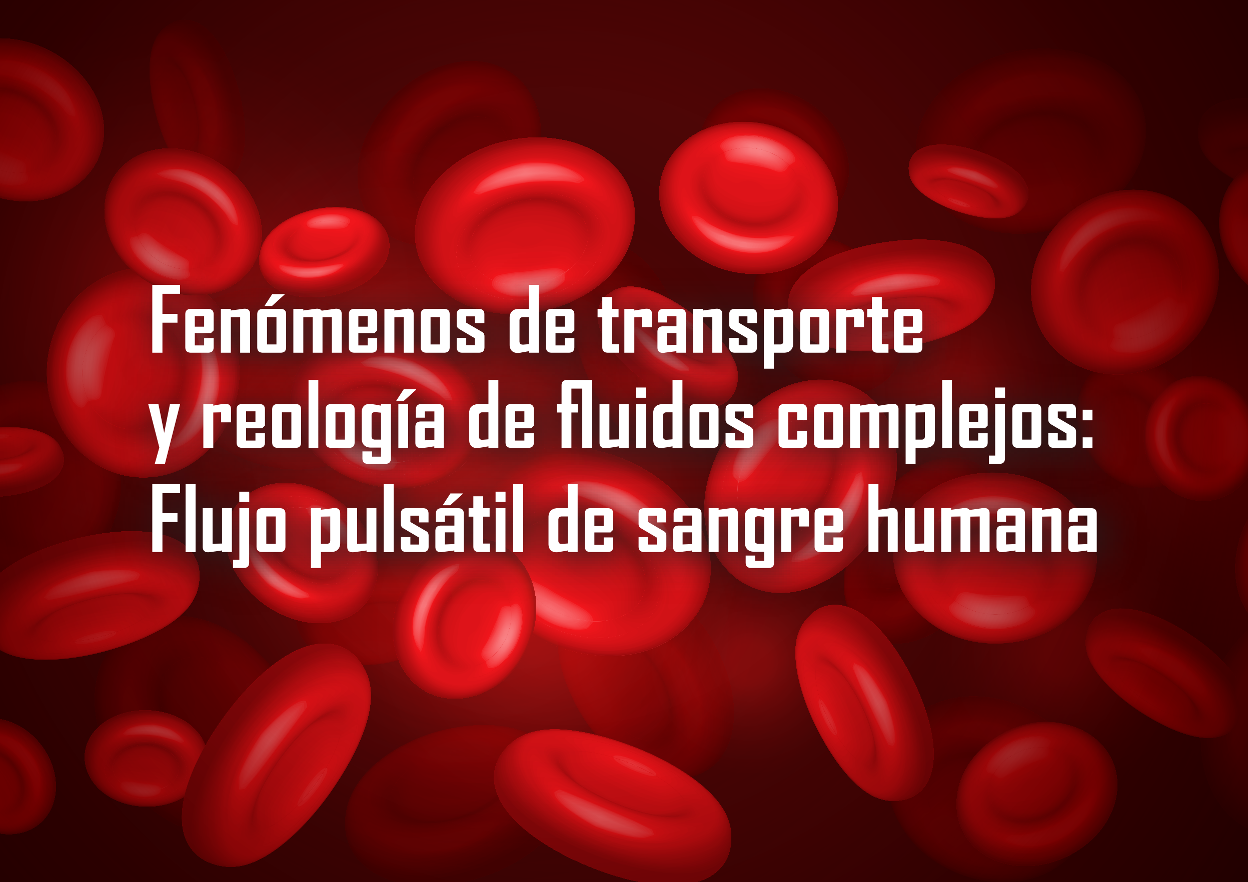
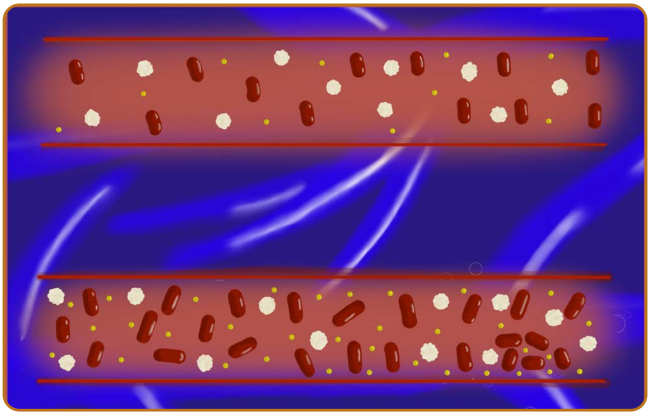


Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos: Flujo pulsátil de sangre humana

Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Dra. Mayra Luz-Sánchez-Villavicencio
Dr. Fausto Calderas García
Candidato a Doctor: M. en C. Luis Antonio Ramírez Torres
I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Dra. Catalina Soriano Correa
Dra. Diola Marina Núñez Ramírez
Dr. Luis Medina Torres
Dr. Vicente Jesús Hernández Abad

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos: Flujo pulsátil de sangre humana



Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Dra. Mayra Luz-Sánchez-Villavicencio
Dr. Fausto Calderas García
Candidato a Doctor: M. en C. Luis Antonio Ramírez Torres
I.Q. Dominga Ortiz Bautista
Dra. Catalina Soriano Correa
Dra. Diola Marina Núñez Ramírez
Dr. Luis Medina Torres
Dr. Vicente Jesús Hernández Abad

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza

Datos para catalogación bibliográfica

Autores: Edtson Emilio Herrera Valencia, Mayra Luz-Sánchez-Villavicencio, Fausto Calderas García, Luis Antonio Ramírez Torres, Dominga Ortiz Bautista, Catalina Soriano Correa, Diola Marina Núñez Ramírez, Luis Medina Torres, Vicente Jesús Hernández Abad.

Autor de correspondencia: edtsonhv@comunidad.unam.mx, faustocg@unam.mx, luis_ramirez@comunidad.unam.mx

Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos: flujo pulsátil de sangre humana.

UNAM, FES Zaragoza, agosto de 2022.

Peso: 15 MB.

ISBN: 978-607-30-6436-1.

Diseño de portada: Carlos Raziel Leaños Castillo.
Formación de interiores: Claudia Ahumada Ballesteros.

Este libro fue dictaminado a través del Comité Editorial de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza y se aprobó en julio de 2022.

Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos: flujo pulsátil de sangre humana.

Índice de contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Dedicatoria

A mi amada familia:
Mayra Luz Sánchez Villavicencio, Camila Isabella Herrera Sánchez

A mis amados padres
Emilio Herrera Caballero y Yolanda Valencia Cortés

A mi amada hermana
Gabriela Yolanda Herrera Valencia

Te amamos Camila y estamos orgullosos de ti

우리는 당신을 카밀라를 사랑하고 우리는 당신을 자랑스럽게 생각합니다

Agradecimientos

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPITT) de la UNAM "IN115919" "Análisis del flujo pulsátil de sangre humana con hipercolesterolemia, mediante una ecuación constitutiva nueva, caracterización reológica y simulación computacional en venas elásticas e inelásticas".
- Al programa PASPA DGAPA/UNAM por la beca otorgada para la estancia de investigación en el departamento de Ingeniería Química de la Universidad de McGill en Montreal, Quebec Canadá.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza (PAPIME) de la UNAM "PE116519" "enómenos de transporte avanzados: fluidos no newtonianos viscoelásticos lineales y no lineales".
- DGAPA-PAPIIT IT-201619, Diseño de matrices multiparticuladas de liberación controlada preparadas mediante el proceso sol-gel, aplicables en el tratamiento de la diabetes mellitus tipo 2
- Al laboratorio de reología de fenómenos de transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación de Reología y Fenómenos de Transporte de Fluidos Complejos.
- A la carrera de ingeniería química de la FES Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Luis Antonio Ramírez Torres agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada durante la realización de su doctorado en el programa de posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales a través del CVU 860719.

Participantes

Líneas de investigación participantes:

- Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos: LI-FESZ-420415.
- Reología Teórica y Experimental de Fluidos Estructurados: LI-FESZ-570619.
- Estructura Electrónica de Sistemas de Interés Biológico: LUI-FESZ-200506.
- Ciencias Farmacéuticas. LI-FESZ-210506.

Laboratorios participantes:

- Laboratorio de Reología y Fenómenos de Transporte, Unidad de Investigación Multidisciplinaria de Investigación Experimental Zaragoza (UMIEZ), P/L-7, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.
- Laboratorio de Investigación Farmacéutica. ET-PA-16, Planta Piloto, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.

Resumen

En este trabajo se analiza el efecto del gradiente de presión pulsátil en el flujo de un fluido no-Newtoniano viscoelástico lineal en un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. Para modelar matemáticamente el líquido no Newtoniano se emplea el modelo de Maxwell, el cual se puede expresar como un resorte (ley de Hooke) conectado en serie a un pistón (ley de Newton de la viscosidad). Asumiendo flujo en estado no estacionario e isotérmico, fluido incompresible y flujo cortante simple, se obtiene una ecuación diferencial lineal parcial que describe los mecanismos inerciales y los mecanismos viscoelásticos del sistema de flujo. Aplicando el formalismo de Fourier, se obtiene una ecuación de Bessel compleja para la velocidad axial del sistema asumiendo que la velocidad es cero en la interfase del fluido, es cero en la pared y es máxima en el centro del capilar. Integrando el perfil de velocidades con respecto al área de la sección transversal, se obtiene el flujo volumétrico en función de las propiedades materiales del sistema, el gradiente de presión, función viscosidad y la permeabilidad dinámica en el sistema. Finalmente, se usaron datos reométricos de sangre con hipercolesterolemia con el fin de obtener las curvas resonantes del sistema de estudio. Este trabajo de investigación representa un esfuerzo en la búsqueda constante de soluciones de fluidos no Newtonianos biológicos en sistemas biológicos, tomando como punto de partida Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos.

Palabras claves: Flujo Cortante Simple, modelo de Maxwell, Flujo pulsátil, Permeabilidad dinámica.

Sobre los autores

Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia

El **Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia** es Ingeniero Químico por la Facultad de Química de la UNAM. Tiene una licenciatura en Matemáticas Aplicadas por la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (UAM-I). Es maestro en Ingeniería por la Facultad de Química, UNAM con el mejor promedio de generación y postulado a la medalla Alfonso Caso. Posee Estudios de Maestría en Física con especialidad en Física Estadística por parte de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa. Es doctor en Ingeniería Química por la Facultad de Química, UNAM con mención honorifica. Por sus estudios doctorales fue postulado a la Medalla Alfonso Caso por parte de la Facultad de Química de la UNAM. Realizó una estancia de Investigación de un año en el Centro de Investigación en Polímeros (COMEX) mediante una generosa beca del Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal. Realizó tres estancias postdoctorales de dos años cada una en la universidad de McGill en Montreal Quebec Canadá en el departamento de Ingeniería Química. La primera de ella debido a una generosa beca de Gobierno de México (CONACYT), la segunda de ellas por parte del Gobierno Federal de Canadá y la tercera por parte de la provincia de Quebec, en Canadá. Su experiencia en la docencia incluye Fenómenos de Transporte Momento, Energía y Masa, Mecánica, Electromagnetismo y Matemáticas. Sus áreas de investigación son: Fenómenos de Transporte: (i) Momento, (ii) Energía, (iii) Masa, (iv) Reología de Fluidos Complejos con énfasis en cristales Líquidos Biológicos, (v) Flujo Pulsátil Sanguíneo y (vi) Membranas Biológicas. Es autor de 31 artículos de investigación indexados en el JCR, tres capítulos en libros y una patente sobre el estudio de sangre con diferentes trastornos alimenticios. Sus trabajos de investigación han sido citados más de 260 veces. Ha impartido pláticas en congresos en Italia, Canadá (Ontario, Alberta y Quebec) sobre Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos. Ha dirigido 30 servicios sociales, 20 tesis de licenciatura, dos de maestría y una de doctorado. Ha participado como jurado en exámenes de Licenciatura, Maestría y Doctorado. Actualmente es responsable de la línea de Investigación en Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza. Actualmente es responsable del laboratorio de Reología y Fenómenos de Transporte de la Unidad Multidisciplinaria de Investigación Experimental Zaragoza (UMIEZ) de Investigación en Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza. Es actualmente PRIDE C del sistema de estímulos de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Dra. Mayra Luz Sánchez Villavicencio

La **Dra. Mayra Luz Sánchez Villavicencio** es Bióloga Experimental por la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (UAM-I). Maestra y Doctora en Biología Experimental por la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (UAM-I). Áreas de especialización: Ecología: tratamiento de aguas de uso secundario. Farmacología: técnicas de biología molecular, plantas medicinales, diabetes, obesidad. Ha publicado 11 artículos como primera autora y en colaboración en revistas nacionales e internacionales con factor de impacto. Realizó una estancia internacional en la Universidad de Montreal, en Montreal, QC Canadá. Colabora con diferentes grupos interdisciplinarios tanto en el área de etnobotánica y productos naturales para la salud del departamento de biología de la Universidad de Ottawa, así como en el área de Ingeniería Química y Materiales de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza del departamento de Ingeniería Química de la UNAM. Es miembro del sistema Nacional de Investigadores por el periodo 2016-2019. Asistente de investigación en el laboratorio de productos naturales y enfermedades metabólicas en el departamento de fisiología y farmacología en la Facultad de Medicina de la Universidad de Montreal de Agosto 2017 a Mayo 2019 fue profesora de tiempo parcial del departamento de Hidrobiología de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa de 2005 a 2007. Temas actuales de interés: enfermedades metabólicas, vías de señalización de Resistencia a la insulina, diabetes, obesidad y modelado matemáticos de sistemas biológicos de interés para ciencias exactas e ingeniería.

Dr. Fausto Calderas García

El **Dr. Fausto Calderas García** es ingeniero químico por la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza (FES-Z), UNAM. Es maestro en Ciencia e Ingeniería de Materiales por parte del Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM. Es doctor en Ingeniería química por parte de la UNAM. Es experto en el área de reología con veinte años de experiencia en manejo de reómetros capilares, de esfuerzo controlado y de deformación controlada. Es autor de más de 50 artículos en revistas internacionales con factor de impacto en las áreas de nuevos materiales, reología y fluidos complejos; tiene más de 800 citas en la literatura especializada, 4 artículos en revistas de divulgación y tiene tres capítulos en libros sobre reología y nanocompuestos poliméricos con editoriales internacionales, además tiene tres patentes registradas, una de ellas sobre un aditamento de pulsos ultrasónicos para realizar mediciones simultáneas de reología. Ha sido revisor certificado de más de 50 artículos en revistas internacionales. Ha impartido cursos técnicos de capacitación a empresas para manejo de reómetros de vulcanización y tecnología del hule. Ha dirigido y co-asesorado 10 tesis de licenciatura, 4 de maestría y 1 de doctorado. Imparte cursos de ingeniería química en la Facultad de estudios superiores Zaragoza y en la Facultad de Química de la UNAM. Ha presentado sus trabajos en más de 50 congresos internacionales y nacionales. Ingresó al Sistema Nacional de Investigadores con Nivel 1 en enero de 2014 y continua con ese nivel hasta la fecha. Es presidente de la sociedad mexicana de reología (SMR), que es la representación de la Sociedad de Reología (SR) en México. Es miembro de la sociedad de procesamiento de polímeros (Polymer Processing Society, PPS) y co-organizó el 34° congreso de esa sociedad (PPS-34) que se celebró por primera vez en México, en la ciudad de Cancún en diciembre del 2017. Actualmente está interesado en los temas de mezclado de fluidos complejos, nanocompuestos poliméricos, geles para alimentos, secado por convección de antioxidantes, modelado y caracterización de fluidos reológicos (sangre, disoluciones poliméricas, polímeros fundidos), flujo elongacional de fluidos modelo, etc. Colabora con grupos de investigación del área de alimentos, de farmacia, de nuevos materiales, reología entre otros. Es responsable de la línea de investigación "Reología teórica y reometría de fluidos estructurados" (LI-FESZ-570619).

M.C.M. Luis Antonio Ramírez Torres

El **doctorante M.C.M. Luis Antonio Ramírez Torres** es ingeniero químico por parte de la Facultad de Química, UNAM. Es Maestro en Ciencia e Ingeniería de Materiales por parte del Instituto de Investigación en Materiales (IIM) de la UNAM donde obtuvo mención honorífica y cuya tesis fue postulada a la medalla Alfonso Caso. Actualmente es candidato a Doctor en Ciencia e Ingeniería en Materiales (2020) por parte del IIM en la UNAM. Es miembro de la Sociedad Mexicana de Reología (SMR) desde el 2020. Ha sido profesor de Asignatura en la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza (FES-Z) de las materias de Transferencia de Masa, Separación Mecánica y Mezclado, Química III Y Matemáticas II de la carrera de ingeniería química. Posee más de 4 años de experiencia en docencia a distintos niveles (secundaria, preparatoria y universidad) y trabajó como Ingeniero de

Procesos en una firma de ingeniería (*Plugrama Ingeniería*). Ha impartido más de 10 cursos para estudiantes y profesores a nivel universitario, y se ha capacitado en más de 30 cursos de diversa índole, de los cuales destacan: Fenómenos de Transporte, Reología y Mecánica de Biomateriales, Química Analítica, Simulación numérica, Matemáticas Avanzadas, dibujo asistido por computadora (CAD), educación en línea, tutoría universitaria, uso de software de simulación de procesos (AspenONE, Wolfram Mathematica, Polymat, Matlab, Phyton, AutoCAD, COMSOL Multhiphysics) y uso de software para creación de documentos (Microsoft Office y LaTex).

Ha participado en más de 20 encuentros, talleres y congresos. Actualmente asesora 5 tesis a nivel licenciatura. Es coordinador de los seminarios del Laboratorio de Reología y Fenómenos de Transporte de la UMIEZ-FESZ que se llevan a cabo semanalmente los viernes por medio de *Zoom* cuyo canal de *Youtube* puede encontrarse en la web. Ha sido autor y coautor en revistas arbitradas con factor de impacto y pertenecientes al JCR.

Actualmente es corresponsable del Laboratorio de Reología y Fenómenos de Transporte, primer piso, L-7 de la Unidad multidisciplinaria de la UMIEZ.

Es colaborador de las líneas de investigación Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos LI-FESZ-420415 y de la línea de investigación Reología Teórica y Experimental de Fluidos Estructurados LI-FESZ-570619.

I.Q. Dominga Ortiz Bautista

La **Ingeniera Química Dominga Ortiz Bautista** es egresada de la FES Zaragoza, UNAM, con estudios de Maestría en Ingeniería en la Orientación: Sistemas Energéticos por la Facultad de Ingeniería, UNAM, con diplomados en la FES ZARAGOZA. Con 27 años de antigüedad, tiene experiencia Academica- Administrativa, desempeñándose en la Facultad de Estudios Zaragoza UNAM. Impartiendo actualmente, las asignaturas de Laboratorio de Ciencia Básica I, Flujo de Fluidos, Laboratorio y Taller de proyectos. Y en el ámbito administrativo se ha desempeñado como, Responsable del Servicio Social, Coordinadora de Ciclo Intermedio y Jefa de Carrera de Ingeniería Química. Ha dirigido Tesis y Coordinadora de servicios sociales con más de 30 trabajos en la Carrera de Ingeniería Química. Con participación en proyectos PAPIME UNAM, con publicación de trabajos en revistas y memorias de Congresos.

Dra. Catalina Soriano Correa

La **Dra. Catalina Soriano Correa** posee una licenciatura en Química por parte de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, BUAP. Tiene una Maestría en Química por la Universidad Autónoma Metropolitana- Iztapalapa (UAMI-I), es Doctora en Ciencias por la UAM-Iztapalapa. Actualmente es profesora de Carrera Titular C de tiempo completo. Es responsable de la línea de investigación: "estructura electrónica de sistema de interés biológico", que tiene como objetivos la formación de recursos humanos, así como generar conocimiento en las áreas químico-biológicas básicas y aplicadas. Contribuir con información que permita explicar la relación existente entre las propiedades fisicoquímicas, electrónicas, estructurales, moleculares y de reactividad química de moléculas de interés biológico, para el desarrollo y diseño de moléculas con potencial farmacológico en el contexto de los postulados de la Química Cuántica y de la Teoría de la Información. Los proyectos que conforman la línea de investigación contribuyen en la resolución de problemas de salud pública, tales como: cáncer, enfermedades infecciosas, crónico-degenerativas y enfermedades olvidadas (Chagas y Leishmania). Algunos de los proyectos comprenden también estudios experimentales, que corroboran las predicciones teóricas en el diseño de nuevas moléculas; lo que permite el intercambio académico y la vinculación con otros grupos de trabajo nacionales y extranjeros. Es responsable de una solicitud de patente ante el IMPI. La Dra. Catalina Soriano Correa es profesora de las materias de Fisicoquímica I y II en la carrera de QFB, miembro del sistema nacional de investigadores Nivel I y tutora del doctorado en el posgrado en Ciencias Biológicas, Ciencias Químicas Universidad Nacional Autónoma de México, Ciencias Biológicas de la Universidad Nacional Autónoma de Metropolitana-Iztapalapa, Centro de Investigación Cerebrales (CICE), Universidad Veracruzana, Tutora de la escuelas superior de Medicina-Instituto Politécnico Nacional.

Dra. Diola Marina Núñez Ramírez

La **Dra. Diola Marina Núñez Ramírez** es Ingeniera Química por parte del Instituto Tecnológico de Durango (2004). Posee una maestría en Ciencias en Ingeniería Bioquímica con mención honorífica (2007) y un doctorado en Ciencias en Ingeniería Bioquímica con mención honorífica (2012) por parte del Instituto Tecnológico de Durango. Actualmente es catedrática de tiempo completo adscrita en la Facultad de Ciencias Químicas de la Universidad Juárez del Estado de Durango. Posee más de dos años de experiencia laboral como Jefa de Proyectos de Investigación Metalúrgica en la empresa minera *First Majestic Silver Corp. Laboratorio Central* (2012-2015). Es coordinadora del posgrado en Nanotecnología y Química de Materiales (2017-Actualidad). Ha participado en 18 congresos nacionales y 30 congresos internacionales. Ha publicado 18 artículos en revistas indexadas con factor de impacto, 1 capítulo de libro y ha impartido 15 ponencias. Ha dirigido 10 tesis de licenciatura, 6 tesis de maestría y 1 tesis de doctorado. Ha recibido las siguientes distinciones: Premio estatal de Ciencia, Tecnología e Innovación otorgado por el gobierno del Estado de Durango y el COCYTED, miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel I (2020-Actualidad) y presidente de la Red minero-metalúrgico (2020-Actualidad).

Dr. Luis Medina-Torres

El **Dr. Luis Medina-Torres** posee un doctorado en Ciencias Químicas por parte de la Facultad de Química en la UNAM especializado en reología y mezclado de fluidos complejos. Es Profesor y Académico Titular C de tiempo completo en la UNAM. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SIN nivel 2). En el área de bio-reología ha investigado el efecto del colesterol en la reología de la sangre humana, así como el efecto de la cirrosis hepática en sangre de pacientes compensados y descompensados, asimismo, el efecto de exopolisacáridos excretados por bacterias ferooxidantes en la reología de pulpas de minerales, además, ha estudiado nanocompuestos funcionalizados de arcillas en gelatina cargados con atorvastatinas. En el área de reología de biomateriales ha trabajado con el aprovechamiento del mucílago (de nopal y sábila) tanto como agentes de microencapsulación de principios activos (antioxidante, anticancerígenos y probióticos) mediante secado por aspersión. Es autor de 88 artículos en revistas indexadas con factor de impacto, 4 capítulos de libro de editoriales internacionales, y 8 patentes en trámite con 1 concedida por el IMPI. Ha presentado más de 220 congresos arbitrados internacionales y nacionales. Ha dirigido más de 92 tesis de licenciatura y de posgrado. Posee 1969 citas bibliográficas (h-index = 19) y 70,052 lecturas. Se le han concedido los siguientes premios y reconocimientos: Primer Lugar Nacional en certamen CONACYT-SEP-CFE (1990), Medalla al mérito universitario al mejor promedio de la generación de maestría en Ingeniería Química en la UAM-Iztapalapa (1995), Premio estatal de Ciencia, Tecnología e Innovación 2012, 2015 y 2018 (COCyTED-CONACyT), Miembro evaluador de proyectos del Sistema Nacional de Investigadores-CONACYT (2008-Actualidad), Premio a una de la mejores patentes dentro del programa de Fomento al Patentamiento y la Innovación de la UNAM 2015, con el desarrollo tecnológico del tema: "Microencapsulación de antioxidantes por el proceso de secado por aspersión", UNAM (2015), es Vicepresidente de la Sociedad Mexicana de Reología y fue acreedor de la Medalla "Al Mérito Universitario por 25 años de servicio", Facultad de Química-Rectoría UNAM (2019).

Dr. Vicente Jesús Hernández Abad

Nacido en la Ciudad de México el 28 de enero de 1974. El **Dr. Vicente Jesús Hernández Abad** es Químico Farmaceútico Biológo con mención honorífica por la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza (FES-Z). Posee una maestría en ciencias especializada en farmacia y biofarmacia por la Facultad de Química de la UNAM postulado y ganador de la medalla Alfonso Caso. Posee un doctorado en farmacia. Actualmente es profesor de Carrera Titular C de tiempo completo, es nivel C del PRIDE. Es Miembro del Sistema Nacional de Investigadores, nivel 1 (1997-Actualidad). Desde 1997 hasta la fecha ha impartido de manera ininterrumpida los módulos de Biofarmacia y Desarrollo Analítico (teoría) en la carrera de Químico Farmaceútico y Biólogo de la Facultad la FESZ. Ha impartido diferentes actividades académicas y formado parte de comités tutores de Posgrado. Fue coordinador de 2001 a 2014 del Programa de Especializaciones en Farmacia Industrial. Autor y coordinador de los diplomados: Administración Farmacéutica y Cromatografía de Líquidos de Alta Resolución. Ha impartido cátedra, por convenios institucionales, en la Red Panamericana para la Armonización de la Reglamentación Farmacéutica (Organización Panamericana de la Salud), en la Dirección General de Medicamentos y Tecnologías para la Salud (Secretaría de Salud) en el Instituto Nacional de Pediatría y en la Facultad de Farmacia de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Ha participado en el Consejo Interno asesor de Estudios de Posgrado, en el Comité de Investigación, así como en el Comité Editorial de la FES Zaragoza. Fungió como secretario del H. Consejo Técnico de la FES Zaragoza durante casi ocho años, siendo actualmente su presidente. Es presidente de la Comisión del Mérito Universitario del H. Consejo Universitario de la UNAM. Fue integrante de los Comités Académicos de Posgrado de: las Especializaciones en Farmacia Industrial, las Maestrías en Enfermería y Trabajo Social, de Ciencias de la Administración, Maestría y Doctorado en Psicología, así como de la Maestría y doctorado en Ciencias Médicas, Odontológicas y de la Salud. Ha ocupado diversos cargos en la FES Zaragoza de forma ininterrumpida. En el periodo 1998-2001 fue Coordinador del área Química de la Carrera de QFB. Coordinador de Desarrollo Tecnológico de 2001 a 2003. Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación de 2003 a 2010. Fungió como secretario general de 2010 a 2018. Director de la FES Zaragoza desde noviembre de 2018. Es jefe de la Línea de Investigación en Ciencias Farmacéuticas, con énfasis en Desarrollo

Farmacéutico. Dirigió la certificación en ISO del laboratorio a su cargo. Ha sido responsable o participado en 15 proyectos de investigación con financiamiento. Ha publicado 25 artículos en revistas arbitradas e indizadas. Es árbitro del Journal of Ethnopharmacology y de Drug Development and Industrial Pharmacy, así como evaluador de proyectos de CONACYT y PAPIIT. Ha generado productos que se encuentran en proceso de patentamiento y cuenta con una patente concedida. Autor de diversos materiales educativos: cinco libros de texto, dos capítulos de libros, tres manuales, siete videos, tres aulas virtuales y dos aplicaciones para dispositivos inteligentes. Ha presentado 100 trabajos libres en eventos académicos y 54 conferencias en diversos foros. Dirigió el servicio social de 47 alumnos, asesoró o dirigió la tesis de más de 120 egresados de licenciatura y posgrado. Sus actividades fuera de la UNAM se han orientado hacia la conducción de grupos multidisciplinarios e interinstitucionales encaminados al fortalecimiento y la mejora continua de la educación. Participó en el grupo técnico que elaboró la propuesta de política farmacéutica para México en 2005. En la Asociación Farmacéutica Mexicana A.C. ha ocupado diversos cargos de elección: fue su presidente en 2010-2011 y fue Coordinador de su Consejo de Expresidentes. Es evaluador líder fundador del Consejo Mexicano para la Acreditación de la Educación Farmacéutica desde 2006. Es editor, desde 2015, de la Revista Mexicana de Ciencias Farmacéuticas. Fue electo en 2017 primer vicepresidente de la Fundación para la Educación Farmacéutica en México A.C. Recibió el Premio Nacional de Ciencias Farmacéuticas "Dr. Leopoldo Río de la Loza" 2017 que otorga la Asociación Farmacéutica Mexicana A.C., en el área de Educación.

Prólogo

La primera edición de esta obra supuso un reto interesante por la oportunidad que representa para que los alumnos de la carrera de Ingeniería Química, de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, profundicen sus conocimientos en el área de Fenómenos de transporte y Reología de los fluidos complejos.

El enfoque de este trabajo es introductorio, pero contiene el suficiente material para considerarse avanzado lo cual lo vuelve atractivo a los profesionales de diversas áreas relacionadas que deseen adentrarse en estas disciplinas. Asimismo, se establecen los antecedentes, y el marco teórico detallado y suficiente para comprender, de manera precisa, el punto fuerte de la investigación: el flujo pulsátil sanguíneo en un capilar. Las ecuaciones de balance son desarrolladas completamente para los casos sencillos de flujo porque son la antesala de problemas más complejos, pero en esencia, para estos problemas, el algoritmo de cálculo es similar. Para aquellos interesados en profundizar en algún tema de este libro, se dispone de una amplia gama de referencias a artículos científicos actualizados, así como referencias de textos clásicos de Reología y Fenómenos de transporte tanto introductorios como avanzados.

El lector podrá encontrar en este escrito, de una manera explícita y resumida, el *estado del arte*, las motivaciones, las aplicaciones, la descripción, el análisis de las ecuaciones, la interpretación y las conclusiones del flujo sanguíneo pulsátil de un fluido Maxwelliano en un capilar con paredes inextensibles, así como de los casos más sencillos de flujo.

El propósito del escrito versa en su metodología de cálculo de propiedades básicas del flujo para una geometría cilíndrica como lo son: el perfil de velocidades y el flujo volumétrico, para diversas situaciones. Adicionalmente, se comparan los resultados teóricos con datos reométricos de sangre humana tanto de personas sanas como de personas con alto nivel de colesterol y se reporta una interpretación tanto matemática como física.

La Figura 0.1 muestra el orden de la información en que se recomienda consultar este libro.

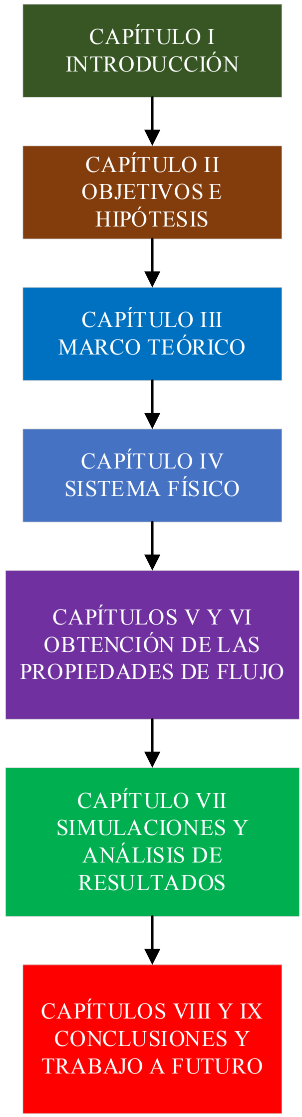


Figura 0.1. Disposición informativa de esta obra.

