uno-a-uno con el conjunto de los puntos de una línea recta. En el 0 se coloca el origen, los números que se colocan a la derecha son los números positivos y los que se colocan a la izquierda son los números negativos. Como se puede observar en la **Figura 1-1**, el 0 no se considera ni positivo ni negativo (no cumple con la propiedad de dicotomía)

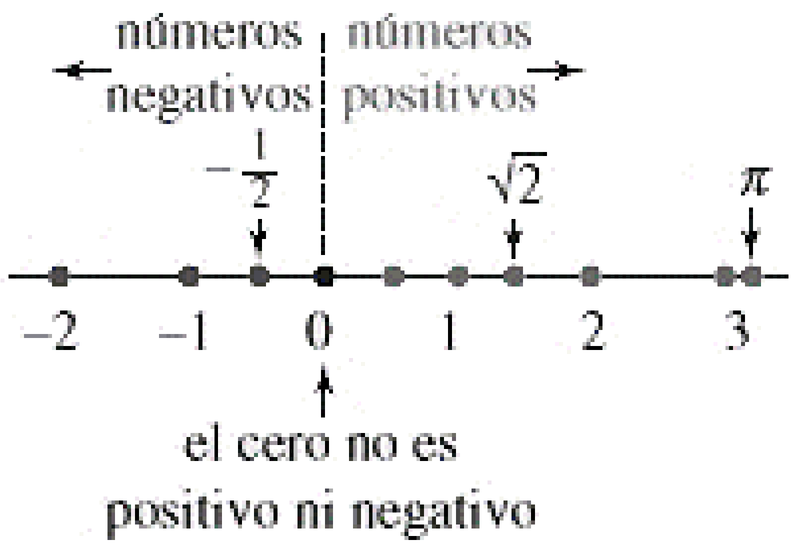


Figura 1-1. La recta real [1].

1.2 Clasificación de los números reales

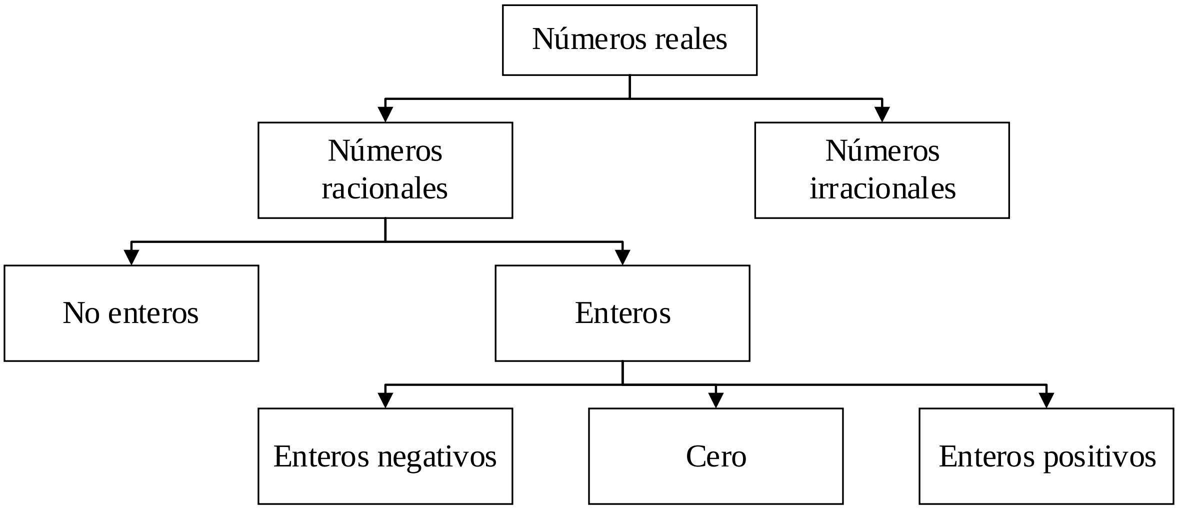


Figura 1-2. Clasificación de los números reales [2].

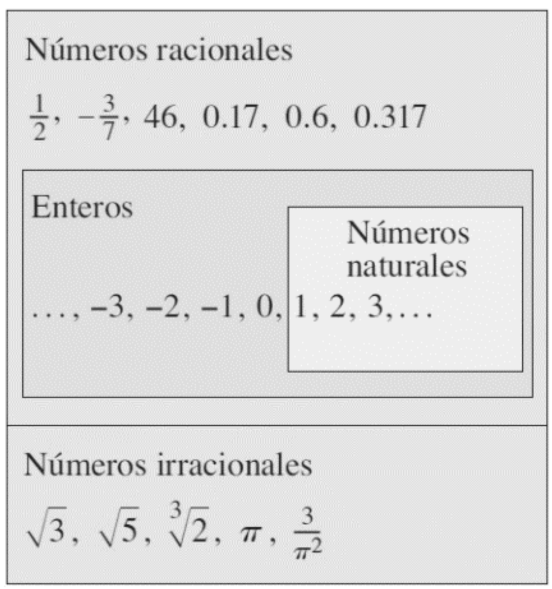


Figura 1-3. Clasificación de los números reales. Tomado de Stewart et al. (2017) [3].

1.2.1 Enteros

Se denota mediante la letra Z. Está conformado por números positivos, negativos y cero:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Un subconjunto de los números enteros son los números naturales, N:

$$N = \{1,2,3,4, \dots\}$$

Nótese que el 0 no se incluye en el conjunto de los números naturales.

En ocasiones se consideran a los números primos y a los números compuestos como subconjuntos de los números enteros.

Números primos: Son números que tienen 2 divisores, 1 y el propio número.

Números compuestos: Son números que poseen más de 2 divisores.

1.2.2 No enteros

Subconjunto de los números racionales y complemento de los números enteros.

1.2.2.1 Racionales

Son la de la forma $\frac{p}{q}$, donde $p, q \in Z$ y $q \neq 0$. Se le conocen como fracciones comunes y se denotan con la letra Q:

$$Q = \left\{\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{5}, -\frac{2}{1}, 3, 1.333\overline{3}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{8}\right\}$$

Las fracciones comunes se clasifican en dos categorías:

Fracción propia: el denominador es mayor que el numerador.

$$\frac{2}{5}, \frac{4}{8}, \frac{9}{18}, \frac{14}{102}$$

Fracción impropia: el denominador es menor que el numerador.

$$\frac{8}{3}, \frac{15}{6}, \frac{30}{15}, \frac{71}{62}$$

1.2.2.2 Irracionales

Son aquellos números no enteros en los que la parte decimal está conformada por una cantidad infinita de dígitos (sin la existencia de periodicidad). Muchos de estos números provienen de resolver ecuaciones algebraicas.

$$\pi, \sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

1.3 Propiedades de los números reales

Si $a, b\ y\ c \in R$, se cumplen las siguientes propiedades (ver **Tabla 1-1**).

Tabla 1-1. Propiedades de los números reales [4].

Propiedad	Adición	Multiplicación	Descripción
Cerradura	$a + b \in R$	$a \cdot b \in R$	Cuando sumamos o multiplicamos dos números reales, el resultado es otro número real.
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	Cuando sumamos o multiplicamos dos números, el orden no importa
Asociativa	$a + (b + c)$ $= (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	Cuando sumamos o multiplicamos dos números, no importa cuales

			dos de estos sumamos o multiplicamos primero
Distributiva	$a(b+c)=ab+ac$		Cuando multiplicamos un número por la suma de dos números el resultado es la suma de multiplicar el número por cada uno de los términos y después se suman.
Neutro	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$	El neutro aditivo es 0 y el neutro multiplicativo es 1.
Inverso	$a+(-a)=0$	$a\cdot\frac{1}{a}=1$	El inverso aditivo de la suma es la resta y el inverso multiplicativo es la división.

