ALTERNANCIAS SEMIÓTICAS:

ESTRATEGIA DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

La enseñanza que aporta la historia de las matemáticas

Eduardo Alejandro Escotto Córdova
Editor

PAPIME-UNAM 302915

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

ALTERNANCIAS SEMIÓTICAS:

ESTRATEGIA DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

La enseñanza que aporta la historia de las matemáticas

Eduardo Alejandro Escotto Córdova
(Editor)

PAPIME-UNAM 302915

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza

Datos para catalogación bibliográfica

Editor: Eduardo Alejandro Escotto Córdova.

ALTERNANCIAS SEMIÓTICAS: ESTRATEGIA DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.
La enseñanza que aporta la historia de las matemáticas.

UNAM, FES Zaragoza, mayo de 2021.
Peso: 4.2 Mb.
ISBN: 978-607-30-4478-3.

Diseño de portada: Carlos Raziel Leaños Castillo.
Diseño y formación de interiores: Israel Alvarez Mundo.

Esta obra se realizó con apoyo de la UNAM a través de la DGAPA- PAPIME, clave 302915 y la FES Zaragoza.

Los Autores

Ana María Baltazar Ramos

Lic. en psicología, maestría y doctorado en pedagogía Universidad Nacional Autónoma de México Profesora de tiempo completo asociada C, de la carrera de psicología, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México

Eduardo Alejandro Escotto Córdova

Licenciado en psicología, estudios de maestría en psicobiología, Universidad Nacional Autónoma de México. Maestría y doctorado en Humanidades línea lingüística Universidad Autónoma Metropolitana. Profesor de tiempo completo titular A, de la carrera de psicología, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México

Mauricio Alfredo Ramírez Rodríguez

Lic. en psicología en carrera de psicología, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.

Raúl Ruiz Rocha

Lic. en psicología en la carrera de psicología, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.

Raymundo Serrano Reyes

Lic. en psicología en la carrera de psicología, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.

Índice

Prólogo

Desde 2011 a la fecha, con diferentes proyectos financiados por DGAPA-UNAM, hemos investigado diversas causas involucradas en las dificultades de aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas, particularmente la estadística, en los estudiantes de la carrea de psicología de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, de la Universidad Nacional Autónoma de México. Las primeras investigaciones estuvieron enfocadas en los estudiantes, pero desde el 2015 nos centramos en los profesores, particularmente en los recursos semióticos que utilizan al impartir sus clases.

Las matemáticas son una lengua (un sistema de signos y significados) formal que se enseña con otra lengua, una natural. En el caso del español, se enseñan matemáticas entre los 580 millones de hablantes de esa lengua, 483 de ellos son nativos[1] . El paso del uso la lengua española cotidiana a la lengua formal de las matemáticas es un ejemplo, entre muchos, de lo que llamamos alternancias semióticas: el cambio de un signo por otro para comunicar el mismo significado (en vez de una palabra un dibujo, o en vez de un dibujo un gesto, en vez de un gesto un objeto-estatua) o construir nuevos significados y signos.

Las investigaciones que años antes habíamos realizado nos llevaron a sospechar que los profesores con la reputación de pésimos profesores (“aunque sabe mucho”, expresión común entre los estudiantes) preferían utilizar en todo momento la lengua formal de las matemáticas (figuras, números, gráficas, curvas, ecuaciones, etc.), mientras que restringían el uso de la lengua cotidiana para nombrar las categorías matemáticas, por ejemplo, a la par que escribían en el pizarrón 2x + y, decían “dos equis más ye”, o la usaban para dictar ejemplos y problemas a resolver, o para preguntar “¿entendieron”, ¿hay alguna pregunta”, y temas por el estilo. Por el contrario, los profesores con la mejor reputación solían tener un equilibrio en su uso. Decidimos pasar a investigar sistemáticamente esta sospecha y lo hicimos con el proyecto PAPIME-UNAM 302915 que nos permitió financiar becarios, cámaras de videograbación, congresos nacionales e internacionales, etc.

1 https://www.cervantes.es/sobre_instituto_cervantes/prensa/2019/noticias/presentacion_anuario_madrid.htm

Uno de los productos que se programaron para finalizar nuestra investigación fue este libro. Está enfocado en dos aspectos fundamentales: el primero, la justificación teórica e histórica de la necesidad de utilizar las alternancias semióticas como recurso didáctico y pedagógico en la enseñanza de las matemáticas; el segundo, la aplicación de alternancias semióticas en un curso completo de estadística descriptiva utilizando recursos multimedia, curso dirigido a estudiantes que comienzan a conocer la estadística.

Esperamos que este libro sea de utilidad teórica, didáctica y práctica para los estudiosos de las matemáticas, así como para los profesores y alumnos.

Dr. Eduardo Alejandro Escotto Córdova
2021

Presentación

El manejo sistemático y planeado de las alternancias semióticas como recurso didáctico y pedagógico en la enseñanza de las matemáticas y, en particular, de la estadística, es la propuesta de este libro. Surgió como resultado final del proyecto de investigación: *El uso didáctico del lenguaje natural en la enseñanza del lenguaje formal de la estadística en la carrera de psicología*, financiado por el PAPIME-UNAM PE-302915 (2015-2017). Su responsable fue el Dr. Eduardo Alejandro Escotto Córdova, con la corresponsabilidad del Dr. José Gabriel Sánchez Ruiz, y la colaboración de la Dra. Ana María Baltazar Ramos. Se llevó a cabo en la carrera de Psicología de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México (FES-Z-UNAM).

Este proyecto de investigación fue precedido por otro más (PAPIME: PE302111) en el que exploramos diversos factores psicológicos, neuropsicológicos y epistemológico que contribuyen al bajo rendimiento de los estudiantes de psicología en la materia de estadística. Sus resultados fueron expuestos en revistas y congresos. De nuestras reflexiones se publicó un libro titulado *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: Factores neuropsicológicos, afectivos y socioepistemológicos*, editado por la FES-Z-UNAM en 2011. Los resultados de este proyecto previo nos orientaron hacia la dificultad en la comprensión, el dominio y la aplicación de la lengua matemática (sistema de signos y significados socioculturalmente construido) en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística.

En los tres años que duró la investigación que generó este libro sobre la relación entre el lenguaje natural y el lenguaje formal de las matemáticas, transitamos por varias etapas, y sus resultados fueron publicados en revistas con evaluación de pares y comité editorial. Presentamos nuestros resultados en diversos congresos internacionales de educación, de investigación dentro de la UNAM, de Psicología Mexicana, y de congresos internacionales de matemáticas conocidos como *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.* En la presente investigación comenzamos analizando los recursos semióticos utilizados en cien breves cursos de estadística en YouTube; y pasamos al análisis de los recursos semióticos utilizados por el 50% de los profesores de estadística en la carrera de psicología de la FES-Z-UNAM. Nuestra metodología fue predominantemente cualitativa: entrevistas de alumnos y de profesores, presencia directa en los cursos, filmación de clases con permiso de los profesores y discusiones grupales. En cierto momento también utilizamos cuestionarios de actitudes hacia las matemáticas. Todo ello nos encaminó a los dos objetivos principales de la investigación. El primero, la aplicación planeada de alternancias semióticas como recurso didáctico en la elaboración de un curso multimedia de nociones básicas en la estadística descriptiva, cuyo objetivo último es contribuir a la comprensión de la estadística en los estudiantes de psicología de la FEZ-Z-UNAM. Fue realizado con ayuda de becarios tesistas, el cual se puede consultar gratuitamente en la página oficial de la FES-Z-UNAM (Carrera de psicología-académicos tiempo completo https://www.zaragoza.unam.mx/eduardo-alejandro-escotto-cordova/) curso que estará en permanente revisión para su mejora continua. El segundo objetivo, la elaboración de este libro.

El libro está organizado en dos apartados. El primero, aborda la definición y uso de las alternancias semióticas, así como sus múltiples expresiones en la historia de las matemáticas. Reflexiona sobre la justificación teórica de la utilidad de las alternancias semióticas, ejemplificándola con hechos históricos de las matemáticas. Explica y define las categorías semióticas fundamentales para la comprensión del texto: signo, significado, semiosis, comunicación, lengua, lenguaje, símbolos, etc., y propone una serie de recomendaciones para implementarlas en los cursos cotidianos en la enseñanza de la estadística.

El segundo contiene dos capítulos que abordan ejemplos de la aplicación de las alternancias semióticas utilizando los recursos mínimos de multimedia en una computadora. Se elaboró un curso de estadística descriptiva dirigida a cualquier persona que no tenga conocimientos de ella, o que los tenga superficialmente. Es decir, utilizamos los recursos didácticos mínimos que un profesor de matemáticas, con una computadora, podría construir si utiliza alternancias semióticas con el fin de que los alumnos estudien por su cuenta y en casa. Estos capítulos están basados en una parte de las tesis de licenciatura en psicología de Raúl Ruiz Rocha, Mauricio Alfredo Ramírez Rodríguez y Raymundo Serrano Reyes, quienes fueron becarios en este proyecto de investigación.

El texto tardó en realizarse mucho más de lo acordado debido a múltiples razones y circunstancias personales de uno de los participantes, al grado que quedó fuera del texto proyectado. Esta pausa involuntaria la aprovechamos en el año del 2019 para generalizar el curso a nuevos estudiantes a partir del autoaprendizaje en línea, y obtener sus opiniones sobre las limitaciones o ventajas de dicho curso. El apartado II del texto expone el proceso de construcción de ese curso, y los resultados de las opiniones de los alumnos.

Finalmente, esperamos que las reflexiones teóricas, históricas y prácticas de esta investigación sean de utilidad para los profesores que enseñan matemáticas y, en particular, la estadística, además, aspiramos a que le sirva a cualquier profesor de cualquier disciplina en la cual, el uso de alternancias semióticas puede facilitar la enseñanza y el aprendizaje de sus alumnos.

Hemos implementado las alternancias semióticas para la enseñanza del curso de estadística descriptiva utilizando tecnología y programas multimedia. Esto es una propuesta que cualquier profesor puede utilizar, pero siempre considerando que, el fundamento de este tipo de recurso en la enseñanza de las matemáticas no se reduce a la tecnología, sino que radica en las alternancias semióticas y las etapas de aprendizaje adecuadas, las cuales, sin duda, pueden potenciarse con la tecnología, pero **están en todo ambiente cotidiano**, las utilizamos en cada momento e interacción comunicativa, no importa el nivel de pobreza del estudiante. Saber utilizarlas para la enseñanza de las matemáticas es nuestra propuesta en este texto.

Dr. Eduardo Alejandro Escotto Córdova

SECCIÓN I

Eduardo Alejandro Escotto Córdova

Introducción

¿Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano que es independiente de la experiencia, encaje tan bien con los objetos de la realidad física?
Einstein, 1921[2]

La alternancia semiótica es el uso y cambio de un tipo de signo (palabra, gesto, ícono, figura, esquema, gráfico, objeto, multimedia, video, sonido, color, etc.) por otro, con el objetivo de precisar, o esclarecer, o solo expresar un significado. Las alternancias semióticas (AS) son formas de decir el mismo significado con otros signos, o de establecer nuevos significados con el mismo signo, o de crear nuevos signos para nuevos significados.

Las alternancias potencian al pensamiento, entendido como la *capacidad de anticipar o reconstruir secuenciadamente el curso de los acontecimientos utilizando signos y significados* (Escotto-Córdova, 2000/2012). La destreza para alternar signos y significados ayuda a la generalización de los conceptos; nos prepara para su uso y aplicación en situaciones concretas muy diversas al facilitar la orientación y regulación de las acciones necesarias, y, en la enseñanza de las matemáticas, son fundamentales para distinguir si los alumnos solo realizan una mera reproducción memorística de las definiciones, o comprenden y generalizan los conceptos en la solución de diversos problemas.

Las AS potencian nuestra capacidad de anticipar, es decir, de pensar, y con ello, de representar lo más fielmente posible el curso de los fenómenos de la realidad objetiva. Las curvas de Diofanto (elipses, parábolas, hipérbolas) describen con buena aproximación el movimiento de los planetas, sistemas solares, y cometas; la campana de Gauss predice aproximadamente la distribución de la radiación original del Big Bang; las ecuaciones de la mecánica cuántica predicen aproximadamente la masa del electrón hasta el enésimo decimal (Dehaene, 1997/2016). La capacidad humana para realizar estas predicciones no es solo biológica, en el sentido que baste nacer y crecer con un cerebro sano que permite significar; dicha capacidad predictiva es debida a la creación, uso y modificación

2 Citado en Dehaene, 1997/1916, p. 334.

de signos y significados gestados en el proceso semiósico, es decir, en la construcción social, cultural e histórica de ellos. Gracias a los signos y significados matemáticos, el humano puede ir más allá de la llamada intuición[3] matemática, o *numerosidad* de la que habla Dehaene, la que permite percibir y distinguir pequeñas cantidades a diversas especies de animales vertebrados, a bebés de semanas de nacidos, o adultos con sistemas lingüísticos en los que no se tienen nombres para números más allá del cinco.

Las alternancias semióticas están presentes en toda la historia de los sistemas numéricos y de las matemáticas. Los primeros sistemas de signos-significados numéricos usaron los dedos de manos o pies, incluso incorporando varias partes del cuerpo como signos objetales de cantidades. Algunos de los habitantes actuales del estrecho de Torres, ubicado entre Nueva Guinea y Australia, hasta hace algunos años nombraban los números del uno al treinta utilizando varias partes del cuerpo como lo hacían tradicionalmente. Comienzan con el pulgar de la mano izquierda, pasan por partes del cuerpo y terminan con el pulgar de la mano derecha, es decir, en el número treinta. Algunos pueblos de la selva amazónica en Brasil, como los mundurukú, utilizan la misma palabra para el número cinco que para la mano. Algunos sistemas numéricos se basaron en el número veinte (se conjetura que por los veinte dedos de manos y pies), como los mayas, o los inuit en Groenlandia. La lengua de estos últimos todavía utiliza la palabra "hombre" como unidad de medida para contar 31, cuando dicen "primer dedo del primer pie del segundo hombre", (Gómez, 2019, p. 67).

Las primeras alternancias semióticas en diversas culturas son claras: se transitó de partes del cuerpo utilizadas como signos numéricos a signos escritos u objetales que los sustituyeron, por ejemplo: los sumerios utilizaban piedras que acumulaban en vasijas para llevar las cuentas (de ahí proviene la palabra "cálculo" que significaba *piedra*); los chinos usaron bolitas en su ábaco; los incas hicieron nudos en cordeles con sus quipus; los aztecas, los mayas y los romanos usaron barras y puntos. Algunos de estos sistemas numéricos de barras y puntos tenían el problema que, para sumar o restar, agregaban acumulativamente sus signos, lo que hacía muy problemático contar grandes números,

3 Entenderemos por intuición a la comprensión súbita y no reflexiva de patrones, tendencias y relaciones entre los fenómenos que se perciben. Los teóricos de la Gestalt (Wolfgang Köhler, Max Wertheimer, Kurt Koffka) usaron la misma noción para referirse al insigth, y lo estudiaron experimentalmente vinculado a la solución de problemas (Fascicoli, 2017). Nosotros agregamos que la intuición no es sólo un proceso perceptual dependiente de lo biológico o cerebral, está condicionado por las relaciones semiósicas, culturales, e históricas de quién la ejerce.

como ocurrió con la numeración romana. Al tener múltiples signos para diferentes números (C= 100; CD = 400; M= 1000; 80 = LXXX; D= 500) la escritura de una cifra mayor era engorrosa. Por ejemplo, el número 978 se escribe CMLXXVIII; o el número 1884 se escribe MDCCCLXXXIV (Ibid., p. 69). En distintas épocas y culturas surgieron alternativas a los diferentes sistemas numéricos que tenían este problema. Aparecieron los cuatro sistemas posicionales conocidos: el mesopotámico, con base 10 y 60; el maya, con base 5 y 20; el chino, con base 5 y 10; y el hindú-arábigo, con base 10. Al inicio, las relaciones entre los números que necesitan un cero se representaban por un espacio en blanco creando confusiones. Fueron los hindúes y los mayas quienes inventaron otro signo, el cero (representado de diferente manera) como solución que facilitaba las operaciones numéricas con sistemas posicionales, aunque el mesopotámico lo hizo tardíamente al poner una marca como cero en el siglo III a. C. Además, el uso de dos bases hizo complicado de aprender los sistemas mesopotámico, chino y maya. Fue el sistema numérico hindú el que mostró la mayor facilidad y utilidad para las operaciones numéricas, y pasó al árabe, el que actualmente utilizamos, cuya base es diez, como los dedos de ambas manos. Con este sistema posicional se potenció la rapidez y el alcance del uso de signos numéricos utilizando solo diez del 0, 1, 2… al 9. El signo objetal de los dedos se alternó con el signo gráfico numérico, y, armados con un sistema posicional, se potenció la rapidez y el alcance del pensamiento matemático. Así funcionan las alternancias semióticas, esclarecen la comprensión, facilitan la rapidez de los análisis y potencian la capacidad de anticipar.

Actualmente, la alternancia semiótica más utilizada, el signo igual «=», refiere signos diferentes que son equivalentes, por ejemplo, x = 2, expresión matemática, que lleva tres signos, tiene otras dos alternancias semióticas frecuentes: con **la voz**, (signos fónicos), y **la escritura** (signos gráficos de un alfabeto) “*equis es igual o equivalente a dos*”.

Todas estas alternancias semióticas evidencian su utilidad en el aprendizaje y en la vida práctica cotidiana. Un ejemplo inmediato de las ventajas de las alternancias semióticas se da entre las palabras de un idioma para nombrar los números y los signos gráficos de éstos. En inglés, francés y español utilizamos nombres propios para los números del 1 al 29, pero no los chinos. Las consecuencias prácticas se han evidenciado en investigaciones recientes, las cuales han demostrado que los niños chinos aprenden más fácilmente y a mayor velocidad la numeración, que los niños de estos países occidentales: “A los cuatro años un niño estadounidense es capaz de contar con facilidad hasta quince…un niño chino logra contar hasta cuarenta” (Gómez, 2019, p. 74). Si a esto agregamos que las palabras de números en chino son de una sílaba, mientras que en inglés o el español no, la complicación idiomática de nombres de números también explica la diferencia. Otra peculiaridad en la lengua china para referirse a los números facilita la asimilación del sistema numérico. En chino, once se expresa como diez y uno, lo que ayuda a la comprensión del sistema decimal. Cuando esta forma de expresar los números (alternancia semiótica) se juzga desde otra perspectiva cultural, da como resultado que en la cultura china esa forma es un acierto, mientras que en nuestros países es una falla de un niño, como lo explica Gómez (*Ibid.*, p. 75): "…el tipo de error que cometen los niños estadounidenses al contar…serían aciertos en chino (…14 diez y cuatro/ *tenty four*)." Por cierto, la forma idiomática china de decir "10 y 2" en vez de "doce" como en español, tiene que ver con otra alternancia semiótica: el uso del ábaco chino que fue mejorado por el ábaco japonés. Ambos ábacos (formados de madera, aunque pueden ser de cualquier material) son un rectángulo que se divide horizontalmente en dos secciones por un trozo madera que va del lado izquierdo al lado derecho formando dos rectángulos de la misma longitud, pero de diferente altura. El de abajo es más alto. En la sección superior quedan piezas de madera circulares incrustadas en un palito de madera: una en el ábaco japonés, o dos en el ábaco chino. En la sección inferior, hay cuatro (japones) o cinco (chino) de las mismas piezas incrustadas en el mismo palito de madera. El ábaco chino mejorado por los japoneses permite realizar operaciones aritméticas muy rápidamente, incluso con menos movimientos que una calculadora electrónica. Si escribimos 10 + 10 = en una calculadora, realizamos seis movimientos de teclas, mientras que en el ábaco japonés sólo uno, que incluye desplazar simultáneamente dos piezas de madera. Desde la perspectiva de las alternancias semióticas con signos-objetos (piezas circulares de los ábacos chino y japonés), el cambio japonés fue una A.S. que potenció la rapidez de las operaciones y los cálculos. Otra ventaja de las alternancias semióticas.