CAPÍTULO I
Introducción

2 Definición de flujo pulsátil

El estudio de la reología de sistemas pulsátiles ha sido un tema recurrente en la investigación en fluidos Newtonianos y no-Newtonianos [1]. La idea principal es la de modificar el gradiente de presión con el fin de obtener una modificación en el flujo volumétrico con respecto a aquel a gradiente de presión constante [2-8]. El efecto del flujo pulsátil ha sido utilizado para describir el flujo en sangre con bajo, medio y alto colesterol, debido al estilo de vida que se lleva actualmente. Si suponemos que las venas son capilares inextensibles y, adicionalmente, suponiendo que los mecanismos inerciales y gravitacionales son pequeños, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\nabla p(t) = \nabla p_0 + \varepsilon \nabla p_1 = \nabla p_0 + \varepsilon \nabla p_0 n(t) = \nabla p_0 \left(1 + \varepsilon n(t)\right) \quad \textbf{(2.1)}$$

En la Ec. (2.1) $\nabla p(t)$ es el gradiente de presión pulsátil el cual, puede descomponerse en dos contribuciones asociadas al gradiente de presión constante $\nabla p(t)_0$. El segundo término $\nabla p(t)_1$ se considera una perturbación del sistema. Para facilitar los cálculos, la contribución $\nabla p(t)_1$ se aproxima mediante el producto del gradiente de presión constante $\nabla p(t)_0$ y una función estocástica que describe las variaciones temporales del gradiente de presión pulsátil que, por ejemplo, es representado por una serie de Fourier. Noté que ε es un parámetro de perturbación que puede considerarse como una amplitud de la función estocástica $n(t)$ [2, 9].

El aumento en el flujo volumétrico puede ser expresado de la siguiente manera y se conoce también como mejora del flujo volumétrico.

$$I(\%) = \frac{\langle Q(t) \rangle - Q_0}{Q_0} \quad \textbf{(2.2)}$$

En donde Q(t) es el flujo volumétrico pulsátil, <Q(t)> es el promedio del flujo volumétrico pulsátil el cuál se define como:

$$\left\langle Q(t)\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T Q(t)\,dt = \frac{1}{2\pi/\omega}\int_0^{2\pi/\omega} Q(t)\,dt \tag{2.3}$$

Y el flujo volumétrico se expresa mediante una doble integral volumétrico:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} Vz(r,t)\,r\,dr\,d\theta \tag{2.4}$$

Al integrar la Ec. (2.4) con respecto a la coordenada radial r, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(t) = \pi R_2^2 Vz(R_2,t) - \pi R_1^2 Vz(R_1,t) - \pi\int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial Vz}{\partial r}(r,t)\,r^2\,dr \tag{2.5}$$

La rapidez de deformación se puede expresar como el producto de la función fluidez y el esfuerzo cortante zr, respectivamente:

$$\frac{\partial Vz}{\partial z}(r,t) = \varphi(r,t)\,\sigma_{zr}(r,t) \tag{2.6}$$

Del balance de momento, se tiene la siguiente expresión:

$$\sigma_{zr}(t) = \frac{1}{2}\nabla p(t)\,r + \frac{C_1}{r} \tag{2.7}$$

Combinando las Ecs. (2.5)-(2.7), se tiene la expresión final para el flujo volumétrico:

$$Vz(r,t) = Vz(R_1,t) + \int_{R_1}^{r} \varphi(\bar{r},t)\left(\frac{1}{2}\nabla p(t)\,r + \frac{C_1}{r}\right)d\bar{r} \tag{2.8}$$

Asumiendo que el perfil de velocidades se puede calcular de la Ec. (2.6), por lo que, se tiene la siguiente expresión:

$$C_1 = \frac{Vz(R_2,t)\text{-}Vz(R_1,t) - \frac{1}{2}\nabla p(t)\int_{R_1}^{R_2}\varphi(r,t)\,r\,dr}{\int_{R_1}^{R_2}\frac{\varphi(r,t)}{r}\,dr} \tag{2.9}$$

Combinando las Ecs. (2.7) y (2.9), se tiene lo siguiente:

$$Q(t)=\pi R_2^2 Vz(R_2,t)-\pi R_1^2 Vz(R_1,t)-\pi\int_{R_1}^{R_2}\varphi(r,t)\left(\frac{1}{2}\nabla p(t)r^2+C_1\right)rdr \qquad \textbf{(2.10)}$$

Para deducir la constante C_1, se puede utilizar la condición de frontera $V_z(R_2)$, por lo que la Ec. (2.10) toma la forma:

$$Vz(r,t)=Vz(R_1,t)+\int_{R_1}^{r}\varphi(\bar{r},t)\sigma_{zr}(\bar{r},t)d\bar{r} \qquad \textbf{(2.11)}$$

En el caso de un tubo y no una corona circular, la constante C_1 es igual a cero, i.e., $C_1 = 0$. En este caso, se pueden obtener expresiones analíticas para el flujo volumétrico dado por la Ec. (2.2) en función de las propiedades materiales [2].

3 Reología de la sangre humana

La sangre es un fluido formado por eritrocitos (glóbulos rojos RCB), leucocitos (glóbulos blancos) y trombocitos (plaquetas), que son forzados por un gradiente de presión periódica a través del sistema circulatorio humano [10, 11]. Los glóbulos rojos constituyen alrededor del 45% de la sangre total en volumen, el plasma alrededor del 54.3% y los glóbulos blancos alrededor del 0.7%. Desde un punto de vista reológico, la sangre (plasma y células) es un fluido no Newtoniano complejo, y la principal explicación de su comportamiento complejo (viscoelasticidad, adelgazamiento por corte, tixotropía y esfuerzo de cedencia) se encuentra en la capacidad de agregación, desagregación, deformación, orientación y migración de los eritrocitos [2, 12-15]. En muchos casos, el flujo de sangre dentro de los vasos se ve fuertemente afectado por los niveles de colesterol y la hiperglucemia en las venas, después de muchos años de hipercolesterolemia el cual es un trastorno en el cuerpo humano debido a un exceso de colesterol [16]. Esta condición puede conducir a otras enfermedades tales como: la aterosclerosis acelerada, angina de pecho, infarto, estenosis, obesidad y diabetes tipo 2 debido a trastornos alimentarios y predisposiciones genéticas [2, 10, 11], que han alcanzado el estatus de epidemia en todo el mundo, y herramientas como el modelo matemático, simulación computacional [17-19] y la medicina alternativa basada en la plantas tradicionales utilizadas por médicos y aborígenes son alternativas que permitirían encontrar soluciones a estos problemas [20].

3. 1 Hemorreología: Sangre humana

La reología es la ciencia que estudia la respuesta de los fluidos complejos en término de dos parámetros principales: el esfuerzo y deformación (flujo). La sangre humana es un fluido de reología muy compleja, porque la viscosidad de la sangre no es proporcional al esfuerzo aplicado, es decir, es un fluido no Newtoniano que cuenta con características adelgazantes al corte (cuanto mayor sea el esfuerzo aplicado menor es su viscosidad). Esto se debe en parte a la formación de estructuras transitorias (que se destruyen por el flujo) de muy corta duración, cuyo tamaño e intensidad dependen de la concentración de colesterol total, ente otros factores [21]. Por lo anterior, la Hemorreología es la rama de la Reología que estudia la respuesta al flujo debido al esfuerzo y la deformación de la sangre.

El estudio de la sangre presenta un reto mundial, ya que el primer paso se concentra en la caracterización de esta y, el segundo paso, se concentra en el efecto de trastornos alimenticios que inducen diferentes patologías en el cuerpo humano, entre las cuales se pueden citar:

(i) la hiperglucemia asociada con la diabetes tipo I y II, que se ha declarado epidemia nacional,

(ii) la hipercolesterolemia asociada con el colesterol alto que afecta las arterias y que provocan infartos al miocardio,

(iii) el cáncer que es un desequilibrio en la producción de glóbulos blancos y todo tipo de enfermedades de trasmisión sexual.

La sangre humana es un fluido con gran cantidad de funciones dentro del cuerpo humano, entre ellas la entrega de oxígeno y la remoción de dióxido de carbono de tejidos distales, y el transporte de nutrientes y metabolitos. Los trastornos metabólicos en la actualidad dan problemas que atañen a los seres humanos cada vez con mayor frecuencia: estos se atribuyen a un sin número de factores de estrés, medio ambiente, alimentación y genéticos, como el hipercolesterolemia familiar. De los múltiples trastornos metabólicos presentes en un ser humano, el hipercolesterolemia (altas concentraciones de colesterol en sangre > 200 mg/ dl) tiene grandes repercusiones en la fisiología cardiovascular. La sangre es un fluido con dos fases perfectamente diferenciadas: una suspensión de células (eritrocitos y leucocitos) que llamaremos fase dispersa en un medio líquido, como el plasma (agua, sales, proteínas y metabolitos), que llamaremos fase continúa. La viscosidad de la sangre depende directamente de la relación entre la cantidad de células y el contenido de proteínas y metabolitos en el plasma. El colesterol total junto con los triglicéridos son las sustancias que más afectan la reología de la sangre humana. La sangre con concentraciones aumentadas de colesterol total presenta características bioquímicas y mecánicas diferentes de las de la sangre con concentraciones normales; la diferencia de viscosidad entre ambas es de un orden de magnitud [21].

3.2 La sangre humana: un fluido no Newtoniano

La sangre humana se ha considerado con frecuencia como un fluido Newtoniano, es decir, en muchas simulaciones y literatura científica se supone que su viscosidad no depende del esfuerzo aplicado. Esto no es real, si la sangre exhibiera tal comportamiento tendría que estar muy diluida o poseer un bajo peso molecular. La sangre está compuesta de células suspendidas en un medio líquido (plasma) y la interacción entre las células depende de la velocidad a la cual se mueve el fluido; cuando dicho fluido se encuentra estático, la repulsión entre las células de la sangre, debida a la carga negativa de sus membranas, y el contenido de colesterol total y triglicéridos, interactúan en un balance tal que los eritrocitos no muestran coalescencia generando estructuras estables al flujo, esto ocurre sólo cuando la sangre está en presencia de un anticoagulante como el ácido etilen-diamin-tetra-acético (EDTA) y no existe una patología que actúe como tal sustancia [21, 22].

3.2.1 Las propiedades del flujo de la sangre dependen de varios factores

La sangre es un fluido con reología muy compleja, cuyas propiedades de flujo resultan afectadas por la orientación y deformabilidad de las células sanguíneas. Las propiedades de agregación transitoria de las células sanguíneas, en este caso los glóbulos rojos y las plaquetas, obedecen a una teoría que sostiene que las macromoléculas, como el colesterol, promueven la agregación transitoria de los eritrocitos, ya que se interponen entre una célula y otra, y generan puentes intermoleculares entre sus membranas para reducir la interacción electrostática natural entre estas.

3.2.1 Por qué la sangre humana se comporta como un fluido no Newtoniano

Un fluido Newtoniano como el agua es un sistema homogéneo de una sola fase, no tiene partículas en suspensión que puedan interactuar, además de que su estructura química es simple por ser una molécula pequeña compuesta solo por un átomo de oxígeno unido a dos átomos de hidrógeno. Por esta razón el agua en estado líquido tendrá la misma viscosidad independientemente de la rapidez con la que se deforme. La sangre, por otro lado, es un sistema que está formado por una fase continua (plasma), que en esencia es un fluido Newtoniano, pero tiene partículas en suspensión (fase dispersa) que interactúan entre sí con el plasma. Esta fase dispersa está compuesta de células cuyas membranas tienen una carga eléctrica negativa y sustancias como el colesterol. Esto da lugar a un sistema complejo cuya respuesta reológica es muy variada dependiendo del sistema de flujo y las condiciones en las que se estudie. La Figura 3.1 ilustra las predicciones del modelo constitutivo reológico de Carreau con datos reométricos de sangre humana con niveles de colesterol normales. En el reograma, se observa que la curva presenta adelgazamiento al corte, es decir, a mayor rapidez de deformación, la función viscosidad disminuye. A bajas rapidez de deformación, la sangre muestra una viscosidad constante, i.e. los hematocritos forman conglomerados de partículas y todas las estructuras están orientadas al azar (fase dispersa) y por lo tanto mayor resistencia al flujo (Estado S_1 en la **Figura 3.1**).

La curva teórica (roja) fue obtenida con el modelo de Carreau. Los datos reométricos fueron obtenidos mediante un reómetro de cono y plato. El reograma muestra dos zonas a viscosidad constante y una zona intermedia tipo ley de potencia.

A una rapidez de deformación crítica, la sangre presenta un cambio en su viscosidad asociada a que los constituyentes de esta (eritrocitos, fase dispersa) se orientan más en la dirección de flujo, lo que da origen a estructuras que cada vez se oponen menos al flujo y por lo tanto la viscosidad disminuye, i.e. el sistema presenta adelgazamiento al corte. Por último, a rapidez de deformación alta, el sistema presenta una segunda zona de viscosidad constante en donde la viscosidad sanguínea es del orden de la del plasma. Estas estructuras no son estables pues al dejar de fluir, el sistema recobra su estructura original y la viscosidad se eleva. Dentro del cuerpo humano, la sangre está sometida a rapideces de deformación del orden de 1-100 s^{-1} que corresponde a la parte central del reograma teórico [2, 10, 20, 21]. Nótese que la viscosidad de la sangre depende de las propiedades de agregación de los glóbulos rojos, y esta obedece a una teoría muy simple la cual sostiene que las macromoléculas (colesterol, por ejemplo) promueven la agregación de los eritrocitos ya que se interponen entre una célula y otra generando puentes entre sus membranas lo cual reduce la interacción electroestática natural entre dos células.

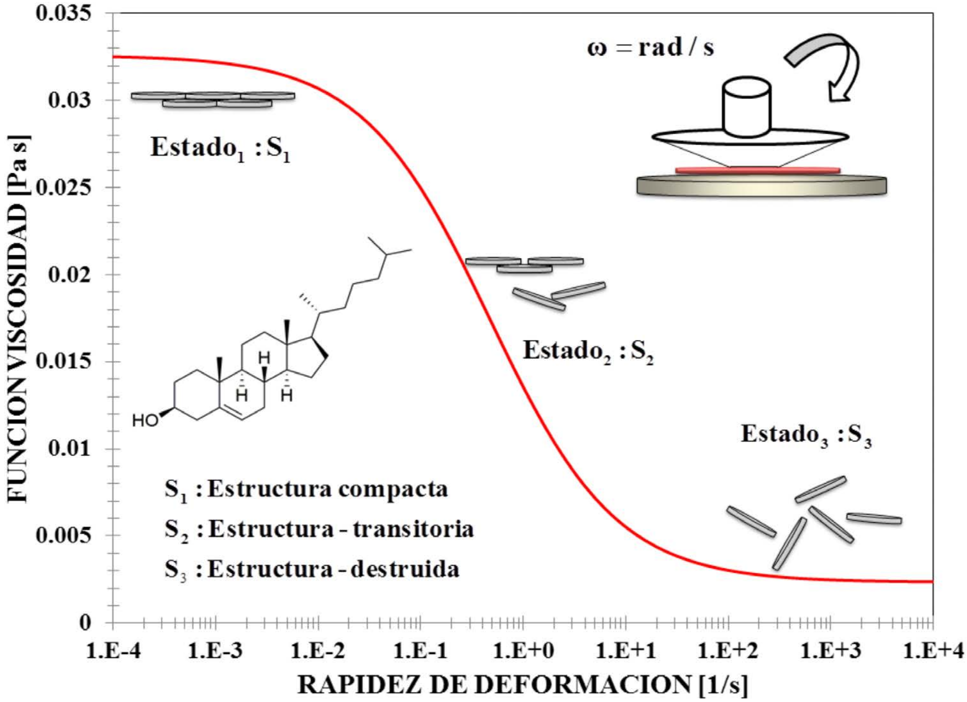


Figura 3.1. **Función viscosidad vs rapidez de deformación para un individuo sin colesterol.**

3.2.3. Como se estudia la sangre en un reómetro

La sangre, como cualquier otro fluido, puede estudiarse mediante técnicas reométricas. La sangre humana, para su estudio, se debe obtener de voluntarios humanos sanos, sin coagulopatía en curso, mediante la aplicación en un torniquete a la altura del musculo bíceps que genera turgencia para realzar las venas cefálicas y basílica. Se procede a realizar una punción y extraer sangre (5 mL aproximadamente) en un tubo adicionado con EDTA para evitar la coagulación de la sangre durante el ensayo. Los ensayos efectuados se hacen en situaciones de flujo controlado como el denominado flujo de corte simple en estado estacionario, en el que fluido se coloca entre un disco y un cono (con un ángulo pequeño cercano a un grado) del mismo diámetro, el cono gira a una velocidad angular controlada y se determina la viscosidad a diferentes velocidades de giro. La temperatura es controlada durante la prueba y se mantiene constante en condiciones similares a las de una persona sana (temperatura cercana a los 37°C). El equipo que controla la temperatura, la velocidad de giro del cono y mide el torque generado se denomina reómetro. En esta investigación, se utilizó un equipo de la marca TA Instruments modelo AR-G2, con geometría de cono y platos a una temperatura de 37 °C. Para caracterizar los fluidos, se han utilizado diferentes ecuaciones constitutivas. Las investigaciones realizadas en este campo se han basado en el estudio de líquidos Newtonianos y no Newtonianos. Los flujos oscilantes en sus dos versiones han sido caracterizados con diferentes ecuaciones constitutivas para líquidos débilmente elásticos y viscoelásticos. La mayoría de estos trabajos han empleado diferentes ecuaciones reológicas [10, 21].

CAPÍTULO II
Objetivos e hipótesis

4 Objetivos e hipótesis de la investigación:

4.1 Objetivo general

Estudiar la respuesta dinámica del flujo volumétrico y el gradiente de presión mediante una función de transferencia para dos sistemas de estudio: (i) oclusiones periféricas y (ii) oclusiones centrales.

4.2 Objetivos particulares

OP 1 Obtener expresiones analíticas para la velocidad axial y para el flujo volumétrico de un fluido viscoelástico en función de las propiedades materiales del sistema.

OP 2 Analizar la función de transferencia en el espacio de Fourier en función de la frecuencia y las propiedades del sistema.

OP 3 Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar las ecuaciones y que se obtengan grupos adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan al sistema de estudio.

OP 4 Utilizar datos reométricos provenientes de la literatura con el fin de obtener las curvas resonantes en función de la concentración de colesterol en la muestra biológica (sangre humana con hipercolesterolemia).

4.3 Hipótesis

Investigaciones muestran que el tamaño promedio de los eritrocitos es de ≈ 6 μm y el diámetro de las arterias, donde estos fluyen, es de 1-8 mm, es decir, 3 órdenes de magnitud mayor en comparación del diámetro de los eritrocitos [23]. Por lo anterior, se considera el sistema sanguíneo como un medio continuo monofásico [24]. Adicionalmente, las arterias se modelarán matemáticamente como si se tratara de un capilar cilíndrico, donde el diámetro de éstas es mucho menor que su longitud $L \ll D$. Las paredes de los capilares, en primera instancia, se consideran rígidas (inextensibles).

CAPÍTULO III
Ecuaciones de transporte

5 Aproximaciones matemáticas

En las últimas décadas, el estudio del flujo oscilante se ha centrado básicamente en métodos analíticos y numéricos avanzados, con el fin de obtener resultados que describan con mayor precisión la parte fenomenológica de estos sistemas físicos utilizado diferentes ecuaciones constitutivas. Por otra parte, existen trabajos en la literatura donde las técnicas perturbativas antes descritas no son aplicables, por lo que se debe recurrir a métodos variacionales y computacionales tipo Galerkin [25].

6 Fenómenos de transporte

Los fenómenos de transporte se definen como la rama de la termodinámica irreversible que estudia los mecanismos de transporte en la transferencia de momento, energía y masa. Estos pueden ser estudiados a nivel macroscópico, microscópico y molecular [1, 22]. La ecuación diferencial parcial básica de transporte puede ser descrita en términos de una ecuación de balance de la forma siguiente [1, 22]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{X} = -\nabla \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{f} \tag{6.1}$$

El primer término de la Ec. (6.1) representa el cambio de la propiedad de transporte **X** con respecto el tiempo, la cual es igual a los cambios espaciales del flux a través del negativo de la divergencia del flux **Y** al cual se suma el término que está relacionado a las fuerzas de bulto (momento), trabajo irreversible en contra de las fuerzas viscosas o viscoelásticas (energía) o la generación por reacción química (masa).

Tabla 6.1. **Variables dinámicas involucradas en las ecuaciones básicas de transporte de movimiento, energía y masa.**

Mecanismo de transporte	X	Y	f
MOMENTO	$\rho\mathbf{V}$	$\rho\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}\text{-}p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$	$\rho\mathbf{g}$
ENERGÍA	$U = \rho C\rho T$	$^{-}k\nabla T$	$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$
MASA	C_A	$N_A = -cD_{AB}\nabla x_A + x_A(N_A + N_B)$	R_A
CONTINUIDAD	ρ	$\rho\mathbf{V}$	0

6.1 Transferencia de momentum (cantidad de movimiento)

La ecuación de balance de cantidad de movimiento se basa principalmente en la segunda ley de newton del movimiento aplicado a un medio continuo, la cual puede ser escrita de la siguiente manera [1, 22]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V}) + \nabla\cdot[\rho\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}] = -\nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{g} \tag{6.2}$$

En la Ec. (6.2) $\boldsymbol{\rho}$ es la densidad del fluido (puntual), $\mathbf{V}$ es el vector de velocidad, $\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}$ es el producto diádico de los vectores de velocidad, $\mathbf{p}$ es la presión termodinámica en el sistema, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos que puede ser de naturaleza viscosa o viscoelástica, y $\mathbf{g}$ es el vector aceleración de la gravedad, que en el campo terrestre es una constante igual a 9.81 m/s^2. Si el fluido que describe la relación del tensor de esfuerzos con el tensor rapidez de deformación es lineal, i.e., que la potencia es del tensor rapidez de deformación sea uno, entonces:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} = \mu\left(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T\right) \tag{6.3}$$

y suponiendo que el proceso es isotérmico (temperatura constante) y además se considera que el fluido es incompresible, la Ec. (6.3) se transforma en la famosa ecuación de Navier-Stokes para los fluidos Newtonianos [1, 22]:

$$\rho\frac{D\mathbf{V}}{Dt}=\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V}=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{V}+\rho\mathbf{g} \qquad (6.4)$$

La Ec. (6.4) es base para describir la dinámica de flujo en fluidos Newtonianos y ha sido ampliamente estudiada de manera analítica y numérica, en geometrías simples y complejas [1].

6.2 Transferencia de energía

La ecuación de balance energético se puede interpretar como una extensión de la primera ley de la termodinámica a un sistema irreversible y continuo de una sustancia pura, en donde el tiempo sí es una variable importante, en contraste con el punto de vista clásico donde no es tomada en cuenta.

$$\frac{DU}{Dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\right)U=-\nabla\cdot\mathbf{q}+\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D} \qquad (6.5)$$

Mediante una transformación de Legendre [26], la Ec. (5.5) puede expresarse en términos de la entalpia, i.e. U = H-pV, por lo que se tiene lo siguiente

$$\frac{DH}{Dt}=\frac{D}{Dt}(pV)-\nabla\cdot\mathbf{q}+\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D} \qquad (6.6)$$

Si suponemos que el volumen puede expresarse en términos de cantidades específicas, i.e. el volumen especifico es igual al inverso de la densidad, por lo que: V = 1/ϱ entonces se tiene lo siguiente:

$$\frac{DH}{Dt}=\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right)-\nabla\cdot\mathbf{q}+\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}=\frac{p}{\rho}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}\right)+\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{Dp}{Dt}-\nabla\cdot\mathbf{q}+\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D} \qquad (6.7)$$

La Ec. (6.7) se puede simplificar en términos de la ecuación de continuidad

$$-\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}=\nabla\cdot\mathbf{V} \qquad (6.8)$$

Sustituyendo, la Ec. (6.8) en (6.7), se tiene lo siguiente:

$$\frac{DH}{Dt}=\frac{p}{\rho}(\nabla\cdot\mathbf{V})+\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{Dp}{Dt}-\nabla\cdot\mathbf{q}+\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D} \tag{6.9}$$

Como la entalpía H es una función de estado, se puede expresar en términos de las variables intensivas H = H(T, P) por lo que, se tiene lo siguiente:

$$dH=\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT+\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp \tag{6.10}$$

La derivada parcial de la entalpía con respecto la temperatura se conoce como capacidad calorífica a presión constante [26] (Ec. (6.11))

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p=Cp \tag{6.11}$$

Si suponemos que el proceso se da a presión constante, la entalpía puede expresarse como:

$$H(T)=\int_{T_0}^{T}Cp(\overline{T})d\overline{T}+H(T_0)=\int_{T_0}^{T}Cp(\overline{T})d\overline{T}+H_0 \tag{6.12}$$

Si el fluido es incompresible, es decir su velocidad es un campo solenoidal y las variaciones de la temperatura no son altas, el sistema se encuentra en el régimen de la termodinámica irreversible lineal, lo que conlleva a que:

$$H(T)=Cp(T\text{-}T_0)+H_0 \tag{6.13}$$

La entalpia del sistema de estudio se puede expresar como el producto de la densidad, la capacidad calorífica a presión constante y la temperatura, por lo tanto, la ecuación de balance de energía (Ec. (6.9)) toma la forma:

$$\mathbf{q}=-k\nabla T \tag{6.14}$$

Suponiendo que, el flux de energía se puede expresar como el producto de la conductividad térmica y el gradiente de temperaturas (Ley de Fourier), se tiene lo siguiente [1, 22]:

$$\frac{D}{Dt}(\rho CpT) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \tag{6.15}$$

Al sustituir la Ec. (6.15) en (6.14), se tiene lo siguiente:

$$\rho Cp \frac{D}{Dt}(T) + T\frac{D}{Dt}(\rho Cp) = \nabla k \cdot \nabla T + k\nabla \cdot \nabla T + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \tag{6.16}$$

Si suponemos que los cambios espaciales y temporales, no son grandes, es decir estamos en régimen de gradientes de temperatura bajos, la Ec. (6.16) toma la forma:

$$\rho Cp \frac{DT}{Dt} = \rho Cp\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right)T = k\nabla^2 T + 2\eta(II_D)(\mathbf{D} : \mathbf{D}) \tag{6.17}$$

La Ec. (6.17) es punto de partida para estudiar problemas de transporte transitorio, advectivos, moleculares y de disipación de fluidos no-Newtonianos en geometrías simples. En particular, si el fluido es newtoniano, i.e., no importa cómo se deforme el fluido, su viscosidad permanece constante:

$$\rho Cp \frac{DT}{Dt} = \rho Cp\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right)T = k\nabla^2 T + 2\mu(\mathbf{D} : \mathbf{D}) \tag{6.18}$$

6.3 Transferencia de masa

La ecuación que describe los cambios espaciales y temporales del flujo molar de una especie química **A** puede ser descrita a través de la siguiente expresión:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{N_A} + R_A \tag{6.19}$$

Donde C_A es la concentración molar de la especie química **A**, N_A es el flux molar de la especie química **A** y R_A es la cinética química de la especie **A** en unidades molares [27]. Hay tantas ecuaciones de balance de materia como de especies químicas presentes en el sistema. Si sólo está presente una especie química, la Ec. (6.19) se reduce a la ecuación de continuidad. La Ec. (6.19) es punto de partida para estudiar los problemas de transferencia de materia en diferentes sistemas físicos [22] (Capítulo 18), por otro lado, el flux total combinado N_A, en presencia dos especies químicas que reaccionan, se expresa por medio de la Ec.(6.20):

$$\mathbf{N_A} = -cD_{AB}\nabla x_A + x_A\left(\mathbf{N_A} + \mathbf{N_B}\right) \quad (6.20)$$

La Ec. (6.20) puede ser reescrita en términos de la velocidad global del sistema:

$$\mathbf{N_A} = -cD_{AB}\nabla x_A + C_A V \quad (6.21)$$

Al sustituir la Ec. (6.21) en la Ec. (6.19)

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + \nabla\cdot\left(C_A\mathbf{V}\right) = \nabla\cdot\left(D_{AB}\nabla C_A\right) + R_A \quad (6.22)$$

La Ec. (6.22) describe los cambios temporales y espaciales de la concentración de la especie **A** por efecto de los mecanismos difusivos y de generación asociados a la reacción química R_A. Si la reacción química es modelada mediante una cinética química de una reacción monomolecular irreversible de orden n, entonces:

$$R_A = -k_n C_A^n \quad (6.23)$$

Al substituir la Ec. (6.23), en la Ec. (6.22),

$$\frac{DC_A}{Dt} = -C_A\left(\nabla\cdot\mathbf{V}\right) + \nabla D_{AB}\cdot\nabla C_A + D_{AB}\nabla^2 C_A - k_n C_A^n \quad (6.24)$$

La Ec. (6.24) describe los cambios espaciales y temporales de la concentración como función de los mecanismos difusivos y de reacción química monomolecular, respectivamente [1, 22].

7 Reología

La Reología es la disciplina científica que se dedica al estudio de la deformación y flujo de la materia [28]. Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades mecánicas del material. Un sistema es capaz de fluir debido a las fuerzas cortantes que se le apliquen, i.e. el sistema fluye debido a una deformación continua e irreversible que se le aplique. Una de las propiedades materiales más importantes en reología es la viscosidad, que se puede interpretar como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo [1, 22, 29].

7.1 Tipos de fluido

En esta sección, se presentan los fundamentos matemáticos de la reología como lo son: (i) Los tensores básicos y (ii) ecuaciones constitutivas que describen la naturaleza del material de estudio. En mecánica del medio continuo, una ecuación constitutiva describe la relación entre las variables dinámicas en el sistema, en particular para la reología, el esfuerzo y la deformación, i.e. $\boldsymbol{\sigma} = f(\varepsilon)$.

7.2 Tensores

7.2.1 Tensor de deformación

El tensor de deformación es un tensor de segundo orden, el cual describe la deformación relativa de un medio continuo con respecto a una variable. El tensor de deformación es adimensional debido a que $[u_i] = L; [x_i] = L$. Matemáticamente, se puede representar de la siguiente manera [1, 29, 30]:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

Nótese, que el tensor de deformación carece de unidades por ser el cociente de dos longitudes características.

7.2.2 Tensor gradiente de velocidad

Al tomar la derivada temporal del tensor de deformación, obtenemos el tensor gradiente de velocidad, el cual se puede expresar de la siguiente manera [1, 22]:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\nabla \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial \mathrm{z}} \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

A diferencia del tensor de deformación, el tensor gradiente de deformación tiene unidades de inverso del tiempo.