1.4 Suma y resta

- Los números enteros con signos iguales se suman y se coloca el signo de los sumandos.
- Los números con signos diferentes se restan y se escribe el resultado con el signo del número mayor en valor absoluto [4].

1.4.1 Signos de agrupación

1.4.1.1 Con números enteros

Delimitan operaciones entre números. La

Tabla 1-2. Signos de agrupación. Adaptado de Servín (2007)[4].

Símbolo	**Nombre**
()	Paréntesis
[]	Corchetes
{}	Llaves

Al simplificar $2-\{-3+5-[4-6+(3-8)-(2-4)]-2\}$, se tiene lo siguiente:

Primero los paréntesis:

$$2-\{-3+5-[4-6+(3-8)-(2-4)]-2\}=2-\{-3+5-[4-6-5+2]-2\}$$

Después los corchetes:

$$2-\{-3+5-[4-6+(3-8)-(2-4)]-2\}=2-\{-3+5+11-6-2\}$$

Finalmente, las llaves:

$$2-\{-3+5-[4-6+(3-8)-(2-4)]-2\}=2+11-16=-3$$

1.4.1.2 Con números racionales

1.4.1.2.1 Descomposición en factores primos

Todo número natural mayor que 1 puede expresarse de forma única como un producto de números primos. A lo anterior se le conoce como teorema fundamental de la aritmética. Sea n un entero positivo. Entonces, existe un único entero k y únicos números primos $p_1 \leq$

$p_2 \leq p_3 \ldots \leq p_k$ tales que $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$ Por ejemplo, el 40 se descompone en sus factores primos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Por lo tanto, $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$. El consenso indica que el 1 no es número primo

Máximo común divisor (MCD): es el mayor de los divisores que es común a dos o más números.

El MCD de 40, 52 y 18 es:

$$\begin{array}{ccc|l} 42 & 54 & 18 & 2 \\ 21 & 27 & 9 & 3 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \end{array}$$

Entonces, $MCD(40, 52, 18) = 2 \cdot 3 = 6$

Mínimo común múltiplo (mcm): Es el menor de los múltiplos que es común a dos o más números.

El mcm de 36, 12, 15 y 18 es:

$$\begin{array}{cccc|l} 36 & 12 & 15 & 18 & 2 \\ 18 & 6 & 15 & 9 & 2 \\ 9 & 3 & 15 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Entonces, $mcm(36, 12, 15{,}18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$

1.4.1.2.2 Fracciones comunes con denominadores iguales

$$\frac{a}{b} \rightarrow \frac{Numerador}{Denominador}$$

Los numeradores se suman o restan y se escribe el denominador en común [4].

Por ejemplo:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

1.4.1.2.3 Fracciones comunes con denominadores diferentes

El común denominador (mcm) se obtiene de los denominadores, se divide por cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por su respectivo numerados, los números que se obtienen se suman o se restan [4].

En general, para una suma de 3 fracciones:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{\frac{mcm(b,d,f)}{b} \cdot a + \frac{mcm(b,d,f)}{d} \cdot c + \frac{mcm(b,d,f)}{f} \cdot e}{mcm(b,d,f)}$$

Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{2} - \frac{7}{8}$$

Calculamos el mcm(4,2,8)

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Es decir, $mcm(4,2,8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Resolvemos:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{2}-\frac{7}{8}=\frac{\frac{8}{4}\cdot 3+\frac{8}{2}\cdot 5-\frac{8}{8}\cdot 7}{8}=\frac{19}{8}$$

1.5 Multiplicación y división

1.5.1 Con números enteros

Tabla 1-3. Leyes de los signos.

Multiplicación		División	
$(+)(+)=+$	$(-)(-)=+$	$\frac{+}{+}=+$	$\frac{-}{-}=+$
$(+)(-)=-$	$(-)(+)=-$	$\frac{+}{-}=-$	$\frac{-}{+}=-$

Por ejemplo:

$$(-2)(5)=-10$$

$$(-3)(-9)=27$$

$$\frac{(-7)(6)(-15)}{(14)(-9)}=-5$$

1.5.2 Con números racionales

De manera general, la multiplicación de números racionales se lleva a cabo de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Similarmente, la división de números racionales se obtiene de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Fracciones complejas: fracción conformada por operaciones subsecuentes entre fracciones [4]. Por ejemplo:

$$\frac{2+\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{1}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{1}+\frac{1}{3}}=\frac{\frac{6+1}{3}}{\frac{6-1}{3}}=\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{(3)(7)}{(3)(5)}=\frac{7}{5}$$

1.6 Raíces y potencias

1.6.1 Potencia

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a \rightarrow n\ veces$$

Donde, a = base y n = exponente.

1.6.2 Radicación

Número que, multiplicado por sí mismo n veces, resulta el radicando.

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Donde, n es el índice, a es el radicando y b es el radical.

1.6.2.1 Suma y resta de radicales

Para sumar o restar radicales deben tener el mismo índice y el mismo radicando [4]:

$$a\sqrt[n]{d} + b\sqrt[n]{d} - c\sqrt[n]{d} = (a+b-c)\sqrt[n]{d}$$

1.6.3 Propiedades de las potencias y los radicales

La **Tabla 1-4** resume las propiedades más importantes de la operación potencia y radical.

Tomar en cuenta que estas propiedades se cumplen siempre que $\{a, b, c, m, n\} \in R$.

Tabla 1-4. Resumen de las propiedades de las potencias y los radicales.

Propiedades de las potencias		**Propiedades de los radicales**	
$a^0 = 1$	$(a^n)^m = a^{n\cdot m}$	$\sqrt[n]{a^n} = a$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}$
$a^1 = a$	$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$
$a^n a^m = a^{n+m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$ $= \sqrt[n\cdot m]{a^m \cdot b^n}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n\cdot m]{\frac{a^m}{b^n}}$	
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$		
$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$			

En ocasiones es conveniente descomponer en factores primos el radicando y simplificar con las propiedades **Tabla 1-4**, el radical.

1.7 Desigualdades

La recta numérica de la **Figura 1-1** es útil para demostrar relaciones de orden entre dos números reales a y b, observe la **Figura 1-4** [1].

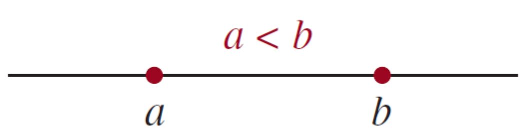


Figura 1-4. Recta numérica donde a es menor que b [1].

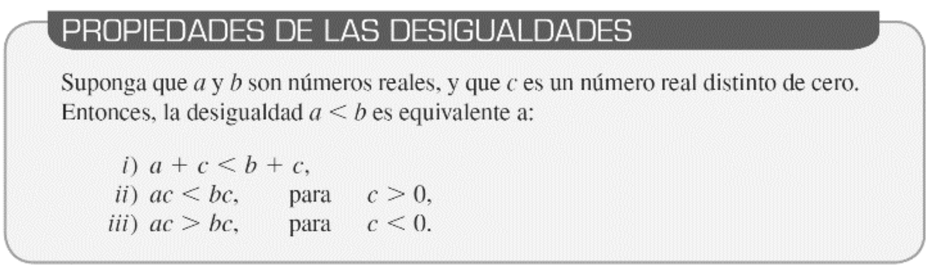
Se cumple lo siguiente:

Tabla 1-5. Desigualdades y símbolos de desigualdad.

Desigualdad	**Significado**
$a < b$	a es menor a b
$b > a$	b es mayor a b
$a \leq b$	a es menor o igual a b
$b \geq a$	b es mayor o igual a b

1.7.1 Solución de desigualdades

Se debe determinar el conjunto de todas las soluciones de una desigualdad (conjunto solución) [1]. Dos desigualdades son equivalentes si tienen exactamente el mismo conjunto solución (véase la **Figura 1-5**).



PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Suponga que a y b son números reales, y que c es un número real distinto de cero. Entonces, la desigualdad $a < b$ es equivalente a:

i) $a + c < b + c$,
ii) $ac < bc$, para $c > 0$,
iii) $ac > bc$, para $c < 0$.

Figura 1-5. Propiedades de las desigualdades [1].

Para expresar matemáticamente la solución de una desigualdad, se utiliza la notación de intervalos, la **Tabla 1-6** resume los posibles intervalos para expresar la solución de una desigualdad.

Tabla 1-6. Desigualdades e intervalos [1].

TABLA 1.1 Desigualdades e intervalos

Desigualdad	Conjunto solución	Notación de intervalo	Nombre	Gráfica
$a < x < b$	$\{x \mid a < x < b\}$	(a, b)	Intervalo abierto	a b
$a \leq x \leq b$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Intervalo cerrado	a b
$a < x \leq b$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Intervalo semiabierto	a b
$a \leq x < b$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Intervalo semiabierto	a b
$a < x$	$\{x \mid a < x < \infty\}$	(a, ∞)	Intervalos no acotados	a
$x < b$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	$(-\infty, b)$		b
$x \leq b$	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	$(-\infty, b]$		b
$a \leq x$	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	$[a, \infty)$		a
$-\infty < x < \infty$	$\{x \mid -\infty < x < \infty\}$	$(-\infty, \infty)$		

1.8 Números complejos

1.8.1 Números imaginarios

Los números imaginarios se crearon para resolver algunos tipos de ecuaciones cuadráticas cuya solución implicaba obtener la raíz cuadrada de números negativos. Se define la unidad imaginaria como:

$$\sqrt{-1} = i$$

1.8.2 Suma y resta de números imaginarios

Se usa la siguiente propiedad:

$$ai + bi - ci = (a + b - c)i$$

1.8.3 Potencia de números imaginarios

Utilizando la definición de la unidad imaginaria se pueden calcular las siguientes cantidades:

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

Para potencias mayores a cuatro se repiten los resultados anteriores.

1.8.4 Números complejos

Un número complejo se expresa de la forma $a + bi$, con $a, b \in R$. Donde a se le conoce como parte real, b se le conoce como parte imaginaria e i es la unidad imaginaria. Los números complejos se suelen representar con la letra z mediante dos formas [4].

Tabla 1-7. Las dos formas de representación de un número complejo.

Forma rectangular	Forma cartesiana
$z = a + bi$	$z = (a, b)$

1.8.5 Gráfica de un número complejo

También conocido como diagrama de Argand [2], la gráfica de un número complejo consiste en poner en el eje de las abscisas, x, la parte real de z y en el eje de las coordenadas, y, la parte imaginaria de z (véase la **Figura 1-6).**

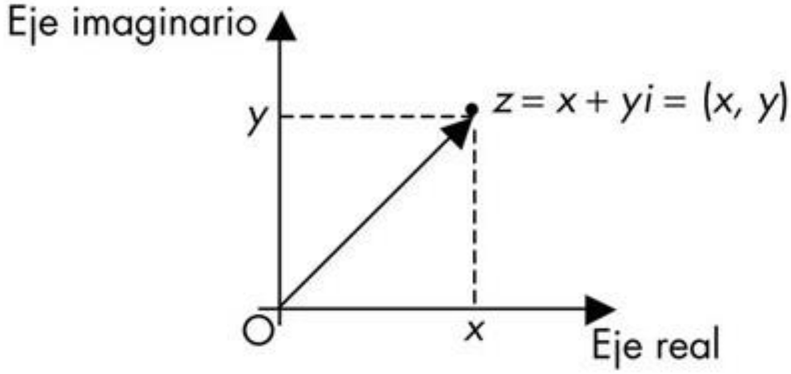


Figura 1-6. Diagrama de Argand.

1.8.6 Magnitud de un número complejo

Si $z = a + bi$ es un número complejo, la magnitud, módulo o valor absoluto de dicho número es la distancia del origen en el diagrama de Argand y el punto que resulta de expresar z en forma cartesiana, se calcula de la siguiente forma:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

1.8.7 Suma y resta de números complejos

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = x + yi$, la suma y resta de define de la siguiente manera [5]:

$$z + w = (a + bi) + (x + yi) = (a + x) + (b + y)i \qquad z + w = (a + x, b + y)$$

$$z - w = (a + bi) - (x + yi) = (a - x) + (b - y)i \qquad z - w = (a - x, b - y)$$

1.8.8 Conjugado de un número complejo

Dado el número complejo $z = a + bi$, el conjugado de z se denota por $\overline{z}$, con $\overline{z} = a - bi$.

1.8.9 Multiplicación de números complejos

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = x + yi$, se define de la siguiente manera:

$$z \cdot w = (a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i$$

1.8.10 División de números complejos

Sean los números complejos $z = a + bi$ y $w = x + yi$, su división se define:

$$\frac{z}{w} = \frac{a + bi}{x + yi} = \frac{ax + by}{x^2 + y^2} + \frac{bx - ay}{x^2 + y^2}i$$

2 Expresiones algebraicas y sus operaciones básicas

2.1 Término algebraico

Las expresiones algebraicas sirven para generalizar cantidades, por ejemplo, se tiene la siguiente expresión algebraica:

$$ax^b$$

Donde, a es el coeficiente, x es la base y b es el exponente. A la expresión anterior se le conoce como monomio.

2.2 Lenguaje algebraico

Su función es la de expresar términos algebraicos en español. Véase los ejemplos mostrados en la

Español	Lenguaje algebraico
El cuádruple de un número cualquiera	$4x$
La diferencia de dos números cualquiera	$x - y$
El cuadrado de la suma de tres números cualquiera	$(x + y + z)^2$

La suma del cubo de dos números cualquiera	$x^3 + y^3$
Seis octavas partes del cubo de la diferencia del doble de un número cualquiera y el triple de otro	$\frac{6}{8}(2x - 3y)^3$
La raíz cuadrad del producto de la semidiferencia de dos números por la semisuma de los mismos	$\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)}$

2.3 Términos semejantes

Para que un término sea semejante, se requiere que tanto la base como el exponente de los términos involucrados sean iguales. Por ejemplo:

$4x^2$ es semejante a $-6x^2$

$8bx^2$ es semejante a $-14x^2b$

$8b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}x^2$ es semejante a $(2-i)a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}x^2$ donde i es la unidad imaginaria

$-9x^0$ es semejante a $\frac{2}{3}x^0$ ya que cualquier cantidad elevada a la 0 es 1

2.3.1 Suma y resta de términos semejantes

Se suman o restan los coeficientes de términos que sean semejantes. Los exponentes y las bases permanecen iguales. Por ejemplo:

$$4x - 9x = (4 - 9)x = -5x$$

2.4 Operaciones con polinomios

Un polinomio es la suma o resta de varios monomios, pueden ser de distinta base o exponente. El grado de un monomio es la mayor potencia a la cuál se encuentra elevado el término. El grado de un polinomio es la mayor potencia a la que se encuentre elevado cualquiera de sus monomios.

2.4.1 Suma de polinomios

Los términos semejantes entre polinomios se reducen. Por ejemplo:

$$(4x - 6y + 7) + (-6x + 2y - 1) = -2x - 4y + 6$$

Nótese que el primer paréntesis no es necesario, pero se escribe para enfatizar que es la suma de dos polinomios.