Los ejemplos de sistemas numéricos y sus representaciones sígnicas (partes del cuerpo, palabras, signos matemáticos, sistemas posicionales con el cero incluido, signos-objetos en ábacos) tienen en común la facilidad, rapidez y potencia anticipatoria con que se realizan las operaciones numéricas utilizando alternancias semióticas, es decir, consecuencias claras de los avances culturales. El cerebro es el mismo, pero las herramientas sígnicos-culturales son otras, lo que apoya la tesis de los psicólogos rusos

Lev. S. Vigotski y Alexander Luria (Vygotski y Luria, 2007) de concebir a los signos como *herramientas o instrumentos*[4] cognitivos. Obsérvese la lentitud y dificultad comparada con la rapidez y facilidad de escribir números romanos y arábigos:

I	1
XXVIII	28
CCLXXX	280
MMMDCCC	3800

La tesis de que los signos y significados son herramientas cognitivas se confirma cuando, registrando la actividad cerebral con Resonancia Magnética funcional (RMf) en niños y adultos, se evidencia que un cerebro inmaduro puede hacer las mismas operaciones aritméticas que uno maduro si utiliza signos y significados. En general, para la realización de un algoritmo como suma o resta, en ambos se activan las mismas zonas. Regiones del lóbulo occipital, giro angular, parietal superior. Antes de la activación del parietal, se activan zonas prefrontales (Gómez, 2019). Estas se activan sin importar la edad, pero en los niños pequeños, esta zona prefrontal está inmadura y suele alcanzar su maduración después de la adolescencia terminando en los primeros años de la década de los 20 (Flores,2006; Molina, 2017). Una de las funciones del prefrontal es la memoria de trabajo, un tipo de memoria que se activa simultáneamente cuando trabajamos realizando otra actividad, permitiéndonos ejecutar la tarea a la par que recordamos información pertinente durante el proceso de llevarla a cabo. Por ejemplo, para sumar *mentalmente* 27+ 59, comenzamos con 7 + 9 =16, ponemos en nuestro "pizarrón mental" 6, y *llevamos* 1. Éste se mantiene activado en la memoria de trabajo mientras agregamos 2+5 (1+2+5= 8), resultando 86 como el total.

4 Algunas personas tratan las tres palabras (herramientas, instrumentos, utensilios) como sinónimos, quizás porque prácticamente todo lo que nos rodea en las ciudades son productos del trabajo, pero no lo son etimológicamente. Hay, entre sus diversas etimologías, una que es fundamental: las herramientas e instrumentos son construidos, los utensilios son objetos naturales que solo se usan, y no necesariamente son construidos. Este matiz etimológico es pertinente para analizar casos como cuando los chimpancés agarran una varita para sacar termitas, ellos usan un utensilio, no una herramienta (objeto hecho de hierro) o un instrumento (objeto hecho de varias partes constitutivas).

¿Cómo realizan estas sumas los niños si su corteza prefrontal no está madura por completo y su memoria de trabajo no es la óptima? Escribiendo el número 1 arriba del 2, es decir, utilizando la escritura como una alternancia semiótica externalizada a la actividad mental. En otras palabras, aún con condiciones biológicas diferentes a las de un adulto, un niño puede realizar la misma operación ayudándose de herramientas sígnicas. La clave de esta igualación operativa entre niños y adultos son los signos y significados como alternancias semióticas, en vez de utilizar los signos fónicos (palabras) y recordarlos, utilizan signos escritos minimizando al máximo la carga de memoria de trabajo.

Otro ejemplo de alternancia semiótica, pero que deja dinero para vivir, es el que utilizan los calculistas como Alberto Coto, que realiza operaciones numéricas mentales de cien dígitos individuales en 17 segundos. Él solamente utiliza un nuevo método (un algoritmo -secuencia de signos- utilizado como herramienta cognitiva) para realizar operaciones. Por ejemplo, las multiplicaciones las realiza en cruz, que le facilita menor carga en la memoria de trabajo al ejecutarlas (Gómez, 2019, pp. 80-81). No es necesariamente un poderoso cerebro superior al nuestro; pero si es un poderoso recurso semiótico como herramienta cognitiva que nosotros no utilizamos.

En los sistemas numéricos actuales hay tres alternancias semióticas comunes: los signos de las palabras al hablar (signos fónicos), los signos de las palabras al escribirlas (signos gráficos de signos fónicos cotidianos), y los signos numéricos y de operaciones (ambos son signos gráficos que se dicen también con signos fónicos). Los efectos en el aprendizaje cuando se utilizan solo estas tres alternancias semióticas son claros: muchas personas se aprenden fácilmente los signos al verlos; otras necesitan hablar en voz alta para asimilar lo que aprenden, y la mayoría de nosotros, al escribir, consolidamos lo aprendido. Los tres ejemplos son alternancias semióticas, y ninguna excluye a la otra.

Las AS ocurren en el uso cotidiano de las lenguas naturales con los sinónimos, pero quizás las más utilizadas son las metáforas, las analogías, las metonimias, las sinécdoques u otro recurso retórico parecidos, que son acompañadas de gestos faciales, movimientos de las manos, y actuando corporalmente, por ejemplo, al decir "ni modo". Por cierto, los emoticones son otra alternancia semiótica de estos gestos; también están aquellas cuando se dibuja, o se pinta, o se realiza una escultura o modelo de algo que se quiere representar; o cuando hacemos un esquema o gráfico para visualizar un proceso cambiante; o cuando se explican conceptos científicos abstractos utilizando recursos multimedia, videos-películas, o fotografías. Las alternancias semióticas ocurren cada vez que, en una disciplina científica, o en las prácticas socioculturales, o en las interacciones cotidianas, se utilizan otros signos para viejos o nuevos significados. En cualquier caso, siempre se potencian los alcances conceptuales, en tanto que los signos y significados son herramientas cognitivas que los humanos utilizamos para conocer al mundo y a nosotros mismos, más allá de nuestras sensopercepciones (Vigotski y Luria, 2007). Las matemáticas son el ejemplo perfecto para ilustrar la función de herramienta cognitiva en el sentido de conocimiento[5], que tienen los signos y significados organizados en sistemas en constante cambio y desarrollo.

La historia de las matemáticas puede ser analizada a través de sus alternancias semióticas. El desarrollo de las matemáticas la llevó a perder la ingenua creencia de que sus sistemas numéricos, sus primeros axiomas y postulados, eran únicos y que expresaban el lenguaje de la naturaleza o el de los dioses. Todavía en el siglo XIX, había matemáticos que sostenían que ellas eran parte del lenguaje con el que Dios construyó al mundo. No fue así. La diversidad actual de los sistemas numéricos, la diversidad de sistemas "matemáticos" (sistemas de signos y significados), las paradojas de su fundamentación lógica, y la puntilla dada por los teoremas de incomplitud o incompletitud de Kurt Gödel (1906-1978), quien utilizó otra alternancia semiótica, los números de Gödel, la han llevado a perder la certeza de la "verdad" de sus viejas creencias (Kline, 1980/1985; Piñeiro, 2012).

5 El término "cognitivo(a)" tiene actualmente dos sentidos frecuentes: (a) el tradicional de conocimiento, y, (b) el de procesamiento de información en el sentido de conversión de señales. Este surgió de la teoría matemática de la información y fue trasladado a la psicología llamada "cognitiva", surgida en los Estados Unidos de América a mediados del siglo XX. Es decir, es una concepción particular de cómo ocurren los procesos psicológicos y del conocimiento en la cual el cerebro es, metafóricamente, como una computadora porque convierte una señal en otra y las trasmite. La conversión de señales bioeléctricas en el sistema nervioso es un hecho confirmado, pero la metáfora computacional es hoy muy desafortunada. Dicha concepción del psiquismo, mente o cognición no es la nuestra. Si lo psicológico se explicara tan simplemente por la conversión de señales, entonces el proceso fisiológico de formación de orina sería un proceso psicológico o del conocimiento, pues también existe conversión de señales bioeléctricas; también lo sería toda la conversión de señales que ocurre en el interior de una sola célula en tanto hay conversiones biológicas y fisicoquímicas, ya sea en el riñón, en el pulmón, en el bazo, etc. Nuestra concepción no niega que ocurra conversión de señales en el cerebro. Estas ocurren en el cerebro humano como en el de los insectos, pero es obvio que existen diferencias enormes en el psiquismo. El psiquismo humano se explica mejor comprendiendo su peculiaridad: es de origen semiósico, social, cultural, e histórico, cuya expresión es individual o personal.

Lo que Gödel hizo fue asignar un número natural a cada enunciado aritmético, a cada función proposicional y a toda demostración. Un ejemplo hipotético sería: 4=2+2 (número 67), "x es par" a lo que asignó el número 720, y a su demostración le asignó el número 320. Con ello logró que todo enunciado aritmético y su demostrabilidad se refiriera a un número, lo que equivalía a ser caracterizado por una propiedad aritmética bien definida sujeta a suma, el producto y las operaciones lógicas. En consecuencia, todo enunciado aritmético se refiere a otro enunciado aritmético, pero, cuando se refiere a sí mismo (autorreferencial), aparecen problemas. La expresión sintética de todo eso fue: "«ser demostrable» es expresable" (Piñeiro, 2018, p. 74).

Su propuesta la expuso en el congreso matemático en Königsberg el 7 de septiembre de 1930 y la publicó como artículo en 1931 (Piñeiro, 2012). Gödel revolucionó la fundamentación lógica de las matemáticas, y pese a su platonismo, no pudo evitar sus consecuencias destructoras de la vieja certeza en ellas. Las contradicciones y paradojas que se evidenciaron a partir de finales del siglo XIX y a principios del siglo XX, adquirieron la forma de polémicas entre intuicionistas versus lógicos, y entre lógicos y pragmáticos. Ello llevó a evidenciar uno de sus rasgos peculiares: **sus conjeturas más interesantes no tienen comprobación empírica, sino demostración lógica**. Por ejemplo, nadie, nunca, podrá contar todos los números primos existentes y comprobar empíricamente que son nones, pero sí se puede demostrar lógicamente que no son pares. Esta peculiaridad de las matemáticas lleva a muchos de sus desarrollos teóricos a tener paradojas, expresando así una distinción no fácil de comprender por aquellos que creen que un argumento lógico es siempre real, lo cual no es cierto. Dicho a nuestra manera, en las matemáticas podemos encontrar que:

1.Tienen algunas predicciones lógicas, pero irreales.

2.Tienen algunas argumentaciones ilógicas o paradójicas, pero reales.

3. Tienen algunos sistemas lógicos o consistentes, pero incompletos.

De la primera, es un ejemplo la predicción matemática de que se puede regresar en el tiempo, aunque no exista evidencia empírica alguna de que eso haya ocurrido o esté ocurriendo, además de que contradice la segunda ley de la termodinámica, y, desde la gran explosión (*Big Bang*) a la que se atribuye el universo, no hay rastro alguno del regreso temporal en él, mucho menos con la misma secuencia temporal. Otro ejemplo es el de los "número normales" definidos por el francés Émile Borel (1871-1956) como aquellos cuyas cifras decimales se comportan estadísticamente como si fueran al azar. Se conjetura que √2 = 1.4142135… es uno de ellos, así como los es π = 3.1415926… Borel no se contentó con definirlos, sino que demostró lógicamente que eran infinitos. El único problema es que hasta ahora no se ha encontrado ningún ejemplo de esos números (Piñeiro, 2010-11). Otro ejemplo de ello es que, si aceptamos que la realidad objetiva tiene tres dimensiones como en el volumen (con Einstein agregamos la cuarta, el tiempo), entonces volumen se puede expresar con signos matemáticos y figuras geométricas como:

x3 =

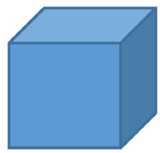


Figura 1. Alternancia semiótica entre signos algebraicos y figuras geométricas.

Si usamos los signos matemáticos, se acepta que $\mathbf{x^3}$ equivale a tres dimensiones, entonces es posible sostener que hay $\mathbf{x^n}$ es decir, tantas dimensiones como "n", lo que lleva a muchos físicos a la tesis de que existen muchas otras dimensiones matemáticamente mostradas, pero empíricamente desconocidas. No existen en la realidad objetiva conocida. Solo es una conclusión lógica producida por el sistema matemático.

De la segunda, (argumentaciones ilógicas o paradójicas, pero reales) el ejemplo más contundente son las paradojas como la de Zenón: "el corredor" o "el lanzamiento de una piedra". Para que pueda llegar a su meta el corredor, debe primero recorrer la mitad del trayecto o del tiempo (según se prefiera), pero para hacerlo, debe recorrer la mitad de la mitad, y para esto, debe hacer lo mismo (la mitad de la mitad de la mitad), así hasta el infinito. Si es infinito, nunca llegará a la meta. Es más, nunca sale de la meta, como tampoco una piedra si la lanzáramos, ésta nunca saldría de la mano por las mismas razones lógicas (Piñeiro, 2013). **Eso es lógico, pero no real**: toda piedra lanzada llega a un lugar; todo corredor llega a la meta.

La paradoja de la paradoja en lógica, como en matemáticas, es que no importa cuantas contradicciones se hayan encontrado dentro de los diversos sistemas, lo cierto es que muchos de estos siguen ajustándose y prediciendo el mundo físico en astrofísica, en electromagnetismo, en física atómica, en ingenierías, etc. La razón es sencilla: **no toda verdad lógica es real, pero lo real siempre es lógico**.

Ambas tesis (1 y 2) son verificables sin necesidad de ubicarse en el campo de la polémica entre matemáticos: intuicionistas o logicocistas[6]. La historia de las matemáticas muestra la confirmación de las dos tesis anteriores, y sólo vino a ratificar lo que ya era obvio desde Aristóteles, pero que el error de creer que todo lo lógico es real impide entenderlo: hay argumentos lógicamente verdaderos, pero aquello de lo que predican no existe. El silogismo: *todos los marchichóras*[7] son mortales, *Juan es un marchichóras, Juan es mortal*, es lógicamente verdadero, pero los marchichóras no existen. Por supuesto, hay muchos silogismos lógicos cuyo contenido de lo que predican es real.

De la tercera (sistemas lógicos o consistentes, pero incompletos) está el teorema de la incomplitud de Gödel: "…si una teoría formal T que abarca los números enteros es consistente, entonces es incompleta" (Klein, 1980/1985, p. 315), lo que implica salirse de un sistema de signos utilizando otro sistema de signos (un método o conjunto de sistema lógicos representados en la aritmética), que no es otra cosa que una alternancia semiótica. Kurt Gödel (1906-1978) utilizó los ahora llamados números de Gödel.

La historia de las matemáticas que describe las controversias entre logicocistas, intuicionistas, formalistas, conjuntistas etc. tienen de fondo la creencia de que la existencia de los objetos matemáticos surgidos de cierta secuencia lógica es equivalente a su existencia en la realidad objetiva. Es decir, de la confusión entre lo lógico y lo real. Confusión que tiene su origen en la exactitud de muchos sistemas de signos-significados matemáticos para describir con increíble precisión el mundo físico. A partir de estos éxitos, se generaliza que toda creación matemática debe ser real, y eso es falso, aunque sea lógicamente fundamentada dicha creación u objeto matemático. Además, ha generado la controversia epistemológica de si las matemáticas reflejan la realidad, o la crean; de si las matemáticas reflejan al mundo objetivo, o el mundo objetivo son una creación de las matemáticas, vale decir, de su lógica. Controversia que actualmente se asume como constructivismo versus realismo, pero que es tan antigua como la tesis idealista de Berkeley en 1710 de que la realidad objetiva no existe sin el sujeto que la percibe, a la que se confrontó el materialismo de John Locke; y en el siglo XX y XXI, la polémica entre materialismo e idealismo que el libro de Lenin (1908/1976) explica, para su época, excelentemente.

6 Los intuicionistas sostienen que las matemáticas tienen su fundamento en la intuición, y rechazan toda reducción de ellas a la lógica. Los logicocistas sostienen lo contrario, básicamente intentan reducir todas las matemáticas a la lógica.

7 El marchichóras es un animal mitológico que Eleano (s. II a. C.) describe como creencia de su época.

El asunto de fondo es si la realidad objetiva existe independientemente del sujeto o es una creación de su discurso lógico. Por supuesto, nosotros sostenemos que la realidad objetiva existe al margen e independientemente de nuestro conocimiento, pero que la llegamos a conocer **no sólo** sensomotriz y perceptualmente, sino que comprendemos y conocemos sus regularidades mediante los sistemas de signos y significados que nos permiten ir más allá de nuestros sentidos. El conocimiento humano es una unidad dialéctica entre lo percibido y lo concebido con signos y significados, confirmado o rectificado mediante la práctica transformadora de lo real. El humano cuando percibe juzga, y sus juicios orientan su percepción. Distinguir entre ambos es un esfuerzo reflexivo entre los hechos y sus explicaciones, esfuerzo que se verifica, rectifica, o se confirma gracias a la práctica transformadora de lo real.

Desde nuestro punto de vista, la explicación a estas controversias en matemáticas y lógica tiene que ver con las propiedades de los signos y significados insertos en sistemas semióticos en general, y su explicación, que ahora no es pertinente, la exponemos en otro texto en preparación[8].

Pese a estos “detalles” entre lo lógico y lo real, es un hecho de que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son vitales para la sociedad actual. Existen pocas cosas o fenómenos que no tengan que ver con los sistemas semióticos matemáticos, y al utilizarlos debemos tener presente siempre que no toda verdad lógica es real, pero lo real siempre es expresable lógicamente.

Nuestra propuesta

Proponemos hacer del dominio diestro de las alternancias semióticas ***bidireccionales*** (de signos-significados NO formales a los formales, y viceversa), el recurso central en la enseñanza de las matemáticas. Entenderemos por ***recursos semióticos NO formales*** a todos aquellos que no sean signos-significados de la lengua matemática, pero que permiten referirnos a ellos de otra manera. En consecuencia, ***los recursos semióticos formales*** son todos los signos y significados utilizados en las matemáticas.

8 Escotto-Córdova, E. A. *Intención y signo, comunicación y lenguaje. Sistema de Categorías de la Comunicación Semiósica.* (En preparación para su impresión). Las definiciones de las categorías semióticas utilizadas más adelante se explicitan y justifican ese texto.

Las virtudes de las alternancias semióticas son muchas, destacaremos las más evidentes:

a) Esclarecen el significado de signos, ya sean nombres, conceptos o categorías (ver definiciones más adelante).

b) Facilitan el aprendizaje de quien se acerca por primera vez a un tema complejo.

c) Potencian el alcance del pensamiento y aumentan la rapidez de los análisis.

d) Son el camino natural, y más fácil, para transitar del lenguaje no formal al lenguaje formal de las matemáticas, y a la inversa, "elevarse" de la representación fenomenológica perceptual a la abstracta, ya sea conceptual y/o categorial, de la lengua matemática.

e) Las alternancias semióticas suelen generar nuevos significados, ampliar los conceptos y las categorías, y potenciar el alcance del pensamiento científico teniendo gran repercusión en el desarrollo de las teorías científicas, particularmente de las disciplinas formales como las matemáticas.

Definiciones necesarias en el uso pedagógico de las alternancias semióticas

La definición de *comunicación, intención, lenguaje, lengua, habla, semiotización, semiosis, signo, significado, sentido, efectos del signo, símbolo, ícono, nombre, concepto categoría y semántica de los signos* es un requisito teórico y conceptual para comprender el alcance de este texto; lo es también, en un sentido más amplio, para potenciar su uso en otras disciplinas científicas, o precisar la comunicación en la vida cotidiana.