7.2.3 Tensor rapidez de deformación

El tensor gradiente de velocidad, físicamente, proporciona información acerca de la evolución temporal de la deformación en el medio continuo, y sus unidades son de inverso de tiempo. El tensor gradiente de velocidad **∇V** puede ser descompuesto en una parte simétrica $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V})_s$ y otra parte anti simétrica $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{V})_A$ llamados tensor rapidez de deformación y tensor de vorticidad, respectivamente [24, 29]:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\right) + \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{V} - \nabla \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \tag{7.3}$$

En coordenadas cartesianas (x, y, z), el tensor rapidez de deformación puede ser descrito matemáticamente de forma matricial [1, 22]:

Es importante notar, que el tensor rapidez de deformación es un tensor de segundo orden simétrico, esto implica que su transpuesta es igual al tensor, i.e. $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\mathrm{T}}$. Físicamente, esta matriz simétrica nos muestra la rapidez con la que es deformado un elemento del medio continuo [1, 22]

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^{T}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Vx}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vy}{\partial x} + \frac{\partial Vx}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vz}{\partial x} + \frac{\partial Vx}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vx}{\partial y} + \frac{\partial Vy}{\partial x}\right) & \frac{\partial Vy}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vz}{\partial y} + \frac{\partial Vy}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vx}{\partial z} + \frac{\partial Vz}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vy}{\partial z} + \frac{\partial Vz}{\partial y}\right) & \frac{\partial Vz}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

7.2.4 Tensor de Vorticidad

El tensor de Vorticidad en coordenadas cartesianas se define de la siguiente manera [1, 22]:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^{T}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vy}{\partial x} - \frac{\partial Vx}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vz}{\partial x} - \frac{\partial Vx}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vx}{\partial y} - \frac{\partial Vy}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vz}{\partial y} - \frac{\partial Vy}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vx}{\partial z} - \frac{\partial Vz}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vy}{\partial z} - \frac{\partial Vz}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

El tensor de vorticidad es de segundo orden y anti-simétrico, es decir $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^{T}$. Físicamente muestra la información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el medio continuo.

7.2.5 Tensor de esfuerzos

Al igual que los tensores anteriormente definidos, el tensor de esfuerzos, es un de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz simétrica de 3x3 formada por nueve elementos, siempre que las bases vectoriales espaciales sean ortogonales [31, 32]. Los elementos fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzos normales [29, 30]. Nótese, que los esfuerzos cortantes inducen el movimiento del elemento material del volumen de control, mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica de este, pero no lo modifican. El tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

Matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir los elementos fuera de la diagonal principal son iguales.

7.3 Viscoelasticidad

Se dice que un fluido es viscoelástico cuando exhibe un comportamiento sólido (elástico) y líquido (viscoso), ¡de manera simultánea! Los esfuerzos en un material elástico dependen de qué tan lejos se encuentra el material deformado del estado original, sin considerar la escala de tiempo de la deformación. En los sólidos elásticos, cuando el esfuerzo cesa, el fluido o material adquiere su forma original; entonces se dice que dicha sustancia posee una memoria perfecta [24]. Por otro lado, un líquido no tiene memoria, por lo tanto, cuando el esfuerzo cesa, el líquido permanece en su última posición. Desde un punto de vista energético, el trabajo que se usa para deformar un sólido elástico se almacena en el fluido como energía potencial y puede recuperarse totalmente cuando el material regresa al estado sin deformación, de la misma manera, el trabajo que requiere un líquido viscoso para deformarse se disipa y no puede recuperarse, es decir, como se dijo anteriormente, se deforma continua e irreversiblemente. En principio es importante conocer la preponderancia de una u otra propiedad, la forma más común es por medio de una constante de tiempo característica del material, esta última es relativa a un tiempo característico de observación o bien, de experimentación. La relación entre el tiempo característico del material y el tiempo característico de observación, se denomina número de Deborah [1, 24, 29, 30, 33]:

$$\mathrm{De} = \frac{\lambda_0}{t_p} \tag{7.7}$$

La forma de la expresión del número de Deborah depende del tipo de flujo reométrico empleado, sin embargo, para flujos más complejos, depende de otros números adimensionales [34].

Tabla 7.1. **Número de Deborah en función de la amplitud de deformación aplicada al fluido**

Amplitud de deformación, γ_0	Número de Deborah, $\frac{\lambda_0}{t_{obs}}$ o $\lambda\dot{\gamma}$ o $\gamma_0\lambda\omega$	Denominación del material	Modelo constitutivo representante
Alta	Mucho menor a 1	Líquido viscoso (Fluido Newtoniano)	Ley de viscosidad de Newton
Moderada	Menor a 1	Fluido de segundo orden	Se consideran términos de segunda derivada de la función $\boldsymbol{\sigma} = f(\gamma)$
Baja	Aproximado a 1	Fluido viscoelástico lineal	Ecuaciones de analogías mecánicas.
Moderada	Aproximado a 1	Fluido viscoelástico no lineal	Ecuaciones de analogías mecánicas con modificaciones a las derivadas de las cantidades dinámicas
Alta	Aproximado a 1	Fluido no Newtoniano (inelástico)	Modelo de potencia, modelo de Cross, Modelo de Carreau etc.
Alta	Mucho mayor a 1	Solido elástico no lineal	Ley de elasticidad Neo – hookeana
Baja	Mayor a 1	Sólido elástico lineal	Ley de elasticidad de Hooke

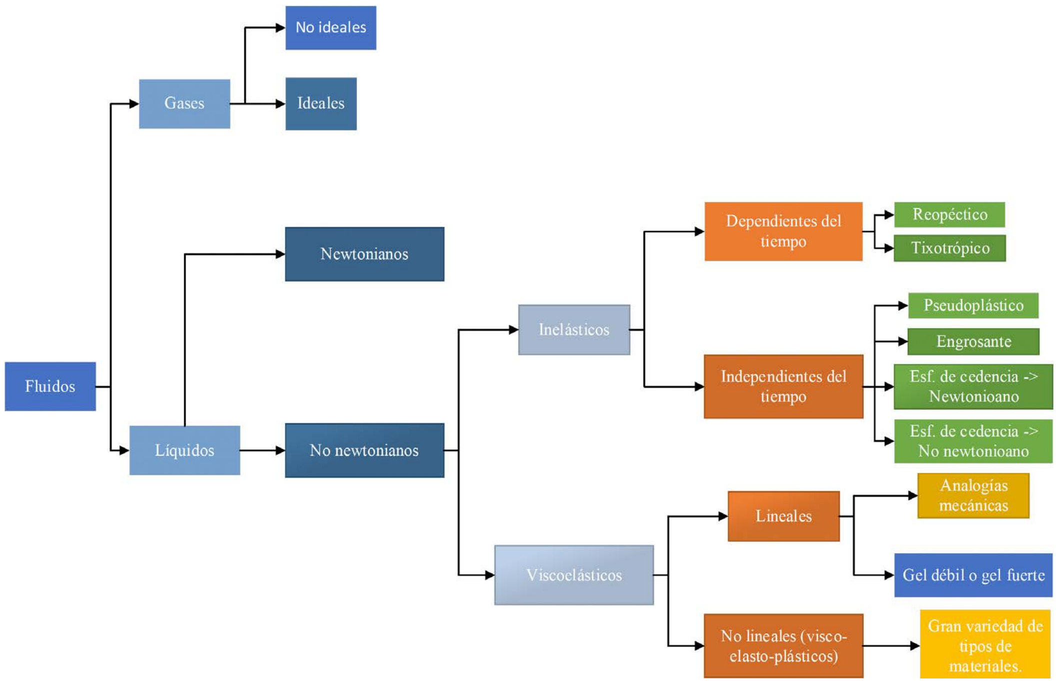


Figura 7.1. **Clasificación de los fluidos según la reología.**

7.4 Ecuaciones constitutivas reológicas

Las funciones materiales y las ecuaciones constitutivas son aquellas relaciones entre dos o más cantidades físicas de un material en específico (comúnmente entre fenómenos cinéticos y propiedades cinemáticas). Adicionalmente, son combinadas con otras ecuaciones de leyes físicas para resolver problemas. Algunas ecuaciones constitutivas son simplemente fenomenológicas (relaciones empíricas) y otras son deducidas de principios básicos. Sin duda, conforme la complejidad del fluido es mayor, la forma de las ecuaciones constitutivas será más complicada.

La Reología se enfoca en observar el comportamiento de los materiales a condiciones de flujo controladas, es decir, a deformaciones y esfuerzos relativamente simples. Las ecuaciones constitutivas reológicas tienen 2 objetivos principales:

1. Predecir el comportamiento del fluido, desde un punto de vista macroscópico, a las condiciones de proceso dadas.

2. Estudiar y caracterizar de manera indirecta la estructura microscópica del fluido e investigar los factores que la alteran; para esto se comparan los parámetros reológicos.

Por lo anterior, la caracterización reológica tiene una gran importancia en el control de calidad y control de procesos industriales.

Tabla 7.2. Modelos viscoelásticos comunes en la descripción del flujo pulsátil.

Régimen	Nombre	Ecuación constitutiva	Función Viscosidad
Inelástico (viscoso)	Ley de Potencia (Ostwald)	$\boldsymbol{\sigma} \bullet 2\eta \bullet II_D \bullet \mathbf{D}$	$\eta(II_D) = m\left(\sqrt[2]{2(D:D)}\right)^{n-1}$
	Ellis	$\boldsymbol{\sigma} \bullet 2\eta \bullet II_D \bullet \mathbf{D}$	$\eta(II_{\boldsymbol{\sigma}}) = \dfrac{\eta_0}{1+\left(\dfrac{\lvert\boldsymbol{\sigma}\rvert}{\sigma_{1/2}}\right)^{\alpha\text{-}1}}$
	Reinner Phillipoff	$\boldsymbol{\sigma} \bullet 2\eta \bullet II_D \bullet \mathbf{D}$	$\eta(II_{\boldsymbol{\sigma}}) = \dfrac{1}{\varphi_\infty + \dfrac{\varphi_0 - \varphi_\infty}{1+\left(\dfrac{\lvert\boldsymbol{\sigma}\rvert}{\sigma_s}\right)^2}}$
	Carreau	$\boldsymbol{\sigma} \bullet 2\eta \bullet II_D \bullet \mathbf{D}$	$\eta(II_{\mathbf{D}}) = \eta_\infty + \dfrac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left[1+\left(\lambda\lvert II_{\mathbf{D}}\rvert\right)^2\right]^{(1\text{-}n)/2}}$
	Hershel-Bulkley	$\boldsymbol{\sigma} \bullet 2\eta \bullet II_D \bullet \mathbf{D}$	$\eta(II_{\mathbf{D}}) = \dfrac{\eta_\infty}{II_{\mathbf{D}}} + m(II_{\mathbf{D}})^{n\text{-}1}$
Viscoelástico lineal	Maxwell	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0\mathbf{D}$	$\eta = \dfrac{\eta_0}{1+\lambda_0\dfrac{\partial}{\partial t}}$
	Jeffreys	$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_M \dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0\left(1+\lambda_J\dfrac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{D}$	$\eta = \eta_0\dfrac{1+\lambda_J\dfrac{\partial}{\partial t}}{1+\lambda_0\dfrac{\partial}{\partial t}}$

Régimen	Nombre	Ecuación constitutiva	Función Viscosidad
Viscoelástico lineal	Burgers [35]	$G_1G_2\boldsymbol{\sigma}+\left(G_1\eta_1+G_1\eta_2+G_2\eta_1\right)\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial t}+\eta_1\eta_2\frac{\partial^2\boldsymbol{\sigma}}{\partial t^2}=2G_1G_2\eta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}+2G_1\eta_1\eta_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{D}$	
	Tsay [35]	$(G_1+G_2)\boldsymbol{\sigma}+(\eta_1+\eta_2)\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\sigma}=2G_1G_2\mathbf{D}+2(G_1\eta_2+G_2\eta_1)\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}+2\eta_1\eta_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{D}$	
Viscoelástico no lineal	Convectiva Superior de Maxwell	$\boldsymbol{\sigma}+\lambda_M\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}=2\eta_0\mathbf{D}$	
	Oldroyd-A	$\boldsymbol{\sigma}+\lambda_M\overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}}=2\eta_0(\mathbf{D}-\lambda_J\overset{\square}{\mathbf{D}})$	
	Oldroyd-B	$\boldsymbol{\sigma}+\lambda_M\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}=2\eta_0\left(\mathbf{D}+\lambda_J\overset{\nabla}{\mathbf{D}}\right)$	
	Configuracional de Jeffreys	$\boldsymbol{\sigma}+\lambda_1\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}}=2\eta_0\left(\mathbf{D}-\lambda_2\overset{\square}{\mathbf{D}}\right)$	
	White-Metzner [36]	$\boldsymbol{\sigma}+\frac{\eta\left(II_{\mathbf{D}}\right)}{G_0}\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}=2\eta\left(II_{\mathbf{D}}\right)\mathbf{D}$	
	Phan-Thien-Tanner generalizado [37]	$f(\mathrm{Tr}(\mathbf{S}))\mathbf{S}+\lambda_0\overset{\circ}{\mathbf{S}}=2\eta_p\mathbf{D}$ con $\mathbf{T}=-p\mathbf{I}+\boldsymbol{\sigma}_s+\boldsymbol{\sigma}_p=-p\mathbf{I}+2\eta_s\mathbf{D}+\mathbf{S}$	
	Giesekus [38]	$\mathbf{S}+\lambda_0\overset{\nabla}{\mathbf{S}}+\frac{\alpha\lambda_0}{\eta_p}\mathbf{S}^2=2\eta_p\mathbf{D}$	
	Johnson-Segalman [39]	$\mathbf{S}+m\overset{\circ}{\mathbf{S}}=2\eta_p\mathbf{D}$	
	Saramito [40]	$\lambda_0\overset{\circ}{\mathbf{S}}+\max\left(0,\frac{\lvert S_d\rvert-S_y}{\lvert S_d\rvert}\right)\mathbf{S}=2\eta_p\mathbf{D}$ con $\mathbf{S}_d=\mathbf{S}-(1/N)\mathrm{Tr}(\mathbf{S})\mathbf{I}$ con $\mathbf{S}_d=\mathbf{S}-(1/N)\mathrm{Tr}(\mathbf{S})\mathbf{I}$	
	Bautista-Manero-Puig [21, 41-45]	$\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{G_0\varphi}\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{2}{\varphi}\mathbf{D}$ con $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\varphi_0-\varphi}{\lambda}+k\left(II_D,II_\sigma\right)\left(\varphi_\infty-\varphi\right)\sigma:D$	

Régimen	Nombre	Ecuación constitutiva	Función Viscosidad
Viscoelástico no lineal	Rosenblatt [46]	$\boldsymbol{\sigma}+\lambda(P)\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}=2\eta(P)\mathbf{D}$ $\frac{DP}{Dt}=\frac{\partial P}{\partial t}+V\cdot\nabla P= k(1\text{-}P)\text{-}\alpha(II_D)P$	
	Moyers-Owens [13]	$\frac{\partial N_0}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla N_0=D_{tr}\nabla^2N_0-\frac{D_{tr}}{k_BT+\kappa}\nabla\nabla:\boldsymbol{\sigma}$ $\frac{\partial M}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla M=D_{tr}\nabla^2M-\frac{D_{tr}}{k_BT+\kappa}\nabla\nabla:\boldsymbol{\sigma}-\frac{1}{2}a(II_D)M^2+\frac{b(II_D)}{2}(N_0\text{-}M)$ $\boldsymbol{\sigma}_s+\bar{\lambda}\boldsymbol{\sigma}-D_{tr}\bar{\lambda}\left(\nabla^2\boldsymbol{\sigma}_s+(\nabla\nabla:\boldsymbol{\sigma}_s)\mathbf{I}\right)=2N_0(k_BT+\kappa)\bar{\lambda}\mathbf{D}$ $\boldsymbol{\sigma}_p+\bar{\lambda}\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}-D_{tr}\bar{\lambda}\left(\nabla^2\boldsymbol{\sigma}_p+(\nabla\nabla:\boldsymbol{\sigma}_p)\mathbf{I}\right)=2M(k_BT+\kappa)\bar{\lambda}\mathbf{D}$	

7.5 Derivadas temporales objetivas

Son derivadas temporales que no dependen del marco de referencia usado (derivadas objetivas). Muestran la rapidez de cambio de un tensor en un pequeño trozo del material que es descrito por el sistema de coordenadas mientras rota (o no) y/o se expande (o contrae). La Tabla 7.3 muestra las derivadas temporales objetivas más comunes [29]:

Tabla 7.3. **Derivadas temporales objetivas.**

Nombre	Expresión
Derivada convectiva superior	$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt}-\left(\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}^T\right)$ con $\mathbf{L}=\nabla\mathbf{V}$
Derivada convectiva inferior	$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt}-\left(\mathbf{L}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{L}^T\right)$

Nombre	Expresión
Derivada corrotacional (o de Jaumann)	$\overset{\dagger}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} - (\mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W})$
Derivada configuracional	$\overset{\square}{\boldsymbol{\sigma}} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\varepsilon}{2}\overset{\Delta}{\boldsymbol{\sigma}}$
Derivada de Gordon-Schowalter	$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W} - \mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\sigma} - a(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W} + \mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\sigma})$

Tabla 7.4. Definiciones de las variables dinámicas con unidades.

Nombre	Símbolo	Unidades (MKS)	Nombre
Tensor de esfuerzo	$\boldsymbol{\sigma}$	Pa	Pascal
Tensor rapidez de deformación	$\mathbf{D}$	1/s	Inverso de segundo
Tensor de vorticidad	$\mathbf{W}$	1/s	Inverso de segundo
Función viscosidad	$\boldsymbol{\eta}$	Pa s	Pascal-segundo
Segundo-invariante del tensor rapidez deformación	$\mathbf{II}_D$	1/s	Inverso de segundo
Tiempo de relajación de Maxwell	λ_M	s	Segundo
Tiempo de retardo de Jeffreys	λ_J	s	Segundo
Viscosidades a bajo y alto corte	$\boldsymbol{\eta}_0$ $\boldsymbol{\eta}_\infty$	Pa s	Pascal segundo

A pesar de existir distintos tipos de ecuaciones, a todas ellas se les exige una serie de requisitos:

a) La relación entre esfuerzo y deformación debe ser independiente de rotaciones o traslaciones impuestas al fluido.

b) Debe ser independiente del sistema de coordenadas elegido.

c) La respuesta del material debe ser independiente de lo que ocurra en los alrededores de los distintos elementos; es decir, para un elemento infinitesimal de fluido, se debe satisfacer las condiciones de contorno, pero al margen de esto, su comportamiento debería ser independiente de lo que les ocurra a los elementos vecinos (principio de localidad [32]).

CAPÍTULO IV
Ecuaciones constitutivas

8 Fluido Newtoniano

Desde el punto de vista de la Reología, los fluidos Newtonianos son aquellos, que no importa la rapidez con la que sean deformados, su viscosidad permanece constante. Matemáticamente, un fluido Newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación. La ecuación tensorial básica de este tipo de fluidos se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} = \mu\left(\nabla\mathbf{V} + \left(\nabla\mathbf{V}\right)^{T}\right) \qquad \textbf{(8.1)}$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana $\boldsymbol{\mu}$ y se mide en Pa s (en SI). En la Ec. (8.1) el tensor de esfuerzos y el tensor de rapidez de deformación, $\boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{D}$ respectivamente, tienen unidades de Pa y s^{-1} en el sistema internacional de unidades. Por definición, todos aquellos fluidos que no siguen la Ec. (8.1) son no-Newtonianos.

9 Fluidos no Newtonianos

Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-Newtonianos, son punto de partida en la mayoría de los procesos y el estudio de nuevos materiales, incluyendo aplicaciones tecnológicas e investigación básica. Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, soluciones jabonosas, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pastas, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son, en general, no-Newtonianos. La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no Newtonianos no es lineal. Estos fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo. En este punto, la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión, composición, frecuencia y pH [1, 22]. La ecuación básica del fluido no-Newtoniano inelástico se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta\left(\mathrm{II}_{\mathbf{D}}\right)\mathbf{D} = \eta\left(\mathrm{II}_{\mathbf{D}}\right)\left(\nabla\mathbf{V} + \left(\nabla\mathbf{V}\right)^{T}\right) \qquad \mathbf{(9.1)}$$

En la Ec. (9.1), $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{II}_{\mathrm{D}})$ es la función viscosidad generalizada, la cual depende del segundo invariante del tensor de rapidez de deformación, de la siguiente forma:

$$\mathrm{II}_{\mathbf{D}} = \sqrt{2\left(\mathbf{D}:\mathbf{D}\right)} \qquad \mathbf{(9.2)}$$

En la Ec. (9.2) **D**:**D** es el doble producto tensorial del tensor rapidez de deformación, también conocido como doble contracción del tensor de rapidez de deformación. Este escalar nos da información del tipo de flujo que se está estudiando, i.e. flujo cortante, flujo extensional o una combinación de estos [1, 22]. La Ec. (38) es válida para fluidos no-Newtonianos inelásticos, para incorporar los mecanismos elásticos esta última ecuación es modificada.

9.1 Fluidos viscoelásticos lineales

La viscoelasticidad, como ya se mencionó, es un tipo de comportamiento reológico que presentan ciertos materiales que exhiben tantas propiedades viscosas como propiedades elásticas cuando son sometidos a deformaciones. Un material viscoelástico es un material para el cual existe una relación lineal entre los tensores de esfuerzo y rapidez de deformación. Matemáticamente, la relación más simple de un material viscoelástico lineal puede ser expresado de la siguiente manera [1]:

$$\boldsymbol{\sigma} + \mathrm{A}^{(1)}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\sigma} + \cdots + \mathrm{A}^{(n1)}\frac{\partial^{(n1)}}{\partial t^{(n1)}}\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{B}^{(0)}\boldsymbol{\varepsilon} + \mathrm{B}^{(1)}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\varepsilon} + \cdots + \mathrm{B}^{(n2)}\frac{\partial^{(n2)}}{\partial t^{(n2)}}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \mathbf{(9.3)}$$

Para generar modelos viscoelásticos lineales, los valores de los coeficientes A y B de la Ec. (9.3) son modificados. Los modelos más comunes son: (i) Maxwell, (ii) Jeffreys, (iii) Burgers, etc. Todos estos modelos son combinaciones de resortes y pistones (émbolos) lo que genera los diferentes tipos de ecuaciones constitutivas. Cada uno de estos modelos difiere en la disposición de los pistones y de los amortiguadores. Además, solo son aplicados a fluidos con gradientes de desplazamiento extremadamente pequeño (deformaciones pequeñas). En la **Figura 9.1** se observa un dispositivo clásico que representa al modelo viscoelástico más sencillo conocido como fluido viscoelástico de Maxwell. Cada uno de estos modelos difiere en la disposición de los muelles y amortiguadores. Además, solo son aplicados a fluidos con gradientes de desplazamiento extremadamente pequeño.

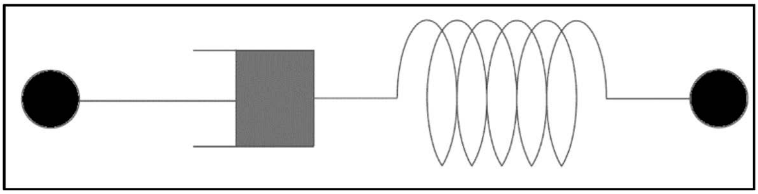


Figura 9.1. **Modelo de Maxwell: un pistón (ley de Newton) está conectado a un resorte (ley de Hooke) en serie**

9.1.1 Modelo de Maxwell

El modelo de Maxwell (**Figura 9.1**) se puede describir como la suma de una contribución viscosa y otra elástica que está asociada con la recuperación:

$$\gamma = \gamma_{\text{Newton}} + \gamma_{\text{Hooke}} \tag{9.4}$$

Derivando la deformación total con respecto el tiempo, se tiene lo siguiente:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{\text{Newton}} + \dot{\gamma}_{\text{Hooke}} \tag{9.5}$$

La contribución de Newton y de Hooke se sustituye en la expresión anterior:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{\text{Newton}} + \dot{\gamma}_{\text{Hook}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\eta_0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{G_0}\right) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\eta_0} + \frac{1}{G_0}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\sigma} \tag{9.6}$$

Multiplicando la Ec. (9.6) por la viscosidad a bajas rapidez de deformación, se obtiene la siguiente expresión:

$$\eta_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\sigma} + \frac{\eta_0}{G_0}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\sigma} = \left(1 + \frac{\eta_0}{G_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{\sigma} \tag{9.7}$$

Si se define el tiempo de relajación de Maxwell, como $\lambda_0 = \eta_0/G_0$, por lo que la expresión anterior toma la forma:

$$\left(1 + \frac{\eta_0}{G_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\boldsymbol{\sigma} = \eta_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}} \tag{9.8}$$

Finalmente, si el tensor que describe la evolución de la deformación $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ se expresa en términos del tensor rapidez de deformación, i.e. (d/dt) γ **= 2D,** se tiene el modelo tensorial reológico de Maxwell:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D} \tag{9.9}$$

El modelo de Maxwell predice que el esfuerzo decaerá exponencialmente con el tiempo en, por ejemplo, un polímero sometido a deformación constante, lo cual se ajusta bastante bien a lo observado experimentalmente para muchos polímeros líquidos. Sin embargo, una limitación importante es que no predice el comportamiento de flujo lento (*creep*) de muchos polímeros ya que en este caso predice un aumento lineal de la deformación con el tiempo si el esfuerzo es constante, sin embargo, la mayor parte de los polímeros muestran una tasa de deformación decreciente con el tiempo. Por otra parte, esta ecuación está limitada solamente a deformaciones bajas, mientras que los procesos industriales trabajan a deformaciones moderadas y altas, respectivamente, por lo que se necesitan ecuaciones diferentes al modelo explicado por la Ec. (9.9) [22](Capitulo 8).

9.2 Pruebas de flujo reológicas

9.2.1 Flujo cortante simple en estado estacionario

En esta prueba la muestra es deformada por medio de un esfuerzo cortante el cual se puede representar por medio de dos placas paralelas en las cuales se aplica una fuerza en dirección del flujo de tal manera que la transferencia de momento se da en la componente ortogonal a la velocidad (eje coordenado y) como se muestra en la **Figura 9.2**.

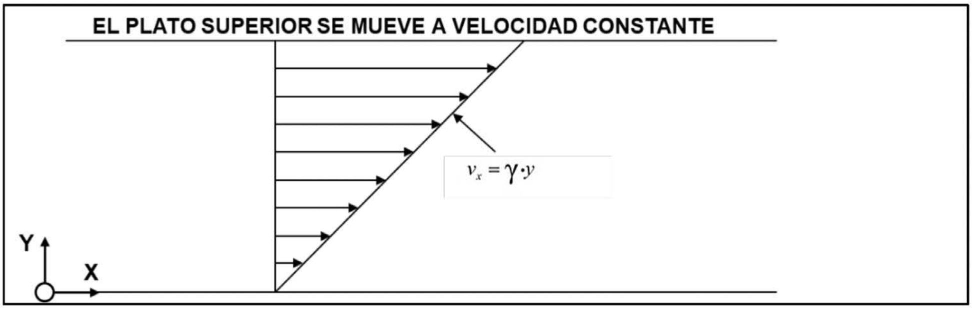


Figura 9.2. **Sistema de placas paralelas.**
El fluido es cortado y se produce un flujo homogéneo.

En el flujo cortante simple, las matrices de los tensores de esfuerzo y rapidez de deformación toman la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vz}{\partial x} + \frac{\partial Vx}{\partial z}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vx}{\partial z} + \frac{\partial Vz}{\partial x}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(9.10)}$$

Sustituyendo las Ecs. de (9.10) en la Ec. (9.9) del modelo de Maxwell, se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2\eta_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vz}{\partial x} + \frac{\partial Vx}{\partial z}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Vx}{\partial z} + \frac{\partial Vz}{\partial x}\right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(9.11)}$$

Desacoplando el sistema de matrices descrito por la Ec. (9.11), se tiene que

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) \sigma_{xz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{xz} \quad \textbf{(9.12)}$$

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right) = \left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right) N_1 = 0 \quad \textbf{(9.13)}$$

$$\left(1+\lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\sigma_{yy}-\sigma_{zz}\right)=\left(1+\lambda_0 \frac{\partial}{\partial t}\right)N_2=0 \tag{9.14}$$

En estado estacionario, el modelo de Maxwell se reduce a la ley de viscosidad de Newton, y la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales, N_1 y N_2, son cero, i.e.:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \eta_0 \dot{\gamma}_{xz} \\ N_1 &= 0 \\ N_2 &= 0 \end{aligned} \tag{9.15}$$

9.2.1.1 Funciones materiales del modelo de Maxwell

Las funciones materiales describen la naturaleza física del material sometido a un flujo. En flujo cortante simple existen tres principales: (i) La función viscosidad, (ii) El primer coeficiente de esfuerzos normales y (iii) el segundo coeficiente de esfuerzos normales. Para el modelo de Maxwell (Ec. (9.15)) se tiene lo siguiente:

a) Función viscosidad

$$\eta\left(\dot{\gamma}_{xz}\right)=\frac{\sigma_{xz}}{\dot{\gamma}_{xz}}=\eta_0 \tag{9.16}$$

b) Primera diferencia de esfuerzos normales

$$\Psi_1=\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{\dot{\gamma}_{xz}^2}=0 \tag{9.17}$$

c) Segunda diferencia de esfuerzos normales

$$\Psi_2=\frac{\sigma_{yy}-\sigma_{zz}}{\dot{\gamma}_{xz}^2}=0 \tag{9.18}$$

Por lo tanto, en estado estacionario, el modelo de Maxwell en un flujo cortante simple coincide con el modelo de Newton de los fluidos viscosos y la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales son cero.

9.2.2 Flujo oscilatorio de baja amplitud de deformación

En flujo oscilatorio de pequeña amplitud de deformación (por sus siglas en inglés SAOS) se estudia la respuesta mecánica oscilatoria de un flujo cortante en estado no estacionario en términos de la frecuencia ω (espacio de Fourier), a deformaciones muy pequeñas. Por ejemplo, el modelo de Maxwell en el espacio de Fourier [47] toma la siguiente forma:

$$(1+\lambda_0 \cdot i\omega)\sigma_{rz}(\omega) = \eta_0 \dot{\gamma}(\omega) \tag{9.19}$$

Dividiendo el esfuerzo y la rapidez de deformación, se obtiene la llamada viscosidad compleja:

$$\eta^*(i\omega) = \frac{\sigma(i\omega)}{\dot{\gamma}(i\omega)} = \frac{\eta_0}{1+\lambda_0 i\omega} \tag{9.20}$$

La viscosidad compleja $\eta^*(i\omega)$ se puede desacoplar en una parte real y otra imaginaria por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\eta^*(i\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \eta_0 \frac{1}{1+i\lambda_0\omega} \cdot \frac{1-i\lambda_0\omega}{1-i\lambda_0\omega} = G_0\lambda_0 \left\{ \frac{1}{1+\lambda_0^2\omega^2} - i\frac{\lambda_0\omega}{1+\lambda_0^2\omega^2} \right\} \tag{9.21}$$

Separando la parte real y la parte imaginaria de la Ec. (9.21), se tiene la siguiente expresión para la viscosidad real (Ec. (9.22)) y viscosidad imaginaria respectivamente (Ec. (9.23)):

$$\eta'(\omega) = \frac{G_0\lambda_0}{1+(\lambda_0\omega)^2} \tag{9.22}$$

$$\eta''(\omega) = \frac{\eta_0\lambda_0\omega}{1+(\lambda_0\omega)^2} \tag{9.23}$$

La relación del módulo elástico y del módulo viscoso con las viscosidades real e imaginaria están dados por las siguientes expresiones [29]: $G''(\omega)=\omega\eta'(\omega)$ y $G'(\omega)=\omega\eta''(\omega)$. Por lo que, a partir de las Ecs. (9.22) y (9.23) se tiene lo siguiente:

$$G'(\omega) = G_0 \frac{\lambda_0^2\omega^2}{1+(\lambda_0\omega)^2} \tag{9.24}$$

$$G''(\omega) = G_0 \frac{\lambda_0 \omega}{1+(\lambda_0 \omega)^2} \tag{9.25}$$

Las Ecs. (9.24) y (9.25) son las expresiones analíticas para los módulos de almacenamiento y pérdida del modelo de Maxwell. Estas expresiones describen las propiedades viscoelásticas del material a través de la variación de la frecuencia angular. Un hecho importante es cuando se igualan las dos expresiones (G′=G′′), el equimódulo; y por medio de $1/\omega_c = \lambda_c$ se obtiene el tiempo de relajación de Maxwell, por lo que, en el caso más simple, el sistema de flujo oscilatorio permite calcular una de las propiedades materiales del sistema, conocido como tiempo de relajación de Maxwell, se podría decir que esta cantidad es la *huella digital* del fluido (a las condiciones de temperatura y concentración dadas). Obsérvese que, cuando la frecuencia disminuye, las Ec. (9.26) y (9.27) predicen, es escala logarítmica, una pendiente de 2 y 1, respectivamente:

$$\lim_{\omega \to 0} \left[\mathrm{Log}\left(G'(\omega) \right) \right] = 2\mathrm{Log}(\omega) + \mathrm{Log}(\eta_0 \lambda_0) \tag{9.26}$$

$$\lim_{\omega \to 0} \left[\mathrm{Log}\left(G''(\omega) \right) \right] = 1\mathrm{Log}(\omega) + \mathrm{Log}(\eta_0) \tag{9.27}$$

Adicionalmente, a altas frecuencias, el módulo elástico exhibe un valor constante

$$\lim_{\omega \to \infty} \left[G'(\omega) \right] = \lim_{\omega \to \infty} \left[G_0 \frac{\lambda_0^2 \omega^2}{1+(\lambda_0 \omega)^2} \right] = G_0 \tag{9.28}$$

Los casos particulares de las Ecs. (9.26)-(19.4) nos permiten calcular los parámetros materiales del sistema (η_0, λ_0, G_0). La Figura 9.3 muestra las gráficas de G′ y G′′ que genera el modelo viscoelástico lineal de Maxwell, el punto negro indica el equimódulo (G′=G′′), adicionalmente, el modelo de maxwell describe las propiedades viscoelásticas de, por ejemplo, un polímero *puro*, es decir, sin diluir.