2.4.2 Resta de polinomios

Se debe identificar el minuendo y el sustraendo para llevar a cabo la resta de polinomios, es decir:

$$Minuendo - Sustraendo$$

Por ejemplo, si queremos restar $(5x + 6y - 7z)$ a $(-7x - 4y + 10z)$, se tiene que:

$$\underbrace{(5x + 6y - 7z)}_{Minuendo} - \left(\underbrace{-7x - 4y + 10z}_{Sustraendo}\right) = 5x + 6y - 7z + 7x + 4y - 10z$$

$$= 12x + 10y - 17z$$

2.4.3 Multiplicación de polinomios

Se recomienda repasar las leyes de los signos (**sección 1.5.1**), las propiedades de los números reales (**sección 1.3**), las leyes de los exponentes y las leyes de los radicales (**sección 1.6.3**).

2.4.3.1 Multiplicación de monomio por monomio

Se multiplican las bases y se suman los exponentes. Observe el siguiente ejemplo:

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^6y^8\right)}_{Monomio}\underbrace{\left(-\frac{3}{5}x^4y^9\right)}_{Monomio} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)x^6x^4y^8y^9 = \frac{3}{10}x^{6+4}y^{8+9} = \frac{3}{10}x^{10}y^{17}$$

2.4.3.2 Multiplicación de monomio por polinomio

Se utiliza la propiedad distributiva de los números reales, es decir, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, véase el siguiente ejemplo:

$$\underbrace{(6a^2)}_{Monomio}\ \underbrace{(3a^2 - 6ab - 5abc)}_{Polinomio} = (6a^2)(3a^2) - (6a^2)(6ab) - (6a^2)(5abc)$$

$$= 18a^4 - 36a^3bc - 30a^3bc$$

2.4.3.3 Multiplicación de polinomio por polinomio

Nuevamente se utiliza la propiedad distributiva de los números reales, en otras palabras, cada término del primer polinomio se multiplica por cada uno del segundo polinomio (recordar que el orden de los factores no altera el producto). Por ejemplo:

$$\underbrace{(m^2 - mn + n^2)}_{Polinomio}\underbrace{(m+n)}_{Polinomio} = \underbrace{(m+n)}_{Polinomio}\underbrace{(m^2 - mn + n^2)}_{Polinomio}$$

$$= m^2(m+n) - mn(m+n) + n^2(m+n)$$

$$= m^3 + m^2n - mn^2 + mn^2 + n^3$$

$$= m^3 + n^3$$

2.4.4 División de polinomios

Se recomienda repasar las leyes de los signos (**sección 1.5.1**), las propiedades de los números reales (**sección 1.3**), las leyes de los exponentes y las leyes de los radicales (**sección 1.6.3**).

2.4.4.1 División de monomio entre monomio

Se dividen las bases iguales y los exponentes se restan. Por ejemplo:

$$\frac{\overbrace{20x^4y^6z^3}^{monomio}}{\underbrace{-2x^2y^2z^3}_{monomio}} = \left(\frac{20}{-2}\right)x^{4-2}y^{6-2}z^{3-3} = -10x^2y^4z^0 = -10x^2y^4$$

2.4.4.2 División de polinomio entre monomio

Cada uno de los elementos del polinomio del numerador (dividendo) se divide entre el monomio del denominador (divisor). Observe el siguiente ejemplo:

$$\frac{Dividendo}{Divisor} \leftarrow \frac{\overbrace{15x^4y^5 - 10x^3y^6}^{polinomio}}{\underbrace{-5x^2y^2}_{monomio}} = \frac{15x^4y^5}{-5x^2y^2} - \frac{10x^3y^6}{-5x^2y^2}$$

$$= \left(\frac{15}{-5}\right)x^{4-2}y^{5-2} - \left(\frac{10}{-5}\right)x^{3-2}y^{6-2} = -3x^2y^3 + 2xy^4$$

2.4.4.3 División de polinomio entre polinomio

Existen 2 métodos para dividir un polinomio entre otro polinomio:

- División larga de polinomios.
- División sintética (regla de Ruffini)

En este libro solo se reportará el algoritmo de la división larga, si el lector está interesado en la regla de Ruffini, consultar el libro de Stewart et al. (2017) [3].

La división larga de polinomios es muy parecida a la efectuada entre números. Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios, con $D(x) \neq 0$, entonces existen los polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$, donde $R(x)$ es 0 o de grado menor que el grado de $D(x)$, es decir:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \rightarrow \underbrace{P(x)}_{Dividendo} = \underbrace{D(x)}_{Divisor} \cdot \underbrace{Q(x)}_{Cociente} + \underbrace{R(x)}_{Residuo}$$

Observe el siguiente ejemplo reportado en el libro de Stewart et a. (2017) [3]:

Dividir $6x^2 - 26x + 12$ entre $x - 4$. Expresar el resultado en cada uno de las dos formas mostradas. Cabe resaltar que los polinomios deben estar ordenados de menor grado a mayor grado (forma canónica), si no existiera algún término de un grado dado simplemente se suma $0x^n$, donde n es el número del grado faltante. La forma anterior es equivalente a:

$$\frac{x - 4}{6x^2 - 26x + 12} \rightarrow \frac{Dividendo}{Divisor}$$

1. Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor:

   $\frac{6x^2}{x} = 6x.$

2. Multiplicamos el divisor por el resultado de 1, es decir, $6x$ y restamos el resultado del dividendo.

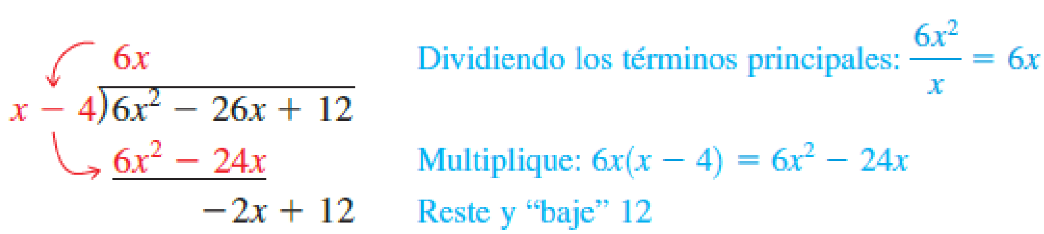


Figura 2-1. Pasos 1 y 2 del algoritmo de la división larga [3].

3. Repetimos los pasos 1 y 2 usando el último renglón de la **Figura 2-1** $(-2x + 12)$ como el dividendo.

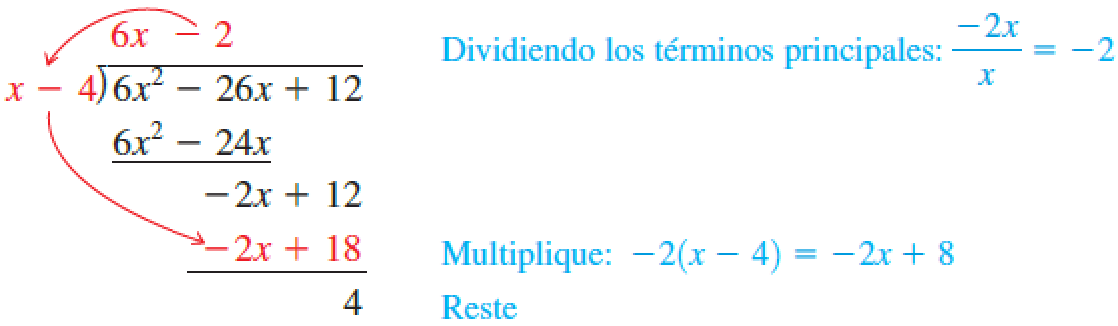


Figura 2-2. Paso 3 del algoritmo de la división larga [3].

4. El proceso de división termina cuando el último renglón es de menor grado que el divisor, dicho renglón es el residuo y el renglón superior es el cociente.