Definiremos **comunicación** como la percepción de las intenciones de otro individuo, sea de la especie animal que sea. Todas las especies de animales se comunican, es decir, evidencian sus intenciones. Entenderemos por intención, a toda conducta, expresión corporal y orientación espacial del cuerpo, o alguna de sus partes, que es dirigida a una meta u objetivo. Entendidas así, las intenciones se perciben, y cuando eso ocurre hay comunicación: uno o más individuo(s) percibe(n) las intenciones de otro(s). Cuando un individuo se dirige a una meta sin que nadie más lo perciba, hay intenciones, pero no comunicación. Sin embargo, es frecuente que alguien perciba las intenciones del otro, pero no al revés, es decir, que éste último no perciba la intención del primero, como cuando vemos con binoculares a un automóvil que marca con luces su intención de dar vuelta a la derecha, pero el conductor no sabe que lo vemos. Decimos entonces que hay comunicación para uno, pero no interacción comunicativa entre ambos.

Entendemos por **interacción comunicativa**, a la percepción mutua de intenciones entre dos o más individuos que permite ajustar las intenciones de cada uno de ellos por la percepción de las intenciones del, o los, otro(s). Las interacciones comunicativas forman el diálogo verbal y corporal entre humanos, y corporal entre otros animales.

Las intenciones, la comunicación y la interacción comunicativa ocurren en todas las especies de animales, pero en el humano hay tres procesos más. El primero, es el **autocontrol de la expresión de ciertas intenciones**, que se manifiesta por intenciones ocultas, enmascaradas por otras intenciones. Por ejemplo, el investigador antropológico que asiste intencionalmente a realizar un ritual religioso como cualquier creyente, pero con la intención oculta de conocer los rituales de sus feligreses, y no con la intención de rezarle a un dios. El segundo consiste en la **intención comunicativa**, entendida como una intención inicial para comunicar otra intención. Un ejemplo cotidiano ocurre cuando nos acercamos a una persona, saludándola amable y cortésmente, con la intención de llamarle la atención de otra intención, seducirla. Ambas intenciones son evidentes y manifiestas por el contexto y las manifestaciones corporales y paralingüísticas como el tono de voz, volumen de ésta, miradas, distancias, etc. En caso de reclamo, una de ellas, la seducción, puede ser negada en cualquier momento apelando a la primera intención, cuya forma cortés de acercamiento con palabras amables y respetuosas, justifica decir que fue sin intención seductora. La tercera consiste en **la atribución de intenciones** al otro, ya sean reales o falsas. Un caso ilustrativo, usando el ejemplo anterior, sería que la primera persona, en vez de *percibir* intenciones seductoras, *atribuyera* el saludo cortés a otra intención, la de robarla.

Las alternancias semióticas son un recurso consustancial al **lenguaje**. Lo concebimos como la capacidad biológica-cerebral de crear, modificar y usar signos y significados como medio de comunicación de la especie *Homo sapiens*[9]. La capacidad biológica para crear signos y significados implica que ha estado, y está presente, en todos los individuos de la especie *Homo sapiens*, en cualquier región geográfica, en

9 El Homo Neandertal es considerado *Homo sapiens,* es decir, de la misma especie porque pudieron reproducirse sexualmente entre ellos, al grado que muchos humanos comparten actualmente genes de esa especie (Cela y Ayala, 2013), por cierto, los europeos son los que tienen más proporción de esos genes. Algunos investigadores suelen distinguir a nuestra rama biológica como *Homo Sapiens sapiens.* Los datos que apuntan a que el Neandertal enterraba a sus muertos incluyéndoles flores, hace suponer que tenían representaciones sígnicas con sus respectivos significados.

cualquier grupo social, y en diferentes tiempos históricos de la existencia de la especie. Es decir, tiene un fundamento genético. Sin embargo, los signos y sus significados no son biológicos, sino una construcción sociocultural e histórica (cambia en cada pueblo y época), sean estos aislados (un signo), o como conjunto ocasional y desorganizado (varios signos sin relación orgánica entre ellos), o como sistema (como un **idioma o lengua**). Cualquier **signo-significado** existente hasta ahora es histórico, depende de una época específica y se transforma en el tiempo; también es sociocultural, depende de comunidades sociales concretas, en regiones geográficas específicas y patrones culturales propios. La manifestación más acabada del lenguaje son las **lenguas o idiomas naturales**, a las que concebimos como sistemas de signos social, cultural e históricamente determinados con las que se comunican los grupos humanos, las cuales tienen **propiedades lingüísticas:** fonética (las habladas) y/o fonología, léxico, morfosintaxis, semántica y pragmática (propiedad que depende del uso en contexto) (Escotto-Córdova, 2013). **Las lenguas naturales** son las que forman los idiomas con que nos comunicamos desde el nacimiento con nuestros familiares y comunidades socioculturales. Su aprendizaje no requiere entrenamiento especializado, basta su uso en contexto familiar y social para su dominio. Frente a las lenguas naturales, existen también **las lenguas de señas, las lenguas escritas[10], y las lenguas formales**, todas construidas socioculturalmente como sistemas de signos que deben aprenderse con un entrenamiento especial. Entre las lenguas formales destacan la matemática, la lógica, la química, las computacionales, etc.

Toda lengua es, o fue, un sistema de signos en uso comunicativo, pero no todo conjunto de signos producido con el lenguaje es una lengua. Los emoticones (caras dibujadas en forma simplificada para comunicar emociones en el teléfono o la computadora) son signos, pero no son, aún, un sistema de signos con propiedades lingüísticas, es decir, no son una lengua o idioma. Al parecer, hay indicios de ese tránsito en la medida en que se hacen más complejos y variados los emoticones, los *stickers*, los *gifts*, como si nos acercáramos a la construcción de una lengua ideográfica como el chino, con nuevos signos para expresar emociones. Y como el chino, son cientos de esos signos gráficos.

Definimos **signo** como cualquier ente material que está en lugar de algo para alguien, o que alguien usa para que esté en lugar de algo para alguien. En tanto ente

10 Distinguimos las lenguas escritas con el fin de evidenciar el fenómeno lingüístico de aprender a leer en un idioma extranjero, pero sin poder hablarlo con sus propiedades fonéticas, fonológicas, y gramaticales.

material, los signos pueden adquirir la forma **fónica** (las palabras, incluida la prosodia); **gestual** (posturas corporales, movimientos, expresiones faciales o manuales, miradas, distancia entre interlocutores, etc.); **gráfica** (escritura, dibujo, pintura, grabado, etc.); **objetual** (grabados, objetos religiosos como el cáliz cristiano o el candelabro judío, estatuas, banderas, o piedras como la roca de granito negro en la Meca[11], o formaciones geológicas como el Uluru, monolito rojo de arenisca en Australia, etc.); o de una **señal**, definida como cualquier cambio físico en un ente material. Es el caso de los cambios de iluminación de un faro que, no solo señala la ubicación de la costa, sino también, suele decirse de esa señal: "ahí está el faro". Una sinécdoque o alternancia semiótica.

El significado de cualquier signo es todo aquello a lo que refiere y sustituye el ente físico utilizado, sea lo sustituido algo físico o conceptual, sea perceptible o concebible abstractamente. Con la frase "todo aquello" apuntamos al fenómeno semiósico y semiótico del uso en contexto e intencional de los signos el cual varía con suma rapidez ampliando o restringiendo su significado. A esta propiedad del significado cambiante por su uso intencional y en contexto (el momento histórico-cultural y personal en que se usan) y circunstancia (en momento puntual, cara a cara, en que se usan) comunicativos lo llamamos el ***sentido*** del signo. La interacción entre el significado y su sentido comunicativo está en la base del doble sentido en los albures mexicanos, en los chistes, en la poesía, en las metáforas verbales, en la sinécdoque, en la ironía o el sarcasmo, en las fábulas, o en los refranes. Es un proceso sociocultural e histórico de modificación del sentido y significado de los signos, el cual debe de considerarse en todo análisis filológico de textos, en la comprensión de signos antiguos egipcios, chinos, aztecas, olmecas, y de otras culturas, y por supuesto, en todo análisis hermenéutico. Tomar en cuenta estas consideraciones impide atribuirles a los nazis el signo gráfico de la cruz gamada, presente en muchas culturas durante milenios, y darle solo el sentido comunicativo que ellos, y su guerra racial, le dieron en su época (supremacía aria). O tomar signos representacionales recurrentes en muchas culturas, épocas y regiones como son los puntos, los círculos, las figuras geométricas, los árboles, las rocas, las montañas, los astros etc. como si tuvieran el mismo significado y sentido universal en toda época, región, cultura y lengua existentes desde el inicio de la humanidad, como lo plantean las fabulaciones psicoanalíticas de Carl Jung. Todo signo y su significado son históricos, no atemporales ni universales. Mucho menos han sido transmitidos genéticamente en el fantasioso "inconsciente colectivo" y los arquetipos de Jung (1934/2015).

11 Ciudad natal de Mahoma ubicada al oeste de Arabia Saudita, lugar fundamental para las peregrinaciones de los musulmanes.

Los signos pueden ser de dos tipos generales: **iconográficos** (son semejantes a aquello que sustituyen, por ejemplo, una foto, una estatua, un dibujo naturalista, etc.); **o abstractos** (nada en el signo como ente físico es similar a lo que significa o sustituye), por ejemplo, la palabra "sal" ni es blanca, ni salada, ni granulosa (Escotto-Córdova, Sánchez-Ruiz, y Baltazar-Ramos, 2018; Escotto-Córdova, 2013).

Cuando el signo está en lugar de algo para alguien individual, al proceso le llamamos **semiotizar**. Decimos que un sujeto semiotiza cuando crea, usa y modifica signos ***para él***. Por ejemplo, cuando un individuo pone un color rojo en un recipiente de plástico con el cual refiere que ahí hay azúcar, sin que nadie más sepa a qué se refiere el color de la etiqueta. Cuando el signo es usado por alguien con la intención de que esté en lugar de algo para alguien, lo que supone que ambos lo aceptan como signo, decimos que los sujetos interactúan semiósicamente. La **semiosis** es la creación, uso y modificación sociocultural de signos y significados; presupone, al menos, dos o más individuos.

El signo, sus significados y sus sentidos siempre son históricos y culturales, es decir, dependen de una época, una región, una cultura, un grupo social, una lengua y de vivencias específicas, por lo tanto, están en constante cambio. Mientras que la capacidad para crearlos, usarlos y modificarlos es biológica, y ha estado presente en todas las épocas, regiones geográficas y grupos sociales de la especie *Homo sapiens*. El cuerpo-cerebro de éste es la base biológica de la capacidad para crear signos y significados socioculturalmente en interacción con otros, por otros, para otros, hasta para nosotros mismos como si fuéramos otro (el lenguaje interno o diálogo interior).

Los signos son los elementos esenciales del lenguaje y de toda lengua o idioma. En todos los casos, aquello que es sustituido por el signo es su ***significado o referente, y su uso le da un sentido: un significado dependiente de la intención comunicativa en contexto y circunstancia***. Ello permite que un mismo signo tenga distintas funciones referenciales y comunicativas.

Cuando el signo tiene la propiedad de nombrar a un ente, su función comunicativa es de señalar, mostrar, evidenciar o hacer patente al referente específico, como son los objetos materiales perceptibles y tangibles a los que asignamos nombres propios (los ***nombres propios*** de personas, animales, lugares o cosas son signos que refieren a ese, y solo ese ente específico con sus rasgos y propiedades peculiares). Cuando el mismo signo deviene en ***concepto*** funciona abstrayendo y generalizando ciertas propiedades físicas o psicológicas, como cuando usamos las palabras “materia” o “libertad”, o cuando usamos la letra “y” para denotar la relación conjunta de elementos, por ejemplo, Juan y María. En estos casos no nos referimos a un ente específico. Los nombres comunes son de este tipo, son nombres-conceptos. Los conceptos devienen en ***categorías*** cuando tienen carga teórica, vivencial y destrezas especializadas. Por ejemplo, la categoría “materia” tiene mucha carga teórica filosófica, física, y matemática. La categoría filosófica de materia es diferente de la categoría física de materia. Filosóficamente quiere decir todo aquello que existe al margen e independientemente de la conciencia, y que, por existir, puede ser conocido en cualquier momento histórico. La categoría física de la materia depende de cada avance de la física y la química, y, por lo tanto, ha cambiado muchas veces en la historia de la ciencia. Un excelente libro que argumenta en torno a este punto lo escribió Vladimir I. Lenin en 1908: *Materialismo y empirocriticismo* (Lenin, 1976).

En el proceso de la semiotización y la semiosis, los significados crecen, se desarrollan y se modifican, aun cuando el signo siga siendo el mismo. Un ejemplo ilustra este hecho sociocultural. La palabra “bizarro” quería decir en el idioma vasco “barba”, y pasó al español como iracundo, furioso (por los soldados barbudos que combatían con coraje), para modificarse después en el sentido de valiente, arriesgado generoso, lúcido, espléndido, desinteresado, e incluso apuesto; y fue adquiriendo, bajo la influencia del idioma francés, la connotación agregada de extravagante, sorprendente, gracioso (Diccionarios: de la Lengua Española-Real Academia Española; María Moliner, Larousse, Fernando Corripio, Guido Gómez de Silva). Sin embargo, por la influencia del idioma inglés usado en la psicología anglosajona, adquirió la connotación de algo extraño, raro, extravagante, insólito. Un mismo signo se ha mantenido durante siglos, pero cambiando su significado por el uso en contextos históricos diferentes.

Un signo **en función de nombre propio** señala, indica, muestra, hace patente a un referente concreto y específico. Por ejemplo, decir “está en la mesa” ante una mesa concreta; o “es Juan”, ante una persona específica. Un signo en función de concepto abstrae y generaliza las propiedades y características de un conjunto de referentes similares concebidos como clase; decimos, por ejemplo, “una mesa” y con el concepto “mesa” nos referimos a cualquier objeto con las mismas características y propiedades de todas las mesas. Un signo **en función de categoría** es un concepto, pero con carga teórica y experiencial, es decir, hay en su referente teorías, creencias, conocimientos amplios, destrezas especializadas y múltiples experiencias.

Un ejemplo bastará para ilustrar la noción de signo en función de nombre, concepto, o categoría. La palabra "agua", en la oración "*dame agua*", cuando miramos a una jarra llena de ese líquido, es un nombre propio de esa agua que la identifica, la señala, la muestra, la hace evidente, y no de cualquier agua. Si decimos, "*necesito tomar agua*", cuando no hay una a la vista, usamos la palabra "agua" como concepto, y generalizamos a una clase de referentes con propiedades comunes, por lo tanto, nos referimos a cualquier agua. Al decir "el agua", como parte de un discurso académico en la materia de química, o de biología, o de ecología, o de física, o de economía, la palabra "agua", el mismo signo verbal, es usado como categoría, es decir, con carga teórica de todas esas ciencias. También un campesino con poca o nula escolaridad utiliza la palabra "agua" como categoría, es decir, con amplios conocimientos y creencias surgidas de su amplia experiencia como sembrador y cosechador que conoce épocas de siembra en función de las temporadas de aguas, conoce de bombas, de ductos, de pozos, de ríos, de presas, de recursos tecnológicos y financieros para su uso en su región geográfica.

El uso de los signos como nombres, como conceptos o como categorías tiene diferentes y grandes implicaciones. Lo que la palabra evoca en cada uso es totalmente diferente, y las deducciones o inferencias al utilizarla son de mayor o menor amplitud. Si una persona solo usara "agua" como nombre, cuando conociera que en Marte hay agua, podría comprender intuitivamente que los humanos no se morirían de sed; si la usara como concepto, quizás preguntaría qué tipo de agua será y si es bebible, incolora e insabora. Pero si la usara como categoría, entonces *súbitamente, intuitivamente*, podría comprender sus implicaciones teóricas para la vida extraterrestre, para la astrofísica, o para la economía si viviéramos en marte, etc. El ejemplo, por cierto, ilustra lo que afirmamos antes: la intuición es dependiente de las condiciones socioculturales de quién la ejerce, no se reduce a un proceso meramente sensoperceptual dependiente del sistema nerviosos y de los receptores. Ello es muy claro en la historia de las matemáticas.

Finalmente, desde nuestra concepción, cualquier signo se puede transformar en ***símbolo***. Ello ocurre cuando se conjugan dos circunstancias: la primera, al nutrirse de conocimientos amplios, ya sea vivencial o teóricamente; la segunda, **a** partir de experiencias vitales con una gran carga emocional para los individuos, las cuales modifican sus estilos de vida e influyen grandemente en su personalidad y sus relaciones sociales, laborales, amorosas y familiares. Este contenido teórico, experiencial, emocional y vivencial vital no es equivalente a la noción de trauma en psiquiatría y el psicoanálisis, pues en ambos casos resaltan su efecto psicológico negativo. La noción de símbolo que usamos tiene que ver con la palabra rusa *perezhinavie* utilizada por Lev. S. Vigotski, en el sentido de una emoción intensa, significativa y vital para la vida y personalidad del individuo (Veresov, 2014), la cual puede ser negativa (traumática) o positiva (que amplía los horizontes afectivos, socioculturales y de la personalidad generando satisfacción, alegría y felicidad). Por ejemplo, para muchas personas, la experiencia de tener un hijo los transforma sociocultural y afectivamente, al grado de que su respuesta empática hacia cualquier niño los lleva a movilizarse, aún con sacrificios personales, para la protección de la infancia. Los símbolos surgen no solo por experiencia personal individualizada, también se gestan por la participación en grandes movilizaciones sociales que transforman el entorno político, económico y cultural de los individuos, como son las revoluciones, las revueltas, los grandes movimientos culturales y artísticos, las tragedias geológicas como sunamis, terremotos, vulcanismo, etc. Por ejemplo, el nombre propio Gandhi, dejó de serlo y se ha convertido en símbolo de lucha pacífica por la igualdad y la democracia en cualquier parte del mundo; o el signo gráfico de la cruz gamada es hoy un símbolo del racismo y supremacía blanca.

Este nuevo significado de la palabra "símbolo" es fruto de los aportes de la psicología, la psiquiatría, la antropología-etnografía, la sociología y los efectos socioemocionales y culturales de los medios de comunicación masiva. Contrasta con la vieja noción de símbolo como forma, como figura, o dibujo, o pictograma, o modelo de un objeto, o esquema representacional, la cual aún se utiliza en las matemáticas. Muchas de estas modalidades figurativas de signos son de naturaleza iconográficas. La amplitud del significado de "símbolo" rebasa con mucho la mera noción figurativa de los símbolos y, sobre todo, permite comprender que los símbolos siempre son socioculturales e históricos, NO UNIVERSALES producto de fantasiosas atribuciones a un homúnculo en forma de inconsciente colectivo heredado, como lo planteó Carl Jung (2016, 2015a, 2015b, 1964/1995).

Por estas razones, no utilizaremos el concepto de "símbolo matemático", sino que usaremos signo matemático. NO UTILIZAREMOS la palabra "símbolo" como sinónimo de figura, imagen, pictograma, etc. La palabra "símbolo" la reservaremos para connotar a ***cualquier signo categorial con perezhinavie***, sea del tipo que sea: palabra, objeto, figura, dibujo, gesto, animal, lugar geográfico, evento atmosférico, astronómico, o persona, como cuando se dice "Gandhi es el símbolo de la resistencia pacífica".

Por las razones expuestas decimos: (i) que todo símbolo es un signo, pero no al revés, no todo signo es un símbolo; (ii) todo signo y su significado son históricos y socioculturales, surgen y se usan conscientemente en la interacción comunicativa de una comunidad específica, con unas prácticas socioculturales propias, mediante una lengua concreta y en una región geográfica delimitada. Nunca, un signo es universal, atemporal, y mucho menos usado por un homúnculo inconsciente, sea colectivo o individual.