Otra ecuación constitutiva viscoelástica lineal proveniente de la Ec. (9.3) es el llamado modelo de Jeffreys el cual acopla la contribución del polímero viscoelástico y la de un solvente newtoniano. El modelo de Jeffreys contiene tres constantes materiales asociadas a la viscosidad del polímero, viscosidad del solvente y el tiempo de relajación del sistema. La **Figura 9.4** muestra las gráficas de G′ y G′′ del modelo de Jeffreys, se puede observar un mínimo (punto verde) debido al efecto del solvente en el sistema. La componente cortante del sistema lo expresa la Ec. (19.4)

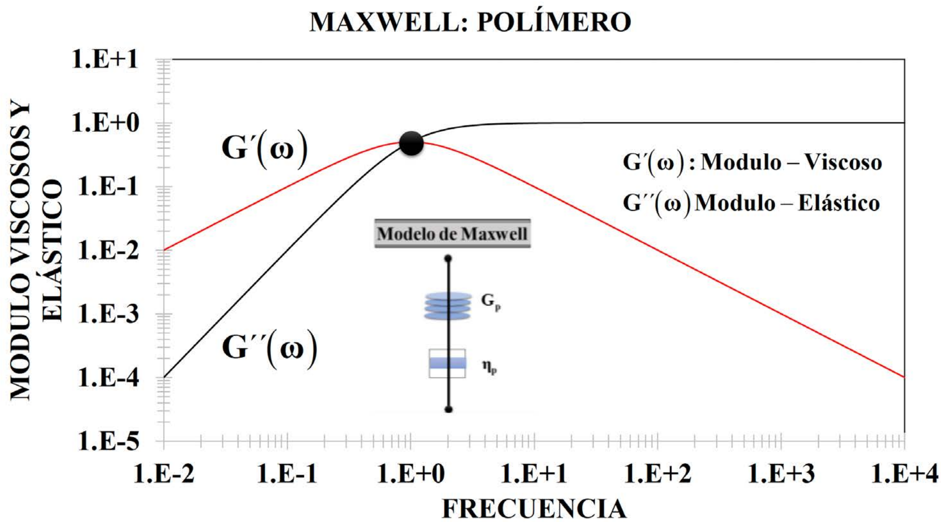


Figura 9.3. **Módulos de perdida y almacenamiento del modelo de Maxwell. El modelo contiene dos constantes materiales que describen la viscosidad y la elasticidad del sistema.**

$$\sigma_{rz} = \left(\frac{\eta_p}{1 + \lambda_p \partial_t} + \eta_S \right) \dot{\gamma}_{zr} \tag{9.29}$$

El operador viscosidad adimensional en el espacio de Fourier está dado por

$$O_\eta^J (i\omega) = \frac{\eta_p}{1 + \lambda_p (i\omega)} + \eta_s \tag{9.30}$$

Los módulos elástico y viscoso se obtienen multiplicando el operador viscosidad compleja por iω, se tiene que

$$G(i\omega) = (i\omega)\cdot O_{\eta}^{J}(i\omega) = \frac{\eta_p(i\omega)}{1+\lambda_p(i\omega)} + \eta_s(i\omega) \tag{9.31}$$

Las partes real e imaginaria de la Ec (19.4) son los módulos de perdida y almacenamiento del modelo de Jeffreys, los cuales son representados en la **Figura 9.4**.

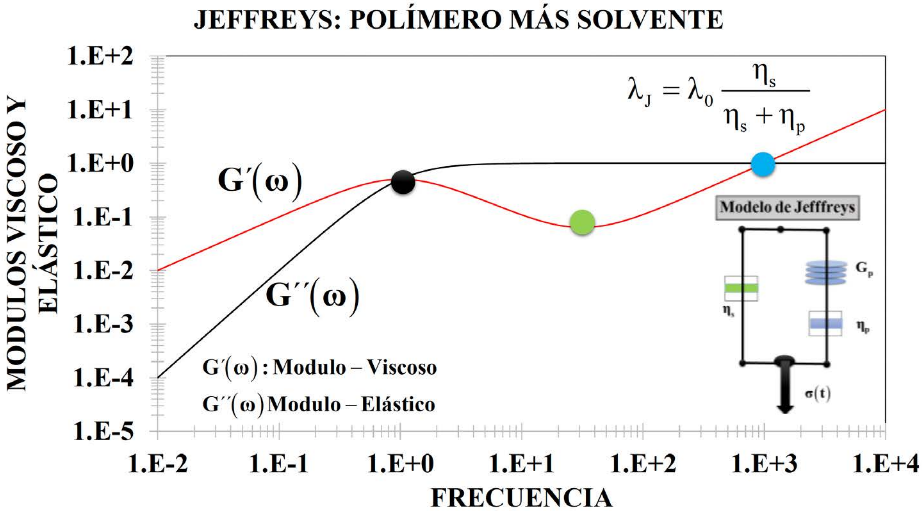


Figura 8.4. Módulos de perdida y almacenamiento del modelo de Jeffreys. Un fluido viscoelástico lineal de Maxwell (polímero) se encuentra conectado en paralelo con un fluido newtoniano (pistón).

De la misma manera que en el caso del modelo de Jeffreys, si se conecta un fluido de maxwell en paralelo con otro fluido de maxwell, es decir, representando una interacción polimero-polimero, se obtiene el modelo de Burgers o también conocido como el modelo de 4 elementos, la componente cortante del tensor de esfuerzo para el caso de estudio sería

$$\sigma_{rz} = \left(\frac{\eta_p}{1+\lambda_p\partial_t} + \frac{\eta_S}{1+\lambda_S\partial_t} \right)\dot{\gamma}_{zr} \tag{9.32}$$

Cuyo operador viscosidad adimensional en el espacio de Fourier es

$$O_\eta^B(i\omega) = \frac{\eta_p}{1+\lambda_p(i\omega)} + \frac{\eta_s}{1+\lambda_S(i\omega)} \tag{9.33}$$

Como ya se mencionó, para obtener G′ y G′′ del modelo se multiplica por iω el operador viscosidad por lo que se tiene

$$G(i\omega) = (i\omega)\cdot O_\eta^B(i\omega) = (i\omega)\left(\frac{\eta_p(i\omega)}{1+\lambda_p(i\omega)} + \frac{\eta_s(i\omega)}{1+\lambda_p(i\omega)}\right) \tag{9.34}$$

Este modelo generaliza a los modelos de Maxwell, Jeffreys y Newtoniano. Vale la pena observar que, como se muestra en la **Figura 9.5**, el modelo de Burgers posee cuatro tiempos característicos relacionados con el tiempo de relajación de Maxwell del primer equimódulo (punto negro), el mínimo en G′ (punto verde), el segundo equimódulo debido al tiempo de retardo de Jeffreys (punto azul) y la última contribución relacionada a la memoria de la interacción polímero-polímero (punto amarillo).

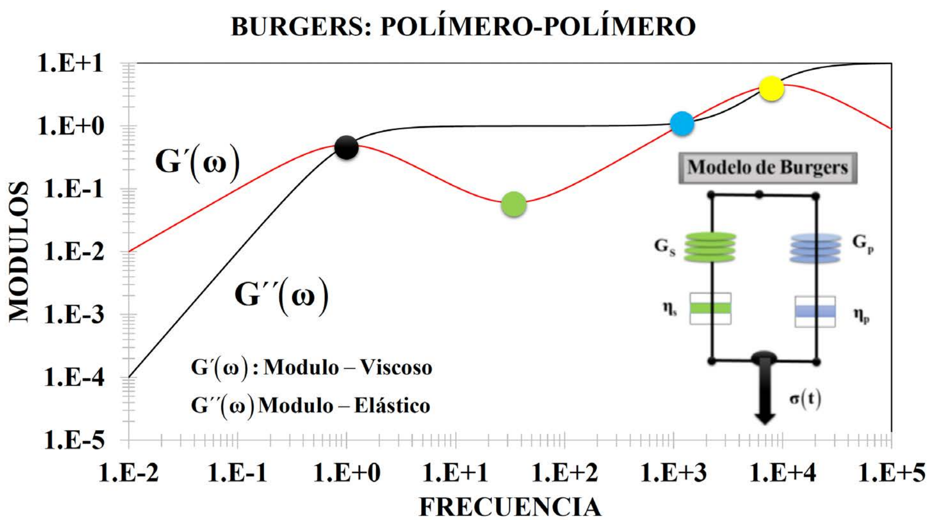


Figura 8.5. **Módulos de perdida y almacenamiento del modelo de Burgers. Un fluido de Maxwell (polímero) se encuentra conectado en paralelo con otro fluido de Maxwell (polímero) representando una interacción polímero-polímero.**

En resumen, en esta sección se presentaron algunas de las Ecuaciones reológicas viscoelásticas más sencillas desde el punto de vista matemático, las cuales pueden ser generalizadas mediante un operador diferencial y puede ser utilizado para cualquier función viscoelástica lineal incluso reemplazando las derivadas temporales por derivadas temporales fraccionadas [48].

Un hecho importante a destacar es que todos estos sistemas son casos especiales de una función de transferencia que será desarrollada en los capítulos posteriores. Por otra parte, la importancia de la incorporación de la interacción solvente-polímero y la interacción polímero-polímero radica en que pueden describir transiciones viscosas y elásticas del material a través de las propiedades materiales del sistema, es decir: (i) viscosidades, (i) tiempos de Maxwell, (iii) tiempo de retardo de Jeffrey, (iv) parámetros del modelo de Burgers, etc.

Estas contribuciones podrían ayudar de cierta manera a entender o comprender algunos de los fenómenos que ocurren en la sangre cuando esta está sometida al flujo como son el efecto de la deformación del hematocrito y las propiedades elásticas del *Rouleaux*. Estos temas por si solo representan fronteras de la ciencia que todavía no son comprendidas del todo, esperemos que este trabajo contribuya en esa dirección.

CAPÍTULO V
Obtención de las propiedades de flujo

10 Flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en un capilar

En esta sección se calcula el flujo volumétrico asociado a capilar de r = a. La longitud característica axial es L. Se presenta un esquema del problema de estudio en la (**Figura 10.1**).

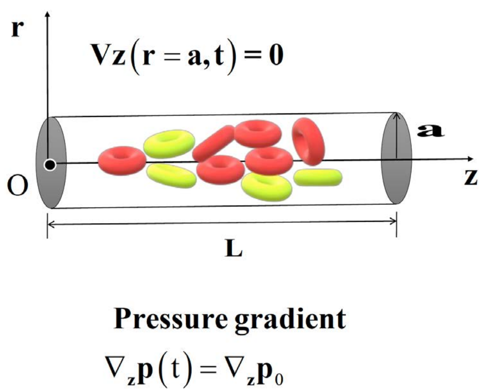


Figura 10.1. **Capilar de radio r = a y longitud z = L. Los glóbulos rojos indican eritrocitos normales, los glóbulos amarillos representan eritrocitos anormales (con colesterol).**

10.1 Balance de masa

A partir del balance de masa sin reacción química de una sola fase, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (10.1)$$

En la Ec. (10.1), **V** es la velocidad del sistema. Desarrollando la divergencia del producto del campo escalar y vectorial

$$\frac{\partial Vz}{\partial z}=0 \Rightarrow Vz \neq Vz(z) \quad \textbf{(10.2)}$$

La Ec. (10.2) se puede escribir en términos de la derivada substancial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\rho\cdot V+\rho(\nabla\cdot V)=0 \quad \textbf{(10.3)}$$

Combinando la Ec. (10.3) con la Ec. (10.4) se tiene el siguiente resultado

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+V\cdot\nabla\rho \quad \textbf{(10.4)}$$

Si imponemos que el fluido es incompresible, i.e. la derivada substancial es cero

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho(\nabla\cdot V)=0 \quad \textbf{(10.5)}$$

Entonces, la ecuación de continuidad se simplifica de la siguiente manera

$$\frac{D\rho}{Dt}=0 \Rightarrow \rho \neq \rho(r,t) \quad \textbf{(10.6)}$$

Como la densidad es diferente de cero $\varrho \neq 0$, la divergencia del campo de velocidades debe ser cero, lo que implica que: (i) las líneas de corriente son las mismas que entran y salen del elemento de control, (ii) Matemáticamente es un campo solenoidal y (iii) el volumen del líquido es constante. En un sistema de coordenadas cilíndricas, se tiene lo siguiente:

$$\rho(\nabla\cdot V)=0 \quad \textbf{(10.7)}$$

La ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas (Ec. (10.7)) tiene la siguiente forma analítica:

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=0 \quad \textbf{(10.8)}$$

Asumiendo que el vector de velocidad **V** en el sistema está dado por:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rVr)+\frac{1}{r}\frac{\partial V\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial Vz}{\partial z}=0 \quad \textbf{(10.9)}$$

Entonces combinando las Ecs. (8) y (9) se llega a la siguiente expresión analítica:

$$\mathbf{V}=\left(Vr, V\theta, Vz\right)=\left(0,0,Vz\left(r,\theta,z,t\right)\right) \tag{10.10}$$

Esto implica que el campo de velocidades no depende de la coordenada axial z, y solo depende dependería da las coordenadas angulares θ y r respectivamente.

Entonces el campo de velocidades se puede expresar de la siguiente manera:

$$Vz=\underbrace{Vz(r,\theta,z,t}_{\text{No-depende de z}})=Vz(r,\theta,t) \tag{10.11}$$

Además, si consideramos estado estacionario, i.e. ninguna variable dinámica o intrínseca del sistema depende del tiempo, se tiene que

$$\frac{\partial Vz}{\partial t}=0 \Rightarrow Vz \neq Vz\left(t\right) \tag{10.12}$$

Físicamente, la Ec. (10.12) implica que los perfiles de velocidad se encuentran desarrollados y no dependen del tiempo.

$$Vz=\underbrace{Vz(r,\theta,t}_{\text{No-depende de t}})=Vz(r,\theta) \tag{10.13}$$

Finalmente, la última hipótesis que postulamos en este sistema es la de la simetría cilíndrica, es decir, el campo de velocidades no depende del ángulo polar θ.

$$Vz=\underbrace{Vz(r,\theta)}_{\text{No-depende de }\theta}=Vz\left(r\right) \tag{10.14}$$

Por lo tanto, en flujo laminar, isotérmico, incomprensible, estacionario y en coordenadas cilíndricas, el campo de velocidades solo depende de la coordenada radial r.

10.2 Balance de cantidad de movimiento

La ecuación de movimiento en forma vectorial se puede expresar de la siguiente manera

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}+V \cdot \nabla V\right)=\nabla \cdot \mathbf{T}+f \tag{10.15}$$

En la Ec. (10.15), **T** es el tensor de esfuerzos totales, el cual se puede expresar como la suma de dos contribuciones asociadas a las fuerzas esféricas y las fuerzas deviatorias [32], por lo que se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} \tag{10.16}$$

En donde p es un escalar que tiene unidades de fuerza normal por unidad de área y que lo identificaremos con la presión del sistema. Nótese que, para un fluido incompresible, esta presión solo es mecánica mientras que, para un fluido compresible esta depende de la densidad y se puede expresar en términos de una ecuación constitutiva de la termodinámica clásica (Gas ideal, Ecuación de Van der Waals, etc.). Por otra parte, en la Ec. (10.16), **I** y **σ** son los tensores de unidad y el tensor de esfuerzos deviatorio que representa las fuerzas tangenciales y normales en el elemento de control.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.17}$$

El tensor de esfuerzos para este flujo cortante, tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{10.18}$$

En el tensor de esfuerzos (Ec. (10.18)), $\sigma rz = \sigma zr$ son los esfuerzos cortantes los cuales son simétricos. Los esfuerzos [σrr, $\sigma\theta\theta$, σzz] son esfuerzos normales y para un fluido con viscosidad constante las diferencias $N1 = \sigma zz - \sigma rr$ y $N2 = \sigma rr - \sigma\theta\theta$ son iguales a cero y distintas de cero cuando el fluido presenta mecanismos relacionados a la elasticidad del sistema.

La ecuación constitutiva que describe un fluido Newtoniano, como ya se mencionó, es la siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \tag{10.19}$$

En la Ec. (10.19) μ es la viscosidad del sistema, **D** es el tensor rapidez de deformación y **∇V** es el tensor rapidez de deformación, y tiene la forma:

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{V} + \left(\nabla \mathbf{V}\right)^{T} \quad (10.20)$$

Si se combinan las Ecs. (10.15)-(10.19), se obtiene lo siguiente:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}\right) = -\nabla p + \mu\,\nabla^2\mathbf{V} + \rho\mathbf{g} \quad (10.21)$$

En la Ec. (10.21), la fuerza de bulto **f** = ρ**g**, es definida por la densidad del sistema y el vector aceleración de la gravedad. La magnitud de este vector |**g**| en el campo terrestre es una constante y cuyo valor numérico aproximadamente es de 9.77 m/s^2.

Al descomponer la ecuación tensorial Ec. (10.21) en sus tres componentes, se tiene lo siguiente:

Componente en r:

$$\rho\left(\frac{\partial Vr}{\partial t} + Vr\frac{\partial Vr}{\partial r} + \frac{V\theta}{r}\frac{\partial Vr}{\partial \theta} - \frac{V\theta^2}{r} + Vz\frac{\partial Vr}{\partial z}\right)$$
$$= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rVr)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Vr}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Vr}{\partial z^2}\right] + \rho gr \quad (10.22)$$

Componente en θ:

$$\rho\left(\frac{\partial V\theta}{\partial t} + Vr\frac{\partial V\theta}{\partial r} + \frac{V\theta}{r}\frac{\partial V\theta}{\partial \theta} + \frac{VrV\theta}{r} + Vz\frac{\partial V\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}$$
$$+\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial Vr}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V\theta}{\partial z^2}\right) + \rho g\theta \quad (10.23)$$

Componente en z:

$$\rho\left(\frac{\partial Vz}{\partial t} + Vr\frac{\partial Vz}{\partial r} + \frac{V\theta}{r}\frac{\partial Vz}{\partial \theta} + Vz\frac{\partial Vz}{\partial z}\right) =$$
$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Vz}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Vz}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 Vz}{\partial z^2}\right) + \rho gz \quad (10.24)$$

10.2.1.1 Análisis de las componentes de la ecuación de movimiento

Aplicando las hipótesis de flujo en estado estacionario, incompresible, laminar, unidireccional, simetría cilíndrica, el fluido es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión constante en la dirección axial. La Ec. (10.22) toma la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \Rightarrow p \neq p(r) \tag{10.25}$$

De la misma manera, para la componente en θ, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow p \neq p(\theta) \tag{10.26}$$

Por lo que, en estado estacionario la presión solo depende de la coordenada axial z, i.e.:

$$p=p(z) \tag{10.27}$$

La componente en z de la Ecuación de movimiento, tiene la siguiente forma:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Vz}{\partial r}\right) \tag{10.28}$$

Resolviendo la Ec. (10.28), se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Vz}{\partial r}\right) = \frac{1}{\mu}\nabla_z p \tag{10.29}$$

Resolviendo la Ec. (10.29) por separación de variables:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Vz}{\partial r}\right) = \frac{1}{\mu}\nabla_z pr \tag{10.30}$$

Integrando, se tiene lo siguiente:

$$r\frac{\partial Vz}{\partial r} = \frac{1}{2\mu}\nabla_z pr^2 + C_1 \tag{10.31}$$

Dividiendo la Ec. (10.31) por r, con $r \neq 0$

$$\frac{\partial Vz}{\partial r} = \frac{1}{2\mu}\nabla_z pr + \frac{C_1}{r} \tag{10.32}$$

De la misma manera que en la Ec. (10.30), se integra la Ec. (10.31) con respecto a la coordenada radial r por lo que se tiene lo siguiente:

$$V_z(r) = \frac{1}{4\mu}\nabla_z pr^2 + C_1 Lnr + C_2 \tag{10.33}$$

La Ec. (10.33) es el perfil de velocidades general, para un fluido Newtoniano deformado por un gradiente de presión constante. La Ec. (10.33) contiene dos constantes de integración [C_1, C_2], por lo que estas deben ser calculadas mediante dos condiciones de frontera.

C.F.1. La velocidad axial en la frontera del tubo es cero, i.e., $Vz\ (r = R) = 0$

C.F.2. La velocidad axial en el centro del tubo es máxima, i.e., $Vz\ (r = 0) = Vmáx$.

Aplicando las condiciones de frontera, en la Ec. (10.33) se tiene lo siguiente:

$$V_z(r=0) = \frac{1}{4\mu}\nabla_z p(0)^2 + C_1 Ln(0) + C_2 = V_{máx} \tag{10.34}$$

La Ec. (10.34) implica que se tiene lo siguiente:

$$C_1 \cdot Ln(0) = V_{máx} \Rightarrow C_1 \cdot (-\infty) = V_{máx} \tag{10.35}$$

Por lo tanto, si la constante $C_1 \neq 0$, ¡la velocidad máxima en el tubo sería infinita! Esto no tiene sentido físico debido a que la velocidad en el centro de un tubo es máxima y finita. La única posibilidad para este caso es que la constante C_1 debe ser cero, i.e. $C_1 = 0$. Para el segundo caso, se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$Vz(r=R) = \frac{1}{4\mu}\nabla_z p(R)^2 + C_1 Ln(0) + C_2 = 0 \tag{10.36}$$

Despejando C_2 de la Ec. (10.36), se tiene lo siguiente:

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu}\nabla_z pR^2 \tag{10.37}$$

Por lo que el perfil de velocidades se reduce a lo siguiente:

$$V_z(r)=\frac{1}{4\mu}\nabla_z pr^2+C_2 \tag{10.38}$$

La velocidad máxima se obtiene cuando r = 0, por lo que se tiene lo siguiente:

$$V_{máx}=V_z(r=0)=C_2 \tag{10.39}$$

10.2.1.2 Flujo volumétrico

Para calcular el flujo volumétrico, se calcula como la doble integral de superficie del perfil de velocidades a través de la sección transversal de área, por lo que:

$$Q=\int_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{dS} \tag{10.40}$$

El vector diferencial de superficie, **dS** tiene la forma:

$$Q=\int_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{e_z}\mathbf{d}A=\int_0^{2\pi}\int_0^R(0,0,Vz)\cdot(0,0,1)|J|drd\theta \tag{10.41}$$

En la Ec. (10.41) e_z es un vector unitario en la dirección de la normal de la superficie, $|J|$ es la magnitud del jacobiano de la transformación de coordenadas rectangulares a cilíndricas, i.e., $|J|=r$. Por lo que, la Ec. (10.41) toma la forma:

$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^R Vz(r)rdrd\theta \tag{10.42}$$

Nótese que la ecuación (10.42) es general para un sistema de coordenadas cilíndrico. Al sustituir la Ec. (10.38) en la Ec.(10.42), se tiene lo siguiente:

$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^R\left(\frac{1}{4\mu}\nabla zpr^2+C_2\right)rdrd\theta \tag{10.43}$$

Finalmente, al realizar las integraciones en la Ec. (10.43) toma la forma:

$$Q = 2\pi\left(\frac{1}{16\mu}\nabla zpr^4\Big|_0^R + \frac{1}{2}C_2r^2\Big|_0^R\right) \qquad \textbf{(10.44)}$$

Simplificando la Ec. (10.44), se tiene lo siguiente:

$$Q = \pi R^2\left(\frac{R^2}{8\mu}\nabla zp + C_2\right) \qquad \textbf{(10.45)}$$

La Ec. (10.45) representa el flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en una tubería y es conocido como la ecuación de Hagen y Poiseuille, esta ecuación describe la relación entre el gradiente de presión y el flujo volumétrico. En la siguiente sección, se presentan los resultados de la corona circular para un fluido Newtoniano.

11 Flujo volumétrico de un fluido Newtoniano en una corona circular

En esta sección se calcula el flujo volumétrico asociado a una corona circular de radios mayor R_2 y menor R_1 respectivamente. La longitud característica axial es L. Se presenta un esquema del problema de estudio en la **Figura 11.1**.

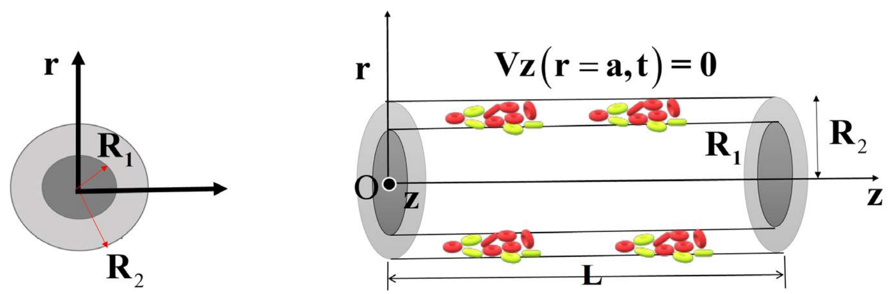


Figura 11.1. **Corona circular de radios r = R_2 y r = R_1 y longitud z = L.**

Para resolver el problema se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema:

a) Estado estacionario:

b) Fluido incompresible

c) Proceso isotérmico

d) Flujo unidireccional

e) Mecanismos gravitacionales despreciables

f) El fluido es deformado por un gradiente de presión en la dirección axial.

g) Simetría cilíndrica

Bajo las anteriores aseveraciones, obtenemos lo siguiente:

a) El vector de velocidad es solo función de a la coordenada radial r

b) El gradiente de presión es constante en la dirección z

c) Existe un balance entre las fuerzas viscosas y el gradiente de presión.

Por lo tanto, las siguientes ecuaciones se cumplen como en el caso de un a capilar inextensible, por lo que se tiene:

$$Vz(r)=\frac{1}{4\mu}\nabla zpr^2+C_1Lnr+C_2 \qquad \textbf{(11.1)}$$

La Ec. (11.1) contiene dos constantes de integración [C_1, C_2], por lo que éstas deben ser calculadas mediante dos condiciones de frontera.

C.F.1. La velocidad axial en la frontera del tubo es cero, i.e., Vz ($r = R_2$) = 0 (interfase sólido-sólido).

C.F.2. La velocidad axial en el centro del tubo es máxima, i.e., Vz ($r = R_1$) = 0 (interfase sólido-sólido).

Aplicando las condiciones de frontera, en la Ec. (11.1) se tiene lo siguiente:

$$Vz(r=R_1)=\frac{1}{4\mu}\nabla zpR_1^2+C_1LnR_1+C_2=0 \qquad \textbf{(11.2)}$$

Y de la misma manera que en análisis del capilar:

$$V_z(r=R_2)=\frac{1}{4\mu}\nabla_z pR_2^2+C_1LnR_2+C_2=0 \qquad \textbf{(11.3)}$$

Al resolver las Ecs. (11.2) y (11.3), se tiene lo siguiente:

$$C_1 = -\frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{Ln\left(R_2 / R_1\right)}\frac{1}{4\mu}\nabla zp \tag{11.4}$$

$$C_2 = -\frac{1}{4\mu}\nabla zpR_2^2 \text{-} C_1 LnR_2 \tag{11.5}$$

Por lo tanto, al sustituir las Ecs. (11.4) y (11.5) en la ecuación general (11.1) se tiene el perfil de velocidad general.

11.1.1.1 Flujo volumétrico

A partir de la Ec. (11.1), se puede calcular el flujo volumétrico. Asumiendo que el vector normal apunta con el vector unitario en z y utilizando la Ec. (10.42) junto con el perfil de velocidades (11.1), de esta sección:

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} Vz(r)rdrd\theta \tag{11.6}$$

Al sustituir la Ec. (11.1) en la Ec. (11.6) se tiene la siguiente integral

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{1}{4\mu}\nabla zpr^2 + C_1 Lnr + C_2\right)rdrd\theta \tag{11.7}$$

Al realizar las tres integrales del flujo volumétrico, por lo que se tiene lo siguiente:

$$Q = 2\pi\frac{1}{4\mu}\nabla zp\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr + 2\pi C_1\int_{R_1}^{R_2} Lnrrdr + 2\pi C_2\int_{R_1}^{R_2} rdr \tag{11.8}$$

Realizando las integrales se tiene lo siguiente:

$$Q = \pi\frac{1}{8\mu}\left(R_2^4 - R_1^4\right)\nabla zp + \pi C_1\left(R_2^2 LnR_2 \text{-} R_1^2 LnR_1 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{2}\right) + \pi C_2\left(R_2^2 \text{-} R_1^2\right) \tag{11.9}$$

CAPÍTULO VI
Función de transferencia

12 Función de transferencia de un fluido viscoelástico lineal en un capilar

Para realizar este cálculo, se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema (véase la **Figura 12.1**):

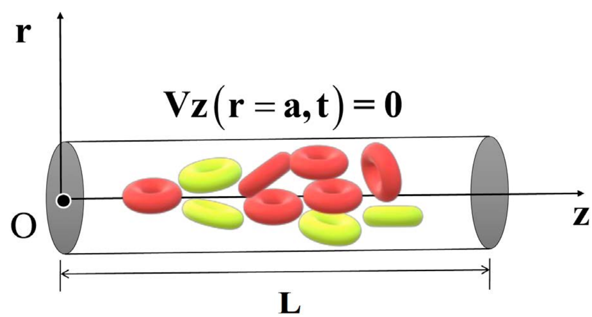


Figura 12.1. **Capilar de radio r = a y longitud axial z = L.**
Un gradiente de presión pulsátil deforma continua e irreversiblemente el fluido.

a) Líquido no-Newtoniano viscoelástico lineal (Maxwelliano)

b) Líquido incompresible.

c) El proceso se lleva a cabo en estado no estacionario: La velocidad y la presión dependen del tiempo (presión pulsátil).

d) El fluido se deforma continua e irreversiblemente, debido a un gradiente de presión pulsátil en la dirección axial.

e) Los mecanismos gravitacionales se desprecian con respecto al gradiente de presión pulsátil y los mecanismos viscoelásticos lineales ya que el capilar ($a \ll L$) se encuentra en posición horizontal.

f) Existe simetría angular $\theta \in [0, 2\pi]$

12.1 Balance de cantidad de movimiento con mecanismos inerciales

La componente z de la ecuación de movimiento, tomando en cuenta los mecanismos inerciales, toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma_{rz}\right) \tag{12.1}$$

El término $\rho\partial_t V_z$ es la masa por unidad de volumen multiplicada por la aceleración instantánea en el sistema. El esfuerzo cortante σ_{rz} es el producto de la función viscosidad por la rapidez de deformación:

$$\sigma_{rz} = O_\eta\left(D_t\right)\frac{\partial Vz}{\partial r} \tag{12.2}$$

En donde $O_\eta(D_t)$ es un operador viscosidad que generaliza para cualquier fluido Newtoniano o viscoelástico lineal. En la Tabla 12.1 se presenta el operador viscosidad $O_\eta(D_t)$ y el operador viscosidad en el espacio de Fourier $O_\eta(i\omega)$ de modelos reológicos más comunes.