El resultado de esta división es:

$$\frac{\overbrace{6x^2 - 26x + 12}^{Dividendo}}{\underbrace{x - 4}_{Divisor}} = \overbrace{6x - 2}^{Cociente} + \frac{\overbrace{4}^{Residuo}}{\underbrace{x - 4}_{Divisor}}$$

O bien de forma alternativa, pero equivalente:

$$\underbrace{6x^2 - 26x + 12}_{Dividendo} = \underbrace{(x - 4)}_{Divisor}\underbrace{(6x - 2)}_{Cociente} + \underbrace{4}_{Residuo}$$

3 Productos notables

Los productos notables se obtienen usando reglas establecidas y son comunes en muchas aplicaciones de la matemática en la Ingeniería Química. Son de utilidad debido a que evita realizar el cálculo completo de dichos productos. Por lo anterior, se recomienda aprenderlos de memoria. Lo anterior implica un ahorro de tiempo en los cálculos.

3.1 Binomio al cuadrado

Al elevar un binomio (dos monomios) al cuadrado se obtiene un trinomio, que se le conoce como trinomio cuadrado perfecto.

$$\underbrace{(x+y)^2}_{Binomio\ al\ cuadrado} = \underbrace{x^2+2xy+y^2}_{Trinomio\ cuadrado\ perfecto}$$

$$\underbrace{(x-y)^2}_{Binomio\ al\ cuadrado} = \underbrace{x^2-2xy+y^2}_{Trinomio\ cuadrado\ perfecto}$$

Regla [4]:

1. Se eleva al cuadrado el primer término del binomio.
2. Se suma o resta el doble producto del primer término por el segundo.
3. Se suma el cuadrado del segundo término del binomio.

3.2 Binomio conjugado

Surge de la multiplicación de un binomio por otro binomio donde el segundo monomio del segundo binomio tiene un signo negativo. El resultado es una diferencia de cuadrados:

$$\underbrace{(x+y)}_{1er.binomio}\ \underbrace{(x-y)}_{2do.binomio} = \underbrace{x^2-y^2}_{Diferencia\ de\ cuadrados}$$

Regla [4]:

1. Se eleva al cuadrado el término que no cambia de signo.
2. Se resta el cuadrado del término que cambia de signo.

3.3 Binomio con término común

Dos binomios que se multiplican y tienen un término en común.

$$\left(\underbrace{x}_{Común}+a\right)\left(\overbrace{x}^{Común}+b\right)=x^2+(a+b)x+ab$$

Regla [4]:

1. Se eleva al cuadrado el común.
2. Se suman algebraicamente los términos no comunes y se multiplican por el término común.
3. Se suma el producto algebraico de los dos términos no comunes.

3.4 Binomio al cubo

Es muy común encontrarlos en la matemática aplicada. Es de la forma:

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Regla [4]:

1. Obtener el cubo del primer término.
2. Sumar el triplo producto del cuadrado del primer término.
3. Sumar el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo.
4. Sumar el cubo del segundo término.

4 Factorización

Es el proceso de transformar una suma o diferencia de términos algebraicos en un producto. La factorización es ampliamente usada para la solución de ecuaciones algebraicas que describen procesos en Ingeniería Química o para encontrar raíces de un polinomio.

4.1 Factor común

Para obtener el factor común de un polinomio, se obtiene el MCD (se recomienda repasar la **sección 1.4.1.2.1**) de los coeficientes de los términos con el exponente menor, siempre que se repitan en cada uno de los polinomios a factorizar. Véase el siguiente ejemplo propuesto por Servin (2007) [4]:

$$24m^3 + 16m^2 - 4\underbrace{m}_{\substack{Término\\ de\ menor\\ exponente}} = \underbrace{\overbrace{4}^{MDC(24,16,4)}\quad m}_{\substack{Factor\\ común}}(6m^2 + 4m - 1)$$

4.2 Diferencia de cuadrados

Tiene la forma $x^2 - y^2$ y su factorización es el producto de binomios conjugados:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

4.3 Trinomio cuadrado perfecto

Es el resultado de desarrollar un binomio al cuadrado.

$$x^2 \mp 2xy + y^2 = (x \mp y)^2$$

4.4 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

El trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, donde $\{b, c\} \in R$, se obtiene al desarrollar el producto de dos binomios con término común. El término común se expresa en los dos binomios y los monomios restantes de cada caso se obtienen recordando la siguiente frase: *dos términos que multiplicados me den c y que sumados (con todo y signo) me den b*. Ver el siguiente ejemplo:

$$x^2 + 7x + 12 = \underbrace{(\overbrace{x}^{\substack{Término\\ común}} + 3)}_{Binomio}\underbrace{(x + 4)}_{Binomio}$$

Nótese que en este caso $b = 7$ y $c = 12$, entonces $(+3)(+4) = 12 = c$ y $+3 + 4 = 7 = b$.

4.5 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Observe el siguiente ejemplo propuesto por Servin (2007) [4]:

$$2x^2 + 3x + 1$$

1. Se multiplica y se divide el polinomio por el coeficiente del término de grado 2 (cuadrático).

$$\left(\frac{2}{2}\right)(2x^2 + 3x + 1)$$

2. Se multiplica el numerador del factor nuevo solo por el 1er. y 3er. términos del polinomio.

$$\frac{4x^2 + 3(2x) + 2}{2}$$

Nótese que si en el numerador hacemos el cambio de variable $\alpha = 2x$, se obtiene un trinomio cuadrado perfecto de la forma $\alpha^2 + b\alpha + c$.

$$\frac{\alpha^2 + 3\alpha + 2}{2}$$

3. Se realizan los pasos para factorizar el trinomio de la forma $\alpha^2 + b\alpha + c$ y se deshace el cambio de variable para obtener:

$$\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2} = \frac{(2x + 1)(2x + 2)}{2}$$

4. Dividimos entre el denominador

$$\frac{(2x + 1)(2x + 2)}{2} = (x + 1)(2x + 1)$$

4.6 Suma y resta de cubos

Son de la forma:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

5 Teorema del residuo y del factor

Sea el polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ y el binomio $bx + c$, entonces se cumple lo siguiente [1-5]:

a) $bx + c$ es factor de $f(x)$ si $f\left(-\frac{c}{b}\right) = 0$.

b) $bx + c$ no es factor de $f(x)$ si $f\left(-\frac{c}{b}\right) = k$, con $k \neq 0$, donde k es el residuo del cociente de $f(x)$ con $bx + c$.

c) $-\frac{c}{b}$ resulta de resolver la ecuación algebraica $bx + c = 0$.

6 Ecuaciones algebraicas de primer grado con una incógnita

Igualdad entre dos expresiones que involucran polinomios de primer grado y una literal en común. Las ecuaciones son resueltas cuando se encuentra un valor numérico para la literal que cumpla con la igualdad. Se recomienda repasar las propiedades de los números reales (**sección 1.3**).

Por ejemplo:

$$2x - 2 = 3x + 6$$

Al sumar el inverso aditivo de 2 en ambos lados de la igualdad (para no alterar la ecuación).

$$2x - 2 + 2 = 3x + 6 + 2$$

$$2x = 3x + 8$$

Sumamos el inverso aditivo de $3x$ en ambos lados de la igualdad.

$$2x - 3x = 3x - 3x + 8$$

$$5x = 8$$

Finalmente, para calcular el valor de x, se multiplica ambos lados por el inverso multiplicativo de 5.

$$\frac{1}{5}(5x) = \frac{8}{5}$$

El valor de x obtenido, satisface la igualdad.

7 Ecuaciones algebraicas de segundo grado con una incógnita

La forma general de este tipo de ecuaciones es $ax^2 + bx + c = 0$, siempre que $\{a, b, c) \in R$ y $a \neq 0$. El teorema fundamental de álgebra menciona que un polinomio de grado n tendrá n soluciones (raíces). Una ecuación algebraica de segundo grado (cuadrática) tendrá dos raíces.