Un símbolo es un signo categorial con perezhinavie: cumplen todas las características de las categorías en el sentido de que tienen carga teórica y/o experiencial (muchas vivencias y experiencias asociados a ellos) pero, además, han estado asociados a situaciones vitales y emocionales durante el desarrollo sociocultural de uno o más individuos. Por esa razón, todo símbolo es un signo, pero no todo signo es un símbolo.

Todo signo tiene un significado, es decir, sustituye a algo, está en su lugar. El significado es estudiado por la rama de la lingüística de la semántica. Nosotros entenderemos por **semántica del signo** a todo lo que se incorpore al ***referente***, como los ***sentidos o intenciones comunicativas*** en cierto contexto histórico y uso circunstancial de los signos, y a los ***EFECTOS*** que los signos tienen para un individuo.

Los efectos de un signo son todos aquellos que los signos evocan o provocan en un individuo, comenzando por que duplican abstractamente la realidad y le permiten operar con un mundo ausente; regulan la actividad de la persona; son la génesis semiótica de los procesos psicológicos anticipatorios (conciencia, imaginación, pensamiento y voluntad); crean nuevas formas de memoria al semiotizar las experiencias, los afectos, los entes físicos, las sensopercepciones, etc.; evocan informatividad (conceptos y categorías) y perezhinavie, convirtiendo los signos en símbolos. Pero, sobre todo, potencian el alcance anticipatorio del pensamiento cuando, mediante las alternancias semióticas, amplían los significados y crean nuevos conceptos y categorías.

Todos estos efectos de los signos y sus significados están considerados en la propuesta de utilizar las alternancias semióticas como parte de la pedagogía y la didáctica de la enseñanza de las matemáticas, es decir, como una herramienta cognitiva.

Procedimientos cotidianos para la creación, modificación y desarrollo de signos y significados

Existen varios procedimientos de uso cotidiano que las personas utilizan para crear y modificar signos y significados. El procedimiento más sencillo es la ***recursividad*** del signo y/o el significado, propiedad inherente a la ***intención comunicativa*** con cualquier lengua, ya sea natural o formal (en las matemáticas y lenguas computacionales su uso es extendido, por ejemplo, el sistema binario de 0 y 1). Entendemos por recursividad a la repetición o iteración de un signo y/o su significado cuyo resultado inmediato es la aparición de un nuevo signo y/o un nuevo significado que se forma cuando la repetición se toma como un conjunto, este nuevo conjunto tiene un nuevo significado. Algunos ejemplos ilustrarán el proceso.

1. En la comunicación no verbal, modificamos el signo y su significado por solo repetirlos. Por ejemplo, un signo hecho con la mano para comunicarle a alguien que venga hacia nosotros (el brazo y a mano extendidos horizontalmente, la mano se dobla hacia abajo haciendo un semicírculo indicando con ello -su significado- la dirección que la persona debe seguir para acerarse a nosotros), al repetirse varias veces y rápidamente, el signo repetido forma un conjunto que deviene en otro signo con nuevo significado: el número de repeticiones y su frecuencia son ahora el signo, cuyo significado es diferente, ahora es “ven rápido”, y si lo repetimos frenéticamente, podría formarse otro signo cuyo significado sería “rapidísimamente”.

2. En el uso hablado de la lengua española, la palabra “más”, en la frase “más salsa”, significa algo diferente que su iteración o repetición “más, más, salsa”, cuyo sentido puede entenderse como “mucha salsa”, pero si se dijera “más, más, más, más salsa” el significado se entiende de otra manera: “muchísima salsa”. Por cierto, si repitiéramos solo una sílaba “si” en “muchisísima salsa” significaríamos algo más. Podemos decir que los superlativos en español se pueden formar mediante derivación morfológica con sufijos, o por la iteración de ciertas palabras. Un pequeño experimento casero lo demuestra. Cuando le pedimos a las personas que llenen de azúcar un recipiente con una cuchara que se usa en repostería (1.25 ml, 2.5 ml, 5 ,l, 7.5 ml, 15 ml) y le decimos que el signo “a” significará una cantidad, la que ellos decidan. Entonces repetimos “a”, “aa”, “aaa”, “aaaaaa”, y observamos que todas las personas cambian la elección de la cuchara, ya sea repitiendo la pequeña o eligiendo la más grande. Es decir, cada ciclo recursivo forma un nuevo signo con un nuevo significado.

3. La redundancia expresiva del tipo “súbete para arriba”, “bájate para abajo”, “entra para adentro”, “salte para afuera”, etc., no solo son adecuadas y no censurables según la Real Academia Española (2019) en términos de que las lenguas las hacen los hablantes en su uso, sino que la redundancia (un nuevo signo) comunica algo más (un nuevo significado).

4. Según Shaolan (s/f), en una de las lenguas de China, la palabra escrita para persona, si se repite una vez, forma un nuevo signo: sígueme, y si se combina en otra posición forma un nuevo signo: multitud:

Figura 2. Caracteres chinos: cada repetición es un nuevo conjunto con su propio significado.

5. En el lenguaje computacional, los ceros y unos repetidos, iterados, usados recursivamente forman signos y significados diferentes si se repiten: “1” equivale al número uno; “11” equivale al número tres; “111” equivale al número once.

6. En matemáticas, particularmente álgebra, las primeras letras del alfabeto indican cualquier número conocido (a, b, c) y las últimas (x, y, z) incógnitas[12]. La iteración, repetición o uso recursivo de ella, por ejemplo, aa forma un nuevo signo con un nuevo significado: el cuadrado del número repetido: a^2

Otros recursos cotidianos para crear y modificar signos, significados y sentidos comunicativos es **la metáfora y la analogía**, es decir, el uso de la semejanza para comunicar significados y sentidos; ambas creadoras de signos iconográficos que son los

12 La historia de porqué las tres últimas letras son las incógnitas es curiosa. Fue Descartes quién utilizó la “x” para referirse a la incógnita como alternativa a otras formas, incluyendo la propuesta por Diofanto (el aritmo) representado por la letra griega sigma ς. El matemático francés François Viète (1540-1603) utilizó letras para representar a las incógnitas en ecuaciones algebraicas, pero Descartes, en su libro Geometría de 1637, utilizó la equis “x”. Cuando lo mandó a la imprenta, los tipos de letra “x” eran tan pocos que el impresor le preguntó a Descartes si no tenía inconveniente en utilizar también X, Y y Z, lo que Descartes aceptó. Desde entonces esas letras representan las incógnitas (Gómez, 2018, p. 70).

más fáciles de reproducir, de ahí que usemos la palabra representar (volver a presentar: mostrar, reproducir, imitar: Gómez de Silva, 1988) para referirnos a la forma figurativa en que muestran los íconos su significado (todo aquello a lo que sustituyen). El dibujo de tipo realista, no el abstracto, es el prototipo de un signo iconográfico en tanto que representa, con su semejanza, aquello que sustituye; también lo son las fotos, los videos, etc., porque las imágenes están en lugar del referente. La metáfora y la analogía toman la semejanza de un referente, o de algunas de sus características formando así nuevas figuras retóricas como la metonimia o la sinécdoque. El resultado es la traslación de significados, o la creación de nuevos con sus signos respectivos. Por ejemplo, usando al primer referente, la "luz" (un sustantivo), decimos "fue un discurso luminoso" (un adjetivo), trasladando las características de iluminación de una luz que permite ver en la oscuridad, a la claridad de entendimiento que da un discurso. El signo verbal "luminoso", un adjetivo, agrega un nuevo significado al de "discurso" formando la metáfora.

En el discurso cotidiano, las metáforas son alternancias semióticas. Por ejemplo, en tanto que los signos son herramientas cognitivas, (nótese el uso que hacemos de la metáfora "herramienta" como alternancia semiótica) utilizar uno u otro signo para denotar a un mismo referente suele tener gran impacto teórico y cognitivo, pues funciona como lo hacen las herramientas: potenciando la "fuerza" (nótese el uso metafórico de "fuerza" como alternancia semiótica) conceptual. Los ejemplos que expondremos más adelante son ilustrativos.

La semejanza ha sido un recurso frecuente en la historia de las matemáticas para la creación de sus signos, como el origen de la letra pi = π en griego, letra con la que comienza la palabra **p**erímetro en griego (περίμετρος).

El uso de la recursividad, la metáfora, la analogía y cualquier procedimiento retórico (sinécdoque, metonimia, etc.) para la creación o modificación de signos y significados es un proceso cotidiano subyacente a las alternancias semióticas. Éstas permiten crear nuevos signos y significados; ampliar o restringir los referentes, es decir, los significados sin modificar los signos; convertir un signo en función de **nombre propio**, en otro como **concepto** y a éste en **categoría**, y a ésta en **símbolo**, y, al hacerlo, potenciar el alcance teórico que implica su uso en las ciencias o en la vida cotidiana.

Sin embargo, es necesario no confundir las virtudes pedagógicas, heurísticas y esclarecedoras de las metáforas y las analogías, con su fuerza teórica basada en categorías. Se complementan, pero no son lo mismo, e incluso substituir la explicación teórica por puras metáforas y analogías, suele tener efectos contrarios y generar confusión de lo que en un primer momento eran virtudes esclarecedoras de los conceptos. El valor heurístico de las metáforas y analogías es históricocultural, por lo que, cuando cambian las circunstancias históricas y culturales de su uso, y hay otros interlocutores, pierden sus virtudes del primer momento, y por lo general aparecen interpretaciones literales que olvidan su uso metafórico; o, algo peor, quienes las usan sin comprender los cambios socioculturales que ya operan, las asumen literalmente. Cuando las metáforas se asumen literalmente, cambian su significado metafórico destruyéndose como metáfora. Dos ejemplos históricos evidencian este proceso.

Primero. En los orígenes de la psicología cognitiva (años 50 del siglo XX), la aparición de las computadoras y los nuevos descubrimientos en torno al sistema nervioso y la genética, hicieron de la metáfora computacional (el cerebro como computadora y los contenidos psíquicos como software) un motor heurístico de muchas investigaciones en psicología y neurociencias, pero a finales de los 90 y, sobre todo en el presente siglo, es del todo insuficiente e inadecuada frente a los conocimientos de esas mismas disciplinas, y de las ciencias sociales y la filosofía. Algunos psicólogos, neurocientíficos y filósofos cognitivos pareciera que olvidan su uso metafórico creyendo que los procesos psicológicos son módulos independientes tal como las tarjetas de video o audio, y eso es simplemente falso. El cerebro ni es una computadora, ni se comporta como ella, ni lo psíquico se reduce al procesamiento de información, ni mucho menos al puro cerebro. Incluso, los nuevos avances de la ingeniería computacional, computadoras cuánticas, y de la inteligencia artificial (el aprendizaje profundo) han dejado fuera esas viejas concepciones simplistas que en su momento fueron de gran ayuda. Hoy, el cerebro y el psiquismo son concebidos como sistemas dinámicos dependientes en buena medida de sus condiciones de interacción con el medio que, en el humano, es histórico, semiósico y social.

Segundo. En el siglo XIX, el materialismo dialéctico asumió como teoría del conocimiento la metáfora del reflejo, la imagen, la copia de la realidad que es modificada por la práctica. En el proceso de organización de la revolución rusa, Lenin escribió el libro *Materialismo y empiriocriticismo* en 1908 cuando la fotografía ya era parte de la vida cotidiana de las familias y el cine se expandía. Este, en su primer momento, fue documental y reflejaba la realidad cotidiana de tranvías, ferias, trenes, calles, autos, caballos, etc. En ese contexto, la metáfora del conocimiento como reflejo de la realidad fue útil, pero más de cien años después, con el desarrollo de los medios audiovisuales, la televisión, el internet, el cine documental, el cine de ficción con sus efectos especiales, la realidad virtual, las redes sociales, el YouTube y los "yotuberos", los avances espectaculares de la epistemología y la psicología de la publicidad y la imagen, y las falsas noticias de las redes sociales, apelar a la metáfora de las imágenes como manifestación de la realidad objetiva ha perdido todo sentido heurístico, e incluso, cada vez es más claro que las imágenes comentadas, el encuadre, la toma, la perspectiva, por reales que aparezcan, son siempre narrativas de un punto de vista que, frecuentemente, es intencionalmente manipulado para ocultar la misma realidad objetiva (Niney, 2002/2009). La imagen solo refleja lo que aparece en la imagen, que es solo una parte de la realidad; la otra, es aquello que se omite cuando se toma la imagen, lo que suele ser una decisión con una intención comunicativa específica, y aquello que se interpreta por quien la ve, el espectador, que siempre la interpreta y le atribuye sentido, sobre todo aquello que la misma imagen real no muestra, pero que sabemos que existe. Es el caso del que toma la imagen y su intención para hacer ese enfoque, ese encuadre y composición fotográfica, y, a la par, lo que decidió no mostrar. Muy temprano en la historia del cine, los cineastas descubrieron que la edición, el "pega y corta" después de filmar, era la sintaxis cinematográfica con la que se da forma al discurso y el director comunica algo con las imágenes. Todo ello influenciado por las creencias y costumbres de una época, una región, y un grupo sociocultural específico.

Con estos cambios de contexto, la metáfora de "el conocimiento como reflejo de la realidad" perdió su sentido inicial y ahora su uso parece incomprensible por la ignorancia sobre su utilidad en otro contexto histórico. Hoy podemos decir que el conocimiento comienza con la aprehensión sensorial del mundo objetivo siempre mediada por el lenguaje, la cultura y la práctica: el humano cuando percibe juzga, y sus juicios orientan su actividad y percepción. No solo percibimos un mundo dado, sino un mundo interpretado mediante signos y significados socioculturalmente determinados en un momento histórico concreto. En las obras de Marx, Engels y Lenin ese era el sentido de su teoría del conocimiento, aunque la metáfora que en su momento fue útil, ya no lo sea[13].

13 Las metáforas suelen ir perdiendo su valor cuando los detractores de la postura que las usan les quitan lo metafórico y su valor comunicativo en su contexto, y las difunden como expresiones de la realidad, lo que inevitablemente las hace aparecer como absurdas y hasta ridículas. Por ejemplo, cuando Nicolás Maduro, presidente de Venezuela, dijo refiriéndose a Hugo Chávez ya fallecido, "me lo dijo un pajarito", los medios de comunicación opositores nacionales e internacionales quitaron el sentido metafórico y comunicativo muy parecido al utilizado en México con la misma frase, y lo hicieron aparecer como si realmente creyera que los parajitos le hablan.

El uso de metáforas y analogías como alternancias semióticas son muy útiles pedagógicamente siempre y cuando comprendamos su momento histórico. Muestra, además, otro aspecto clave en la ciencia. La relación entre el uso de metáforas y analogías, por un lado, y por el otro, la claridad y potencia de una teoría, la podemos expresar así: a mayor uso de metáforas en una explicación, menor claridad teórica y descriptiva suele tenerse de aquello que se pretende explicar. Cuando se avanza en el conocimiento científico de un fenómeno, las metáforas van perdiendo su utilidad como recurso explicativo. Esto es importante cuando usamos las metáforas y analogías como recurso didáctico: ayudamos a comprender un tema, pero a costa de simplificar su complejidad teórica. En la enseñanza de las matemáticas eso es muy importante, porque el uso de aquellas debe tenerse como una herramienta para ir de lo simple a lo complejo, y no como la sustitución de lo complejo.

Por lo anterior, el uso de las alternancias semióticas, de las metáforas y analogías en matemáticas, y en cualquier ciencia, debe ser bidireccional. Se deben usar por sus virtudes heurísticas e instrumento pedagógico, pero una vez esclarecidos los conceptos, debemos transitar a otro tipo de alternancia semiótica, la de las categorías, toda vez que ellas potencian las teorías. En matemáticas, los signos son categorías, de ahí que su alternancia semiótica conlleva grandes repercusiones teóricas, aunque para algunos matemáticos ciertos signos sean también simbólicos en el sentido antes explicado: implican para ellos experiencias vitales, grandes emociones y tienen carga teórica y experiencial. Quizás la más destacada sea la creación de nuevos objetos epistémicos.

Los signos-significados y la creación de objetos epistémicos

Todo signo tiene, como condición necesaria para ser signo, un significado. Cuando el significado es un concepto (clases de referentes formadas por la abstracción y generalización de cualidades o peculiaridades comunes), decimos que expresa a un ***objeto epistémico,*** entendido como todo aquello que creemos conocer, o damos por supuesto que conocemos acerca de la realidad objetiva que es percibida, pero interpretada mediante signos-conceptos. Los objetos epistémicos son creaciones socioculturales a partir de la realidad objetiva percibida, y, cuando no se distinguen ambas, se acaban confundiendo como si fueran un mismo fenómeno. Por ejemplo, las personas supersticiosas creen conocer su destino al ver las cartas del Tarot; el concepto destino es un objeto de conocimiento (epistémico) que se asume como obvio (que se ve) a través de las cartas, las cuales solo son el ente físico objetivo que es percibido. Por cierto, se iniciaron como un simple juego

El signo-significado como herramienta cognitiva

El psiquismo humano es semiósico, sociocultural e histórico. Gracias a la aparición evolutiva del lenguaje (capacidad cerebral para crear, usar y modificar signos y significados), la interacción comunicativa humana es mediada semiósicamente, proceso sociocultural de creación y uso de signos y significados. Gracias a los signos y significados, no sólo percibimos, sino que concebimos al mundo utilizando conceptos y categorías. Siempre que aprehendemos con los sentidos el mundo que nos rodea, lo interpretamos mediante los significados culturales que nuestra sociedad utiliza en una región geográfica, en una época determinada y con una lengua específica. Esta concepción de la naturaleza del psiquismo humano fue desarrollada por Lev S. Vigotski y Alexander R. Luria durante el siglo XX en la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS), y es el fundamento de la psicología materialista que ellos se proponían construir, y que actualmente se conoce como psicología histórico-cultural.

No fueron los únicos en la misma época (años 20-40 del siglo XX) en concebir la relación fundamental entre psiquismo, lenguaje y la cultura: los antropólogos, etnólogos, sociólogos, lingüistas de Estados Unidos e Inglaterra también lo vieron. Sin embargo, en EUA la llamada antropología psicológica estuvo más ligada al psicoanálisis y la psiquiatría (Bateson,1998; Mead, 1935/2016; Carroll,1956/1973; Linton, 1945/1967), y decayó en la misma medida que aquél.

Uno de sus aportes teóricos de la psicología Histórico-Cultural en la URSS fue precisar las propiedades psicológicas de los signos, los significados y los sentidos de su uso, distinguiéndolas de las lingüísticas (fonética, fonología, semántica, y morfosintaxis). Entre las propiedades psicológicas de los signos-significados, destacamos las siguientes en el orden de la importancia que nosotros les atribuimos:

1. Los signos-significados permiten al humano operar con un mundo sensorialmente ausente, toda vez que, por definición, un signo es un ente físico que *está en lugar de algo para alguien*, y aquello que es sustituido por el signo es su significado o referente. Cuando utilizamos signos, incluso los iconográficos, operamos con sustitutos de referentes que no son directamente percibidos, pero que son concebidos abstracta, conceptual o representacionalmente. Transitamos, entonces, de lo concreto sensible de la percepción, de lo fenomenológico, a lo abstracto del concepto o la categoría.

2. Los signos-significados permiten regular la actividad de los humanos de formas que no están presentes en otras especies, potenciando el aprendizaje. Lo más evidente es la regulación verbal de la actividad que el adulto tiene sobre los infantes. Dicha regulación verbal, en la medida en que se interioriza la lengua materna en los primeros años de vida, llega a permitir al niño la autorregulación de su propia actividad mediante su lenguaje interno, y con ello, emerge la regulación consciente y voluntaria de su propia actividad.