Tabla 12.1. Operador viscosidad para diferentes modelos constitutivos reológicos.

	$O_\eta(\mathbf{D}_t)$	$O_\eta(\mathbf{i}\omega)$
Newton	η_0	η_0
Maxwell	$\eta_0/1+\lambda_0 Dt$	$\eta_0/1+\lambda_0(i\omega)$
Jeffreys	$\eta_0(1+\lambda_J Dt)/1+\lambda_0 Dt$	$\eta_0(1+\lambda_J(i\omega))/1+\lambda_0(i\omega)$
Burgers	$\eta_0(1+\lambda_J Dt)/1+\lambda_0 Dt+\beta D^2 t$	$\eta_0(1+\lambda_J(i\omega)) / 1+\lambda_0(i\omega)+\beta(i\omega)^2$

Al combinar las Ecs. (12.1) y (12.2), se tiene lo siguiente:

$$\rho\frac{\partial Vz}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rO_\eta\left(D_t\right)\frac{\partial Vz}{\partial r}\right) \quad \textbf{(12.3)}$$

Por lo tanto, se tiene lo siguiente:

$$\rho\frac{\partial Vz}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + O_\eta\left(D_t\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Vz}{\partial r}\right) \quad \textbf{(12.4)}$$

La Ec. (12.4) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\rho}{O_\eta\left(D_t\right)}\frac{\partial}{\partial t}\right\}Vz = \frac{1}{O_\eta\left(D_t\right)}\frac{\partial p}{\partial z} \quad \textbf{(12.5)}$$

La Ec. (12.5) es una ecuación diferencial parcial lineal y describe las variaciones de la velocidad por efectos del espacio y tiempo. Aplicando el formalismo de Fourier, en las derivadas temporales de la Ec. (12.5)

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \rightarrow (i\omega)^k \quad \textbf{(12.6)}$$

Por lo tanto, para las funciones: (i) Velocidad axial $Vz = Vz\,(r, t)$, (ii) Presión pulsátil $p = p(t)$ y (iii) flujo volumétrico $Q = Q(t)$. Además, el operador viscosidad en el espacio de Fourier, toma la forma:

$$O_\eta\left(D_t = \frac{\partial}{\partial t}\right) \rightarrow O_\eta\left(i\omega\right) \quad \textbf{(12.7)}$$

Por lo que al aplicar a la ecuación diferencial parcial lineal (Ec. (12.5)) toma la forma:

$$\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2\left(\omega\right)\right\}Vz\left(r,\omega\right) = O_\Phi\left(i\omega\right)\frac{\partial p\left(\omega\right)}{\partial z} \quad \textbf{(12.8)}$$

Y el parámetro α, tiene la forma:

$$\alpha^2\left(\omega\right) = \frac{\rho}{O_\eta\left(i\omega\right)}i^3\omega = \rho O_\Phi\left(i\omega\right)i^3\omega \quad \textbf{(12.9)}$$

En la Ec. (12.9) se ha definido la fluidez compleja O_Φ como el inverso del operador viscosidad

$$O_\Phi(i\omega) = \frac{1}{O_\eta(i\omega)} \tag{12.10}$$

La Ec. (12.10) es punto de partida para el cálculo de la velocidad y el flujo volumétrico respectivamente.

12.1.1 Perfil de velocidades

Para resolver la Ec. (12.10), se propone que la solución general se puede descomponer en términos de una solución homogénea y particular.

$$Vz(r,\omega) = Vz_H(r,\omega) + Vz_P(r,\omega) \tag{12.11}$$

12.1.1.1 Solución de la ecuación diferencial homogénea

Para encontrar la solución de la ecuación diferencial homogénea, se reescribe la Ec. (12.8):

$$\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \alpha^2(\omega)\right\} Vz(r,\omega) = 0 \tag{12.12}$$

Multiplicando por r^2 se tiene la ecuación diferencial de Bessel:

$$\left\{r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2} + r\frac{\partial}{\partial r} + \alpha^2(\omega)r^2\right\} Vz(r,\omega) = 0 \tag{12.13}$$

Para resolver la Ec. (12.13) se propone el siguiente cambio de variable $z = \alpha r$

$$\left\{z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + z\frac{\partial}{\partial z} + z^2\right\} Vz(r,\omega) = 0 \tag{12.14}$$

La solución de la ecuación diferencial Ec. (12.14) está dada por la expresión:

$$Vz(z,\omega) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) \tag{12.15}$$

En la Ec. (12.15), J_0 (z), Y_0 (z) son las funciones de Bessel de orden cero de primera y segunda especie, respectivamente.

12.1.1.2 Solución de la ecuación diferencial no homogénea

La solución particular para el problema de la Ec. (12.8) se puede expresar como:

$$Vz_p(r,\omega) = A;\ A \in R \tag{12.16}$$

Al sustituir la Ec. (12.16) en la Ec. (12.8)

$$\alpha^2(\omega) A = O_\Phi(i\omega)\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \tag{12.17}$$

Por lo que, la constante A se despeja y se tiene lo siguiente:

$$A = \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \tag{12.18}$$

La solución de la Ec. (12.8) en términos de la coordenada radial r, se puede expresar como:

$$Vz(r,\omega) = C_1 J_0(r) + C_2 Y_0(r) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \tag{12.19}$$

12.1.1.3 Condiciones de frontera

La solución general (Ec. (12.19)) contiene dos constantes de integración C_1 y C_2, las cuales deben de determinarse a partir de las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{C.F.1: } r = 0;\quad \left|Vz(0,\omega)\right| \le M \tag{12.20}$$

$$\text{C.F.2: } r = R;\quad Vz(R,\omega) = 0 \tag{12.21}$$

La primera de estas condiciones obedece a que la solución particular debe de permanecer acotada, i.e. que para ningún valor que tome la coordenada radial debe ser infinita.

La segunda condición de frontera, se relaciona con la condición de no deslizamiento en la frontera (pared del tubo capilar). Al sustituir la primera C.F.1 en la ecuación diferencial, se tiene lo siguiente:

$$Vz_{max} = Vz(r=0,\omega) = C_1 J_0(\alpha 0) + C_2 Y_0(\alpha 0) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \qquad (12.22)$$

Simplificando la expresión se obtiene la siguiente expresión algebraica:

$$Vz_{max} = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-\infty) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \qquad (12.23)$$

Simplificando la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$Vz_{max} = C_2 \cdot (-\infty) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \cong C_2 \cdot (-\infty) \qquad (12.24)$$

La última igualdad, demuestra que la velocidad en el centro del capilar es infinita lo que carece de sentido físico. Para evitar esta inconsistencia física, la constante C_2 debe ser cero, i.e. $C_2 = 0$. Por lo que la solución general tiene la siguiente estructura:

$$Vz(r,\omega) = C_1 J_0(\alpha r) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \qquad (12.25)$$

La segunda condición de frontera al sustituirla genera la siguiente información física:

$$Vz(R,\omega) = C_1 J_0(\alpha R) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) = 0 \qquad (12.26)$$

Como ya se mencionó, para evitar una inconsistencia física, C_2 es cero, por lo que al despejar C_1 se tiene lo siguiente:

$$C_1(\omega) = -\frac{1}{J_0(\alpha R)} \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \qquad (12.27)$$

Finalmente, la velocidad axial V_z (r, ω) tiene la siguiente forma:

$$Vz(r,\omega) = C_1(\omega) J_0(\alpha r) + \frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \quad \textbf{(12.28)}$$

Esta expresión nos permite obtener el perfil de velocidades en función de los parámetros materiales del líquido, la fuerza motriz que deforma continua e irreversiblemente el fluido asociado al gradiente de presión en la dirección axial.

Nótese, que el perfil de velocidades está determinado por un cociente de funciones de Bessel, lo que podría inducir efectos resonantes en el sistema.

12.1.2 Flujo volumétrico en un capilar con mecanismos inerciales

La expresión para calcular el flujo volumétrico en un capilar de radio r = a y longitud z = L, se puede expresar como la doble integral del producto interno del vector de velocidad y la diferencial de superficie, como ya se mencionó. El vector velocidad solo tiene componente axial z y el vector unitario que describe la sección de área transversal es el vector unitario en la dirección z,

$$Q(t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} Vz(r,t)\, r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_0^{R} Vz(r,t)\, r\,dr \quad \textbf{(12.29)}$$

Al tomar la transformada de Fourier del flujo volumétrico, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = F\{Q(t)\} = F\left\{ 2\pi \int_0^{R} Vz(r,t)\, r\,dr \right\} \quad \textbf{(12.30)}$$

Por otra parte, suponiendo que la función es continua, el operador de Fourier se puede introducir en la doble integral por lo que se tiene lo siguiente:

$$F\left\{ 2\pi \int_0^{R} Vz(r,t)\, r\,dr \right\} = 2\pi \int_0^{R} F\{Vz(r,t)\}\, r\,dr = 2\pi \int_0^{R} Vz(r,\omega)\, r\,dr \quad \textbf{(12.31)}$$

El flujo volumétrico transformado en el espacio de Fourier toma la forma:

$$Q(\omega)=2\pi\int_0^R Vz(r,\omega)rdr \tag{12.32}$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el flujo volumétrico, se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega)=2\pi\int_0^R Vz(r,\omega)rdr=2\pi\int_0^R\left(C_1(\omega)J_0(\alpha r)+\frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right)\right)rdr \tag{12.33}$$

Haciendo el cambio de variable,

$$Q(\omega)=2\pi C_1(\omega)\int_0^R\left(J_0(\alpha r)\right)rdr+2\pi\frac{O_\Phi(i\omega)}{\alpha^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right)\int_0^R rdr \tag{12.34}$$

Definiendo las siguientes cantidades adimensionales: u= r/R; β = αR como una longitud característica adimensional, la Ec. (12.34) se puede expresar como:

$$Q(\omega)=\frac{2\pi R^2}{\beta^2}C_1(\omega)\int_0^\beta zJ_0(z)dz+2\pi R^4\frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right)\int_0^1 udu \tag{12.35}$$

En donde z = βr. Para integrar las funciones de Bessel, se utiliza la siguiente propiedad matemática:

$$\frac{d}{dz}[zJ_1(z)]=zJ_0(z) \tag{12.36}$$

Al sustituir la Ec. (12.36) en la integral de la expresión del flujo volumétrico (Ec. (12.35)), se tiene lo siguiente por lo que,

$$Q(\omega)=\frac{2\pi R^2}{\beta^2}C_1(\omega)\int_0^\beta\frac{d}{dz}[zJ_1(z)]dz+2\pi R^4\frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right)\int_0^1 udu \tag{12.37}$$

La Ec. (12.37), se puede simplificar a lo siguiente:

$$Q(\omega)=\frac{2\pi R^2}{\beta^2}C_1(\omega)\int_0^\beta d[zJ_1(z)]+\pi R^4\frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right)\int_0^1 du^2 \tag{12.38}$$

Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega)=\pi R^4 \frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right)+2\pi R^2 C_1(\omega)\frac{J_1(\beta)}{\beta} \qquad \textbf{(12.39)}$$

En donde la constante $C_1(\omega)$, dada por la Ec. (12.27) se sustituye en la Ec. (12.39), y se obtiene:

$$Q(\omega)=\frac{\pi R^3}{4}\frac{8i^2 O_\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)}\left(1-2\frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)}\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}R\right) \qquad \textbf{(12.40)}$$

La Ec. (12.40) puede ser descrito en términos de la función de transferencia $T(\omega)$,

$$Q(\omega)=\frac{\pi R^3}{4}T(\omega)\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}R\right) \qquad \textbf{(12.41)}$$

En donde la función de transferencia T (ω), tiene la siguiente expresión analítica:

$$T(\omega)=8i^2\frac{\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)}\left(1\text{-}\,2\frac{J_1(\beta(\omega))/\beta(\omega)}{J_0(\beta(\omega))}\right) \qquad \textbf{(12.42)}$$

A muy bajas frecuencias, la función de transferencia T (ω) toma la siguiente forma

$$\mathrm{Lim}_{\omega\to 0}T(\omega)=8i^2\frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)}\left\{1-2\frac{J_1(\beta(\omega))/\beta(\omega)}{J_0(\beta(\omega))}\right\}$$

$$=8i^2\frac{O_\Phi(i\omega)}{\beta^2(\omega)}\left(i^2\frac{\beta^2}{88i^2}\right)=O_\Phi(i\omega) \qquad \textbf{(12.43)}$$

12.1.3 Cálculo del esfuerzo en la pared

A partir del perfil de velocidades, y calculando la rapidez de deformación, se puede obtener el esfuerzo en la pared, i.e.

$$\sigma_{rz}(\omega)=O_{\eta}(i\omega)\frac{\partial Vz(\omega,r)}{\partial r} \tag{12.44}$$

El campo de velocidades ya fue previamente calculado en las secciones anteriores, por lo que se tiene la siguiente expresión analítica:

$$Vz(r,\omega)=C_1(\omega)J_0(\alpha r)+\frac{O_{\Phi}(i\omega)}{\alpha^2}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \tag{12.45}$$

Al sustituir la Ec. (12.44), en la Ec. (12.45) y utilizando la derivada de una composición de funciones y las propiedades de las derivadas de la función de Bessel de orden cero, i.e.

$$\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial r}=\left(\frac{\partial J_0(\alpha r)}{\partial(\alpha r)}\right)\left(\frac{\partial(\alpha r)}{\partial r}\right)=-\alpha J_1(\alpha r) \tag{12.46}$$

Al combinar las Ecs. (12.44)-(12.46), se obtiene:

$$\sigma_{rz}(\omega)=-O_{\eta}(i\omega)\alpha C_1(\omega)J_1(\alpha r) \tag{12.47}$$

La constante C_1 ya fue calculada previamente en el campo de velocidades, por lo que se tiene lo siguiente:

$$-O_{\eta}(i\omega)\alpha C_1(\omega)=\frac{1}{J_0(\beta)}\underbrace{O_{\eta}(i\omega)O_{\Phi}(i\omega)}_{1}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right)=\frac{1}{\alpha J_0(\beta)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \tag{12.48}$$

Sustituyendo la Ec. (12.48) en la Ec. (12.47) la componente rz de la ecuación de movimiento es

$$\sigma_{rz}(\omega)=\frac{J_1(\alpha r)}{\alpha J_0(\beta)}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \tag{12.49}$$

Finalmente, escalando la coordenada radial r con la longitud característica R de la función de Bessel J_1, y empleando el hecho de que $\beta=\alpha R$, el esfuerzo en la pared tiene la siguiente forma:

$$\sigma_I(\omega,\beta) = -\sigma_{rz}(\omega,r)\Big|_{r=1} = 2\frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}R\right) = 2\frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)}\sigma_w(\omega) \qquad (12.50)$$

Entonces el esfuerzo asociado a los mecanismos inerciales y los del esfuerzo en la pared, se pude expresar como:

$$\frac{\sigma_I(\omega,\beta)}{\sigma_W(\omega)} = 2\frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \qquad (12.51)$$

La Ec. (12.51) tiene la siguiente estructura matemática:

$$\frac{\sigma_I(\omega,\beta)}{\sigma_W(\omega)} = \frac{\text{Esfuerzo-Inercia}}{\text{Esfuerzo-Viscoso}} \qquad (12.52)$$

12.1.4 Parámetro β

12.1.4.1 Fluido Newtoniano

El parámetro beta en forma adimensional tiene la siguiente forma:

$$\beta(\omega)=R\alpha(\omega) = i^{3/2}\sqrt{\left(\frac{\rho R^2\varphi c}{tc}\right)O_\Phi(i\omega)\omega} \qquad (12.53)$$

En donde el operador fluidez fue escalado con la sigueintes variables adimensionales:

$$O_\Phi(i\omega) = \frac{O_\Phi(i\omega)}{\varphi c};\ \omega = tc\omega \qquad (12.54)$$

En donde la fluidez caracteristica φ_c y la frecuencia caraterística ω_c para un fluido Newtoniano estan dadas por las siguientes expresiones: (i) $\varphi c = 1/\mu$ y (ii) $tc = R^2/\mu = R^2/(\mu/\varrho) = R^2/\nu$, en donde ν es el coeficiente de transferencia de momento.

Por lo que el parametro beta, para un fluido Newtoniano se simplifica de la siguiente manera:

$$\beta(\omega)=i^{3/2}\sqrt{\omega} \qquad (12.55)$$

12.1.4.2 Fluido no-Newtoniano

Para un fluido no-Newtoniano viscoelástico lineal, la fluidez caracteristica $\varphi_c = 1/\eta_0$ y el tiempo caracteristico del sistema t_c es el tiempo unimodal de Maxwell, i.e. $t_c = \lambda_0$. Por lo que el parámetro β tiene la forma:

$$\beta(\omega) = i^{3/2}\sqrt{DeO_{\Phi}(i\omega)\omega} \tag{12.56}$$

En la Eq. (12.56) De es el número adimensional de Deborah, el cual tiene la siguiente expresión

$$De = \frac{\rho R^2 \varphi c}{tc}$$

$$Ma = \frac{(R/tc)^2}{1/\rho\varphi ctc} \tag{12.57}$$

O en terminos del número de Mach (Ma),

$$\beta(\omega) = i^{3/2}\sqrt{MaO_{\Phi}(i\omega)\omega} \tag{12.58}$$

El número de Mach relaciona dos rapideces características del sistema. Finalmente, el resumen de las expresiones:

$$\frac{\sigma_I(\omega,\beta)}{\sigma_W(\omega)} = 2\frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)} \tag{12.59}$$

$$\beta(\omega, De) = i^{3/2}\sqrt{(De)^{\delta} O_{\Phi}(i\omega)\omega} \tag{12.60}$$

En donde si $\delta = 0$, se tiene el modelo Newtoniano y para $\delta = 1$ se tiene un fluido viscoelastico lineal (Maxwell, Jeffreys, Burgers, o modelo fraccionado).

13 Función de transferencia de un fluido viscoelástico lineal en una corona circular

Para resolver el problema se asumen las siguientes condiciones de proceso en el sistema:

a) Estado estacionario.

b) Fluido incompresible.

c) Proceso isotérmico.

d) Flujo unidireccional.

e) Mecanismos gravitacionales despreciables.

f) El fluido es deformado por un gradiente de presión en la dirección axial.

g) Simetría cilíndrica.

Bajo las anteriores aseveraciones, obtenemos lo siguiente:

a) El vector de velocidad es solo función de a la coordenada radial r.

b) El gradiente de presión es constante en la dirección z.

c) Existe un balance entre las fuerzas viscosas y el gradiente de presión.

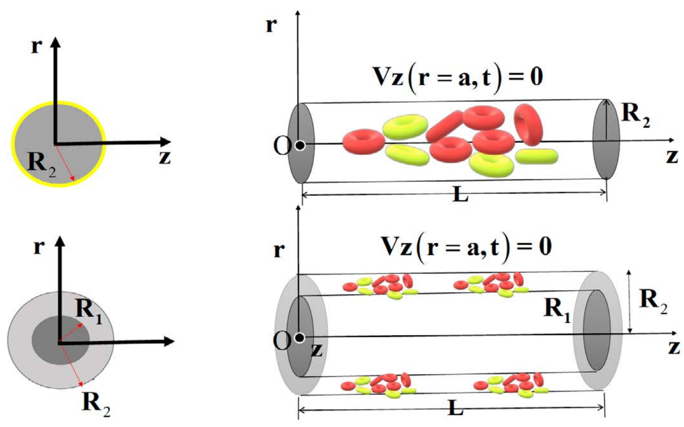


Figura 13.1. **(a) capilar de radio r = R2 y longitud L, (b) corona circular de radios r = R2 y r = R1 y longitud z = L. Ambos sistemas están sometidos a un gradiente de presión pulsátil.**

Por lo tanto, las siguientes ecuaciones se cumplen como en el caso de un a capilar inextensible, por lo que se tiene:

$$Vz(r,\omega) = C_1 J_0(r\alpha) + C_2 Y_0(r\alpha) + \frac{\Phi(i\omega)}{\alpha^2}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) \tag{13.1}$$

La Ec. (13.1) contiene dos constantes de integración [C_1, C_2], por lo que estas deben ser calculadas mediante dos condiciones de frontera.

C.F.1. La velocidad axial en la frontera del tubo es cero, i.e., $Vz\ (r = R_2) = 0$.

C.F.2. La velocidad axial en el centro del tubo es máxima, i.e., $Vz\ (r = R_1) = 0$.

Aplicando las condiciones de frontera en la Ec. (13.1) se tiene lo siguiente:

$$Vz(R_2,\omega) = C_1 J_0(R_2\alpha) + C_2 Y_0(R_2\alpha) + \frac{\Phi(i\omega)}{\alpha^2}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) = 0 \tag{13.2}$$

Y para la segunda constante de integración, se tiene lo siguiente:

$$Vz(R_1,\omega) = C_1 J_0(R_1\alpha) + C_2 Y_0(R_1\alpha) + \frac{\Phi(i\omega)}{\alpha^2}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) = 0 \tag{13.3}$$

Y para la segunda constante de integración, se tiene lo siguiente:

$$C_1 J_0(R_1\alpha) + C_2 Y_0(R_1\alpha) + \frac{\Phi(i\omega)}{\alpha^2}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) = 0 \tag{13.4}$$

Las Ecs. (13.3) y (13.4) pueden ser rescritas de la siguiente forma:

$$C_1 J_0(\beta) + C_2 Y_0(\beta) + R_2^2 \frac{\Phi(i\omega)}{\beta^2}\left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z}\right) = 0 \tag{13.5}$$

Si se hace $R = R_1/R_2$ al resolver el sistema de ecuaciones algebraicas, podemos obtener las constantes C_1 y C_2. Adicionalmente, se obtiene la constante C_1 en terminos C_2

$$C_1 = -C_2 \frac{Y_0(\beta) - Y_0(R\beta)}{J_0(\beta) - J_0(R\beta)} \tag{13.6}$$

Al despejar C_2 de la Ec. (13.5)

$$C_2 = -C_1 \frac{J_0(R\beta)}{Y_0(R\beta)} - \frac{1}{Y_0(R\beta)} \frac{\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \tag{13.7}$$

Al combinar las Ecs. (13.6) y (13.5)

$$C_2 = C_4 \frac{\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \tag{13.8}$$

En donde C_4, esta definida como:

$$C_4 = \frac{J_0(R\beta) - J_0(\beta)}{J_0(\beta) Y_0(R\beta) - Y_0(\beta) J_0(R\beta)} \tag{13.9}$$

De la Ecs. (13.5) y (13.6), se tiene:

$$C_1 = C_3 \frac{\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \tag{13.10}$$

Entonces C_3, se define como:

$$C_3 = \frac{Y_0(\beta) - Y_0(R\beta)}{J_0(\beta) Y_0(R\beta) - Y_0(\beta) J_0(R\beta)} \tag{13.11}$$

Por lo que el perfil de velocidades puede ser reescalado de la siuiente manera

$$Vz(r,\omega) = C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) + \frac{\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \tag{13.12}$$

13.1 Flujo volumetrico en una corona circular con mecanismos inerciales

El flujo volumétrico transformado en el espacio de Fourier toma la forma:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_{R1}^{R2} Vz(r,\omega) r dr \tag{13.13}$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el flujo volumétrico, se obtiene la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \left(C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) + \frac{\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \right) r dr \tag{13.14}$$

Escalando la Ec. (13.14) se tiene:

$$Q(\omega) = 2\pi \int_{R}^{1} \left(C_1 J_0(r\beta) + C_2 Y_0(r\beta) + \frac{\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 \right) r dr \tag{13.15}$$

Aplicando linealidad a la Ec. (13.15), se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = 2\pi C_1 \int_{R}^{1} J_0(r\beta) r dr + 2\pi C_2 \int_{R}^{1} Y_0(r\beta) r dr + \int_{R}^{1} \frac{\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 r dr \tag{13.16}$$

Escalando de nueva cuenta, la Ec. (13.16) toma la forma:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{\beta^2} C_1 \int_{R\beta}^{\beta} J_0(r\beta) \beta r d\beta r + \frac{2\pi C_2}{\beta^2} \int_{R\beta}^{\beta} Y_0(r\beta) r dr + \int_{R}^{1} \frac{\Phi(i\omega)}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) R_2^2 r dr \tag{13.17}$$

Finalmente, el flujo volumétrico puede ser descrito como:

$$Q(\omega) = \frac{\Phi(i\omega) R_2^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \right) \cdot$$

$$\left\{ \frac{1-R^2}{2} + \frac{2\pi}{\beta} C_3 \left[J_0(\beta) - J_0 R (R\beta) \right] + \frac{2\pi}{\beta} C_4 \left[Y_0(\beta) - R Y_0(R\beta) \right] \right\} \tag{13.18}$$

En resumen, en este capítulo se mostró de manera detallada la obtención de la función de transferencia de un fluido viscoelástico lineal tanto en un capilar como en una corona circular. Se emplea la ecuación de balance de momentum en términos de la función de transferencia $O_\eta(D_t)$, posteriormente se elige el modelo constitutivo viscoelástico lineal y se procede a realizar una transformada de Fourier, se resuelve la ecuación diferencial ordinaria para obtener el perfil de velocidad y, finalmente, obtener el flujo volumétrico en términos de una función de transferencia $T(\omega)$. La metodología anterior es aplicable para el cálculo del flujo volumétrico en un capilar y en una corona circular.

En el capítulo siguiente se dará un paso más en complejidad se introducirá un gradiente de presión dependiente del tiempo, en particular, un gradiente de presión pulsátil descrita por una serie de Fourier.

CAPÍTULO VII
Gradiente de presión pulsátil

14 Gradiente de presión oscilatorio

14.1 Gradiente de presión cosenoidal

En esta esta sección se calculará el flujo volumétrico cuando el gradiente de presión depende del tiempo a través de una función oscilatoria. En esta primera etapa se construirá la solución para un gradiente de presión que varía con el tiempo en forma del coseno y la del seno.

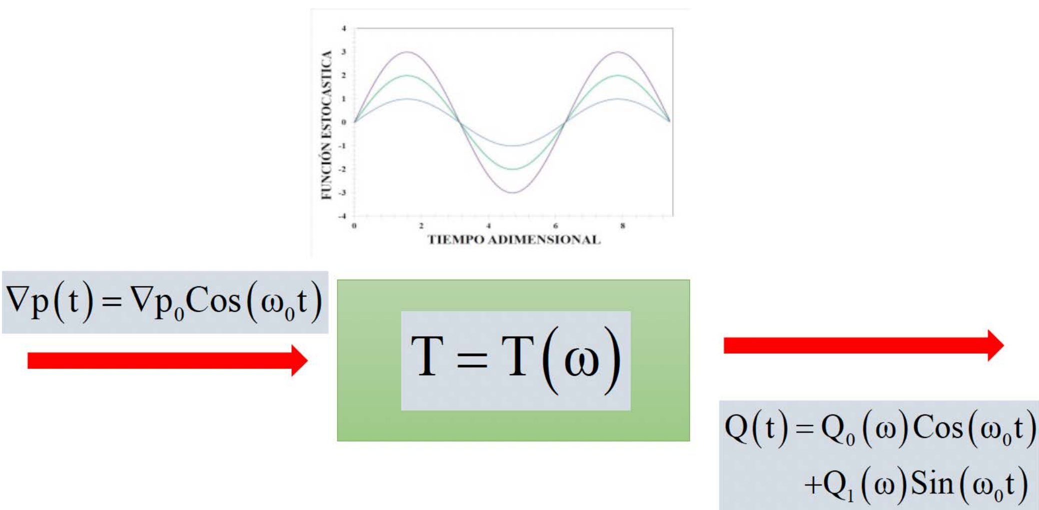


Figura 14.1. **Ilustra el efecto del gradiente de presión oscilatoria sobre el flujo volumétrico.**

En general, sea f(t) una función real de variable real continua e integrable en un intervalo, subconjunto de los reales. La trasformada de Fourier, de una función f(t), se define como:

$$F\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt \tag{14.1}$$

En particular, la función f(t) que se estudiara es una función oscilatoria para el gradiente de presión oscilatoria, es decir,

$$F\{\nabla zp(t)\} = \frac{\nabla zp_0}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}\right) dt \tag{14.2}$$

En la Ec. (14.2), ∇p_0 es la amplitud de la función oscilatoria, ω_0 es la frecuencia característica de la función oscilatoria propuesta. Al sustituir la Ec. (14.2) en la Ec. (14.1), se tiene lo siguiente:

$$\nabla_z p(t) = \nabla_z p_0 \mathrm{Cos}(\omega_0 t) \tag{14.3}$$

Para resolver la integral, se debe de emplear la fórmula de De Moivre que relaciona la función exponencial con las funciones trigonométricas, por lo que:

$$F\{\nabla zp(t)\} = \nabla zp_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \mathrm{Cos}(\omega_0 t)\, dt \tag{14.4}$$

Y cuando el ángulo es negativo, i.e.,

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i\mathrm{sen}(\omega_0 t) \tag{14.5}$$

Sumando las Ecs. (14.4) y (14.5),

$$e^{-i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - i\mathrm{sen}(\omega_0 t) \tag{14.6}$$

Y para el seno, se tiene:

$$\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} = \cos(\omega_0 t) \tag{14.7}$$

Sustituyendo en el modelo de gradiente propuesto

$$-i\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2} = \sin(\omega_0 t) \tag{14.8}$$

Por la propiedad de linealidad de la integral de Riemann, se tiene la siguiente

$$F\{\nabla zp(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \nabla zp_0 \left(\frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \right) dt \tag{14.9}$$

Aplicando las propiedades de la función exponencial compleja, por lo que:

$$F\{\nabla zp(t)\} = \frac{\nabla zp_0}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t} \right) dt \tag{14.10}$$

Sin embargo, la Ec. (8) se puede definir en términos de la función Delta de Dirac δ, definida como:

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt \tag{14.11}$$

Para poder utilizar la Delta de Dirac a la aplicarla en la Ec. (14.10), es necesario hacer un cambio de variable, es decir: Sea $-t \rightarrow t$, la Ec. (14.10), se puede expresar como:

$$F\{\nabla zp(t)\} = \frac{\nabla zp_0}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{i(\omega+\omega_0)t} \right) dt \tag{14.12}$$

Al utilizar las Ecs. (14.8)-(14.12), y haciendo algunos arreglos aritméticos,

$$\nabla zp(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \nabla z p_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i(\omega-\omega_0)t} + e^{i(\omega+\omega_0)t} \right) dt \tag{14.13}$$

Por linealidad de la integral de Riemann

$$\nabla_z p(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \nabla p_0 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega+\omega_0)t} dt \right) \tag{14.14}$$

Utilizando la función δ de Dirac para operar nuestras integrales

$$\nabla_z p(\omega)=\nabla p_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta(\omega\text{-}\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right] \tag{14.15}$$

Entonces, una función oscilatoria, como el gradiente de presión, se puede expresar como una suma de dos funciones Delta de Dirac. Esto en principio nos va a permitir calcular el flujo volumétrico en términos del espacio temporal t.