Métodos de solución

1. Fórmula general $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, una raíz se obtiene con el signo positivo antes de la raíz cuadrad y la restante con el signo negativo.
2. Factorización. Se observa la ecuación cuadrática y se factoriza con las técnicas vistas en la **sección 4** usando el teorema del residuo y del factor de la **sección 5**.
3. Completando el trinomio cuadrado perfecto.

Al término de $b^2 - 4ac$ de la fórmula general se le conoce como discriminante y posee los siguientes casos relevantes:

1. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución (dos raíces iguales).
2. Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son complejas o imaginarias.
3. Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces son reales.

7.1 Completar el trinomio cuadrado perfecto

Tienen una amplia variedad de utilidades, desde la solución de ecuaciones de segundo grado hasta para la solución de integrales indefinidas del cálculo integral. Apartir de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se realiza lo siguiente:

Se suma el inverso aditivo de c en ambos lados de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c - c = -c$$

$$ax^2 + bx = -c$$

Se suma en ambos lados de la ecuación la cantidad $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ con el fin de que el término del lado izquierda se convierta en un trinomio cuadrado perfecto que se pueda factorizar en dos binomios.

$$\underbrace{ax^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\substack{Trinomio\ cuadrado \\ perfecto}} = \underbrace{-c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}_{\substack{Cantidad \\ numérica}}$$

8 Sistemas de ecuaciones algebraicas de primer grado y una incógnita

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Una solución de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que cumplen simultáneamente cada una de las ecuaciones.

8.1 Sistemas con 2 incógnitas

Es de la forma:

$$a_1x + b_1x = c_1$$

$$a_2x + b_2x = c_2$$

La solución de este tipo de sistemas es el punto $P(x, y)$ que satisface ambas ecuaciones. El punto $P(x)$ corresponde al punto donde ambas rectas se intersecan. Cundo dicho punto existe se dice que ambas rectas son oblicuas y compatibles. Si las ecuaciones son equivalentes, es decir, representan a la misma recta, el sistema de ecuaciones se le conoce como rectas coincidentes y tienen una cantidad infinita de soluciones.

8.1.1 Métodos de solución

8.1.1.1 Regla de Cramer o determinantes

Para el sistema:

$$a_1x + b_1x = c_1$$

$$a_2x + b_2x = c_2$$

El método de Cramer establece que las incógnitas se resuelven de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}_{\substack{Determinante \\ del\ sistema}}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}_{\substack{Determinante \\ del\ sistema}}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

8.1.1.2 Reducción

Este método consiste en eliminar una de las incógnitas al sumar las dos ecuaciones y obtener una ecuación de primer grado {Servín, 2007 #3}.

8.1.1.3 Sustitución

Consiste en despejar de una ecuación una incógnita y sustituirla en otra y así reducirla a una ecuación de primer grado con una incógnita. Posteriormente, se procede a sustituir la variable calculada en la ecuación del primer despeje.

8.2 Sistemas con 3 incógnitas

Tiene la forma general:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Los métodos de solución que se vieron en la **sección 8.1** también son aplicables a este tipo de sistemas de ecuaciones, sin embargo, la cantidad de cálculos aumenta bastante. El método más eficiente para este tipo de sistemas se conoce como método de Gauss-Jordan [6].

Si se usa el método de Cramer, las incógnitas están dadas por:

$$x = \frac{\Delta x}{\underbrace{\Delta}_{\substack{Determinante \\ del\ sistema}}} ; y = \frac{\Delta y}{\underbrace{\Delta}_{\substack{Determinante \\ del\ sistema}}} ; z = \frac{\Delta z}{\underbrace{\Delta}_{\substack{Determinante \\ del\ sistema}}}$$

Los determinantes están dados por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} ; \Delta\mathrm{x} = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} ; \Delta\mathrm{y} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} ; \Delta\mathrm{z} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Existen distintos algoritmos para resolver determinantes, los que más destacan son lo siguientes:

- Método de Sarrus.
- Método de los cofactores.

9 Trigonometría

9.1 Triángulo rectángulo

Es un triángulo que tiene un ángulo recto (90°); a los lados que forman el ángulo recto se les llama catetos y el lado que se opone a dicho ángulo se llama hipotenusa (ver **Figura 9-1**).

Vale la pena recordar que $1° = \frac{\pi}{180} radián \rightarrow 1\ radián = \left(\frac{180}{\pi}\right)°$.

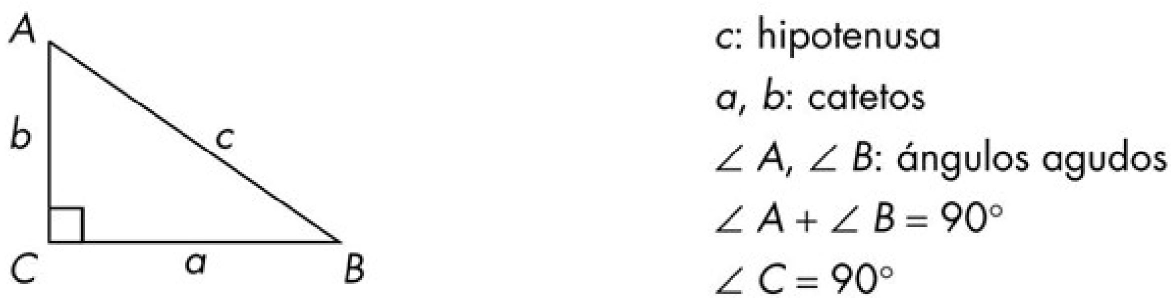


Figura 9-1. Partes de un trángulo rectángulo [4].

9.2 Teorema de Pitágoras

Del triángulo de la **Figura 9-1** se cumple que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

9.3 Razones trigonométricas

Nuevamente invocando el triángulo de la **Figura 9-1**. Se definen las siguientes funciones trigonométricas.

Tabla 9-1. Funciones trigonométricas.

Función trigonométrica	Abreviatura y cálculo (para el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ formado en B)
$seno = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{CO}{hip}$	$\sin(\theta) = \frac{b}{c}$
$coseno = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{CA}{hip}$	$\cos(\theta) = \frac{a}{c}$
$tangente = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{CO}{hip}$	$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$
$cotangente = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{CA}{hip}$	$\cot(\theta) = \frac{a}{b}$
$secante = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{hip}{CA}$	$\sec(\theta) = \frac{c}{a}$
$cosecante = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{hip}{CO}$	$\csc(\theta) = \frac{c}{b}$

Para no olvidar el cálculo de las razones trigonométricas, sírvase de la siguiente mnemotecnia: "*co-ca co-ca hip-hip* (para los denominadores de arriba hacia abajo desde la función seno hasta la función cosecante) y otra vez *co-ca co-ca hip-hip* (para los numeradores de abajo hacia arriba empezando con la cosecante y terminando en el seno)".

Se pueden obtener fácilmente los valores de las funciones trigonométricas a través de un triángulo rectángulo de hipotenusa unitaria (véase Stewart et al. (2017[3]). A partir de la **Tabla 9-1** se pueden obtener otro tipo de relaciones trigonométricas llamadas identidades trigonométricas.

9.4 Ley de los senos

Se aplica para la resolución de triángulos oblicuángulos (véase la **Figura 9-2**), esto es, triángulos que no tienen un ángulo de 90°. La razón que existe entre un lado de un triángulo oblicuángulo y el seno del ángulo opuesto a dicho lado, es proporcional a la misma razón entre los lados y ángulos restantes.

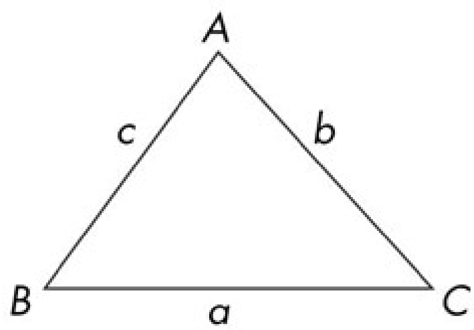


Figura 9-2. Triángulo oblicuángulo[4].