3. El dominio de la lengua-idioma, primero en forma externa (hablada o de señas) y posteriormente mediante su interiorización, desarrollan al pensamiento, entendido como la capacidad de anticipar, o reconstruir, secuenciadamente el curso de los acontecimientos (Escotto-Córdova, 2011), sobre todo en la medida en que éste es desplegado mediante el diálogo consigo mismo, la escritura o el habla, todos ellos procesos secuenciados.

4. Como consecuencia, el uso de signos y significados mediante la lengua materna o los lenguajes formales funciona como herramienta o instrumento de la actividad cognoscitiva, en el sentido genérico de que los signos son utilizados para potenciar, facilitar, y ampliar el conocimiento, así como la realización de todas las actividades cognitivas con un fin determinado, particularmente el pensamiento, y cuyo efecto poderoso se nota en el desarrollo psicológico humano (Vygotski y Luria, 2007). La metáfora del signo como herramienta, utensilio o instrumento cognoscitivo es una alternancia semiótica que denota el poder facilitador, amplificado y abstracto que los signos tienen para poder anticipar secuenciadamente procesos materiales que no son percibidos, ya sea en el pasado, en el presente o en el futuro.

Las alternancias semióticas son algo generalizado en la historia de las matemáticas, y han servido, y aún lo hacen, para esclarecer conceptos, para especificar significados, o para desarrollar nuevos signos y significados. En términos coloquiales, decir de otra forma los conceptos y categorías ayuda a comprenderlos y desarrollarlos.

Capítulo 1

Diciéndolo de otra forma: las alternancias semióticas como didáctica de las matemáticas

Eduardo Alejandro Escotto Córdova
Ana María Baltazar Ramos

Tanta es la ventaja de un lenguaje [matemático] bien construido, que su notación simplificada a menudo se convierte en fuente de teorías profundas. (Pierre Simon de Laplace. Citado en Madrid, 2012, p. 26)

Una voz que da la vista a los ciegos atentos (Altazor, Citado en Monasterios, 2000, p. 46)

Es fácil mentir con las estadísticas, pero es difícil decir la verdad sin ellas (Andrejs Dunkels. Citado en la revista Muy Interesante, abril 2020)

La alternancia semiótica

Concebimos a la semiótica como la disciplina que estudia los signos y significados, así como los sistemas en que se organizan. Para Humberto Eco (1976/2000, p. 22), "la semiótica se ocupa de cualquier cosa que pueda considerarse como signo"; para Charles Morris (1985/1971, p.15), es la "ciencia de los signos"; para Beuchot (2004, p. 7), "es la ciencia que estudia el signo en general; todos los signos que forman lenguajes o sistemas"; para Tulio de Mauro (1986, p. 32), es "el estudio general de las propiedades de los códigos semiológicos". Con base en estas definiciones, entenderemos por alternancia semiótica: (a) al cambio de uno o más ***signos*** en sustitución de otro(s) para representar o significar el mismo significado; (b), el cambio de ***significados*** manteniendo el mismo signo; (c) la creación de nuevos signos y significados alternando los usuales. Su uso en la comunicación cotidiana es inevitable, pero en las matemáticas son, a la par, un instrumento para su desarrollo y las huellas de su propia historia.

Un ejemplo matemático de una *alternancia de un signo manteniendo el mismo significado* es la curva de Gauss -un tipo de signo gráfico- que puede ser representada por ecuaciones -otros tipos de signos-, y ambos refieren el mismo significado: la distribución probabilística. Un ejemplo de una alternancia de *significados manteniendo el mismo signo* en el léxico cotidiano es la palabra "predicamento"; el mismo signo lingüístico se usa en España y México, pero con significado diferente. En España suele significar grado de influencia de una persona debido al aprecio que tienen de él. En México, significa situación en la que alguien pone en aprietos o dificultades a otro, o a sí mismo (RAE,2014; Moliner, 2007; Larousse, 2011; Colegio de México, 1996). Las alternancias semióticas más comunes en la vida cotidiana son las metáforas, las analogías, las metonimias y las sinécdoques en el uso de una lengua o idioma. Un ejemplo de *la creación de nuevos signos y significados alternando los usuales* es la creación de Gödel de los números transfinitos utilizando los números ordinales y cardinales.

Tres son los beneficios más frecuentes de las alternancias semióticas. El primero es el efecto inmediato de esclarecer el significado de un signo. Al cambiar de signo se mejora la comunicación de aquello a lo que refiere el signo. Las alternancias semióticas facilitan la comprensión de los significados de los signos, de ahí su utilidad pedagógica en cualquier disciplina científica y formal como las matemáticas. Las alternancias semióticas ocurren, incluso, espontáneamente en los matemáticos. Kline (1980/1985, p. 293) cita una investigación realizada por Jacques Hadamard sobre el proceso de pensamiento en matemáticos en la que encontró que al inicio del proceso pensante no utilizaban signos léxicos, sino imágenes visuales o táctiles; también cita a Einstein expresando que las palabras "… no parecen desempeñar ningún papel en mi mecanismo de pensamiento (…) en mi caso [son] visuales, y algunos de tipo muscular".

La representación de un significado mediante una imagen como un dibujo (signo iconográfico que lo representa) lo hace obvio, es decir, se pone ante los ojos aquello que se dice con palabras (signos lingüísticos), los dibujos "modelan" al referente. Otro ejemplo son las metáforas en la vida cotidiana y en la ciencia, las cuales suelen tener el mismo efecto esclarecedor. Un ejemplo histórico aclara este punto. Claudio Eliano (175-235 a C.) refiere la existencia de un ser llamado martichóras. Si nos preguntamos ¿qué entendía él por un martichóras?, podemos exponer la larga descripción verbal que hizo el romano, o podemos hacer un pequeño experimento pidiéndole a personas de nuestro medio y momento histórico un dibujo, o sea, obviado en el ojo de la imaginación de una persona contemporánea la alternancia de los signos lingüísticos por un signo representacional y putativamente iconográfico:

«…Es tan grande como el más grande de los leones, de piel roja como el cinabrio, peludo como ciertos perros…su cara está de tal manera configurada que no parece de bestia, sino de hombre. En su mandíbula superior están encajadas 3 filas de dientes y otras tantas en la inferior; dientes extraordinariamente agudos más grandes que los colmillos de los perros. También sus orejas se parecen a las del hombre, pero son más grandes y peludas. Tienen los ojos verdes y parecidos también a los del hombre, pero has de saber que sus pies y garras son como las de León. En la extremidad de su cola está adosada la uña de un escorpión, que tiene un codo de longitud, y a cada lado de la cola, tiene aguijones a espacios regulares.…» (Eliano, s. II a.C./2008, p. 190-191).

El Martichóras

(Representación elaborada por Alejandro Escotto)

Figura 3. Representación imaginada de un personaje mitológico.

El dibujo del *Martichóras* evidencia, además, otra peculiaridad de todo signo y significado, y, por lo tanto, de cualquier alternancia semiótica: cada persona se forma un "halo" de significado distinto de los mismos signos. La Dra. Ana María Baltazar se imaginó una cara humana con cuerpo de león erguido y de pelaje rojo, pero no visualizó las garras. Esta peculiaridad de "halo semántico" (obsérvese la metáfora como alternancia semiótica) está presente no solo en signos iconográficos tan idénticos a lo que representan, como son las fotografías, los videos, las películas, las pinturas realistas, las estatuas, o los modelos a escala; también está presente en los signos paralingüísticos como la voz (frecuencia, tono, altura, etc.), o en la comunicación corporal, como las gesticulaciones, las señas, la postura corporal, las distancias entre interlocutores, las miradas, las pausas, los silencios, la rapidez o lentitud de los movimientos, etc. Por cierto, el hecho de que las imágenes no hablen por sí mismas (no tienen el mismo significado para todo humano que las ve) como lo pregonan los medios de información audiovisuales, evidencia sospechosas maneras de manipular con ellas cuando van acompañadas de "explicaciones o acotaciones" para el público. Finalmente, el "halo semántico", técnicamente conocido como campo semántico, está presente en todos los signos lingüísticos o abstractos, cuya diferencia fundamental con los signos iconográficos es que aquel tipo de signos (abstractos), nada tienen de parecido físico con aquello que refieren, esto es, con su significado. La palabra "azúcar" no es blanca, ni granulosa, ni azucarada como su referente real, la azúcar refinada.

Múltiples factores influyen en esta gran variabilidad en la atribución y comprensión del significado de los signos. El más general es el conocimiento "enciclopédico" del mundo que tiene cada interlocutor y en el que la escolaridad juega un papel central. Otros son la personalidad y biografía de cada uno de ellos, las experiencias de vida en el momento de usar los signos, la edad, el sexo y el género, la clase social, la raza, el origen regional de los interlocutores, la lengua y sus variantes sociolingüísticas, la cultura del grupo etario, las prácticas socioculturales de la comunidad, los valores morales laicos y/o religiosos, las posiciones de poder o subordinación, etc. Todos ellos son factores relativamente estables en la atribución e interpretación de los signos y significados.

Existen dos variables fundamentales más que son de carácter dinámico y variable: ***el contexto y las circunstancias del uso*** de los signos y significados. Entenderemos por el contexto de uso a todas las variables culturales, sociales, e históricas que están presentes como condicionantes del sentido comunicativo de los signos; y por ***circunstancias***, al uso puntual y específico que los interlocutores hacen de los signos al comunicarse entre ellos en un momento particular. Por ejemplo, en un libro de reciente aparición, Crónica de la lengua española 2020 (Real Academia Española, 2020), la Real Academia Española y las 22 academias de la lengua española, seleccionaron como una de las palabras más destacadas de este año, la de fifí. Su uso en México, de viejo cuño en el siglo XIX, actualmente tiene que ver con el sentido que el presidente de la república, López Obrador, le ha dado para referirse a los periodistas que recibían dinero de gobiernos anteriores. Su sentido se generalizó para ubicar a ciertas personas de clase media alta y de empresarios corruptos contrarios al gobierno. Después se amplió para designar a personas de clase media alta con posturas clasistas, racistas y antigobiernistas. Si alguien la usa en México, su sentido está determinado por este contexto histórico. Pero si en un diálogo le digo a un amigo que acaba de comprar un auto usado de hace 10 años, "eres todo un fifí", no solo tiene el sentido político contextual, sino el de una ironía determinada por la circunstancia comunicativa.

Todos estos factores determinan lo que para muchos es conocido como la polisemia de los signos.

El segundo beneficio de las alternancias semióticas consiste en ampliar los significados y/o precisión de los conceptos, lo que suele devenir en la creación de nuevos significados que requieren nuevos signos. el resultado es que los nuevos significados devienen en nuevos objetos epistémicos. Por ejemplo: los pitagóricos representaban los números por puntos o guijarros llamados números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc. cuya representación gráfica eran siluetas de triángulos, cuadrados, o pentágonos. Su uso avanzó hasta concebir al número, no como punto o cosa, sino como una abstracción, un concepto, cuya representación fue su signo gráfico, no objetal. Esa abstracción les permitió aplicar la noción de número a otros fenómenos más allá de los puntos o guijarros. Por ejemplo, a la música, cuya representación a partir de eso fue una relación numérica, y, cuando descubrieron que dos cuerdas igualmente tensadas producían sonidos armónicos, comprendieron que sus longitudes eran razones de números enteros, es decir, surgió un nuevo objeto epistémico. A eso se le llamaron una octava (Kline, 1980/1985).

Tercer beneficio de las alternancias semióticas: potencian el pensamiento. Definimos al pensamiento como la capacidad de anticipar o reconstruir secuencialmente el curso de los acontecimientos utilizando signos y significados (Escotto-Córdova, 2011, 1996)[14]. Los signos nuevos condensan información de los conceptos como paso previo para elevarlos a su función como categorías, con lo cual el *alcance anticipatorio* del pensamiento y las teorías se hace mucho mayor: "vemos" más lejos o más cerca, como

14 Su alcance anticipatorio depende del lenguaje desplegado, ya se oral, escrito o interno (soliloquio silencioso). La tesis platónica ampliamente utilizada aún de que el pensamiento es el lenguaje interno no distingue entre el soliloquio interno, que suele ser errático, cambiante y divagante; del soliloquio interno que se requiere para anticipar secuenciadamente los acontecimientos sin perder el rumbo, sin divagaciones, y que conforma largas secuencias lógico-verbales. Nosotros hemos propuesto la distinción de estos dos procesos que transcurren, ambos, mediante el lenguaje interno, pero que son cualitativamente diferentes, diciendo que no es lo mismo soliloquiar que pensar (Escotto-Córdova, 2011).

telescopio o microscopio (obsérvese el uso alterno que hacemos de las metáforas de *telescopio o microscopio* para esclarecer otra noción metafórica, la de *"obviar lo dicho en el ojo de la imaginación"*. Son otro ejemplo de alternancia semiótica en el lenguaje cotidiano). El ejemplo más sencillo en matemáticas es la alternancia semiótica de los sistemas numéricos cambiando su base. Podemos usar base diez y alternar 235 = $2x10^1$ + $3x10^1$ + $5x10^o$. Históricamente, este sistema numérico nos permitió realizar operaciones con grandes números, una revolución parecida a cuando las limitaciones para expresar grandes números en forma sencilla del sistema numérico romano fueron superadas con la introducción del sistema en base diez arábico. Otra alternancia semiótica fue el uso del sistema con base dos o binaria, con la cual podemos alternar, por ejemplo, 13 = 1101. Esta alternancia revolucionó nuestro mundo cuando se vinculó con el prendido y apagado en máquinas electrónicas (ocurrió con las hechas con el relé, con bulbos, después con transistores, y finalmente con microchips) que se llamarían computadoras, porque al hacer tal conversión, el 1 y 0 tuvieron el sentido lógico de falso y verdadero, y con ello, se asociaron a la lógica booleana (George Boole, 1815-1864) y sus tablas de verdad lógica desarrollada en el siglo XIX (del Vado, 2017), lo que facilitó convertir los pulsos eléctricos en códigos lógicos computacionales en el siglo XX. Eso, a su vez, posibilitó la capacidad de anticipar amplias secuencias lógicas y matemáticas mediante máquinas y algoritmos, además de realizar rápidamente millones de cálculos con el tránsito del relé al microchip, y, a punto de concretarse, de estos a la computación cuántica.

Recapitulando, el uso de las alternancias semióticas tiene varias funciones: (1) suele explicitar o ilustrar aquellos significados que queremos comunicar con los signos. Por ejemplo, cuando utilizamos un dibujo o un esquema (signos gráficos) para aclarar un concepto; o cuando utilizamos distintas palabras (signos lingüísticos) para esclarecernos la definición de otra palabra. (2) En las disciplinas científicas, tiene un efecto pedagógico al esclarecer los significados complejos y condensarlos en un signo (palabra, imagen, objeto, gesto, modelo, incluso otro ser vivo, etc.) facilitando la interacción comunicativa entre interlocutores. Por ejemplo, cuando ilustramos el concepto de "instinto" (un signo lingüístico con un significado específico) definiéndolo y esclareciéndolo con breves narraciones: «*es un patrón de conductas estereotipado e innato típico de una especie, es decir, todos los especímenes lo presentan más o menos igual*», pero apoyados con videos (alternancia semiótica visual) en los que se muestran a polluelos de gaviotas saliendo del cascaron a los cuales se les pasa una sombra de un depredador, y los polluelos corren a refugiarse, conducta compleja que no pudieron aprender porque acaban de salir del huevo. (3) Es uno de los procedimientos de creación de nuevos signos y significados que múltiples disciplinas científicas utilizan frecuentemente, particularmente las matemáticas, cuya consecuencia es potenciar su desarrollo conceptual al transformarlos en categorías. Los ejemplos matemáticos serán abundantes en lo que sigue de este capítulo. (4) No solo potencian el pensamiento, sino que, por impulsar nuevos significados y signos, da mayor alcance predictivo, explicativo y parsimonioso a las teorías. Estas virtudes se expresan en la historia de las matemáticas. (5) En las ciencias, las alternancias semióticas con la creación de nuevos signos y sus significados acaban construyendo nuevos objetos epistémicos en el centro de nuevas teorías.

Un ejemplo de lo anterior es el uso de la elipse (un signo figurativo), en vez de los círculos (otro signo figurativo), que Johannes Kepler (1571-1630) utilizó para dar cuenta del movimiento de los planetas. Desde Claudio Tolomeo (n. 100 d.C.), con su obra Almagesto (en la cual se compilaron los conocimientos de Hiparco, Apolonio y los de él mismo), la explicación de las "esferas celestes" y su movimiento en los cielos se representaba como círculos. Tolomeo utilizó las nociones de epiciclo, un círculo cuyo centro forma parte de la circunferencia de otro círculo llamado deferente, con lo que logró predecir los movimientos de los planetas y hacer predicciones útiles para la agricultura y las fiestas religiosas de su época. Pero casi 1300 años después, todas las estrellas que servían de referencia habían sufrido cambios de posición. Los datos acumulados de observaciones astronómicas sistematizadas y realizadas por Nicolás Copérnico (1473-1543) y Tycho Brahe (1546-1601) ya no concordaban con tales explicaciones, razón por la cual, en su momento, se realizó el ajuste al calendario, ahora llamado Gregoriano. Fue Copérnico el que inició el cambio conceptual y matemático al poner al Sol en el centro del círculo llamado deferente, y a los planetas y la luna en los círculos llamados epiciclos. Con este cambio los datos se ajustaron mucho mejor, y la explicación se hizo más parsimoniosa pasando de 77 a 34 círculos (epiciclos y deferentes). Esta modificación era herética, proponía el heliocentrismo y dejaba a fuera el Hombre[15] como centro del universo según la doctrina oficial de la Iglesia Católica, así que Copérnico no publicó su

15 Usamos «Hombre», con mayúscula, para indicar a la especie *Homo sapiens*, y no a un sexo de un grupo de individuos de la especie. Somos conscientes que, desde la antigüedad, al hablar del «hombre» en tesis como «Dios hizo al hombre a su imagen y semejanza» el concepto «hombre» refiere al sexo, y para algunos racistas, exclusivamente al varón de raza blanca anglosajón. No es nuestro caso, pero ello no nos lleva a la exageración de especificar en cada caso a ambos sexos o de sustituir el fonema o la letra que marcan la categoría lingüística de femenino o masculino en las palabras (no en las personas) por la arroba u otra letra. Por cierto, quienes proponen ese cambio para expresar el género gramatical de las palabras, nunca se han referido a la abeja, al águila, o al escorpión como *abej@ o abeje, águil@ o aguile, o escorpi@n o escorpien.*

obra Sobre las revoluciones de las esferas celestes, cuya primera versión la hizo en 1507. Esta obra se publicó en el mismo año de su muerte, en 1543, cuando ya no podía ser condenado por la iglesia. Sin embargo, seguía utilizando como signo representacional a los círculos. Kepler, que había sido ayudante de Tycho Brahe, que a la muerte de éste le sucedió en el cargo como matemático imperial del emperador Rodolfo II de Austria, hizo un pequeño cambio de signo-significado y revolucionó las predicciones: abandonó los círculos y utilizó elipses. Su búsqueda para que los datos observados y registrados coincidieran con las explicaciones matemáticas lo llevó a proponer sus tres leyes, dos de las cuales se publicaron en 1609. La primera rompió la tradición de casi dos mil años de utilizar círculos o esferas, y prefirió elipses en donde el foco era el Sol, continuando con la tesis de Copérnico de que la tierra y los planetas giraban a su alrededor. La Segunda ley dio cuenta de la velocidad, factor necesario para hacer predicciones. Desde los griegos se creía que la velocidad de los planetas era constante, pero Kepler concluyó que no lo era, y para demostrarlo utilizó las áreas (otro signo) que se forman entre dos puntos de un arco AB y el vértice. El sol como foco de la elipse y el arco AB forman un triángulo en distintos tramos de la elipse, y demostró que los planetas que estaban más cerca del Sol se movían más rápidamente. La confirmación empírica vino con el telescopio, instrumento utilizado por Galileo Galilei (1564-1642).