14.1.1 Flujo volumétrico en un capilar con mecanismos inerciales y gradiente de presión cosenoidal

El flujo volumétrico fue calculado anteriormente mediante el uso de la transformada de Fourier, la cual puede ser expresada en términos de la función de transferencia, por lo que se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega)=\pi\frac{R^3}{4}T(\omega)\frac{1}{2}\left(-\nabla zp(\omega)\right)R \tag{14.16}$$

Sustituyendo la Ec. (14.15) en la Ec. (14.16), se tiene la siguiente expresión analítica

$$Q(\omega)=\pi\frac{R^4}{8}T(\omega)\left(-\nabla_z p_0\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\delta\,(\omega\text{-}\omega_0)+\,\delta(\omega+\omega_0)\right] \tag{14.17}$$

Aplicamos la anti-transformada de Fourier a nuestro flujo volumétrico:

$$f(t)=F^{-1}\{f(\omega)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{+i\omega t}f(\omega)d\omega \tag{14.18}$$

La Ec. (14.18) debe ser modificada, debido a que el tiempo t fue sustituido por -t, por lo que la anti-transformada de Fourier, tiene la forma:

$$f(t)=F^{-1}\{f(\omega)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}f(\omega)d\omega \tag{14.19}$$

Al aplicar la Ec. (14.19) en el flujo volumétrico, se tiene lo siguiente:

$$F^{-1}\{Q(\omega)\}=F^{-1}\left\{\pi\frac{R^4}{8}T(\omega)(-\nabla zp_0)\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta\,(\omega\text{-}\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\right\} \tag{14.20}$$

Simplificando, la Ec. (14.20) se tiene lo siguiente:

$$F^{-1}\{Q(\omega)\}=\pi\frac{R^4}{8}(-\nabla p_0)\sqrt{\frac{\pi}{2}}F^{-1}\{T(\omega)[\delta\,(\omega\text{-}\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]\} \tag{14.21}$$

Al aplicar la transformada de Fourier en la Ec. (14.21) se tiene:

$$Q(t)=\pi\frac{R^4}{8}(-\nabla p_0)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(F^{-1}\{T(\omega)[\delta\,(\omega\text{-}\omega_0)]\}+F^{-1}\{T(\omega)[\,\delta(\omega+\omega_0)]\}\right) \tag{14.22}$$

Aplicando la definición de anti-transformada de Fourier, por lo que se tiene lo siguiente:

$$F^{-1}\{T(\omega)[\delta\,(\omega\text{-}\omega_0)]\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}T(\omega)[\delta\,(\omega\text{-}\omega_0)]d\omega \tag{14.23}$$

Y

$$F^{-1}\{T(\omega)[\delta\,(\omega+\omega_0)]\}=F^{-1}\{T(\omega)[\delta\,(\omega\text{ - }(\text{-}\omega_0))]\} \tag{14.24}$$

Entonces

$$F^{-1}\{T(\omega)[\delta\,(\omega\text{ - }(\text{-}\omega_0))]\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}T(\omega)[\delta\,(\omega\text{-}(\text{-}\omega_0))]d\omega \tag{14.25}$$

En las Ecs. (14.23) y (14.25) aplicaremos la propiedad de traslación para la función δ de Dirac definida como:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x\text{-}x_0)=f(x_0) \tag{14.26}$$

Y análogamente

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x+x_0)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x\text{-}(\text{-}x_0))=f(\text{-}x_0) \tag{14.27}$$

Aplicando las propiedades de las Ecs. (14.26) y (14.27) en las Ecs. (14.23) y (14.25) se tiene lo siguiente:

$$F^{-1}\left\{T(\omega)\left[\delta\,(\omega\text{-}\omega_0)\right]\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}T(\omega)\left[\delta\,(\omega\text{-}\omega_0)\right]d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega_0 t}T(\omega_0) \qquad \textbf{(14.28)}$$

Y

$$F^{-1}\left\{T(\omega)\left[\delta\,\left(\omega\,\text{-}(\text{-}\omega_0)\right)\right]\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}T(\omega)\left[\delta\,(\omega\text{-}(\text{-}\omega_0))\right]d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega_0 t}T(\text{-}\omega_0) \qquad \textbf{(14.29)}$$

Finalmente, al sustituir las Ecs. (14.28) y (14.29) en el flujo volumétrico Ec. (14.22),

$$Q(t)=\pi\frac{R^4}{8}(-\nabla p_0)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega_0 t}T(\omega_0)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega_0 t}T(\text{-}\omega_0)\right) \qquad \textbf{(14.30)}$$

Simplificando la Ec. (14.30)

$$Q(t)=\frac{\pi R^3}{4}\left(\frac{e^{-i\omega_0 t}T(\omega_0)+e^{i\omega_0 t}T(\text{-}\omega_0)}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\nabla p_0 R\right) \qquad \textbf{(14.31)}$$

Definiendo que

$$T(\text{-}\omega_0)=\overline{T(\omega_0)} \qquad \textbf{(14.32)}$$

Al sustituir la Ec. (14.32) en la Ec. (14.31), se tiene la siguiente expresión analítica para el flujo volumétrico:

$$Q(t)=\frac{\pi R^3}{4}\left(\frac{e^{-i\omega_0 t}T(\omega_0)+e^{i\omega_0 t}\overline{T(\omega_0)}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\nabla p_0 R\right) \qquad \textbf{(14.33)}$$

14.1.1.1 Parte real e imaginaria del flujo volumétrico

Antes de calcular la parte real de la Ec. (14.33), se hace el cambio de variable, de t → -t, entonces se tiene lo siguiente:

$$Q(t)=\frac{\pi R^3}{4}\left(\frac{e^{-i\omega_0 t}T(\omega_0)+e^{i\omega_0 t}\overline{T(\omega_0)}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\nabla p_0 R\right) \tag{14.34}$$

Entonces en este punto, la Ec. (14.33) es una función compleja de variable compleja. El flujo volumétrico se puede separar en una parte real e imaginaria, por lo que se tiene lo siguiente:

$$Q(t)=\mathrm{Re}\left[Q(t)\right]+i\mathrm{Im}\left[Q(t)\right] \tag{14.35}$$

Al descomponer $T(\omega_0)$ y el complejo conjugado de $T(\omega_0)$, se tiene lo siguiente:

$$T(\omega_0)=\mathrm{Re}\left[T(\omega_0)\right]+i\mathrm{Im}\left[T(\omega_0)\right] \tag{14.36}$$

El complejo conjugado de la Ec. (14.36) es,

$$\overline{T(\omega_0)}=\mathrm{Re}\left[T(\omega_0)\right]-i\mathrm{Im}\left[T(\omega_0)\right] \tag{14.37}$$

Y de nueva cuenta, utilizando las fórmulas de De Moivre para expresar las exponenciales complejas en términos de senos y cosenos

$$e^{i\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)+i\sin(\omega_0 t) \tag{14.38}$$

Y el complejo conjugado de la Ec. (14.38), tiene la forma:

$$e^{-i\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)-i\sin(\omega_0 t) \tag{14.39}$$

Al sustituir las Ecs. (14.36)-(14.39) en la Ec. (14.35), la parte real queda expresada de la siguiente manera:

$$\mathrm{Re}\left[Q(t)\right]=\frac{\pi R^3}{4}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i\omega_0 t}T(\omega_0)+e^{i\omega_0 t}\overline{T(\omega_0)}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\nabla p_0 R\right) \tag{14.40}$$

En donde la parte real del flujo volumétrico

$$\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-i\omega_0 t}T(\omega_0)+e^{i\omega_0 t}\overline{T(\omega_0)}}{2}\right]=\mathrm{Cos}(\omega_0 t)\mathrm{Re}\left[T(\omega_0)\right]+\mathrm{Sin}(\omega_0 t)\mathrm{Im}\left[T(\omega_0)\right] \qquad \mathbf{(14.41)}$$

Y la parte de imaginaría

$$\mathrm{Im}\left[\frac{e^{i\omega_0 t}T(\omega_0)+e^{-i\omega_0 t}\overline{T(\omega_0)}}{2}\right]=\frac{\left\{\begin{matrix}-\mathrm{Cos}(\omega_0 t)\mathrm{Im}\left[T(\omega_0)\right]+\mathrm{Sin}(\omega_0 t)\mathrm{Re}\left[T(\omega_0)\right]\\+\mathrm{Cos}(\omega_0 t)\mathrm{Im}\left[T(\omega_0)\right]-\mathrm{Sin}(\omega_0 t)\mathrm{Re}\left[T(\omega_0)\right]\end{matrix}\right\}}{2}=0 \qquad \mathbf{(14.42)}$$

Por lo tanto, el flujo volumétrico tiene la siguiente forma:

$$\mathrm{Re}\left[Q(t)\right]=\frac{\pi R^3}{4}\left(\mathrm{Cos}(\omega_0 t)\mathrm{Re}\left[T(\omega_0)\right]+\mathrm{Sin}(\omega_0 t)\mathrm{Im}\left[T(\omega_0)\right]\right)\left(-\frac{1}{2}\nabla p_0 R\right) \qquad \mathbf{(14.43)}$$

De la parte imaginaria, se tiene:

$$\mathrm{Im}\left[Q(t)\right]=0 \qquad \mathbf{(14.44)}$$

Finalmente, se tiene que, para una función cosenoidal del gradiente de presión, se tiene una respuesta oscilatoria del flujo volumétrico, por lo que:

$$\mathrm{Re}\left[Q(t)\right]=\underbrace{\frac{\pi R^3}{4}\mathrm{Re}\left[T(\omega_0)\right]\sigma_w}_{\text{En fase con el gradiente de presión}}\mathrm{Cos}(\omega_0 t)+\underbrace{\frac{\pi R^3}{4}\mathrm{Im}\left[T(\omega_0)\right]\sigma_w}_{\text{Fuera de fase en el gradiente de presión}}\mathrm{Sin}(\omega_0 t) \qquad \mathbf{(14.45)}$$

En donde el esfuerzo en la pared, se define como:

$$\sigma_w=-\frac{1}{2}\nabla p_0 R; \qquad \mathbf{(14.46)}$$

14.2 Gradiente de presión sinusoidal

En esta esta sección se calculará el flujo volumétrico real cuando el gradiente de presión depende del tiempo a través de una función oscilatoria. En esta primera etapa se construirá la solución para un gradiente de presión que varía en forma con el tiempo en forma del coseno y la del seno.

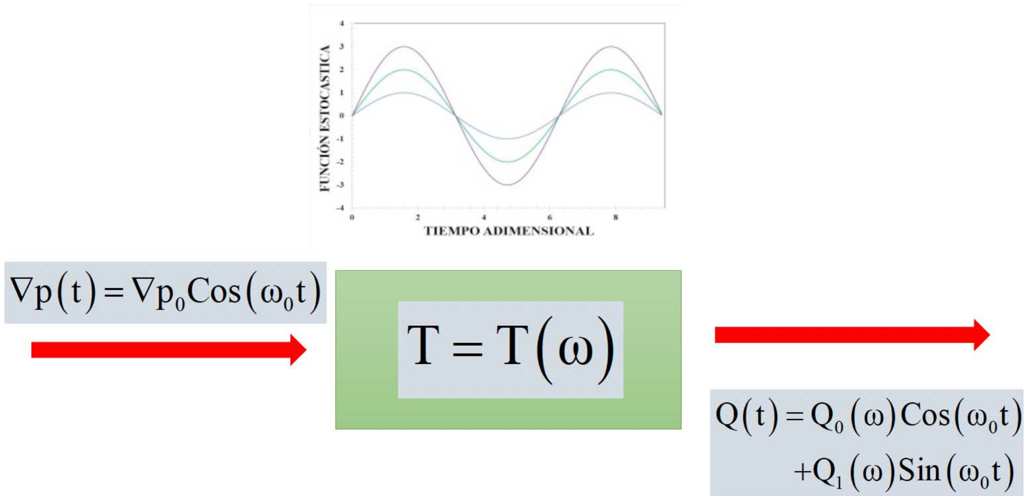


Figura 14.2. **Efecto del gradiente de presión oscilatoria sobre el flujo volumétrico.**

En general, sea f(t) una función real de variable real continua e integrable en un intervalo, subconjunto de los reales. La trasformada de Fourier, de una función f(t), se define como:

$$F\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt \qquad \textbf{(14.47)}$$

En particular, la función f(t) que se estudiara es una función oscilatoria para el gradiente de presión oscilatoria.

$$\nabla z p(t) = \nabla z p_0 Sen(\omega_0 t) \qquad \textbf{(14.48)}$$

En la Ec. (2), ∇p_0 es la amplitud de la función oscilatoria, ω_0 es la frecuencia característica de la función oscilatoria propuesta. Al sustituir la Ec. (14.47) en la Ec. (14.48), se tiene lo siguiente:

$$F\{\nabla zp(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\nabla zp_0 \mathrm{Sen}(\omega_0 t)\,dt = \nabla zp_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\mathrm{Sen}(\omega_0 t)\,dt \tag{14.49}$$

Para resolver la integral, se debe de emplear la fórmula de De Moivre que relaciona la función exponencial con las funciones trigonométricas, por lo que:

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) \tag{14.50}$$

Y cuando el ángulo es negativo, i.e.,

$$e^{-i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - i\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) \tag{14.51}$$

Sumando las Ecs. (14.50) y (14.51), se obtiene lo siguiente

$$-i\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2} = \mathrm{Sin}(\omega_0 t) \tag{14.52}$$

Sustituyendo en el modelo de gradiente propuesto

$$F\{\nabla zp(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} -i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\nabla zp_0\left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2}\right)dt \tag{14.53}$$

Por propiedad de linealidad de integral de Riemann, se tiene la siguiente

$$F\{\nabla zp(t)\} = \frac{\nabla zp_0}{2\sqrt{2\pi}} -i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)dt \tag{14.54}$$

Aplicando las propiedades de la función exponencial compleja, por lo que:

$$F\{\nabla zp(t)\} = \frac{\nabla zp}{2\sqrt{2\pi}} -i\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-it(\omega-\omega_0)} - e^{-it(\omega+\omega_0)}\right)dt \tag{14.55}$$

De la misma manera, que en las ecuaciones previas se realiza el cambio de variable, -t→t y -dt→dt, por lo que la Ec. (14.55), toma la forma:

$$\nabla zp(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\nabla zp_0\text{-}i\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it(\omega\text{-}\omega_0)}dt-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it(\omega+\omega_0)}\,dt\right) \tag{14.56}$$

La Ec. (14.56) se obtiene después de hacer el cambio de variable -t = x, -dt = dx. Utilizando la función δ de Dirac para operar nuestras integrales

$$\nabla zp(\omega)=\nabla zp_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{-}i\left[\delta(\omega\text{-}\omega_0)\text{-}\delta(\omega+\omega_0)\right] \tag{14.57}$$

Entonces, una función oscilatoria, como el gradiente de presión, se puede expresar como una suma de dos funciones Delta de Dirac. Esto en principio nos va a permitir calcular el flujo volumétrico en términos del espacio temporal t.

14.2.1 Flujo volumétrico en un capilar con mecanismos inerciales y gradiente de presión sinusoidal

El flujo volumétrico fue calculado anteriormente mediante el uso de la transformada de Fourier, la cual puede ser expresada en términos de la función de transferencia, por lo que se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega)=\pi\frac{R^3}{4}T(\omega)\frac{1}{2}\left(-\nabla zp(\omega)\right)R \tag{14.58}$$

Sustituyendo la Ec. (14.57) en la Ec. (14.58), se tiene la siguiente expresión analítica

$$Q(\omega)=\pi\frac{R^4}{8}T(\omega)\nabla zp_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{-}i\left[\delta\,(\omega\text{-}\omega_0)\text{-}\,\delta(\omega+\omega_0)\right] \tag{14.59}$$

Aplicamos la anti-transformada de Fourier

$$f(t)=F^{-1}\left\{f(\omega)\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{+i\omega t}f(\omega)d\omega \tag{14.60}$$

y el cambio de variable -t→t, por lo que

$$f(t)=F^{-1}\{f(\omega)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}f(\omega)d\omega \tag{14.61}$$

Al aplicar la Ec. (14.61) en el flujo volumétrico (14.59) se tiene lo siguiente:

$$Q(t)=\pi\frac{R^4}{8}\nabla p_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}-i\left(F^{-1}\{T(\omega)[\delta(\omega-\omega_0)]\}-F^{-1}\{T(\omega)[\delta(\omega+\omega_0)]\}\right) \tag{14.62}$$

Aplicando la definición de anti-transformada de Fourier, por lo que se tiene lo siguiente:

$$F^{-1}\{T(\omega)[\delta(\omega-\omega_0)]\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}T(\omega)[\delta(\omega-\omega_0)]d\omega \tag{14.63}$$

Y

$$F^{-1}\{T(\omega)[\delta(\omega+\omega_0)]\}=F^{-1}\{T(\omega)[\delta(\omega-(-\omega_0))]\} \tag{14.64}$$

Entonces

$$F^{-1}\{T(\omega)[\delta(\omega-(-\omega_0))]\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}T(\omega)[\delta(\omega-(-\omega_0))]d\omega \tag{14.65}$$

En las Ecs. (14.63)-(14.65) aplicaremos la propiedad de traslación para la función δ de Dirac definida como:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0) \tag{14.66}$$

Aplicando las propiedades de las Ec. (14.66) en las Ecs. (14.63) y (14.64) se tiene lo siguiente:

$$F^{-1}\{T(\omega)[\delta(\omega-\omega_0)]\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}T(\omega)[\delta(\omega-\omega_0)]d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\omega_0 t}T(\omega_0) \tag{14.67}$$

Y

$$F^{-1}\{T(\omega)[\delta(\omega-(-\omega_0))]\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}T(\omega)[\delta(\omega-(-\omega_0))]d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\omega_0 t}T(-\omega_0) \tag{14.68}$$

Finalmente, al sustituir las Ecs. (14.67) y (14.68) en el flujo volumétrico Ec. (14.62),

$$Q(t)=\frac{\pi R^3}{4}\left(-i\frac{e^{i\omega_0 t}T(\omega_0)-e^{-i\omega_0 t}T(-\omega_0)}{2}\right)\left(\frac{1}{2}(-\nabla z p_0)R\right) \quad \textbf{(14.69)}$$

Definiendo que

$$T(-\omega_0)=\overline{T(\omega_0)} \quad \textbf{(14.70)}$$

Al sustituir la Ec. (14.70) en la Ec. (14.69), se tiene la siguiente expresión analítica para el flujo volumétrico:

$$Q(t)=\frac{\pi R^3}{4}\left(-i\frac{e^{-i\omega_0 t}T(\omega_0)-e^{i\omega_0 t}\overline{T(\omega_0)}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}(-\nabla z p_0)R\right) \quad \textbf{(14.71)}$$

Entonces en este punto, la Ec. (14.71) es una función compleja de variable compleja. El flujo volumétrico, se puede separar en una parte real e imaginaria, por lo que, se tiene lo siguiente:

$$Q(t)=\mathrm{Re}\left[Q(t)\right]+i\mathrm{Im}\left[Q(t)\right] \quad \textbf{(14.72)}$$

Al descomponer $T(\omega_0)$ y el complejo conjugado de $T(\omega_0)$, se tiene o siguiente:

$$T(\omega_0)=\mathrm{Re}\left[T(\omega_0)\right]+i\mathrm{Im}\left[T(\omega_0)\right] \quad \textbf{(14.73)}$$

El complejo conjugado de la Ec. (14.73) es,

$$\overline{T(\omega_0)}=\mathrm{Re}\left[T(\omega_0)\right]-i\mathrm{Im}\left[T(\omega_0)\right] \quad \textbf{(14.74)}$$

Y de nueva cuenta, utilizando las fórmulas de De Moivre para expresar las exponenciales complejas en términos de Senos y Cosenos

$$e^{i\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)+i\sin(\omega_0 t) \quad \textbf{(14.75)}$$

Y el complejo conjugado de la Ec. (14.75), tiene la forma:

$$e^{-i\omega_0 t}=\cos(\omega_0 t)-i\sin(\omega_0 t) \quad \textbf{(14.76)}$$

Al sustituir las Ecs. (14.73)-(14.76) en la Ec. (14.71), la parte real queda expresada de la siguiente manera:

$$\mathrm{Re}\left[Q(t)\right]=\frac{\pi R^{3}}{4}\mathrm{Re}\left(-i\frac{e^{-i\omega_0 t}T(\omega_0)-e^{i\omega_0 t}\overline{T(\omega_0)}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}(-\nabla z p_0)R\right) \tag{14.77}$$

En donde la parte real del flujo volumétrico

$$\mathrm{Re}\left[-i\frac{e^{-i\omega_0 t}T(\omega_0)-e^{i\omega_0 t}\overline{T(\omega_0)}}{2}\right]=\mathrm{Cos}(\omega_0 t)\mathrm{Im}\left[T(\omega_0)\right]-\mathrm{Sin}(\omega_0 t)\mathrm{Re}\left[T(\omega_0)\right] \tag{14.78}$$

Y la parte de imaginaria

$$\mathrm{Im}\left[-i\frac{e^{-i\omega_0 t}T(\omega_0)-e^{i\omega_0 t}\overline{T(\omega_0)}}{2}\right]=-i\frac{\begin{Bmatrix}\mathrm{Cos}(\omega_0 t)\mathrm{Re}[T(\omega_0)]+\mathrm{Sin}(\omega_0 t)\mathrm{Im}[T(\omega_0)]\\ -\mathrm{Cos}(\omega_0 t)\mathrm{Re}[T(\omega_0)-\mathrm{Sin}(\omega_0 t)\mathrm{Im}[T(\omega_0)]\end{Bmatrix}}{2}=0 \tag{14.79}$$

Por lo tanto, el flujo volumétrico tiene la siguiente forma:

$$\mathrm{Re}\left[Q(t)\right]=\frac{\pi R^{3}}{4}\left(\mathrm{Cos}(\omega_0 t)\mathrm{Im}\left[T(\omega_0)\right]-\mathrm{Sin}(\omega_0 t)\mathrm{Re}\left[T(\omega_0)\right]\right)\left(\frac{1}{2}(-\nabla z p_0)R\right) \tag{14.80}$$

De la parte imaginaria, se tiene:

$$\mathrm{Im}\left[Q(t)\right]=0 \tag{14.81}$$

Finalmente, se tiene que, para una función cosenoidal del gradiente de presión, se tiene una respuesta oscilatoria del flujo volumétrico, por lo que:

$$\mathrm{Re}\left[Q(t)\right]=\underbrace{\frac{\pi R^{3}}{4}\mathrm{Im}\left[T(\omega_0)\right]\sigma_w}_{\text{En fase con el gradiente de presión}}\mathrm{Cos}(\omega_0 t)-\underbrace{\frac{\pi R^{3}}{4}\mathrm{Re}\left[T(\omega_0)\right]\sigma_w}_{\text{Fuera de fase en el gradiente de presión}}\mathrm{Sin}(\omega_0 t) \tag{14.82}$$

En donde el esfuerzo en la pared, se define como:

$$\sigma_w=-\frac{1}{2}\nabla p_0 R; \tag{14.83}$$

14.2.2 Flujo volumétrico en un capilar con mecanismos inerciales y gradiente de presión pulsátil (serie de Fourier)

En esta sección se utilizará la información obtenida para un gradiente de presión oscilatorio cosenoidal y sinusoidal, previamente explicados. La serie de Fourier de la presión pulsátil se puede expresar como:

$$\nabla zp(t)=\frac{1}{2}\nabla zp_0+\sum_{n=1}^{\infty}(\nabla zp_1)_n \mathrm{Cos}(n\omega_0 t)+\sum_{n=1}^{\infty}(\nabla zp_2)_n \mathrm{Sin}(n\omega_0 t) \qquad \textbf{(14.84)}$$

Al calcular la transformada de Fourier de la Ec. (14.84), se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\mathrm{Re}[Q(t)]=\frac{\pi R^3}{4}(T_{SF}(\omega_0))\sigma_w \qquad \textbf{(14.85)}$$

Entonces la función de transferencia T_{SF} se expresa de la siguiente manera

$$T_{SF}(\omega_0)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[T(0)]+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{Re}[T(n\omega_0)]+\mathrm{Im}[T(n\omega_0)]\right)\mathrm{Cos}(n\omega_0 t)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{Im}[T(n\omega_0)]-\mathrm{Re}[T(n\omega_0)]\right)\mathrm{Sin}(n\omega_0 t); \qquad \textbf{(14.86)}$$

Y el esfuerzo en la pared

$$\sigma_w=-\frac{1}{2}\nabla p_z(t)R \qquad \textbf{(14.87)}$$

CAPÍTULO VIII

Simulaciones y análisis de resultados

En este capítulo, se presentan las principales predicciones de las ecuaciones desarrolladas, las cuales describen las propiedades de flujo de un fluido viscoelástico sin inercia, i.e. a número de Reynolds bajos.

15 Variables adimensionales

Con el fin de simplificar las simulaciones en el programa *Wolfram Mathematica* e introducir grupos adimensionales que describan la física del sistema, se propone el siguiente conjunto de variables adimensionales para el flujo volumétrico, función de transferencia compleja y frecuencia:

$$Q(\omega)=\frac{Q(\omega)}{Q_N(\omega)};T(\omega,\beta)=\frac{T(\omega,\beta)}{\varphi_0};\varphi(\omega)=\frac{\varphi(\omega)}{\varphi_0};\omega=\frac{\omega}{\omega_c};\beta=a\beta \qquad (15.1)$$

En la Ec. (15.1) el flujo viscoelástico se hizo adimensional con el flujo volumétrico Newtoniano, la función de transferencia compleja y la fluidez se hicieron adimensional con la fluidez a bajo corte, el parámetro beta con la longitud característica a (radio del capilar). Finalmente, la frecuencia se hizo adimensional con los tiempos característicos materiales que dependen del fluido estudiado. El caso de un fluido newtoniano, el tiempo característico es el tiempo inercial

$$t_c=t_i=a^2\varphi_0\rho \qquad (15.2)$$

En el caso de un fluido viscoelástico, el tiempo característico es el tiempo de relajación de Maxwell $\lambda_0 = \eta_0/G_0$, el cual se pude expresar como un cociente entre la viscosidad a corte bajo y el modulo de corte. Por lo que, se tiene lo siguiente:

$$t_c = \lambda_0 = \eta_0/G_0 \tag{15.3}$$

En el caso del modelo multimodal de Maxwell, se tendrá que escoger entre el espectro de tiempos que describan el comportamiento viscoso y elástico del sistema. En este caso, se seleccionará el tiempo domínate o tiempo de cruce del espectro, i.e.

$$t_c = t_{cruce} = \{t_i\}, i \in I \subseteq N \tag{15.4}$$

Bajo este contexto, el grupo adimensional β, en el caso newtoniano es:

$$\beta = i^{3/2}\sqrt{\omega} \tag{15.5}$$

En el caso viscoelástico, se tiene:

$$\beta = i^{3/2}\sqrt{De^2\omega\Phi(\omega)} \tag{15.6}$$

En donde De es el número de Deborah, el tiempo característico del material y el tiempo de observación o experimental, como ya se mencionó

$$De = \frac{t_i}{t_c} = \frac{\rho a^2 \varphi_0}{t_c} \tag{15.7}$$

El número de Deborah tambien puede ser expresado en terminos del número de Mach, el cual puede ser escrito como un cociente de velocidades, i.e.

$$Ma = \frac{1}{De} = \frac{a/\lambda_0}{1/\varphi_0 \rho a} \tag{15.8}$$

Este número ha sido utilizado para describir el comportamiento de Membranas flexo eléctricas en medios newtonianos y no newtonianos, en particular, en medios viscoelásticos lineales (Maxwell, Jeffreys, Burgers, fraccionarios y variantes de modelos tipo Voigt-Kelvin).

16 Propiedades reológicas vs frecuencia sin mecanismos inerciales

16.1 Módulo elástico G′

La Figura 16.1 muestra la simulación para el módulo elástico adimensional en función de la frecuencia adimensional. Este se puede expresar como el producto de la frecuencia con la función de transferencia imaginaría.

$$G'(\omega) = \omega \mathrm{Im}[\Phi] = \frac{\omega^2}{1+\omega^2} \qquad \textbf{(16.1)}$$

El módulo elástico G′ tiene dos comportamientos asintóticos a baja y alta frecuencia respectivamente. A frecuencias bajas, i.e., $\omega \ll 1$, el módulo de almacenamiento tiene la siguiente forma asintótica

$$G'(\omega) = \omega^2\left(1+\omega^2\right)^{-1} \cong \omega^2\left(1-\omega^2\right) + O\left(\omega^2\right) \cong \omega^2 \qquad \textbf{(16.2)}$$

Por lo que, el comportamiento de la función de transferencia a bajas frecuencias es cuadrático. Por otra parte, a frecuencias altas, el sistema tiende a un valor límite, i.e.

$$\mathrm{Lim}_{\omega\to\infty} G'(\omega) = \omega \mathrm{Im}[\Phi] = \mathrm{Lim}_{\omega\to\infty} \frac{\omega^2}{1+\omega^2} = 1 \qquad \textbf{(16.3)}$$

Este comportamiento se observa claramente en la Figura 16.1 por lo que coincide con el tratamiento clásico de flujo oscilatorio a bajas amplitud en sistemas poliméricos. Físicamente, el módulo G′ describe el almacenamiento de la energía en el sistema asociado con la elasticidad del fluido complejo.