Se cumple lo siguiente:

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

9.5 Ley de los cosenos

Si se considera el triángulo de la **Figura 9-2** entonces se cumple que el cuadrado de un lado de un triángulo oblicuángulo es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado buscado, es decir:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bccos(A)}$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2accos(A)}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos(C)}$$

10 Secciones cónicas

10.1 Línea recta

Lugar geométrico de todos los puntos tales que, si se toman dos cualesquiera, el valor de la pendiente es constante. La ecuación general de la recta es:

$$Ax + By + C = 0, \{A, B, C\} \in R$$

10.1.1 La ecuación de la recta punto-pendiente

Dado un punto $P(x_1, y_1)$ de una recta con pendiente m (ver **Figura 10-1**) , la ecuación de la recta está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

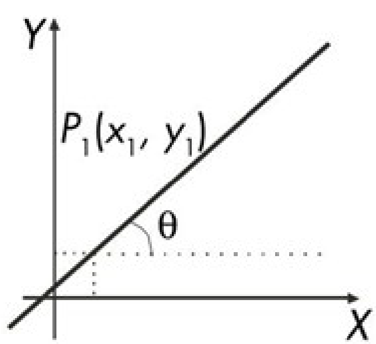


Figura 10-1. Recta punto-pendiente[4].

10.1.2 La ecuación de la recta pendiente-ordenada al origen

La ecuación pendiente-ordenada al origen está dada por:

$$y = mx + b$$

Donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen.

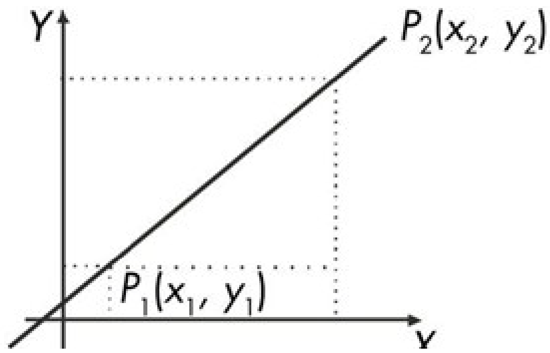


Figura 10-2. Recta pendiente-ordenada al origen[4].

10.1.3 Ecuación de la recta en forma simétrica

Dadas las intersecciones con los ejes coordenados X y Y, la ecuación de la recta en su forma simétrica está dada por:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

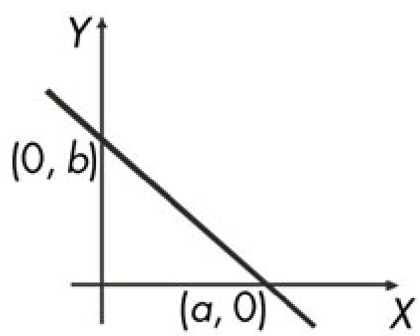


Figura 10-3. Ecuación de la recta forma simétrica[4].

10.1.4 Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto $P_1(x_1, y_1)$ a una recta $Ax + Bx + C = 0$ está dada por la fórmula:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

10.2 Circunferencia

Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro (ver **Figura 10-4**).

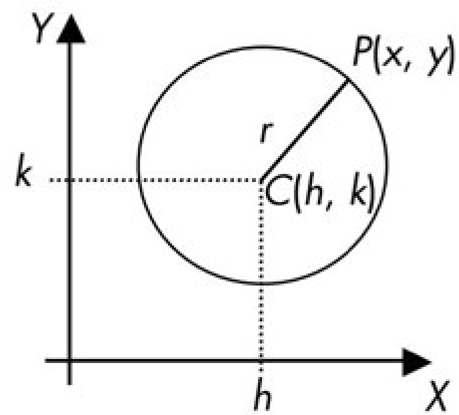


Figura 10-4. Sección cónica - Circunferencia[4].

Existen tres formas para la ecuación de una circunferencia las cuales se muestran en la

Forma canónica (centro en el origen)	$x^2 + y^2 = r^2$
Forma ordinaria (centro en $\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}$))	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
Forma general	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A = C$

Por lo general se dan las coordenadas del centro y, mediante productor notables y factorización, se obtienen los distintos coeficientes de las ecuaciones de la circunferencia.

10.3 Parábola

Es el lugar geométrico donde los puntos del plano se mueven de tal manera que la distancia a un punto fijo, llamado foco, equidista de una recta fija llamada directriz. En la **Figura 10-5** se pueden apreciar todos los elementos de la parábola, los cuales se enlistan a continuación: V es el vértice, F es el foco, D es la directriz, $LR = |4p|$ es el lado recto y p es el parámetro de la parábola.

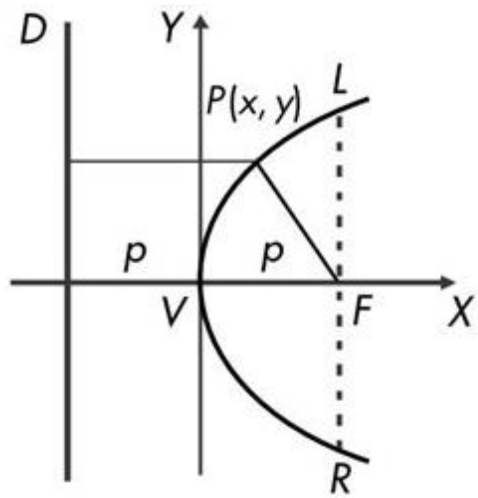
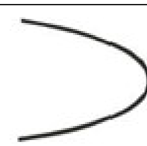


Figura 10-5. Sección cónica - Parábola[4].

De acuerdo con el signo de p se determina la concavidad de la parábola (ver **Tabla 10-1**).

Tabla 10-1. Concavidad de la parábola.

	p es positivo	**p es negativo**
Horizontal		

Vertical		

10.3.1 Ecuaciones de la parábola

Tabla 10-2. Ecuaciones de la parábola.

Horizontal con vértice en el origen	**Vertical con vértice en el origen**
• Eje focal coincide con el eje x $(y = 0)$ • Ecuación canónica: $y^2 = 4px$ • Foco:$F(p, 0)$ • Directriz: $x + p = 0$	• Eje focal coincide con el eje y (x$=0$) • Ecuación canónica: $x^2 = 4py$ • Foco:$F(0, p)$ • Directriz: y$+p = 0$
Horizontal con vértice fuera del origen	**Vertical con vértice fuera del origen**
• Eje focal paralelo al eje x. • Ecuación ordinaria: $(y - h)^2 = 4p(x - h)$ • Vértice: (h, k) • Foco: $F(h + p, k)$ • Directriz: $x - h + p = 0$	• Eje focal paralelo al eje y. • Ecuación ordinaria: $(x - h)^2 = 4p(y - h)$ • Vértice: (h, k) • Foco: $F(h, k + p)$ Directriz: y$-k + p = 0$

10.3.2 Ecuación general de la parábola

Horizontal: $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	Vertical: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

10.4 Elipse

Lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es siempre constante. En la **Figura 10-6** se puede observar las partes de la elipse, C es el centro, $V_1\ y\ V_2$ son los vértices, $F_1\ y\ F_2$ son los focos, $B_1\ y\ B_2$ son los extremos del eje menor, la distancia $\overline{V_1V_2} = 2a$ es el eje mayor, la distancia $\overline{F_1F_2} = 2c$ es el eje focal, la distancia $\overline{B_1B_2} = 2b$ es el eje menor y $LR = \frac{2b^2}{a}$.

Para describir el lugar geométrico de una elipse debe cumplirse la siguiente condición: $a^2 = b^2 + c^2; a > b, a > c$. Tambien se puede calcular la exentricidad: $e = \frac{c}{a}(e < 1)$.