Las alternancias semióticas (círculos por elipses y áreas) explicaron mucho mejor y más parsimoniosamente los datos observados permitiendo predicciones más precisas (Klein, 1980/1985), es decir, potenciaron al pensamiento y la teoría. El proceso de estas alternancias semióticas creó un nuevo objeto epistémico en la astronomía: el sistema solar, el que gira alrededor del sol.

(5) Todos los efectos anteriores acabaron por crear nuevos y fascinantes problemas epistemológicos que impulsan el conocimiento científico, social y cultural. El ejemplo que ilustra este proceso es el gran cambio epistemológico y teórico que supuso la aparición de las geometrías no euclidianas. Puso en crisis la certidumbre de la creencia de más de 20 siglos sobre el espacio y su descripción matemática mediante la geometría euclidiana. El axioma de las paralelas o quinto postulado de Euclides (325-265 a.C.) del libro 1 de los *Elementos* dice:

> …si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectas (Euclides, s. 300 a. C. / 2015, pp.11-12).

El teorema plateaba la posibilidad de que pudieran existir rectas infinitas que nunca se encontraran, por lo que desató un interés en muchos matemáticos el cual llegó hasta el siglo XIX cuando se construyen las geometrías no euclidianas. El gran cambio surgió cuando se asumió que, **cambiando las definiciones, las hipótesis, los postulados, los supuestos de una concepción, cambian las consecuencias lógicas y prácticas**, por lo tanto, podría haber tantas geometrías como postulados diferentes se hicieran. Con este avance llegaron dos importantes consecuencias en la reflexión o anticipación que provocan los sistemas de signos.

La primera fue epistemológica: si conocemos al mundo con un sistema de signos cualquiera, por ejemplo, el matemático, y, las consecuencias lógicas y prácticas cambian con los supuestos, las hipótesis, las definiciones preestablecidas, pero sin que cambien los hechos percibidos, entonces, una cosa son los hechos y otra las teorías o explicaciones que pretenden explicarlos. En consecuencia, puede haber muchas explicaciones lógicas para un mismo hecho, y, puesto que todo depende de las premisas y definiciones que se asuman, la verdad lógica no siempre corresponde a la realidad empírica; un argumento puede ser lógico, pero no real. El problema epistemológico de las relaciones entre teoría y práctica impactaba a las matemáticas.

La segunda consecuencia fue de tipo ideológico-cultural. Si durante siglos los grandes matemáticos creyeron que Dios escribió la naturaleza con lenguaje matemático, como con el que se describe el espacio euclidiano, entonces, si hay tantas geometrías como postulados iniciales hagamos ***los humanos***, Dios no escribió al mundo con lenguaje matemático, sino los humanos lo describen con números (Klein, 1980/1985), por tanto, ¿existirá Dios?

Estas reflexiones epistemológicas e ideológicas no impiden, sin embargo, el poder conceptual y teórico que las matemáticas tienen en su aplicación práctica. Arribar a una fórmula matemática precisa que sintetiza pasos de un algoritmo potencia al pensamiento de la misma manera que el discurso y despliegue sintáctico lo hacen con el lenguaje natural.

El pensamiento y el conocimiento conceptual del mundo se potencian porque los signos-significados son una herramienta, un instrumento, un utensilio de él (Vygotski y Luria, 2007), a través de los cuales los humanos pueden operar en, y con, un mundo sensorialmente ausente, es decir, abstracto. Cuando se despliega el lenguaje en secuencias de signos organizados sintácticamente, la anticipación del pensamiento es mayor. El despliegue puede ser oral, escrito, figurativo, gestual, objetual o interno (soliloquio silencioso y dialógico con uno mismo como si fuera otro. Escotto-Córdova, 2011). En esta secuencia desplegada de signos verbales, el tipo de signo-significado juega un papel clave, pues se aprovecha una peculiaridad de los signos: son síntesis de múltiples experiencias y conocimientos (Luria, 1984). Cuando se alternan los signos, también se despliegan las experiencias y conocimientos que cada uno conlleva, lo que ayuda a esclarecer los problemas y mejorar la anticipación para su solución.

Un ejemplo histórico de esto fue la unificación matemática que hicieron Issac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) de los aportes de Galileo, Kepler, Descartes y otros, que, por un lado, los llevaron a crear el cálculo infinitesimal, comenzando por la integral, y por el otro, llevaron a Newton a postular sus tres leyes de la gravitación universal y difundirlos con su texto *Principios matemáticos de filosofía natural* (1687). Con ellas, por primera vez se pudieron explicar las mareas, los movimientos de la luna, la precesión de los equinoccios, las trayectorias de los cometas (estos pasaron a ser considerados parte del sistema solar y no sólo hechos accidentales) y sobre todo, la gravitación universal, una nueva categoría surgida del sistema de signos matemáticos nuevos y sus relaciones (cálculo infinitesimal), una verdadera alternancia semiótica que potenció al pensamiento científico y trajo a discusión nuevos problemas epistemológicos: ¿cómo era eso de que una fuerza invisible en el universo tenía influencia en entes físicos como los planetas?, ¿cómo ocurre eso en el vacío? La visión mecanicista promovida por Descartes comenzó a ser cuestionada, pues sostenía que la causa de un movimiento entre entes físicos era el contacto directo entre ellos. La discusión sobre la acción a distancia llegó hasta 1900 y trajo aparejado un problema epistemológico fundamental: la descripción matemática de los fenómenos versus la explicación causal física de ellos; ¿la descripción de un fenómeno es su explicación?; ¿qué diferencias hay entre explicar y describir? Newton fue explícito en ello: sólo pretendía describir matemáticamente las fuerzas actuantes, no sus causas físicas. Para Kline (1980/1985, p. 66), "La fuerza de gravitación es meramente un nombre para un símbolo matemático…" La naturaleza de la fuerza misma puede ser físicamente desconocida. Sin embargo, la descripción y predicción de la trayectoria de un planeta en relación con el Sol en una elipse era exacta, pero no, si incluimos a los demás planetas que tienen sus propias órbitas y lunas que perturban las órbitas de los demás. Este es el problema matemático de "los tres cuerpos".

Las imágenes y la enseñanza

La alternancia semiótica es un proceso generalizado en la vida de los humanos, no solo en la ciencia. Ocurre en todo momento del uso de una lengua, en las interacciones cotidianas entre personas, en el arte, en las prácticas culturales, en los medios de comunicación, en la política y economía nacional e internacional, en las ciencias -destaco las disciplinas formales como la matemática y la lógica- y en todo proceso de enseñanza-aprendizaje. La forma más antigua de alternancia semiótica es la imagen, la figura, la representación iconográfica de los referentes. Su uso ha sido motivo de una larga polémica desde los griegos (Platón versus materialistas como Epicuro y Demócrito) hasta la época actual, no solo como discusión teórica de especialistas, sino también como proceso social y político, por ejemplo, las luchas religiosas entre los iconoclastas (destructores de imágenes, y por extensión del orden establecido por la autoridad) de diversas religiones -judíos, musulmanes, cristianos de Jerusalén-, y los defensores de las imágenes religiosas del cristianismo medieval que llamaron a "defender las imágenes como ´el alfabeto´ de los analfabetos (Cruz, 2009, p.60). Incluso actualmente, las caricaturas francesas de las creencias musulmanas provocan intensas manifestaciones populares de rechazo en los países musulmanes, como si las imágenes de sus concepciones religiosas (los signos iconográficos que representa a los conceptos) fueran la encarnación de ellos, y no meros signos que solo están sustituyéndolos. Creencia compartida por todas las religiones, ritos mágicos, y curanderos, que utilizan imágenes.

La idea medieval de que las imágenes servían para la pedagogía de la enseñanza del cristianismo ante los analfabetos (como alternancia semiótica, diríamos nosotros), se expresa claramente con el abad francés Suger (1081-1151), encargado de la basílica de Saint-Denis, cuando inventa en el año 1140 el estilo gótico, particularmente los vitrales, argumentando que la luz y la imagen deben tener un sentido teológico. A partir de ese momento, se acentúa la alternancia semiótica de comunicación teológica y verbal sobre Dios, utilizando la comunicación en imágenes, y con ello, se estimula la reflexión pedagógica sobre el valor cognitivo de ellas (*Ibid., p. 61*). Los vitrales, las grandes pinturas al óleo, los murales, los grabados en madera o piedra (iglesia de Tlalmanalco, Estado de México) fueron su uso más extendido. Son, por otra parte, un ejemplo artístico del uso de las alternancias semióticas como herramienta didáctica de ciertas creencias.

La alternancia semiótica en imágenes está presente en toda nuestra cotidianidad. Ejemplos de ello son las varias alternancias semióticas ante el signo fónico "cruz", uno gráfico (la escritura de la palabra "cruz"), dos manuales y una objetal:

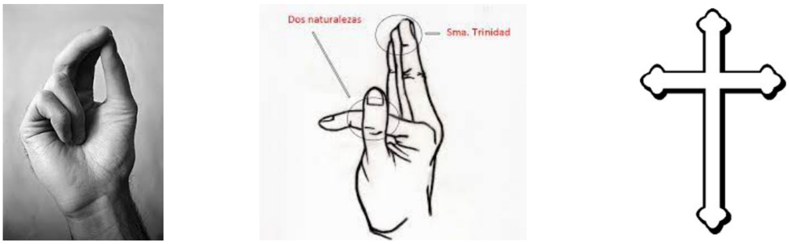


Figura 4. Tres signos diferentes para el mismo significado: cruz.

En la vida cotidiana en las ciudades, existen varias alternancias semióticas para comunicar el mismo significado que la palabra fónica "alto". Su escritura acompañada de color rojo, la seña manual, o la figura de la seña manual acompañada de color rojo:

ALTO

Figura 5. Tres signos diferentes para el mismo significado: alto.

En el uso cotidiano de la lengua o idioma, las metáforas verbales son la alternancia semiótica más evidente: "*chaparrito cuerpo de uva*" para decir obeso; "vaya cuerpo de mujer, como ánfora etrusca", para referir cintura estrecha y amplias caderas; "cuerpo de tamal", para referirse a lo robusto y grueso del cuerpo con sobrepeso.

La analogía, la semejanza, la metáfora son alternancias semióticas en el uso cotidiano, así como en la educación, en la ciencia y, por supuesto, en las matemáticas. No solo facilitan la comunicación, sino también crean nuevos y múltiples significados. Un ejemplo en biología son las metáforas y sus respectivas imágenes utilizadas por diferentes teorías en torno a la evolución. Durante siglos, por influencia del cristianismo, se habló de la "gran cadena del ser" concebida como un progreso lineal que debía terminar en el hombre hecho a imagen y semejanza de dios, cuya concepción racista era la representación del hombre blanco y caucásico europeo, tesis sostenida por el médico inglés Charles White, en 1799 (Gould, 2006, p. 26). La representación sígnica de tal teoría realizada mediante imágenes, figuras o dibujos era una escalera o pirámide ascendente, lineal, cuya metáfora en forma de figura más representativa fue una escalera triangular. Este signo de la evolución lineal, la escalera, llevó a suponer que, entre los restos fósiles, faltaba el escalón previo al humano (el eslabón perdido), lo que estimuló su búsqueda. Este contexto representacional fue aprovechado por unos pillos para falsificar el cráneo del hombre de Piltdown, Inglaterra (se ensambló una bóveda craneal humana con unas mandíbulas de simio) y se presentó como el eslabón perdido. Un fraude que tardó en desenmascararse definitivamente hasta mediados del siglo XX. Frente a esa representación sígnica y metafórica de la evolución como si fuera una escalera, Charles Darwin propuso otra, la del árbol o arbusto de la vida. En 1859, en su libro *El origen de las especies por medio de la selección natural* (1859/1971), sostuvo que la evolución no era lineal ni mucho menos como escalera, sino ramificada como arbusto. En la nueva metáfora con su nuevo signo gráfico (alternancia semiótica), muchas especies coexisten simultáneamente y no existe ninguna tendencia evolutiva que deba llevar necesaria e inexorablemente al Hombre. Esta especie, la única sobreviviente de más de 25 en la línea evolutiva de los homínidos (el arbusto ramificado de su evolución), y de las cuatro ramas tipificadas como *sapiens* hasta ahora (*Homo sapiens, H. Neandertal, H. denisovano, H. florensis*), ha sido la mejor adaptada a su medio. La alternancia semiótica estaba hecha: un concepto nuevo de evolución requirió otro signo gráfico, una nueva metáfora para representarlo: el árbol o el arbusto de la vida.

Por su función esclarecedora del referente de los signos, y, creadora de nuevos significados, las alternancias semióticas son un recurso pedagógico fundamental en todas las disciplinas científicas y formales, sobre todo, en el esclarecimiento de los referentes de la vida cotidiana cuyos signos verbales, las palabras usadas, requieren esclarecer de otra forma los significados que denotan o connotan, sean realidades físicas o abstractas.

El camino en las alternancias semióticas es bidireccional, **va de un signo nuevo a un mismo significado**, como cuando en los escritos matemáticos se dejó de decir con puras palabras los problemas y sus soluciones (matemática retórica), y se comenzó a utilizar signos para expresarlas; o **de un mismo signo a nuevos significados**, como cuando Diofanto (s. III d. C.) interpretó el cuadrado y el cubo no como objetos geométricos con áreas y volúmenes, sino como números, como conceptos, los que a su vez se expresaron como nuevos signos (intuyó la regla de los signos de los números negativos) que, finalmente, lo llevó a encontrarse con nuevos números, los que se llamarían imaginarios (raíces de números negativos) allá por el año 275 d. C. (Gómez i Urgellés, 2017). El ejemplo ilustra la noción vigotskiana de los signos como herramienta cognitiva que coadyuva al impulso de nuevos planteamientos teóricos en las ciencias.

Este proceso muestra el camino que va de lo abstracto a lo concreto, y a la inversa, de lo concreto a lo abstracto: vamos de las imágenes, figuras, pictogramas, materiales audiovisuales, metáforas, analogías que permiten comprender intuitivamente las categorías matemáticas, a su representación abstracta utilizando los signos de su propia lengua.

Un ejemplo de ello es la teoría de grafos o gráficas, como otros le llaman. Ésta es utilizada para representar matemáticamente la *eficacia* o los pesos relativos en gráfica de redes para comprender el electroencefalograma cuantitativo al analizar el sueño, rebasando el análisis visual de líneas sinusoidales que suben y bajan con cierta frecuencia y amplitud (Marín, Corsi, Gast, Ríos, Olguín, Rosales, Schindler, Müller, 2018). Más allá de su utilidad en el EEG, los grafos, en sí mismos, permiten nuevos análisis. Por ejemplo, si representamos una red con líneas rectas y nódulos cuyas uniones forman vértices y ángulos, como en la figura 2, es claro visualmente que el camino más directo y corto es la recta que va de A a D, pero si ponemos pesos numéricos a cada línea utilizando ciertas reglas de asignación, la representación geométrica visual ya no corresponde a su concepto matemático de "eficiencia", pues ahora el camino más corto es el que va de A-B-D (reconstrucción de la figura de Marín et. al, p. 237).

Para comprender la noción de "eficiencia" en la teoría de gráficas o grafos en red, entendida como la representación de las relaciones entre objetos (*Ibíd*, p.234) se necesita la alternancia semiótica de pasar de la figura a los *pesos numéricos*, es decir, de los signos figurativos a los signos categoriales de la lengua matemática y sus relaciones sintáctica expresados en matrices.

A-B: 0.21; A-C: 0.11; B-D: 0.23; A-D: 0.7; A-E:0.56; C-E: 0.35

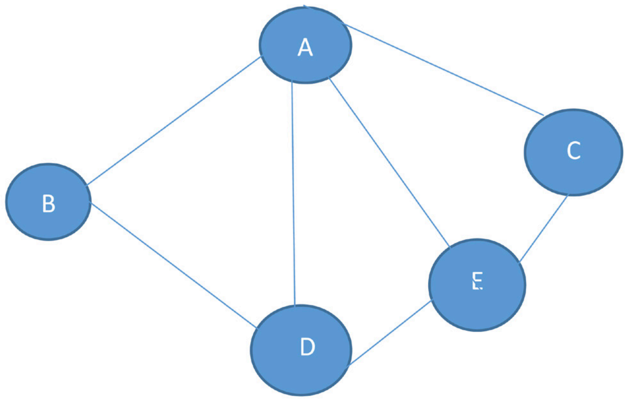


Figura 6. Grafo de red con pesos numéricos entre los caminos de un nódulo a otro.

La potenciación del pensamiento mediante las alternancias semióticas se hace evidente en la teoría de los números con el desarrollo de las diversas categorías[16]

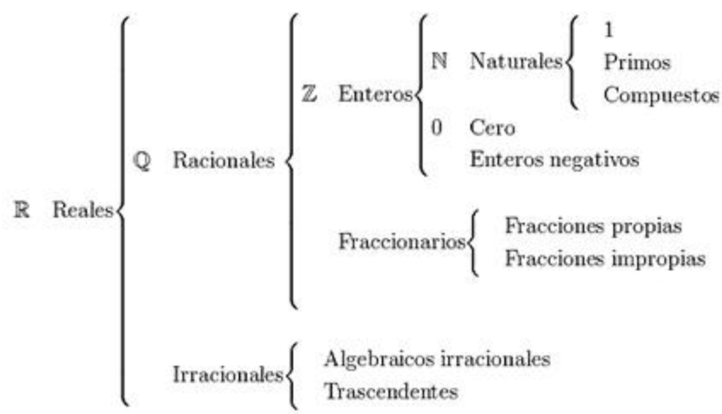


Figura 7. Cuadro sinóptico de lo clasificación de los números.

16 https://www.google.com/search?q=tipos+y+clasificaci%C3%B3n+de+n%C3%BAmeros&tbm=isch&source=iu&ictx=1&fir=bl5XRloPd4IVlM%253A%252CpF9PMw781OQwdM%252C_&vet=1&usg=AI4_kQezFGoU1HmnQ8JYgcV2dBRATS16w&sa=X&ved=2ahUKEwik3N_s2Z_oAhVFnOAKHUO_AHEQ_h0wAXoECAoQBg#imgrc=SrJQ-Au4faNtUM&imgdii=NeFPDHiWRklFMM

Muchos de los grandes avances de las matemáticas están ligados a las nuevas categorías numéricas, es decir, a nuevas alternancias semióticas.

Los objetos epistémicos están presentes en todo: en la cotidianidad, en las prácticas culturales, en las ciencias, y, por supuesto en las matemáticas. Algunos ejemplos que ilustran cómo las matemáticas crean objetos epistémicos son: el cero, los números negativos, los números imaginarios, o el álgebra misma. Todos ellos potenciaron el pensamiento matemático.