16.2 Módulo viscoso G′′

Asimismo, la Figura 16.1 también muestra el comportamiento de $G''(\omega)$ representado matemáticamente por la Ec. (16.4) adimensional en función de la frecuencia adimensional

$$G''(\omega) = \omega \mathrm{Re}[\Phi] = \frac{\omega}{1+\omega^2} \qquad \textbf{(16.4)}$$

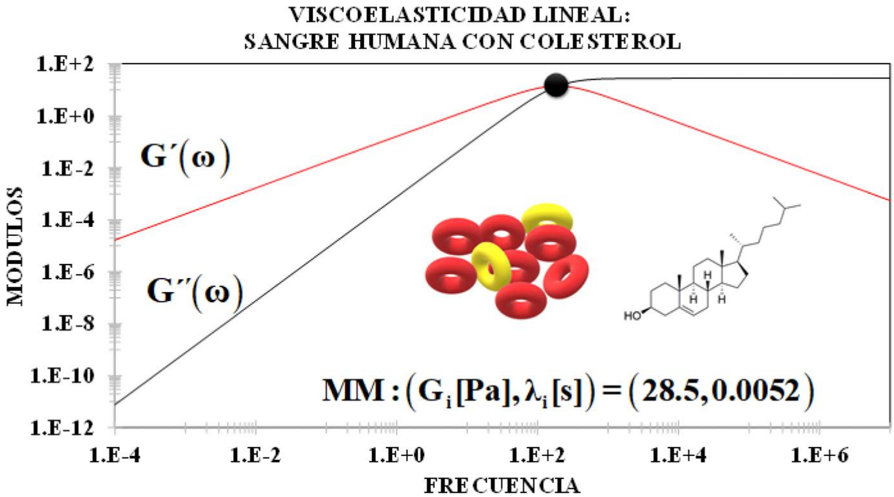


Figura 16.1. **Módulo elástico G' (línea negra) y módulo viscoso G'' (línea roja) en función de la frecuencia para el modelo de Maxwell.**

Los límites de la ecuación para G´´ (ω) son:

$$G''(\omega) = \omega\left(1+\omega^2\right)^{-1} \cong \omega\left(1-\omega^2\right) + O\left(\omega^2\right) \cong \omega \qquad \textbf{(16.5)}$$

Es decir, a bajas frecuencias el comportamiento del módulo es lineal con la frecuencia, por lo que a frecuencias altas el sistema tiene el siguiente límite:

$$\mathrm{Lim}_{\omega\to\infty} G''(\omega) = \mathrm{Lim}_{\omega\to\infty} \frac{\omega}{1+\omega^2} = 0 \qquad \textbf{(16.6)}$$

Adicionalmente, G´´ relaciona la energía disipada en el sistema por efecto de la viscosidad. Nótese, que sin tomar en cuenta los efectos inerciales, la G´´ solo presenta un máximo resonante, se esperaría que, incluyendo los mecanismos inerciales, esta respuesta sería alterada. Las dos ecuaciones tienen un punto en común que corresponde al equimodulo, i.e. el punto en donde los módulos son iguales (punto negro de la Figura 16.1),

$$\omega_c = 1 \qquad \textbf{(16.7)}$$

Es decir, la parte real y compleja de la función de transferencia son iguales y se tiene lo siguiente:

$$G''(\omega) = G'(\omega) \tag{16.8}$$

Sustituyendo el valor de la parte real e imaginaría de la función de transferencia, se tiene lo siguiente:

$$\mathrm{Re}[\Phi] = \mathrm{Im}[\Phi] \tag{16.9}$$

Esta ecuación tiene soluciones, para la frecuencia, para cero y el valor de 1 por lo que, en el caso adimensional, el tiempo viscoelástico de cruce en el sistema es igual a la unidad.

$$\frac{\omega_c}{1+\omega_c^2} = \frac{1}{1+\omega_c^2} \tag{16.10}$$

Este valor de la frecuencia de cruce está asociado a la viscoelasticidad del material, por lo que es un parámetro muy importante, útil en la caracterización reológica y en las pruebas reométricas y, en pocas palabras, corresponde al valor en el cual el tiempo de observación/experimentación del proceso equivale al tiempo característico del material (tiempo de relajación de Maxwell), lo cual, como el lector seguramente recordará, es único para cada fluido. Es importante destacar que la mayoría de sistemas físicos presentan un comportamiento que no ajusta al modelo de Maxwell por sí solo, por lo que se debe de ajustar a modelos más complejos (i.e. Modelo de Maxwell multimodal), que, por ejemplo, puede arrojar información física concerniente a la distribución del peso molecular en el sistema.

16.3 Viscosidad real η′

La viscosidad real es la parte real de la función de transferencia la cual, sin mecanismos inerciales, se describe matemáticamente de la siguiente forma:

$$\eta'(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} \tag{16.11}$$

Los límites de la viscosidad real están dados por:

$$\eta'(\omega) = \left(1+\omega^2\right)^{-1} = 1-\omega^2 + O\left(\omega^2\right) \cong 1 \tag{16.12}$$

Es decir, cerca de una vecindad del cero, la función viscosidad real tiende a la unidad, mientras que, a frecuencias altas, se tiene lo siguiente

$$\mathrm{Lim}_{\omega\to\infty}\eta'(\omega)=\mathrm{Lim}_{\omega\to\infty}\frac{1}{1+\omega^2}=0 \tag{16.13}$$

16.4 Viscosidad imaginaría η''

Por otra parte, la viscosidad imaginaria está dada por la siguiente expresión:

$$\eta''(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^2} \tag{16.14}$$

Como en el caso anterior, la viscosidad imaginaría tiene dos límites asintóticos, los cuales se describen a continuación:

$$\eta''(\omega)=\omega\left(1+\omega^2\right)^{-1}=\omega\left(1-\omega^2+O\left(\omega^2\right)\right)\cong\omega \tag{16.15}$$

Mientras que, a frecuencias altas, se tiene el siguiente resultado:

$$\eta''(\omega)=\omega\left(1+\omega^2\right)^{-1}=\omega\left(1-\omega^2+O\left(\omega^2\right)\right)\cong\omega \tag{16.16}$$

16.5 Viscosidad compleja

La viscosidad compleja puede ser calculada de la siguiente manera:

$$\eta^*(\omega)=\sqrt{\left[\eta'(\omega)\right]^2+\left[\eta''(\omega)\right]^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \tag{16.17}$$

La viscosidad compleja a frecuencia bajas es 1 y a frecuencias altas, la viscosidad compleja tiende a cero.

La **Figura 16.2** ilustra la viscosidad compleja η* en función de la frecuencia adimensional para el modelo de Maxwell. Las predicciones muestran un comportamiento de 1 a frecuencias baja, mientras que, al aumentar esta, la viscosidad disminuye monótonamente hasta un valor mínimo.

Finalmente, la viscosidad compleja es la magnitud de las viscosidades real e imaginaria y describe está en el sistema oscilatorio de baja amplitud.

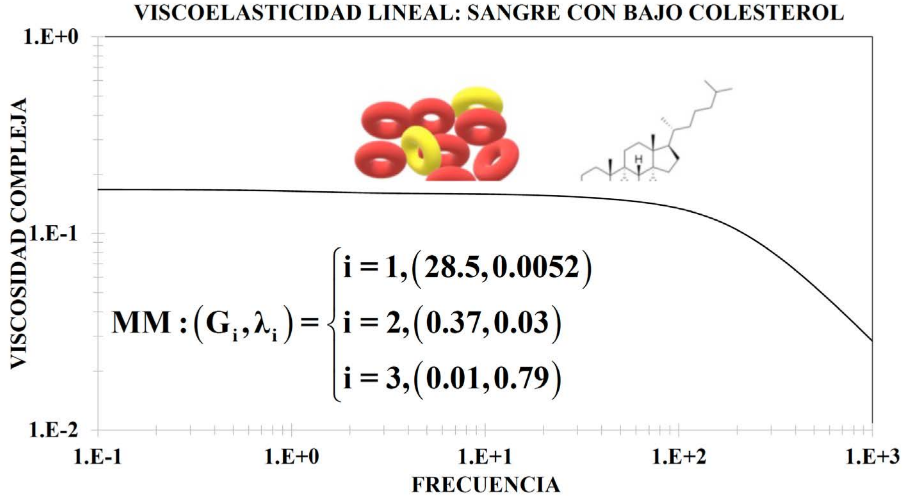


Figura 16.2. **Se ilustra el comportamiento de la viscosidad compleja como función de la frecuencia angular adimensional para el modelo de Maxwell multimodal con 3 modos.**

17 Simulación con datos reométricos con colesterol

En esta sección, se predice la mejora de la fluidez con datos reales de sangre humana con hipercolesterolemia. Los parámetros materiales se dan en la Tabla 7.4. El radio sanguíneo típico de las venas varía de 0,02 a 0,35 cm y la densidad de la sangre es aproximadamente de 1,05 g / cm^3 [49].

Los datos reométricos de colesterol en sangre no pueden ajustarse con un solo modelo en pruebas oscilatorias de flujo, por lo que es necesario emplear más modos para ajustarse a las medidas experimentales [42, 50]. Las fluideces reales e imaginarias pueden ser sustituidas por el modelo Maxwell generalizado para N = 3 modos, de acuerdo con la **Tabla 17.1**.

Tabla 17.1. **Valores de los parámetros materiales para el modelo de Maxwell Multimodal.**

Modelo	i-ésimo módulo elástico [Pa]	i-ésimo tiempo de relajación [s]
Maxwell Multimodal	$G_i = \begin{cases} i=1: 28.5 \\ i=2: 0.37 \\ i=3: 0.01 \end{cases}$	$\lambda_i = \begin{cases} i=1: 0.0052 \\ i=2: 0.03 \\ i=3: 0.79 \end{cases}$

17.1 Flujo oscilatorio de pequeña amplitud de deformación (SAOS)

La **Figura 17.1** muestra la simulación para predecir el módulo elástico (a), y el módulo viscoso (b) versus la frecuencia angular adimensional con datos reométricos de sangre con contenido de colesterol. El modelo de Maxwell predice el valor del módulo elástico de la siguiente manera:

$$G'(\omega) = \sum_{j=1}^{N=3} G_j'(\omega) =$$

$$= G_{01}\frac{\lambda_{01}^2\omega^2}{1+\lambda_{01}^2\omega^2} + G_{02}\frac{\lambda_{02}^2\omega^2}{1+\lambda_{02}^2\omega^2} + G_{03}\frac{\lambda_{03}^2\omega^2}{1+\lambda_{03}^2\omega^2} \qquad \textbf{(17.1)}$$

Y finalmente, el módulo viscoso

$$G''(\omega) = \sum_{j=1}^{N=3} G_j''(\omega) =$$

$$= G_{01}\frac{\lambda_{01}\omega}{1+\lambda_{01}^2\omega^2} + G_{02}\frac{\lambda_{02}\omega}{1+\lambda_{02}^2\omega^2} + G_{03}\frac{\lambda_{03}\omega}{1+\lambda_{03}^2\omega^2} \qquad \textbf{(17.2)}$$

Al sustituir los datos reométricos de la tabla 7.1 em las Ecs. (17.1) y (17.2) por lo que, se tiene lo siguiente:

Matemáticamente, la función del módulo elástico (a) muestra un comportamiento creciente en el intervalo de frecuencias, pero tiende a decrecer de manera que aumenta significativamente la frecuencia angular. Mientras que al igual que el módulo elástico (a), el módulo viscoso (b) muestra un comportamiento creciente pero a cortos módulos decrece de manera que aumenta la frecuencia angular. Es importante resaltar que a frecuencias altas se tiene una interseccion entre ambos módulos de tal manera que se obtiene el módulo de almacenamiento debido a la tensión aplicada y pérdida del material, que determina la disipación de energía del modelo de Maxwell. Físicamente, el módulo complejo está relacionado con el mecanismo viscoso y elástico, que describen la respuesta mecanica del fluido viscoelástico a través de las variaciones de la frecuencia. Ambos módulos dependen del esfuerzo cortante y la deformación del material.

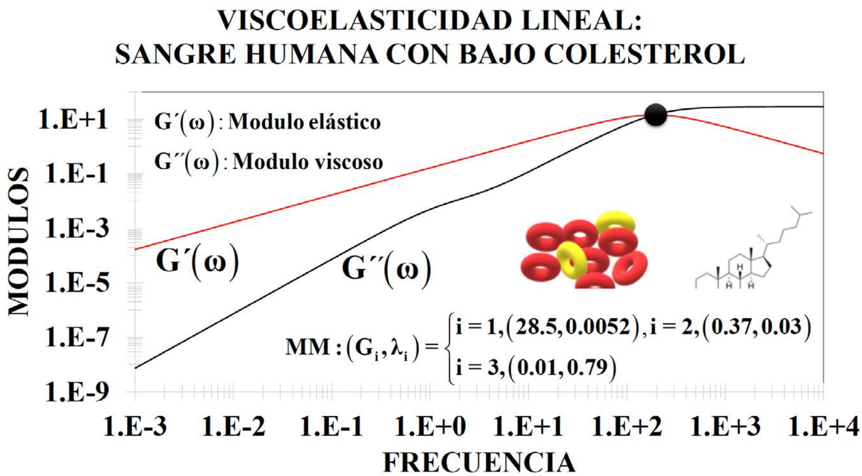


Figura 17.1. **Módulo elástico G′ (línea azul) y módulo viscoso G′′ (línea roja) en función de la frecuencia angular.**

Nótese, que a frecuencias bajas, el sistema se comporta como un fluido, ya que domina la parte viscosa, y a frecuencias altas, el sistema se comporta como un sólido, lo cual rige la elasticidad.

$$\omega \rightarrow 0; t \rightarrow \infty; \text{Fluido}$$

$$\lambda_0 \rightarrow 1/\omega_c; \text{Viscoelástico}$$

$$\omega \rightarrow \infty; t \rightarrow 0; \text{Sólido}$$

17.1.1 Viscosidad Compleja

La viscosidad compleja es la magnitud del vector complejo $|\eta^*(\omega)|$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\eta^*(\omega)=\sqrt{[\eta'(\omega)]^2+[\eta''(\omega)]^2} \tag{17.3}$$

La viscosidad compleja debe ser revaluada con tres modos para los datos de sangre con colesterol. La expresión para la parte real de la viscosidad compleja, con tres modos, es la siguiente:

$$\eta'(\omega)=G_{01}\lambda_{01}\frac{\lambda_{01}\omega}{1+\lambda_{01}^2\omega^2}+G_{02}\lambda_{02}\frac{\lambda_{02}\omega}{1+\lambda_{02}^2\omega^2}+G_{03}\lambda_{03}\frac{\lambda_{03}\omega}{1+\lambda_{03}^2\omega^2} \tag{17.4}$$

Por otro lado, para la parte imaginaria de la viscosidad compleja, es aplicable la siguiente ecuación:

$$\eta''(\omega)=G_{01}\lambda_{01}\frac{1}{1+\lambda_{01}^2\omega^2}+G_{02}\lambda_{02}\frac{1}{1+\lambda_{02}^2\omega^2}+G_{03}\lambda_{03}\frac{1}{1+\lambda_{03}^2\omega^2} \tag{17.5}$$

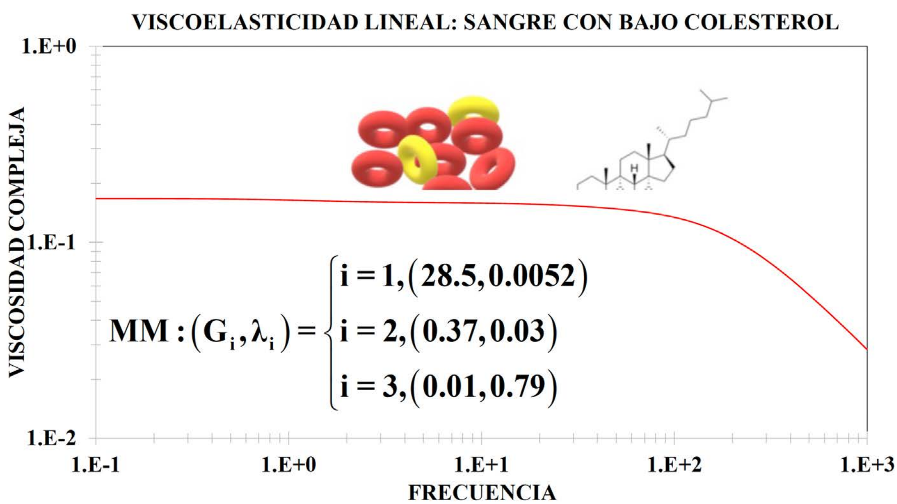


Figura 17.2. **Viscosidad compleja como función de la frecuencia angular.**

La **Figura 17.2** muestra la simulación para la viscosidad compleja como función de la frecuencia angular adimensional con datos reométricos de sangre con hipercolesteronemia. Matemáticamente, la función del módulo viscoelástico muestra un comportamiento monótono decreciente pero constante en el intervalo de frecuencias 0.1 rad/s – 150 rad/s, y tiende a decrecer de manera que aumenta significativamente la frecuencia angular. Es importante resaltar que a frecuencias altas se tiene una viscosidad compleja menor que tiende a ser muy pequeña, incluso menores a cero. Físicamente, la viscosidad compleja está relacionada con los mecanismos viscosos y elásticos asociadas con la disipación y la recuperación, además, describen las propiedades viscoelásticas del fluido a través la frecuencia angular. Obsérvese que, cuando la frecuencia de oscilación disminuye, la viscosidad compleja tiende a comportarse un fluido en estado estacionario y por el contrario, a frecuencias altas se comporta como un sólido.

18 Flujo pulsátil de un fluido de Maxwell (parte Real y parte Imaginaria)

18.1 Número de Womersley

El número de Womersley (Wo), se puede definir por la relación:

$$Wo^2 = \frac{\text{mecanismo oscilatorio}}{\text{fuerzas viscosas}} = \frac{\rho\omega U}{\mu U L^{-2}} = \frac{\omega L^2}{\mu \rho^{-1}} = \frac{\omega L^2}{\nu} \qquad \textbf{(18.1)}$$

Es una expresión adimensional de la frecuencia de flujo pulsátil en relación con los efectos viscosos. Es utilizado para determinar el grosor de la capa límite para ver si los efectos de entrada pueden ser ignorados.

$$Wo = L\sqrt{\frac{\omega\rho}{\mu}} \qquad \textbf{(18.2)}$$

Donde L es una escala de longitud, ω es la frecuencia angular de las oscilaciones, y ν, ϱ, μ son la viscosidad cinemática, la densidad y la viscosidad dinámica del fluido, respectivamente. El número de Womersley surge en la solución de las ecuaciones linealizadas de Navier Stokes para el flujo oscilatorio (supuestamente laminar e incomprensible) en un tubo. Expresa la relación entre el mecanismo oscilatorio y la fuerza de corte dado por la viscosidad. Cuando Wo es pequeño (<1), significa que la frecuencia de pulsaciones es lo suficientemente baja como para que un perfil de velocidad parabólica tenga tiempo para desarrollarse durante cada ciclo, y el flujo estará casi en fase con el gradiente de presión, y se le dará a una buena aproximación según la ley de Poiseuille, usando el gradiente de presión instantáneo. Cuando Wo es grande (>10), significa que la frecuencia de pulsaciones es lo suficientemente grande como para que el perfil de velocidad sea relativamente plano o parecido a un flujo tapón, y el flujo promedio se retrasa en el gradiente de presión unos 90 grados. Junto con el número de Reynolds, el número de Womersley rige la similitud dinámica. Su aplicación en un sistema cardiovascular, la frecuencia de pulsación disminuye a medida que la sangre se aleja del origen de la pulsación. Por lo tanto, el cambio de frecuencia en el flujo sanguíneo no afecta las características definidas por el número de Womersley.

Tomando las expresiones anteriormente obtenidas en secciones anteriores, la función de transferencia puede expresarse en función del número de Womersley:

$$T(\omega)=\frac{8i^3}{Wo^2}\left(1+2i^2\,\frac{J_1\left(i^{3/2}Wo_\omega(\omega)\right)/\,i^{3/2}Wo_\omega(\omega)}{J_0\left(i^{3/2}Wo_\omega(\omega)\right)}\right) \qquad \textbf{(18.3)}$$

En donde el número de Womersley generalizado tiene la siguiente forma:

$$Wo_\omega(\omega)=\frac{a}{1/\sqrt{\rho\varphi_0\omega}}\sqrt{\Phi}=Wo\sqrt{\Phi};\; Wo=\frac{a}{1/\sqrt{\rho\varphi_0\omega}} \qquad \textbf{(18.4)}$$

La relación de fluidez adimensional está dada por:

$$\Phi=\frac{\Phi}{\varphi_0}=\frac{(1+i\omega)\left(1+\lambda_{02}(i\omega)\right)\left(1+\lambda_{03}(i\omega)\right)}{\eta_{01}\left(1+\lambda_{02}(i\omega)\right)\left(1+\lambda_{03}(i\omega)\right)+\eta_{02}(1+i\omega)\left(1+\lambda_{03}(i\omega)\right)+\eta_{03}(1+i\omega)\left(1+\lambda_{02}(i\omega)\right)} \qquad \textbf{(18.5)}$$

En donde se tiene las siguientes definiciones

$$\eta_{0k}=\frac{\eta_{0k}}{\eta_0}=\frac{G_{0k}\lambda_{0k}}{\sum_{i=1}^{3}G_{0i}\lambda_{0i}} \qquad \textbf{(18.6)}$$

$$\lambda_{0k}=\frac{\lambda_{0k}}{\lambda_{01}};\; k=\{2,3\} \qquad \textbf{(18.7)}$$

$$\omega=\lambda_{01}\omega \qquad \textbf{(18.8)}$$

19 Flujo pulsátil de un fluido multimodal de Maxwell de sangre humana con colesterol: Oclusiones periféricas

La **Figura 19.1** representa la simulación de la función de transferencia del flujo pulsátil, tanto de la parte real (a) como de la parte imaginaria (b), como función de la frecuencia angular adimensional ajustados a datos reométricos de sangre con hipercolesterolemia. Suponiendo que la sangre tiene una densidad de 1060 kg/m^3 y el radio de la vena es de 0.0025 m [49]. Matemáticamente, la parte real (a) del sistema presenta una sucesión de curvas resonantes en el intervalo de (0.001-800) siendo este el pico resonante dominante a bajas frecuencias. Conforme el sistema va evolucionando, las curvas resonantes van atenuándose hasta llegar al momento en que se vuelven lineales e independientes del sistema. En la parte imaginaria (b), se puede observar un comportamiento de curvas discontinuas negativas (0.001-800) siendo este el pico resonante dominante, se puede observar un punto máximo positivo que después es sucedido por un punto mínimo negativo; la transición existente, sólo entre estos dos puntos, es lineal, además, conforme el sistema va evolucionando, existe una sucesión de puntos que se asemejan al comportamiento antes mencionado dando lugar a un comportamiento tipo diente de sierra.

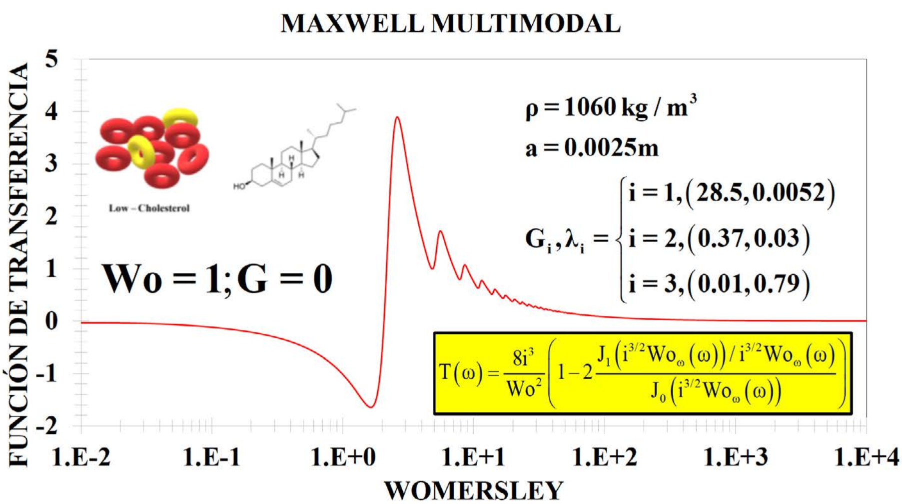


Figura 19.1. **Función de transferencia para el modelo de Maxwell multimodal como función de la frecuencia.**

19.1 Mecanismos elásticos del *Rouleaux*

En las siguientes simulaciones se tomará un término adicional en la fluidez debido a la contribución elástica del hematocrito o del *Rouleaux*. Para incorporar esto, se utilizará una variante del modelo de Voigt-Kelvin, i.e.,

$$\sigma_{rz} = \frac{\eta_{01}}{1+\lambda_{01}\partial_t}\dot{\gamma}_{zr} + G_0\gamma_{zr} + \frac{\eta_{02}}{1+\lambda_{02}\partial_t}\dot{\gamma}_{zr} + \frac{\eta_{03}}{1+\lambda_{03}\partial_t}\dot{\gamma}_{zr} \tag{19.1}$$

La función fluidez en el régimen de viscoelasticidad lineal en el espacio de Fourier, puede ser descrito como:

$$\sigma_{rz} = O_\eta\left(\partial_t\right)\dot{\gamma}_{zr} \tag{19.2}$$

Donde el operador fluidez está dado por

$$O_\eta\left(\partial_t\right) = \frac{1}{\partial_t}\left[\frac{\eta_{01}\partial_t}{1+\lambda_{01}\partial_t} + G + \frac{\eta_{02}\partial_t}{1+\lambda_{02}\partial_t} + \frac{\eta_{03}\partial_t}{1+\lambda_{03}\partial_t}\right] \tag{19.3}$$

Y el operador fluidez adimensional, en el espacio de Fourier esta dado por:

$$O_\Phi\left(i\omega\right) = \left(\frac{1}{i\omega}\left[\frac{\eta_{01}i\omega}{1+i\omega} + G + \frac{\eta_{02}i\omega}{1+\lambda_{02}i\omega} + \frac{\eta_{03}i\omega}{1+\lambda_{03}i\omega}\right]\right)^{-1} \tag{19.4}$$

Esta ecuación nos permite incorporar la elasticidad en el sistema a través de una variante de la familia de ecuaciones de Voigt-Kelvin. El intento de esta expresión es tratar de involucrar la elasticidad del Hematocrito y las interacciones del hematocrito o del *Rouleaux* en el régimen de deformaciones pequeñas, es decir, en el régimen de viscoelasticidad lineal.

Nótese que, el comportamiento de las curvas antes mencionadas, son las que se presentan en otros sistemas complejos [49]. Conforme los tiempos de relajación de Maxwell aumenta, los valores máximos y mínimos disminuyen y el comportamiento irregular se va atenuando, al mismo tiempo, el material cambia para mostrar una respuesta independiente de la frecuencia. Es importante resaltar que la contribución de las curvas resonantes se da a frecuencias altas, ya que tienden a atenuarse e incluso a desaparecer. Físicamente, la máxima respuesta del gradiente de presión pulsátil, se ve inducida con respecto al valor de los tiempos de relajación de Maxwell y la relación entre el mecanismo viscoso y elástico, que representa el tiempo reducido adimensional.

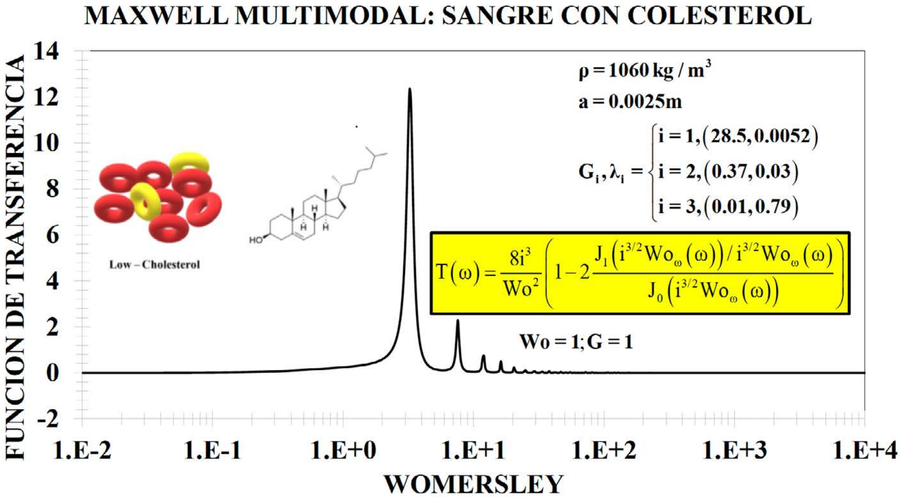


Figura 19.2. Parte real e imaginaria de la función de transferencia como función de la frecuencia angular para el modelo multimodal de Maxwell.

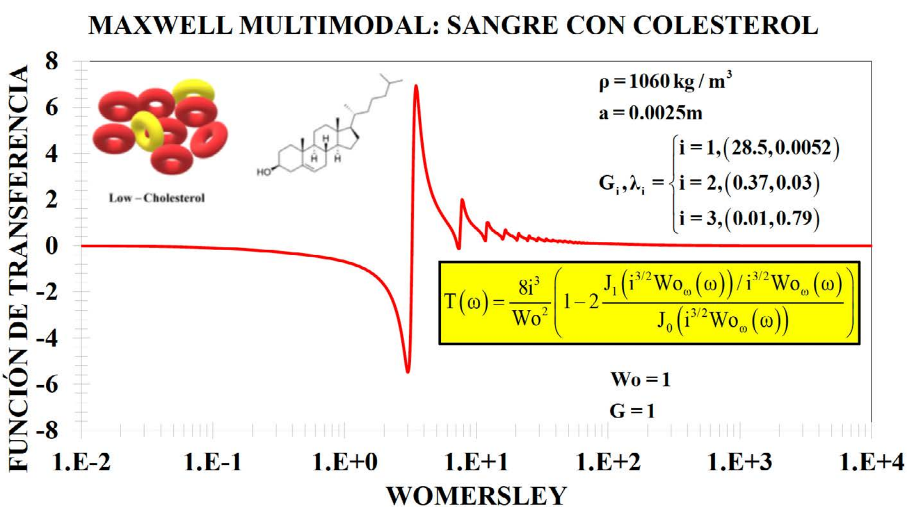


Figura 19.3. Parte real e imaginaria de la función de transferencia como función de la frecuencia angular para el modelo multimodal de Maxwell.

20 Flujo pulsátil de un fluido multimodal de Maxwell de sangre humana con colesterol: oclusiones centrales

En esta sección se modela la función de transferencia para el modelo multimodal de Maxwell para datos de sangre humana con colesterol en una corona circular. Esta geometría simula las oclusiones periféricas en un flujo completamente desarrollado, i.e., un líquido viscoelástico que depende de la posición y el tiempo y que fluye en dirección axial en la sección anular.

20.1 Efecto de la geometría

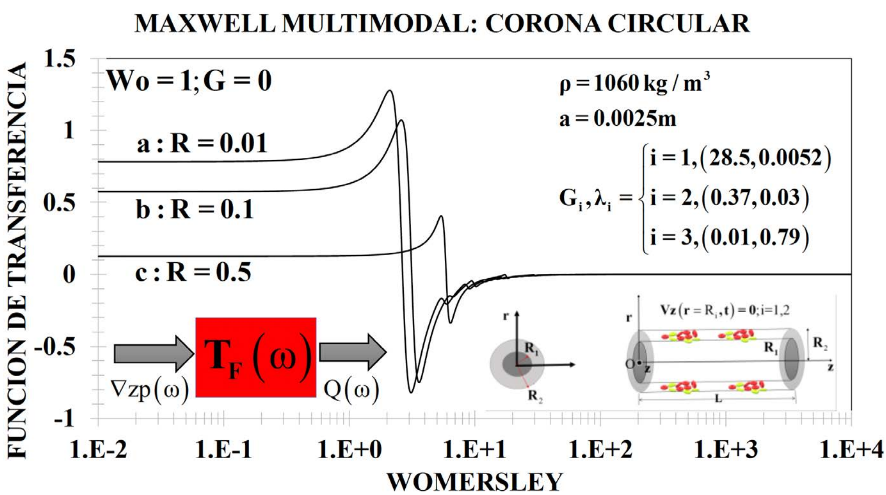


Figura 20.1. **Parte real e imaginaria de la función de transferencia como función de la frecuencia angular para el modelo multimodal de Maxwell.**

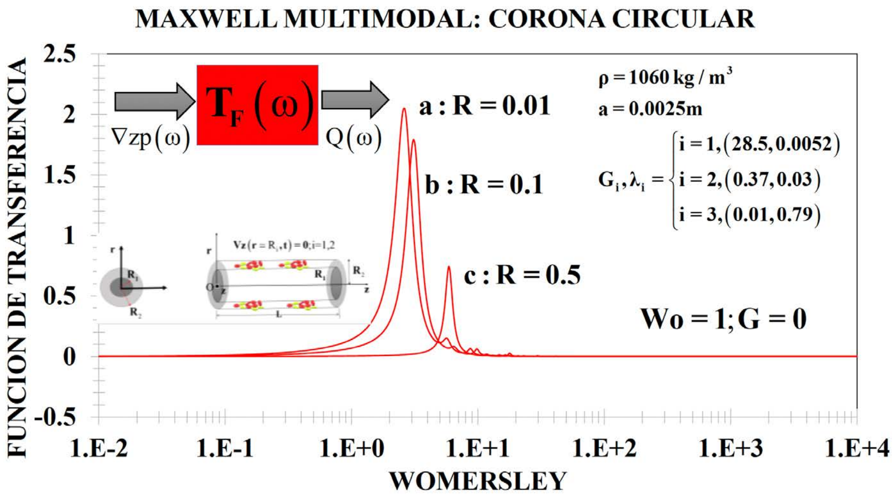


Figura 20.2. Parte real e imaginaria de la función de transferencia como función de la frecuencia angular para el modelo multimodal de Maxwell.