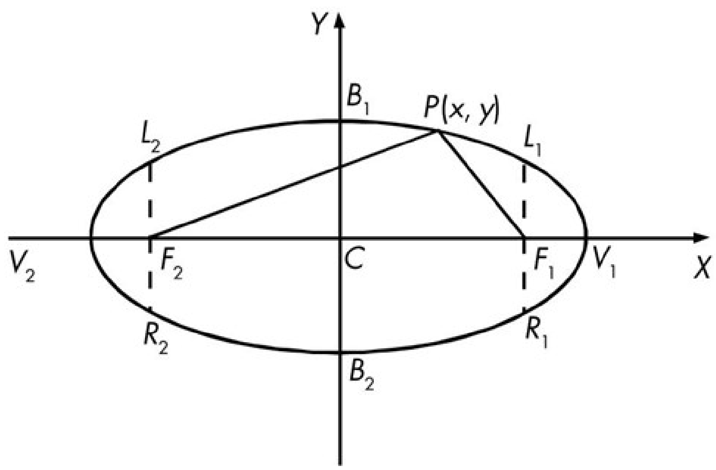


Figura 10-6. Sección cónica - Elipse[4].

Tabla 10-3. Ecuaciones de la elipse.

Horizontal con centro en el origen	**Vertical con centro en el origen**
• Eje focal coincide con el eje x. • Ecuación canónica: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	• Eje focal coincide con el eje y. • Ecuación canónica: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

• Vértices: $V_1(a,0), V_2(-a,0)$ • Focos: $F_1(c,0), F_2(-c,0)$ • Extremos del eje menor: $B_1(0,b), B_2(0,-b)$	• Vértices: $V_1(0,a), V_2(0,-a)$ • Focos: $F_1(0,c), F_2(0,-c)$ • Extremos del eje menor: $B_1(b,0), B_2(-b,0)$
Horizontal con centro en $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k})$	**Vertical con centro en $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k})$**
• Eje focal coincide con el eje x. • Ecuación ordinaria: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ • Vértices: $V_1(h+a,k), V_2(h-a,k)$ • Focos: $F_1(h+c,k), F_2(h-c,k)$ • Extremos del eje menor: $B_1(h,k+b), B_2(h,k-b)$	• Eje focal coincide con el eje y. • Ecuación ordinaria: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ • Vértices: $V_1(h,k+a), V_2(h,k-a)$ • Focos: $F_1(h,k+c), F_2(h,k-c)$ • Extremos del eje menor: $B_1(h+b,k), B_2(h-b,k)$

10.4.1 Ecuación general de la elipse

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0, A \neq C \text{ y de igual signo}$$

10.5 Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es siempre constante. De acuerdo con la **Figura 10-7**, los elementos de la hipérbola son: C es el centro, $V_1\ y\ V_2$ son los vértices, $F_1\ y\ F_2$ son los focos, $B_1\ y\ B_2$ son los extremos del eje conjugado, la distancia $\overline{V_1V_2}=2a$ es el eje transversal o real, la distancia $\overline{F_1F_2}=2c$ es el eje focal, la distancia $\overline{B_1B_2}=2b$ es el eje conjugado o imaginario, la distancia $LR=\frac{2b^2}{a}$, I_1 y I_2 son las asíntotas, en este caso, la condición que se cumple es: $c^2=a^2+b^2; c>b, c>a$. La excentricidad de la hipérbola se calcula mediante $e=\frac{c}{a}(e>1)$.

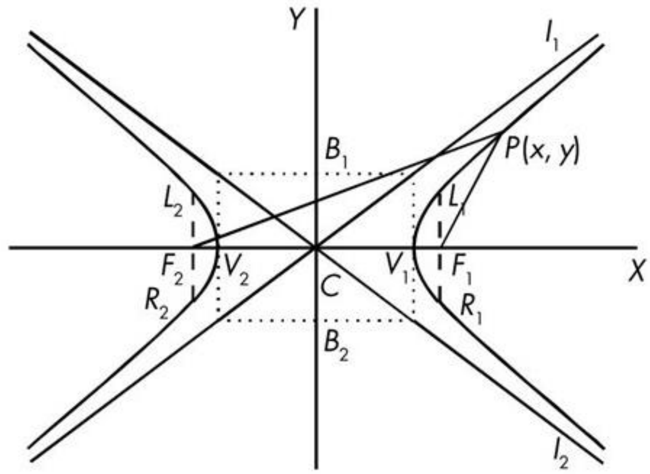


Figura 10-7. Sección cónica - Hipérbola[4].

Tabla 10-4. Ecuaciones de la hipérbola.

Horizontal con centro en el origen	**Vertical con centro en el origen**
• Eje focal coincide con el eje x. • Ecuación canónica: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ • Vértices: $V_1(a, 0), V_2(-a, 0)$ • Focos: $F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ • Extremos del eje conjugado: $B_1(0, b), B_2(0, -b)$ • Asíntotas: $y = \pm\frac{b}{a}x$	• Eje focal coincide con el eje y. • Ecuación canónica: $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ • Vértices: $V_1(0, a), V_2(0, -a)$ • Focos: $F_1(0, c), F_2(0, -c)$ • Extremos del eje conjugado: $B_1(b, 0), B_2(-b, 0)$ • Asíntotas: $y = \pm\frac{a}{b}x$
Horizontal con centro en $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$	**Vertical con centro en $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$**
• Eje focal coincide con el eje x.	• Eje focal coincide con el eje y.

• Ecuación ordinaria: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	• Ecuación ordinaria: $\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
• Vértices: $V_1(h+a,k), V_2(h-a,k)$	• Vértices: $V_1(h,k+a), V_2(h,k-a)$
• Focos:$F_1(h+c,k), F_2(h-c,k)$	• Focos:$F_1(h,k+c), F_2(h,k-c)$
• Extremos del eje conjugado: $B_1(h,k+b), B_2(h,k-b)$	• Extremos del eje menor: $B_1(h+b,k), B_2(h-b,k)$
• Asíntotas: $y-k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$	• Asíntotas: $y-k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$

10.5.1 Ecuación general de la hipérbola

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ con } A\ y\ C \text{ de signo diferente}$$

10.6 Ecuación general de segundo grado

Es la ecuación que representa a cualquier sección cónica [2], la cual se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Cuyo invariante es $I = B^2 - 4AC$

10.6.1 Si $\boldsymbol{B = 0}$

La ecuación resultante sería $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, cuyos casos especiales son:

- Si $A = C$ describe a la circunferencia.
- Si $A\ o\ C = 0$ describe a la parábola.
- Si $A \neq C$ pero del mismo signo describe una elipse.
- Si $A\ y\ C$ tienen signos contrarios describe una hipérbola.

10.6.2 Si $\boldsymbol{B \neq 0}$

Entonces la ecuación general de segundo grado representa:

- Una parábola si $I = 0$.
- Una elipse si $I < 0$.
- Una hipérbola si $I > 0$.

Referencias

1. Zill DG, Dewar JM 2012 Precálculo con avances de cálculo.McGraw Hill, Los Ángeles, U.S.A.
2. Swokowski EW, Cole JA 2018 Precálculo Álgebra y Trigonometría con geometría analítica.Cengage Learning, Boston, U.S.A.
3. Stewart J, Redlin L, Watson S 2017 Precálculo Matemáticas para el cálculo.Cengage Learning, Boston, U.S.A.
4. Servín JM 2007 Guía práctica para el examen de ingreso a la Universidad conceptos básicos y ejercicios resueltos.Prentice Hall-Pearson, Estado de México, México.
5. Larson R, Edwards BH 2012 Calculus I with Precalculus A One-Year Course.Brooks/Cole Censage Learning, Boston.
6. Swokowski EW, Cole JA 2010 Algebra and Trigonometry with analytic geometry.Brooks/Cole Censage Learning, Boston.