Los signos, y particularmente su alternancia, son poderosas herramientas cognitivas, potencian la capacidad anticipatoria del pensamiento, y, al hacerlo y para hacerlo, requieren signos y significados; con ellos surgen nuevos objetos epistémicos. Tres ejemplos lo ilustran. (1) Los hindúes y mayas introdujeron el número cero; los hindúes los números negativos. Es decir, dos nuevos signos con sus respectivos nuevos significados. Las consecuencias teóricas para los mayas no las conocemos, pero si para las matemáticas indoeuropeas. ¿Cómo llegaron a ello? Una posibilidad que imaginamos es que, si concebían la serie numérica como una línea recta formada de segmentos y cada uno de ellos como un número, es evidente (se ve) que con solo prolongar la línea a la izquierda hay un segmento antes del 1. Este nuevo significado (otros números a la izquierda de 1) obligó a crear un signo intermedio, el cero "0", después del cual seguían los números negativos. Una vez creado el cero como demarcación, la conclusión era obvia: el cero es otro número más, y no la noción popular de nada. Este proceder de representación lineal de los números se redescubrió en el siglo XVI Y XVII al hacer lo mismo para poder aceptar a los números negativos como verdaderos números. Fue Wallis quien lo hizo en su libro *Algebra* (1685). Esto impulsó las reflexiones matemáticas, sobre todo por lo que implica en las ecuaciones con números negativos, números que no fueron bien recibidos por muchos matemáticos europeos que los consideraban sólo símbolos o irreales (Kline, 1980/1985). (2) Con los números negativos apareció un nuevo objeto epistémico cuyo significado no fue claro, aunque el sistema de signos obligó a su manifestación: los números llamados imaginarios. Si existen los números positivos y negativos, y por otro lado existe el procedimiento para obtener la raíz cuadrada o cúbica, es inevitable que exista la raíz cuadrada de un número negativo como -1, pero ¿qué significa eso? La historia de los números imaginarios $\sqrt{-1}$ y los números complejos (a + b $\sqrt{-1}$ muestra la incomprensión de los nuevos objetos epistémicos, incluso su negación como número. El signo $i = \sqrt{-1}$ ¿qué significado tenía para unos matemáticos acostumbrados a la representación geométrica de todo? El signo había creado un nuevo objeto epistémico que a su vez terminó impulsando a las matemáticas mismas. (3) El concepto de gravedad que formuló Newton con su fórmula $F = g\ (m^1 m^2/d2)$ sugería que la gravedad era una fuerza instantánea e ilimitada en un modelo cosmológico en donde el espacio no se expande. La alternancia semiótica que propuso Einstein en 1905, de que el espacio-tiempo se fusionan creando una estructura de cuatro dimensiones, y la metáfora (una alternancia semiótica) fue la de una sábana que forma el espacio-tiempo en la cual, un objeto material (un planeta, o estrella, o la materia oscura, o agujero negro, etc.), al deformarla, hace que los demás se muevan como si fueran impelidos por una fuerza instantánea e ilimitada (Blanco, 2015). El espacio-tiempo fue el nuevo objeto epistémico que resultó de las alternancias semióticas implicadas.

Estos ejemplos de alternancias semióticas, y las matemáticas en que se sostienen, revolucionaron la teoría de los números, a la física y a la cosmología hasta nuestros días al servir como poderosos instrumentos cognitivos que llevaron a la creación de nuevos objetos epistémicos. Muestran, además, que siempre es posible alternar signos, pues se pasa de un tipo (los números) a otro tipo (los signos algebraicos), o a otros signos (representaciones geométricas).

El poder anticipatorio y conceptual -su efecto como herramienta cognitiva- de los signos, también está ligado a la definición de su significado o referente. Un ejemplo es el cambio de definición de la llamada función Z que hizo Bernhard Riemann (1826-1866)

$$\varsigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\varsigma}$$

donde z es un número complejo distinto de 1. Lo que él hizo fue generalizar una función estudiada por Euler

$$\varsigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{x}$$

para Euler, x era un valor real, mientras que para Riemann era un número complejo. Este cambio de definición y de signos tuvo consecuencias matemáticas y físicas sorprendentes, evidenciando la función de herramienta cognitiva que los signos, y su alternancia, tienen.

El caso anterior podría dar la impresión de que un movimiento al revés, en el que se vaya de las nociones conceptuales a las geométricas, no impacta la revolución teórica de las matemáticas, pero es incorrecto. El ejemplo de la teoría del caos es claro. El caos como un sistema dinámico se hizo evidente cuando se pensó geométricamente en el sistema dinámico. El caos “solo parece descabellado si estás buscando soluciones que se pueden expresar por fórmulas claras y ordenadas” (Stewart, 2011, p. 328). Un ejemplo más antiguo fue la crisis que provocó en los pitagóricos descubrir que había números que no eran naturales: $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ Eudoxo resolvió este problema al tratar los números geométricamente, es decir, como segmentos, y al hacerlo, la distinción entre 1 y $\sqrt{2}$ desaparece, y con ello la “angustia” pitagórica ante el problema teórico de los números irracionales.

La geometrización de las matemáticas como el fundamento riguroso de ellas duró hasta el año 1600 (Kline, 1980/1985).

Las matemáticas, en tanto que una lengua formal, con sus innumerables alternancias semióticas, demuestra constantemente el poder de los signos para desarrollar la capacidad de anticipar y elaborar teóricamente al mundo y transformarlo prácticamente. Dos ejemplos lo reafirman.

Los intelectuales griegos clásicos geometrizaron las matemáticas y con ello resolvieron la angustia pitagórica de los números irracionales, pero su utilidad práctica era problemática. A ellos, los filósofos, no les interesaba tal actividad práctica porque los ciudadanos no hacían trabajos manuales, sólo los esclavos o comerciantes. Pero cuando se fusionó la cultura griega a la de Alejandría, Egipto, se incorporó con ello el uso práctico de las matemáticas que los egipcios y babilonios les daban, fue entonces que los alejandrinos encontraron las mediciones cuantitativas de longitudes, áreas y volúmenes, muchas de ellas realizadas con números irracionales (Kline, 1980/1985). Hiparco y Tolomeo crearon la astronomía cuantitativa y la trigonometría con la nueva alternancia semiótica.

El otro ejemplo de la alternancia semiótica de la geometría al tratamiento numérico y algebraico es el cálculo diferencial. Hay en esta historia dos alternancias semióticas interesantes. La primera fue la solución matemática a un problema práctico utilizando la geometría: el método generalizado para obtener el área de figuras con lados curvilíneos, lo que ahora se llama la *integral*. Eudoxo de Cnido en el siglo VI a. C., y Arquímedes un siglo después, utilizaron el método de aumentar los lados de un polígono regular tanto como fuera posible para acercarse a llenar el círculo, pero sus soluciones sólo se aplicaban a cada caso particular que se analizaba. Newton y Leibniz siguieron esa lógica, pero lograron obtener un método generalizable. Concibieron una figura curvilínea partida a la mitad, formando un semicírculo. De su base salen segmentos perpendiculares y se unen a la parte curvilínea. En la base está el punto ***x***, mientras que el segmento que sube a la curva es y. Cada segmento que va de la base a la curva fue concebido como un rectángulo infinitesimal, es decir, tan infinitamente pequeño como se quiera, pero nunca igual a cero. La integración mediante la suma de cada rectángulo infinitesimal forma el área bajo la curva, es decir, su integral. Reconstruiré la explicación didáctica de la integral que nos ofrece Piñeiro (2013) con una alternancia semiótica, el dibujo.

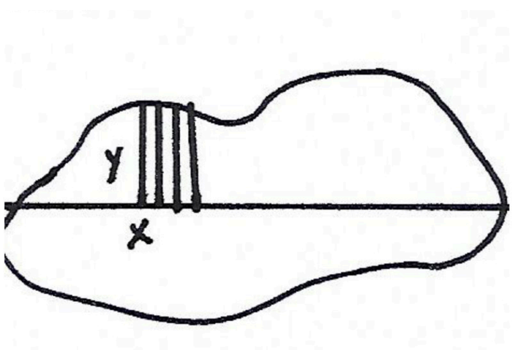


Figura 8. Representación geométrica del cálculo.

La segunda alternancia semiótica fue la comunicación de ese método con signos adecuados, es decir, el paso de la geometría al álgebra moderna. Newton utilizó una representación geométrica, en cambio Leibnitz le dio la notación moderna y lo hizo en ecuaciones, transformando la teoría de Newton en algo inteligible al sustituir las figuras por las ecuaciones del tipo $\int_{-1}^{2}(x+2)dx$ y nuevos signos como $\int$ que es summa en latín. A partir de entonces, con el cálculo se pudieron obtener áreas y volúmenes que con los métodos geométricos griegos no se podían.

Por cierto, la fundamentación lógica del infinitesimal era muy endeble, pero sus fórmulas y aplicaciones prácticas eran correctas y útiles. La sólida fundamentación lógica del cálculo se buscaría a partir del siglo XIX con Weierstrass, Dedekind y Cantor. El primero conceptualizó la noción de *límite* con lo que se eliminó la noción de infinitesimal; lo hizo con puras fórmulas y concibiendo los segmentos como colección infinita de números reales, no con microrectángulos, es decir, usó la alternancia semiótica de la geometría a números. De ahí el epígrafe de Pierre Simon de Laplace citado en este capítulo: "Tanta es la ventaja de un lenguaje [matemático] bien construido, que su notación simplificada a menudo se convierte en fuente de teorías profundas" (Citado en Madrid,2012, p. 26).

Esta historia es un ejemplo más de que lo real no siempre es equivalente a lo lógico. Error muy frecuente en físicos y matemáticos que asumen que la verdad lógico-matemática es equivalente a la verdad objetiva, es decir, que las ecuaciones corresponden *siempre e indiscutiblemente* a la realidad objetiva. Eso no siempre es así. De ahí el asombro y preocupación por las paradojas lógicas. Estas sólo existen en las verdades y falsedades lógico-matemáticas, no en la realidad objetiva. El mundo de los objetos matemáticos no siempre corresponde al mundo de los objetos reales.

Todo lo real es lógico, pero no todo lo lógico es real. Las paradojas no existen en el mundo de la realidad objetiva, solo en las creaciones conceptuales de las premisas lógicas y matemáticas. Si llevamos una paradoja a su constatación en el mundo real y objetivo, estalla como pompa de jabón, y por ésta, es bella al formarse, pero efímera al chocar con la realidad objetiva (obsérvese la metáfora que utilizamos como alternancia semiótica). Si una teoría se fundamenta en puras verdades lógicas, las paradojas le son mortales. Eso le ocurrió a las matemáticas a principios del siglo XX cuando Bertrand Russell preguntó a Frege ¿este conjunto del que estoy hablando es miembro de sí mismo?, pregunta que mostró una paradoja lógica. Frege había publicado un libro con el cual pretendía dar coherencia lógica, usando los conjuntos, a toda la aritmética. La paradoja de Russell cuestionó esa pretensión. Surgieron con ella nuevas alternancias semióticas para enfrentar la crisis lógica.

Una manera de comprender la historia de las matemáticas es analizando las diversas alternancias semióticas con que se construyeron sus cimientos, sus objetos epistémicos, sus métodos, y analizando todo ello, obtener conclusiones didácticas y pedagógicas del uso de las alternancias semióticas en la enseñanza y aprendizaje matemático.

Las matemáticas: otros ejemplos de su historia como alternancias semióticas

Existen varias alternancias semióticas que podemos resaltar en la historia de las matemáticas sin que eso agote todas las existentes.

El tránsito del uso de objetos para numerar las cosas, al uso de signos para representarlas. De los nudos en ciertas culturas prehispánicas o piedras y guijarros en Mesopotamia, hasta los signos gráficos para numerar las cosas, pasando después a la combinación de los signos para operar con ellos en representación de las cosas. Con cualquier variante anterior, surgen los números naturales y las operaciones básicas de la aritmética.

La alternancia semiótica que va de los números a las figuras geométricas construidas con regla y compás, que llevó a la rigurosidad lógica de Euclides usada hasta el siglo XVII, con este paso surgieron nuevos entes matemáticos. Se transitó de la mera percepción y denominación de cosas, a la creación lógica del número que es, como decía Piaget (1950/1979), aditiva: 1+1=2. Es decir, el dos no existe más que por la adición de dos veces el 1. Generalizando: los signos y su sintaxis crean nuevos significados (objetos epistémicos) que requieren nuevos signos creados mediante las alternancias semióticas y la recursividad. Otra confirmación de la noción de Vygotski acerca del signo como herramienta cognitiva.

El cambio de las operaciones de cálculo y razonamiento matemático mediante formas geométricas como rectángulos, cuadrados, etc., que llamaremos *matemática geometrizada*, al uso del álgebra. Los límites de la matemática geometrizada se expresaron con la aparición del cálculo infinitesimal creado por Newton y Leibniz no sólo para su fundamentación, sino para la comprensión de asuntos como ¿Cuál es la representación geométrica de lo infinitesimal? Fue Leonhard Euler (1707-1783) el que se negó a utilizar la geometría como base del cálculo, aunque el inicio del cambio de la geometrización al álgebra lo inició François Vieta o Viète (1540-1603), quién revolucionó las matemáticas al introducir los coeficientes literales en sustitución de los números. Llamó a su Álgebra cálculo con letras (*logistica speciosa*) en contraposición del cálculo con números (*Lógica numerosa*) y al hacerlo, fue posible la demostración general en el álgebra, es decir, de cualquier clase de ecuación (Kline, 1980/1985). Corbalán (2017, p. 23) lo ejemplifica diciendo que el producto de 4 x 6 lo representaban geométricamente dibujando un rectángulo con lados 4 y 6, dividido en cuadritos de lado 1. Un cuadrado conformado internamente con cuadrados y rectángulos se usaba para demostrar igualdades que hoy las expresamos algebraicamente como $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

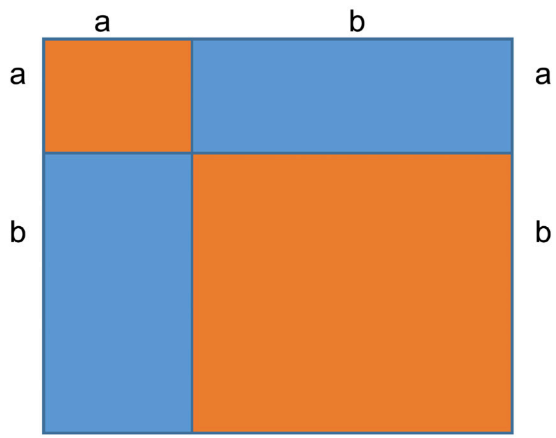


Figura 9. Representación geométrica de una igualdad algebraica.

La historia del número pi (π) muestra el poder categorial (teórico) de las alternancias semióticas. El número pi (π) es la razón o relación constante entre la longitud de una circunferencia (p) y su diámetro (d), y también es el doble de la razón constante entre el área de un círculo y su cuadrado inscrito. Desde la antigüedad se calculó mediante regla y compás obteniendo las fracciones, lo que para los matemáticos llaman números racionales y que, cuando los decimales resultantes de las fracciones no son periódicos, surge un nuevo objeto epistémico que se llama número irracional, Pi es uno de esos (Stewart, 2016). Desde el siglo XVI se usaba la grafía o signo (π), pero en 1706, William Jones lo llamó "pi" por ser la inicial de la palabra griega "periferia" (Navarro, 2011a). En todo fenómeno que tenga que ver con la forma de giro o círculo aparece π. Desde el papiro egipcio de Rhind (1650 a.C.) aparece la referencia al número pi (π), (no a su signo). Los egipcios en la ciudad de Giza, en el 2600 a.C., lo calcularon como 22/7 = 3.142; en el 2000 a.C., ciudad de Babilonia, lo pusieron en una proporción que ellos calcularon 25/8 = 3.1388. En los textos védicos indios del siglo IX a.C., lo calcularon como 339/108 = 3. 1388; Arquímedes usó la proporción 223/71= 3.140845; Claudio Ptolomeo (100-170 dC) lo calculó como 377/120 = 3.141666; en 1414, el persa Jamshid al-K¬ashi (1380-1429), calculando 2 π con el sistema sexagesimal (otra alternancia semiótica) logró 16 cifras usando por primera vez un cálculo numérico puro, una serie infinita (otra alternancia semiótica); finalmente Leibnitz y Newton, al crear el cálculo infinitesimal, permitieron que se pasara de lo finito a lo infinito, y el cálculo de pi dejó de ser con polígonos geométricos y comenzó a ser matemático, hasta que Johan Heinrich Lambert (entre 1761 y 1767) demostró que era irracional (Navarro, 2011a). El uso de pi (π) como herramienta cognoscitiva en el lenguaje algebraico está presente en la famosa curva de Gauss, es decir, en la curva teórica de la probabilidad, en la cual, el punto central de la media = 0, con varianza igual a 1 es $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

La alternancia semiótica y conceptual que el uso de cuerdas-regla y compás provocó en el desarrollo de los números ilustra el papel teórico, no sólo pedagógico, de aquella. Desde la antigüedad egipcia, mesopotámica y griega el uso de regla-cuerdas y compás estuvo ligado no sólo a las construcciones y mediciones agrarias, sino a la reflexión matemática que transitará de las representaciones geométricas a las matemáticas numéricas y después algebraicas. El triángulo que lleva el nombre de Pitágoras (isla de Samos- m. 496 a. C.) en su formulación geométrica, llevó a descubrir nuevos números (nuevos objetos epistémicos), pasando de los naturales a los irracionales y el desarrollo de la raíz cuadrada, la cual surge del cálculo de las diagonales de cuadrados y rectángulos a partir de los lados.

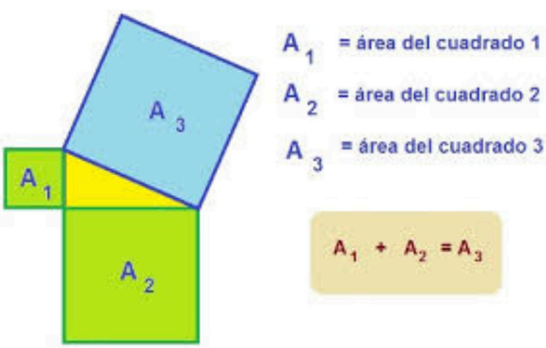


Figura 10. Representación geométrica del teorema algebraico de Pitágoras.

Pitágoras pasó de representar los números naturales como bolitas formando figuras geométricas con un significado matemático y filosófico, moral y esotérico, es decir, creando nuevos objetos epistémicos. El 1 era la mónada, el signo de la razón, de lo definido, de lo estable; el 2 era la diversidad, lo indefinido; el 3 la unión de la mónada y la diada, la armonía y la perfección; el 4 es la ley inexorable y universal del a justicia, el 5 la unión de lo masculino y femenino y del triángulo divino ($3^2 + 4^2 = 5^2$); el 6 era el número perfecto (estos números se obtienen por la suma de sus divisores, incluyendo el 1, pero excluyendo el mismo número. Los griegos conocieron sólo cuatro números perfectos, 6, 28, 496, y 8128. Actualmente se conocen 43 y todos son pares); el 7 significaba la virginidad y se asociaba al a salud y la luz; el 8 era la amistad, la plenitud y la reflexión, pero también el primer número cubo; el 9 significaba amor y gestación; y el 10 era el signo de dios y el universo, representándose como triángulo equilátero (Alsina, 2011)

0
0 0
0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0 0

Figura 11. Bolitas usadas para la representación de los números triangulares.

La representación geométrica de los números naturales, y el teorema de Pitágoras resultante, llevó al descubrimiento de que la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de los catetos, cuando cada lado vale uno, no da un número natural, sino un extraño número $\sqrt[2]{a2+b2} = 1.41421356\ldots$, llamado irracional, uno que surge cuando la fracción de dos números enteros m/n, y n es diferente de cero, no resulta en un número natural, y sus decimales no son exactos ni periódicos. Había nacido otro objeto epistémico.

Esta alternancia semiótica tuvo implicaciones teóricas profundas en las matemáticas, solo señalaremos que el uso de la raíz cuadrada (cuyo símbolo actual lo inventó Christoff Rudolff en 1525), así como los números irracionales, están presentes en nuestra vida cotidiana, un ejemplo de ellos es la proporción áurea o número phi (se pronuncia fi) involucrado en la naturaleza y el arte (Corbalán, 2012).

$$1+ \sqrt{5}/2 = 1.61803398874989\ldots$$

Sin embargo, la geometrización de las matemáticas fue un límite que los griegos alejandrinos superaron al "numeralizar" la geometría. Con ello rescataron el álgebra babilónica y egipcia. Destacaron en este proceder Herón y Diofanto (siglo III d. C.) quienes resolvieron problemas algebraicos por procedimientos aritméticos, es decir, con un tipo de alternancia semiótica. Sin embargo, Herón hizo esas aportaciones con un tipo de signos: los verbales. No usaba signos o "símbolos" matemáticos, todo lo describía con palabras, así que los problemas tenían la forma de "enigmas" (Kline, 1980/1985). Otra alternancia semiótica resolvió el problema.