20.2 Efecto de la elasticidad del *Rouleaux*

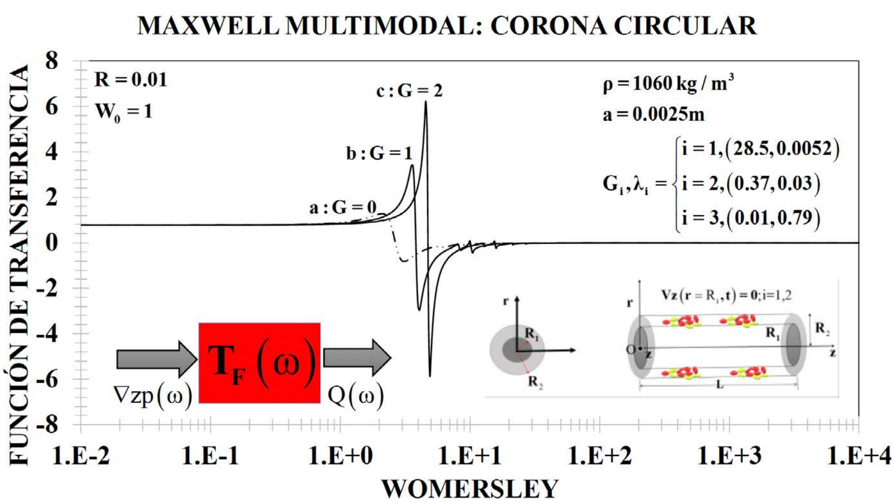


Figura 20.3. Parte real e imaginaria de la función de transferencia como función de la frecuencia angular para el modelo multimodal de Maxwell.

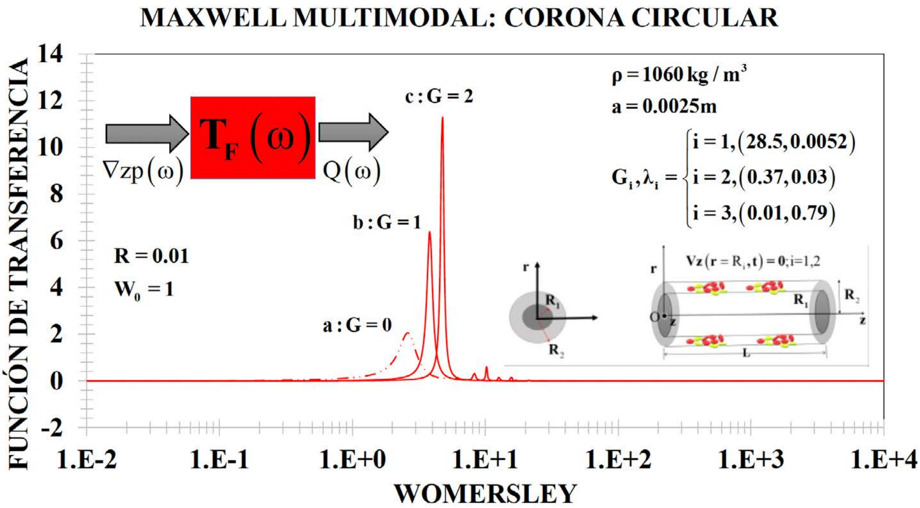


Figura 20.4. **Parte real e imaginaria de la función de transferencia como función de la frecuencia angular para el modelo multimodal de Maxwell.**

Matemáticamente, la parte real del sistema presenta una sucesión de curvas resonantes a bajos valores de frecuencia angular adimensional. Para así, conforme el sistema va evolucionando, las curvas resonantes van atenuándose hasta llegar el momento en que se vuelven lineales e independientes de la frecuencia. Se observan dos curvas resonantes las cuales describen la frecuencia multimodal de Maxwell, unimodal (a) y multimodal (b) con datos de módulos elásticos y tiempos de relajación iguales, ya que se necesitan tres modos para ajustar todo el rango de datos en la zona de baja velocidad de corte. Ambos describen un comportamiento que se asemejan a la función dientes de sierra. Nótese, que el modo principal (a) describe los datos a lo largo de las regiones de corte bajo, donde se produce el fenómeno de tensión de fluencia. El comportamiento entre las curvas resonantes (a) y (b) antes mencionadas son semejantes, pero con un ligero desplazamiento, lo que muestra que el modelo de Maxwell decentemente la respuesta de las propiedades viscoelásticas del material a través de la variación de la frecuencia adimensional sin importar la cantidad de modos que se utilicen para describir a dicho sistema. Cuando los valores máximos y mínimos disminuyen, el comportamiento irregular se va atenuando, conforme el sistema evoluciona, para posteriormente volverse estable.

Es importante resaltar que la contribución de las curvas resonantes se da a frecuencias altas pero presentado un pico de resonancia más pronunciada y produciendo una frecuencia de resonancia máxima a bajas frecuencias, a su vez tienden a atenuarse e incluso a desaparecer. Físicamente, el aumento de flujo para sangre humana real para el flujo pulsátil (a) representa la aproximación de orden cero (sin mejora de flujo) y el flujo pulsátil (b) representa la aproximación de primer orden. La máxima respuesta entre el flujo oscilante y el gradiente de presión pulsátil, se ve inducida con respecto a la frecuencia multimodal de Maxwell y la relación entre los mecanismos viscosos y elásticos, que definen al tiempo reducido adimensional. Como consecuencia de esto, es posible notar que, a valores pequeños de la frecuencia adimensional, se tiene el máximo valor obtenido para el flujo pulsátil, i.e. el flujo máximo posible se da en este punto. Conforme el sistema va evolucionando se puede observar una mitigación en el aspecto antes mencionado. Entonces a medida que aumenta el contenido de colesterol, el máximo del aumento de flujo es más evidente ya que el colesterol induce un esfuerzo cortante más fuerte.

CAPÍTULO IX
Conclusiones

21 Modelado teórico

En este trabajo se estudió el efecto del gradiente de presión pulsátil de un fluido biológico viscoelástico (sangre humana con hipercolesterolemia) fluyendo en un capilar de radio r = a y longitud axial z = L. Para describir la transferencia de momento y los fenómenos reológicos se postularon las siguientes condiciones: (i) proceso isotérmico, (ii) fluido incompresible, (iii) estado no estacionario, (iv) fluido viscoelástico, (v) los efectos gravitacionales son despreciables, (vi) el sistema (fluido) es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión pulsátil en la dirección z y (vii) la reología del sistema de flujo fue caracterizada por la ecuación constitutiva de Maxwell de un modo y de tres modos aplicada a un sistema biológico particular (sangre con colesterol), la cual acopla los mecanismos elásticos y viscosos en el sistema.

Al combinar la ecuación de momento con la ecuación constitutiva reológica (Maxwell) se obtuvo una ecuación diferencial parcial lineal que describe los cambios de la velocidad debido a la inercia y la viscoelasticidad, inducidos por el gradiente de presión pulsátil. Suponiendo, que la función velocidad es continua, el espacio temporal es transformado al espacio de frecuencias utilizando el formalismo de Fourier (Operador integral de Fourier con el núcleo exponencial complejo).

Aplicando la condición de no deslizamiento en el capilar, se obtienen expresiones analíticas para el perfil de velocidad, el flujo volumétrico y la función de transferencia que relaciona la variable de entrada (gradiente de presión pulsátil) con la de salida (flujo volumétrico), las cuales dependen del número adimensional de Womersley y del tiempo reducido de Maxwell. Nótese que el número de Womersley relaciona los mecanismos oscilatorios y viscosos respectivamente.

La ventaja del formalismo de Fourier fue la de generalizar la función de transferencia para cualquier modelo viscoso-inercia y viscoelástico-inercia (Maxwell, Jeffreys, Burgers, Multimodal de Maxwell). Por ejemplo, el modelo de Jeffreys relaciona los tiempos de retardo y relajación respectivamente. Físicamente, el tiempo reducido se puede interpretar como un cociente entre las viscosidades del solvente y del polímero.

Por una parte, tanto la parte real como imaginaria de la función de transferencia muestra curvas discontinuas y resonantes respectivamente deducidas con anterioridad en sistemas de medio poroso [49], las cuales se ven afectadas por las propiedades materiales del medio, asociados a los números adimensionales característicos en el sistema.

Finalmente, las bondades y predicciones del modelo de Maxwell son probadas con datos reométricos de sangre con contenido de colesterol [10, 50] y se demuestra la concordancia entre las proyecciones teóricas y los datos experimentales, todo esto en el ámbito del régimen de viscoelasticidad lineal o deformaciones bajas.

A continuación, se mencionan las principales contribuciones de la presente investigación:

22 Simulaciones computacionales

- Utilizando el formalismo de Fourier se obtuvo una expresión cerrada para la función de transferencia en el sistema, la cual, es una relación entre la variable de entrada (gradiente de presión) y la de salida (flujo volumétrico).

- La función de transferencia compleja que se obtuvo es un cociente de series de Bessel, las cuales inducen a un comportamiento resonante, el cual es regulado a través del número de Womersley y la función fluidez compleja que depende de la ecuación constitutiva que se esté analizando.

- Las curvas generadas mediante las simulaciones son características de otros sistemas dinámicos que involucran una variable de entrada y salida y mecanismos de tipo inercial modificados por los efectos elásticos. Por citar algunos: (i) Medios porosos, (ii) Fluidos electroreológicos [51], (iii) Sistemas biológicos [52-54](células ciliadas externas, flujo sanguíneo).

- Nótese que la manera de modificar el número de Womersley es a través de la geometría (radio del capilar) y las propiedades materiales del sistema, como son: (i) pH, (ii) Concentración y (iii) Peso molecular.

- En el caso del flujo volumétrico real sin inercia, se observa un comportamiento monótono creciente, y para un valor crítico de frecuencia adimensional el flujo volumétrico es independiente de la frecuencia. El efecto que tiene el número adimensional λ^* sobre el sistema es definir la zona asintótica (véase Figura 17.1).

- Para el caso del flujo volumétrico imaginario, se observa un comportamiento resonante y la forma de la campana depende exclusivamente del tiempo adimensional λ^*. Nótese que este número describe los procesos del tiempo de retardo asociado al polímero y del tiempo de relación de Maxwell.

- El flujo volumétrico real e imaginario en función de las frecuencias muestra un comportamiento oscilatorio, es decir un comportamiento no-monótono inducido por el valor de la frecuencia y de las propiedades materiales del medio. Es importante resaltar la siguiente propiedad:

  - A una frecuencia en específico, y un número de Womersley, la función e transferencia está completamente determinada. Esta, está relacionada a la amplitud de las oscilaciones mientras que, la frecuencia de oscilación está directamente relacionada con el número de ciclos en el sistema.

23 Aplicación de sangre con contenido de colesterol

- De datos reométricos extraidos de experimentos oscilatorios a baja amplitud, se obtienen las propiedades materiales del modelo de Maxwell para sangre con hipercolesterolemia. El ajuste con el modelo de Maxwell se hizó con tres modos característicos los cuales fueron simulados mediante un programa de Mathematica 11.0 [50].

- Se observó que el comportamiento mecánico de un material se puede estudiar tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia y se obtuvo las caracteristicas mecánicas dinámicas de un material viscoelástico, en este caso sangre humana con colesterol, cuando está sometido a estados tensionales dinámicos, como son: i) Módulo elástico ii) Módulo viscoso y iii) Módulo complejo.

- El número de modos fue seleccionado de tal manera que fueran el menor número de parámetros materiales con el fin de no pérder la interpretación física del sistema. El número mínimo de modos resultó ser de tres[10, 50].

- El punto de cruce, entre el módulo elástico y viscoso, es el tiempo dominante vicoelástico de Maxwell y este se obtiene directamente del experimento a amplitudes bajas, i.e. $\lambda_0 = 1/\ \omega c$. Este tiempo describe los procesos acoplados de elasticidad (almacenamiento) o perdida (viscosidad) en el sistema.

- La viscoelasticidad compleja depende de los módulos elásticos y viscosos asi como de la frecuencia angular, debido a las caracteristicas mecánicas del material. A frecuencias bajas (tiempos largos) el sistema se comporta como un fluido, miemtras que, a frecuenias altas (tiempos cortos), el sistema se comporta como ún sólido.

$$\omega \rightarrow 0; t \rightarrow \infty; \text{Fluido}$$

$$\lambda_0 \rightarrow 1/\omega_c; \text{Viscoelástico}$$

$$\omega \rightarrow \infty; t \rightarrow 0; \text{Sólido}$$

- La función de transferencia real con datos reométricos de sangre con colesterol muestra un comportamiento resonante en el intervalo de [0.001-800] siendo este el pico resonante dominate y para valores mayores, los máximos resonates decrecen considerablemente. Por otra parte, a función de transferencia imaginaria, presenta las clásicas curvas discontinuas que se han encontrado en otros sistemas [49].

- Se demostro que no existe mucha diferencia entre el modelo de Maxwell unimodal y el mutimodal ya que, las curvas resonantes asociadas a la función de transferencia son muy similares). Nótese que la curva resonante dominante se encuentra en el tiempo viscoelástico de cruce por lo que la respuesta entre el fluido Newtoniano y el viscoelástico esta determinado por las propiedades del tiempo de relajación dominante.

24 Trabajo a futuro

A continuación, se presentan algunas de las aplicaciones de flujo pulsátil y puedan ser viables a diferentes ramas de las ciencias:

- Comparar las predicciones teóricas del efecto de los mecanismos cinéticos, viscoelásticos y de ruptura mediante el uso de sangre humana con diferentes patologías humanas, por ejemplo, la hiperglucemia asociada con la diabetes tipo I y II, el hipercolesterolemia asociado con el colesterol alto que afecta a las arterias, el cáncer que es un desequilibrio en la producción de glóbulos blancos y las enfermedades de transmisión sexual [21].

- El análisis del flujo pulsante y oscilante combinado en las funciones de fluidez junto con la disipación viscosa en flujos complejos merece un análisis adicional.

- La extensión a fluidos viscoelástico no lineales, es decir, que se aplique a medianas y altas rapideces de deformación. Un ejemplo de este tipo de ecuaciones constitutivas que describen este régimen es la ecuación reológica de Bautista-Manero-Puig.

- Comprobar las predicciones teóricas de este modelo utilizando datos provenientes de experimentos reológicas en estado estacionario y no estacionario.

- Aplicar el modelo de Maxwell para otro tipo de sistemas complejos como son: Sistemas biológicos que presente las propiedades viscoelásticas del material y que toman en cuenta los mecanismos inerciales.

- Este trabajo se puede aplicar a fluidos micelares utilizados en la extracción terciaria de petróleo. Este tipo de fluidos se inyectan en los yacimientos de petróleo y debido a los gradientes de presión elevados, la roca se fractura y se puede recuperar mayores cantidades de crudo. La solución micelar consiste en una mezcla de tensoactivo, alcohol, salmuera y crudo. Los reactivos químicos empleados, sus concentraciones en los procesos de inyección y los tamaños de los mismos, dependerán de las propiedades de los fluidos y del medio poroso de la formación, así como de las consideraciones económicas correspondientes. Dada la situación actual en el mercado de precio del petróleo, la recuperación mejorada por métodos químicos se constituye una de las principales vías para aumentar el factor de recobro en los yacimientos.

- Implementando esta investigación en la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza en asignaturas como Fenómenos de Transporte, Transferencia de Masa, Flujo de Fluidos, Matemáticas, Laboratorio y Taller de Proyectos entre otras. Ampliando estos conocimientos y llevarlos a la parte computacional y experimental.

Nomenclatura

a	Radio del capilar [m]
G_0	Modulo elástico [Pa]
L	Longitud del capilar [m]
Q	Flujo volumétrico [m^3/s]

Letras griegas

ε	Parámetro de perturbación [1]
η	Función viscosidad [Pa s]
η_0, η_∞	Viscosidades a bajo y alto corte [Pa s]
φ	Función fluidez [1/Pas]
φ_0	Función fluidez a bajo corte [1/Pas]
φ_{app}	Función fluidez aparente [1/Pas]
φ_∞	Fluidez a alto corte [1/Pas]
$d\gamma/dt$	Escalar rapidez de deformación [s^{-1}]
λ	Tiempo estructural [s]
λ_0	Tiempo de relajación de Maxwell a bajo corte [s]
λ_∞	Tiempo de relajación de Maxwell a alto corte [s]
σ_{rz}	Componente rz del tensor de esfuerzos [Pa]
σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz}	Componentes normales del tensor de esfuerzos [Pa]
σ_s	Propiedad material del modelo de Reiner-Philippoff [Pa]

σ_w	Esfuerzo en la pared [Pa]
$\varsigma(II_D)$	Función estructural [Pas]
θ	Coordenada angular [Rad]

Vector, diadas y tensores

$\mathbf{V}$	Vector velocidad [m/s]
$\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}$	Producto diádico del vector de velocidad [m^2/s^2]
$\mathbf{D}$	Tensor rapidez de deformación [1/s]
$\mathbf{f}$	Fuerza de cuerpo [N/m^3]
σ	Tensor de esfuerzos [Pa]
$\mathbf{W}$	Tensor vorticidad [1/s]
$\nabla\mathbf{V}$	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
$\nabla\mathbf{V}^T$	Transpuesta del tensor gradiente de velocidad [1/s]
II_D	Segundo invarante del tensor rapidez de defromación [1/s]
$\lvert\boldsymbol{\sigma}\rvert$	Magnitud del tensor de esfuerzos [Pa]

Otros símbolos

$()^T$	Transpuesta de una matrix [1]
∇	Operador gradiente [m^{-1}]
$\nabla\cdot$	Operador divergencia [m^{-1}]
∇^2	Operador Lapalciano [m^{-1}]
$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$	Derivada convectiva superior del modelo de Maxwell [1/s]
Tr	Traza de una matriz [1]
$\langle\cdot\rangle$	Valor promedio [1]

Glosario

Deformación: Cambio de posición de un punto material a otro.

Ecuación constitutiva: Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación)

Ecuación de continuidad: Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.

Ecuación de movimiento: Segunda ley newton aplicada aun medio continuo.

Esfuerzo en la pared: Esfuerzo evaluado en la pared.

Estado estacionario: Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.

Fluido: Es aquel que al aplicarle un esfuerzo cortante sufre una deformación continua e irreversiblemente.

Fluido biológico: Son las diferentes excreciones y secreciones que provienen del organismo.

Fluidos complejos: Son aquellos que presentan comportamiento reológico en estado estacionario y no estacionario.

Flujo cortante: Flujo que se aplica una fuerza tangencial al sistema que se deforma continua e irreversiblemente.

Flujo homogéneo: Es el flujo en la cual las propiedades del sistema no dependen de la posición.

Fluido incompresible: Fluido que tiene una densidad constante.

Fluido Newtoniano: Son aquellos donde la viscosidad muestra una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.

Fluido no-Newtoniano: La viscosidad no muestra una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.

Flujo oscilante: Es el flujo que se origina cuando un plato oscila a una función periódica.

Flujo pulsátil: Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.

Fluido viscoelástico: Es aquel fluido que tiene una contribución viscosa y otra elástica.

Flujo volumétrico: Volumen por unidad de tiempo.

Frecuencia angular: Se refiere a la frecuencia del movimiento circular expresada en proporción del cambio de ángulo.

Función de transferencia: Relaciona la variable de entrada y salida en un estado dinámico.

Función estocástica: Función probabilística que evoluciona en el tiempo.

Gradiente: Operador matemático espacial que físicamente describe los cambios de la propiedad respecto al espacio.

Modelo de Jeffreys: Ecuación geológica viscoelástico lineal que acopla un solvente con un polímero.

Modelo de Maxwell: Ecuación constitutiva que describe el estado viscoelástico de un sistema en el régimen de rapideces de deformación bajas (viscoelásticidad lineal).

Módulo elástico Está asociado con la energía almacenada en el material, y se mide en pascal.

Módulo viscoso	Está asociada con la energía disipada por el material, y se mide en pascal.
Módulo complejo	Es el módulo del vector obtenido como suma de las contribuciones de los módulos elásticos y viscosos.
Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.
Sangre:	Fluido biológico que presenta dos fases y que es viscoelástico.
Reología:	Ciencia que estudia el flujo de materia y su deformación.
Tensor de esfuerzo:	Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en el cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control.
Tiempo de relajación:	Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo.
Tiempo de retardo:	Es el tiempo en el que tarda el material en llegar al equilibrio debido a la aplicación de un esfuerzo cortante.
Velocidad promedio:	Es la velocidad axial promediada a través del área de flujo.
Viscoelásticidad lineal:	Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.
Viscoelásticidad no lineal:	Es la región a medias y altas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.
Viscosidad:	Es una medida de la resistencia a fluir de un material.

Bibliografía

1. Bird, R.B., R.C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of polymeric liquids*. 1977, New York: Wiley.
2. Herrera-Valencia, E.E., et al., *On the pulsating flow behavior of a biological fluid: human blood.* Rheologica Acta, 2017. **56**: p. 387-407.
3. Phan-Tien, N. and J. Dudek, *Pulsating flow of a plastic fluid.* Nature, 182. **296**: p. 843-844.
4. Phan-Tien, N. and J. Dudek, *Pulsating flow revisited.* Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1982. **11**: p. 147-161.
5. Herrera-Velarde, J.R. and B. Mena, *Viscous dissipation of a power law fluid in a oscillatory pipe flow.* Revista Mexicana de Física, 2001. **47**: p. 351-356.
6. Herrera-Velarde, J.R. and B. Mena, *A note on Newtonian and non-Newtonian oscillatory pipe flow.* Revista Mexicana de Física, 2000. **46**: p. 566-571.
7. Herrera-Velarde, J.R., R. Zenit, and B. Mena, *Measurement of the temperature rise in non-Newtonian oscillatory pipe flows.* Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2003. **109**: p. 157-176.
8. Manero, O., *On elastic effects in unsteady pipe flows.* Rheologica Acta, 1980. **19**: p. 277-284.
9. Lin, Y., et al., *Flow enhancement in pulsating flow of non-colloidal suspension in tubes.* Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2015. **202**: p. 13-17.
10. Moreno, L., et al., *Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood.* Korea-Australia Rheology Journal, 2015. **27**: p. 1-10.
11. Moreno, L., et al., *La sangre humana desde el punto de vista de la reología.* Materiales Avanzados, 2013. **20**.

12. Moyers-González, M.A. and R.G. Owens, *Mathematical modelling of the cell-depleted peripheral layer in the steady flow of blood in a tube*. Biorheology, 2012. **47**: p. 39-71.

13. Moyers-González, M.A., R.G. Owens, and J. Fang, *A nonhomogeneous constitutive model for human blood: Part I. Model derivation and steady flow*. Journal of Fluid Mechanics, 2008. **617**: p. 327-354.

14. Moyers-González, M.A., R.G. Owens, and J. Fang, *A nonhomogeneous constitutive model for human blood: Part II. Asymptotic solution for large Peclet numbers*. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2008. **155**: p. 146-160.

15. Moyers-González, M.A., R.G. Owens, and J. Fang, *A nonhomogeneous constitutive model for human blood: Part III. Oscillatory flow*. Journal of Fluid Mechanics, 2008. **155**: p. 161-173.

16. Apostolidis, A.J. and A. Beris, *The effect of cholesterol and triglycerides on the steady state shear rheology of blood*. Rheologica Acta, 2015. **55**: p. 497-509.

17. Ghasemi, S.E., et al., *An efficient approach to study the pulsatile blood flow in femoral and coronary arteries by Differential Quadrature Method*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2016. **443**: p. 406-414.

18. Kolbasov, A., et al., *Blood Rheology in shear and uniaxial elongation*. Rheologica Acta, 2016. **55**: p. 901-908.

19. El-Shahed, M., *Pulsatile flow of blood through a stenosed porous medium under periodic body acceleration*. Applied Mathematics and Computation 2003. **138**: p. 479-488.

20. Herrera-Valencia, E.E., et al., *Simultaneous pulsatile flow and oscillating wall of a non-Newtonian liquid*. Korea-Australia Rheology Journal, 2016. **28**(4): p. 281-300.

21. Calderas, F., et al., *On the yield stress of complex materials*. Korea-Australia Rheology Journal, 2013. **25**: p. 233-242.

22. Bird, R.B., W.E. Stewart, and E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*. 2002, New York: John Willey & Sons.

23. Welsch, U. and J. Sobotta, *Histología*. 2008, Buenos aires: Educación Médica Panamericana.

24. Mewis, W. and N.J. Wagner, *Colloidal suspension rheology*. 2012, Cambridge: Cambridge University Press.

25. Herrera-Valencia, E.E., et al., *Effect of random longitudinal vibration on the Poiseuille flow of a complex liquid*. Rheologica Acta, 2009. **48**: p. 779-800.

26. Callen, H.B., *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. 1991, Pennsylvania: Wiley.

27. Oehmichen, R.A., *Principios de transferencia de masa* 2007, Ciudad de México: UAM-I.

28. Barnes, H.A., J.F. Hutton, and K. Walters, *An introduction to rheology*. 1989, Amsterdam: Elsevier.

29. Macosko, C.W., *Rheology: Principles, Measurements and Applications*. 1994, Weinheim: Wiley-VCH.

30. Malkin, A.Y., *Rheology: Concepts, Methods, and Applications*. 2017, Toronto: ChemTec Publishing.

31. Mase, G.T. and G.E. Mase, *Continuum Mechanics for Engineers*. 2015, Boca Raton: CRC Press.

32. Narasimhan, M.N.L., *Principles of continuum mechanics*. 1993, New York: John Wiley & Sons.

33. Ferry, J.D., *Viscoelastic properties of polymers*. 1980, New York: John Wiley & Sons.

34. Walters, K., *Rheometry*. 1975, London: Chapman and Hall.

35. Chen, D.L., P.F. Yang, and Y.S. Lai, *A review of three-dimensional viscoelastic models with an application to viscoelasticity characterization using nanoindentation.* Microelectronics Reliability 2012. **52**: p. 541-558.

36. Yamamoto, T., *White-Metzner type viscoelastic model for cellulose nanofiber suspensions based on population balance equations for fiber floc aggregation-breakage.* Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2019. **264**: p. 98-106.

37. Ferrás, L.I., et al., *A generalized Phan-Thien-Tanner model.* Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2019. **269**: p. 88-99.

38. Giesekus, H., *A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility* Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1982. **11**: p. 69-109.

39. Rao, I.J. and K.R. Rajagopal, *Some simple flows of a Johnson-Segalman fluid.* Acta Mechanica, 1999. **132**: p. 209-219.

40. Saramito, P., *A new constitutive equation for elastoviscoplastic fluid flows.* Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2007. **145**: p. 1-14.

41. Bautista, F., et al., *Understanding thixotropic and antithixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. I. The model.* Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1999. **80**: p. 93-113.

42. Caram, Y., et al., *On the rheological modelling of associative polymers.* Rheologica Acta, 2005. **46**(1): p. 45-47.

43. Manero, O., et al., *Dynamics of worm-like micelles: The Cox-Merz rule.* Journal of Non-Newtonian Fluids Mechanics, 2002. **106**: p. 1-15.

44. Manero, O., et al., *A thermodynamic approach to rheology of complex fluids: The generalized BMP model.* Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2007. **149**: p. 22-29.

45. García-Sandoval, J.P., et al., *Inhomogeneous Flow of Wormlike Micelles: Predictions of the Generalized BMP Model with Normal Stresses.* MDPI: Fluids, 2019. **425**: p. 1-15.

46. van de Vosse, F.N. and M.E.H. van Dongen, *Cardiovascular fluid mechanics -Lecture notes-*. 1998, Eindhoven: Eindhoven University of Technology.

47. Middleman, S., *Fundamentals of polymer processing* 1997, New York: McGraw-Hill.

48. Schiesselt, H., et al., *Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions* Journal of Physics A: Mathematical and General, 1995. **28**: p. 6567-6584.

49. Del Rio, J.A., M.L. De Haro, and J.R. Castrejón-Pita, *Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube.* Physical Review E, 1998. **58**(5): p. 6323.

50. Calderas, F., et al., *The Transient Flow of the PET-PEN-Montmorillonite Clay Nanocomposite.* Macromolecular Symposia, 2009. **283**(1): p. 354-360.

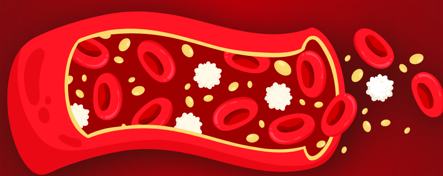
51. Herrera-Valencia, E.E. and A.D. Rey, *Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells* Philosophical Transactions of the Royal Society A, 2014. **372**: p. 1-28.

52. Rey, A.D., M. Golmohammadi, and E.E. Herrera-Valencia, *A model for mesophase wetting thresholds of sheets, fibers and fiber bundles.* Soft-Matter, 2011. **10**: p. 5002-5009.

53. Rey, A.D. and E.E. Herrera-Valencia, *Rheological theory and simulations of surfactant nematic liquid crystals, in Self-Assembled Supramolecular Architectures: Lyotropic Liquid Crystals* 2012, Hoboken: John Willey & Sons.

54. Rey, A.D. and E.E. Herrera-Valencia, *Liquid crystal models of biological materials and silk spinning* Biopolymers, 2012. **97**: p. 374-396.

Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos: Flujo pulsátil de sangre humana



El flujo sanguíneo ha sido tópico de interés tanto para académicos como para profesionales desde comienzos del siglo XVI aunque su dilucidación se remonta a la antigua Grecia debido a Galeno. El descubrimiento del aparato circulatorio, en su tiempo, no solo fue incomprendido sino también condenado. Varios médicos han dedicado su vida entera al entendimiento del sistema circulatorio. Sin embargo llegado el siglo XX, junto con la revolución industrial, el avance tecnológico y la globalización, la descripción del sistema circulatorio no solo quedaba en manos de Médicos sino también de Matemáticos, Físicos, Químicos, Biólogos e Ingenieros, es decir, el sistema circulatorio se volvía un tema multidisciplinar.

Esta obra plantea, desde el enfoque de la ingeniería química, el estado del arte, el diagrama de proceso, el análisis de proceso, el modelado matemático, las simulaciones numéricas, el análisis de resultados junto con las conclusiones, así como el trabajo a futuro del flujo sanguíneo humano. Dicho proceso es aproximado mediante un flujo pulsátil (gradiente de presión pulsátil sinusoidal o cosenoidal) isotérmico-isotrópico de un fluido no newtoniano viscoelástico lineal incompresible en una tubería de paredes rígidas. Se obtienen expresiones explícitas de las propiedades de flujo y se plantea, con una visión inspirada en la teoría del control, una función de transferencia compleja en el espacio de Fourier que relaciona la variable de entrada (gradiente de presión pulsátil) con la variable de salida (flujo volumétrico). Las expresiones anteriores quedan en función de un operador viscoelástico lineal que puede ser sustituido por cualquier modelo mecánico reológico. Finalmente, la función de transferencia compleja es usada para la descripción del flujo sanguíneo de personas con bajo y alto contenido de colesterol, con oclusiones periféricas y con oclusiones centrales cuyo hallazgo principal muestra que el máximo valor de la función de transferencia se relaciona con la frecuencia natural de oscilación del material y su tiempo de relajación.

FES ZARAGOZA

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza,
Campus I. Av. Guelatao No. 66 Col. Ejército de Oriente,
Campus II. Batalla 5 de Mayo s/n Esq. Fuerte de Loreto.
Col. Ejército de Oriente.
Iztapalapa, C.P. 09230 Ciudad de México.
Campus III. Ex fábrica de San Manuel s/n,
Col. San Manuel entre Corregidora y Camino a Zautla,
San Miguel Contla, Santa Cruz Tlaxcala.

http://www.zaragoza.unam.mx

9 786073 064361