El ejemplo nítido y de gran repercusión de alternancias semióticas en la historia de las matemáticas fue el paso iniciado por Diofanto (s. II d.C.) al incorporar los números (un tipo de signo) y las incógnitas (otro tipo de signos), que él llamó "aritmo", para solucionar problemas sin utilizar la geometría (otro tipo de signo) que, recuérdese bien, solo usaba compás y regla sin números dibujando segmentos y curvas (otro tipo de signos). Diofanto usó números en vez de segmentos y objetos tridimensionales, y al hacerlo así, permitió dar el paso para hablar de más de tres dimensiones, o de sumar un objeto de dos dimensiones (un cuadrado) con uno de tres dimensiones (un cubo), cosa inconcebible para ese entonces porque sólo se sumaban segmentos con segmentos, o áreas con áreas, o volúmenes con volúmenes. Diofanto posibilitó sumar números y con ello superó las operaciones con pura geometría (Gómez, 2017). Al introducir el "simbolismo", se da inicio al camino que llevará al álgebra y potenciará a la misma geometría con los aportes de Descartes. Diofanto también utilizó los números poligonales (números naturales que se pueden expresar mediante un polígono natural) que, desde la antigüedad, se representaban por puntos o colocando piedras asociándose a figuras geométricas, tales como los números triangulares, números cuadrados o pentagonales. Los números poligonales son muy utilizados actualmente en criptografía de las comunicaciones. Otra gran contribución de Diofanto fue utilizar potencias mayores que tres x^3 y hasta seis x^6. Debemos comprender que para los griegos que geometrizaron las matemáticas, el producto mayor de tres no tenía significado geométrico, de ahí la contribución de Diofanto con esas alternancias semióticas: potenció al pensamiento matemático al ir más allá de la geometrización creando nuevos objetos epistémicos. Pese a sus logros, Diofanto solo aceptaba raíces racionales positivas, no negativas[17], y tampoco conocía el

17 La matemática de Diofanto, por ser teórica, difirió de la de Herón (ingeniero) y de Arquímedes. Diofanto evadía las raíces irracionales y las convertía en racionales por procedimientos algebraicos, pero Herón y Arquímedes, que aplicaban las matemáticas, si utilizaban las irracionales (Kline, 1980/1985).

concepto de cero, (*Ibid*., p. 56), lo que parece llevarlo a evitar los números negativos. Tenían que aparecer otras alternancias semióticas para que los números negativos (otro objeto epistémico. Fueron introducidos por los hindúes con Brahmagupta en 628 d.C.) y el concepto de cero, con los nuevos signos de los números y el sistema numérico base 10, se hiciera fácil de asimilar como número.

Toda alternancia semiótica, ya sea en la vida cotidiana, o en las ciencias, o en las matemáticas, generará confusión y ambigüedad si no se definen los términos de sus signos, las condiciones de su uso y los presupuestos o premisas de las cuales parte. Estos tres elementos (definición, condiciones y presupuestos) son fundamentales en toda definición, sea esta matemática o de cualquier ciencia.

Dos ejemplos ilustran lo anterior: (a) la noción del "cero" pasó de considerarse "nada" a considerarse un número con derecho propio revolucionando las matemáticas, al poder expresar todas las cantidades numéricas posibles con solo diez signos. El cero fue desarrollado por los mayas, pero ignoramos las consecuencias teóricas que tuvo para ellos. También lo desarrollaron los hindúes. Una vez establecidos estos números, la representación numérica de los negativos tuvo una alternancia semiótica: Rafael Bombelli (1526-1573) propuso la correspondencia exacta de los números reales a los segmentos de una recta (Kline, 1980/1985), y en 1685, John Wallis (1616-1703) en su libro "Algebra" simplemente utilizó una recta y un punto en movimiento en la cual el origen era el cero.

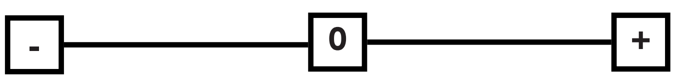


Figura 12. La recta usada como ilustración de los números negativos y positivos.

Con la noción del cero surgió otro asunto teórico u objeto epistémico ¿es un número par o non?, cuestión que depende de su definición. Si aceptamos que un número par es cualquier entero que puede ser dividido exactamente entre 2 y el último dígito sea 0, 2, 4, 6 u 8, entonces el cero es par, porque 0/2 = 0, es exacto y termina en cero.

(b) Otro ejemplo de la importancia de las definiciones de los signos-significados es la polémica sobre probabilidades entre Christian Huygens (1629-1695) y Johannes Hudde (1628-1704) en torno al problema que el primero planteó:

> "Tres jugadores, A, B, C toman 12 fichas de las cuales 4 son blancas y 8 son negras. El ganador es aquel que extraiga una ficha blanca. Si A saca primero, luego B, luego C y así sucesivamente, ¿cuál es la razón entre sus chances?" (Hacking, 1995, p.124)

Puesto que hay tres interpretaciones posibles: primero, cada vez que sale una ficha negra se pone nuevamente en el lote; segundo, cada vez que sale una no se repone en el lote; tercero, cada uno de los tres jugadores comienza con su propio lote, no se pusieron de acuerdo porque Hudde adopta la segunda y Huygens la primera. Para Hacking (1995) el "lenguaje" matemático (será mejor decir, la lengua matemática) de las probabilidades estaba precariamente definido.

Las definiciones de todo signo, las condiciones de su uso y los presupuestos que implica, son fundamentales para evitar ambigüedades y para sacar conclusiones pertinentes de ellas, sobre todo si utilizamos alternancias semióticas en otros campos.

Por ejemplo, la alternancia semiótica entre el uso del lenguaje natural en jurisprudencia y las matemáticas es el llamado derecho condicional (si se cumple la condición B, entonces es legal C). Esta alternancia tuvo su expresión en la teoría de la probabilidad que desarrolló Leibniz, y que conceptualizó como grados de probabilidad (escritos como fracciones), "una proporción a lo que sabemos", cuya anotación moderna es *Prob*(A/B) (Hacking, 1995, p. 114-15).

El uso de uno u otro signo, en tanto herramienta cognitiva, puede facilitar o no los problemas que debemos resolver. Por ejemplo, Girolamo Cardano (1501-1576), autor del *Liber de laudo aleae*, primer libro sobre el azar, no tenía signos adecuados para la representación de sus conceptos y se vio obligado a utilizar ejemplos concretos. Por su parte, Galileo (1564-1642) enumeró 216 maneras distintas en las que podían caer tres dados perfectos, pero no utilizó la combinatoria (ni sus signos), por lo que las combinaciones las realizó aritméticamente (Corbalán y Sanz, 2011). Compárese la formulación actual de las combinaciones:

$$\mathbf{C_{m,\,n} \;=\; m!\,/\,N!\,.\,(m\text{-}n)!}$$

Pese a estas limitaciones en el uso de signos, la contribución de Galileo radicó en la teoría de la medida del error. Él creía que los errores eran inevitables y que se agrupaban en dos tipos: los sistemáticos producidos por métodos y herramientas, y los aleatorios, que variaban de forma impredecible de una medida a otra (*Ibid.*). En otras palabras, un mismo resultado puede potenciarse y realizarse rápidamente si se usa una fórmula algebraica, pero eso no impide obtenerlo si usamos solo signos aritméticos, aunque tardemos mucho tiempo más.

Las alternancias semióticas aumentan la rapidez con que se realizan algunos cálculos.

Siguiendo con los ejemplos de combinatoria, el caso del triángulo de Pascal expuesto en su libro *"Tratado sobre el triángulo aritmético"* publicado en 1665, tiene una historia curiosa. Se comenta que, en el año de 1652, en un viaje en el que iban Blaise Pascal (1623-1662) y Antoine Gombauld llamado el caballero Méré -un experto jugador y hombre mundano francés- éste le presentó a Pascal tres problemas, y le interesaron tanto, que se los comunicó a Pierre de Fermat (1602-1665). Estos problemas entretuvieron durante dos años a estos personajes, los que estuvieron carteándose para poder resolverlos, dando como resultado el surgimiento de la teoría de la probabilidad y el libro donde Pascal expone su triángulo. Este triángulo es un ejemplo de alternancia semiótica para obtener números combinatorios de orden n (número de combinaciones de orden n de m elementos) cuya expresión moderna matemática es

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}.$$

Pero usando el triángulo de Pascal tenemos:

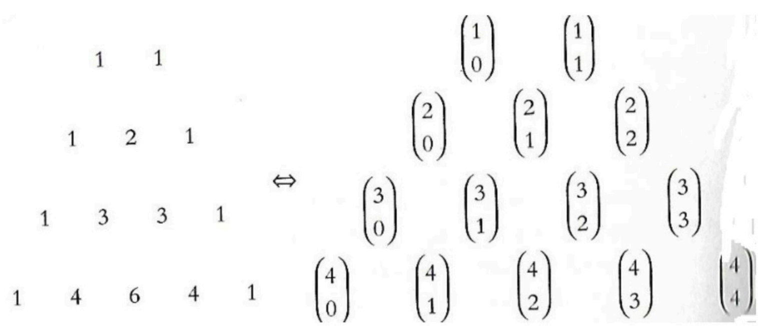


Figura 13. El triángulo de Pascal.

Si ahora el triángulo de Pascal (un conjunto de signos) lo alternamos semióticamente con gráficas de barras (otro tipo de signos), aparece la llamada distribución normal o campana de Gauss (tomado de Corbalán y Sanz, 2011, p. 124):

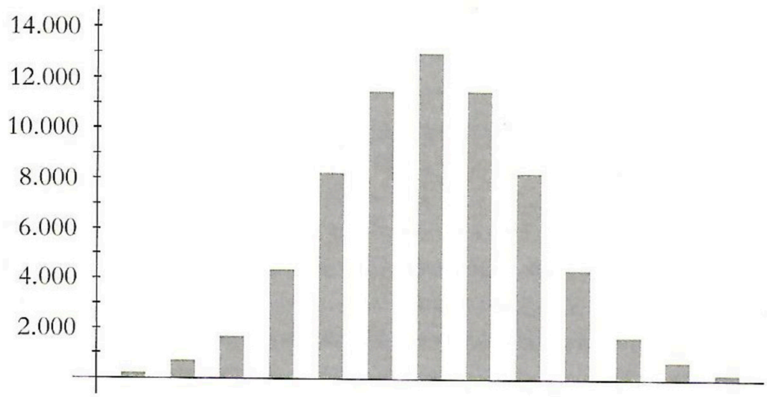


Figura 14. La distribución normal como barras.

El ejemplo de alternancia semiótica mejor conocido en las ciencias, particularmente en la psicología, es la campana de Gauss (un signo gráfico) que hace explícita e intuitiva su formulación matemática.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

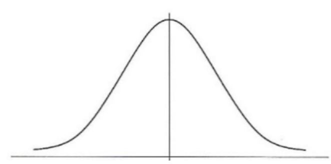


Figura 15. Dos alternancias semióticas a la distribución normal: fórmula algebraica y curva como campana de Gauss.

Por supuesto que el signo pictográfico, la curva, aun permitiéndonos comprender rápida e intuitivamente (a través de la percepción) la distribución normal probabilística en que se basa la estadística, no nos permite comprender la diferencia **entre la inferencia estadística (basada en hechos empíricos) y la deducción probabilística (basada en modelos teóricos).** En la estadística se recopilan las frecuencias de una serie de sucesos conocidos y se infiere su probabilidad a partir de su frecuencia relativa, mientras que, en la fórmula de la curva matemática de probabilidad, la formulación teórica nos permite deducir la probabilidad de los sucesos, aún los desconocidos.

Este ejemplo de alternancia semiótica muestra, a su vez, la función del *signo como herramienta cognitiva*: la formulación matemática de la probabilidad potencia, con mucho, lo que la curva dibujada nos facilita aprehender intuitivamente (la media y sus extremos), pero la cual no nos permite, por sí sola, deducir sus consecuencias teóricas probabilísticas: el llamado teorema central del límite (otro objeto epistémico). Lo explicaremos con otra alternancia semiótica, el lenguaje natural versus la formulación teórica.

La frecuencia relativa de un evento como una cara al tirar un dado (m/n: 1 de 6: 0.1666) no es equivalente a la probabilidad teórica, a menos que tienda a aumentar grandemente el número de eventos. Esto lo sabemos porque en pequeños números puede darse el caso de que la frecuencia relativa de un evento, por ejemplo, de una misma cara de un dado, ocurra cinco veces seguidas (5 de 6 = 0.8333), pero es posible que en las siguientes cinco tiradas fuera 2 de 6 = 0.333 y en las siguientes cinco fuera 4 de 6 =0.666. Sin embargo, si lanzáramos 5000 veces el dado (suponiéndolo con caras igualmente equilibradas), la probabilidad teórica será 0.5, es decir, del 50%. La probabilidad teórica se da en los grandes números, no en los pequeños. Nunca podremos estar seguros de si la frecuencia con que ocurre un fenómeno empírico es suficiente para que se dé la probabilidad teórica, sin embargo, fue gracias a Jakob Bernoulli (1654-1705) que se llegó a la noción del teorema central del límite, es decir, podemos saber cuáles son los límites dentro de los cuales la frecuencia relativa (m/n) y la probabilidad teórica (p) estén más cerca y entren en determinados límites. Y estos sí los podemos definir y establecer a voluntad. La probabilidad de que la suma normalizada esté dentro de los valores a y b se aproxima a la curva normal, cuando crece indefinidamente. Su formulación matemática es (Corbalán y Sanz, 2011, p. 128):

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{ a \leq \frac{(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

La alternancia semiótica entra al quite para la comprensión intuitiva de la noción teórica. Otra curva (signo) mezclada con números (otros signos), nos permite hacer inferencias de lo que podríamos esperar con los límites, la probabilidad y la frecuencia relativa:

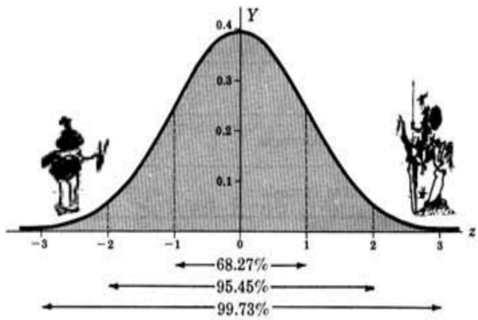


Figura 16. La distribución de probabilidad como campana de Gauss.

Las alternancias semióticas entre la imagen y las palabras, tendrá un sesgo unilateral hacia el lenguaje de signos matemáticos a partir de Galileo y el desarrollo de la matemática renacentista, por el énfasis en el razonamiento y conocimiento del mundo a partir de aquellos, es decir, sin imágenes. Sin embargo, la historia de las matemáticas es inseparable de las alternancias semióticas de todo tipo, con imágenes (geometría) o sin imágenes (nomenclatura algebraica), y actualmente es claro que todo tipo de alternancias semióticas es un recurso no sólo pedagógico para los analfabetos de la matemática, sino reflexivo para los mismos matemáticos.

Las alternancias semióticas no solo facilitan la comprensión de los conceptos matemáticos sino, ante todo, crea nuevos conceptos, nuevos significados, nuevos objetos epistémicos con sus respectivos signos, y con ellos, no solo se potencia el pensamiento como proceso anticipatorio, toda vez que ayudan a ir más allá en las secuencias lógico-matemáticas, sino que se crean nuevas áreas del conocimiento. Por ejemplo, el tránsito de la narración verbal de los problemas matemáticos como la que hacían los egipcios: "si al cuadrado de la cosa se le agrega uno, el resultado es 9", (Ernesto-Piñeiro, 2017, p.27), a su expresión algebraica con Diofanto de Alejandría (214-298), llevó a éste encontrar los números negativos que él llamó faltas o ausencias (*Ibíd*, p. 28), este tipo de números entraron a las matemáticas por medio de una alternancia semiótica: el álgebra. A partir de ese momento, los números negativos potenciaron el pensamiento matemático, aunque al principio fueron incomprendidos, pues no permiten expresar longitudes, áreas o volúmenes. Su creación por el álgebra llevó a ésta, en su intento por solucionar las ecuaciones cúbica, al descubrimiento (otro objeto epistémico) de los números imaginarios ($\sqrt{-1}$,$\sqrt{-2}$,etc.) llamados así por Gerolamo Cardano (1501-1576), Niccoló Fontana Tartaglia (1499-1557), René Descartes (1596-1650) y sus contemporáneos.

Las alternancias semióticas en matemáticas no sólo potencian los procesos de anticipación propios del pensamiento, sino que le dan mucha mayor rapidez a éste. Dos ejemplos ilustran lo anterior: primero, cuando Leonardo Pisano Fibonacci publicó en 1202 el libro del ábaco promoviendo el sistema numérico indo-arábico (un nuevo conjunto de signos numéricos), estos terminaron sustituyendo el sistema numérico romano cuyas limitaciones para expresar grandes números o escribirlos era notorio. La facilidad y rapidez del nuevo sistema numérico potenció las matemáticas. El segundo ejemplo fue el álgebra misma, que sirvió como alternancia semiótica de la geometría de regla y compás, permitió a René Descartes crear la geometría analítica, y con ella se aumentó la rapidez para encontrar las mismas soluciones geométricas (Ernesto-Piñeiro, 2017).

En la vida cotidiana, en las ciencias empíricas y formales como la matemática y la lógica, este ir y venir de las alternancias semióticas suele tener una preferencia: la analogía, la semejanza, la metáfora, la sinécdoque, que van de los conceptos y categorías abstractas a su representación figurativa concreta, la cual muchos suelen llamar “símbolos” (noción de símbolo muy insuficiente en la actualidad). El camino de las alternancias semióticas es bidireccional, y nos interesa destacar ambos por su importancia pedagógica, tanto el que va, por un lado, de las nociones abstractas de los conceptos y categorías de las matemáticas expresadas en su lengua formal, cuya sintaxis utiliza signos como letras, números, figuras (+, x, =, ( ), [ ], l, /, < >, etc.), a su expresión en otros signos más intuitivos, perceptuales o simplemente visuales, como los utilizados en la geometría; y por otro lado, de los materiales audiovisuales, las metáforas, las analogías, o las semejanzas de formas y contenidos, a los conceptos más abstractos de las matemáticas.

Otro ejemplo de alternancia semiótica fue la axiomatización de la probabilidad realizada por Kolmogorov en 1933 (Kolmogorov, 2019), la que permitió superar las definiciones intuitivas y conceptuales de probabilidad, y con ello evitó recurrir a la experiencia de hacer múltiples repeticiones para su demostración, toda vez que la pregunta ¿cómo saber cuándo hemos realizado el número de repeticiones correctas como para haber encontrado la frecuencia relativa correcta y saber la probabilidad *P*= 1/n?, ¿cómo saber cuándo es incontestable?. Kolmogorov lo que hizo fue establecer las propiedades que debe satisfacer la definición de probabilidad de un suceso, y con ello, evitó cualquier tipo de conteo que, por otra parte, podría también realizarse si fuera posible hacerlo en ciertas condiciones probabilísticas.

A este método propio de las matemáticas lo hemos llamado ***método de la imposibilidad o posibilidad***. Se trata de demostrar lo que no se puede, o las condiciones para que se pueda una formulación matemática. Es unos de los múltiples caminos para las demostraciones matemáticas que convierte las conjeturas en postulados. Se ha utilizado para demostrar la infinitud de los números, toda vez que es imposible contar uno por uno precisamente por ser infinitos, entonces lo que se hace es demostrar la imposibilidad de que no lo sean. Lo podemos utilizar en otras ciencias como la psicología. Por ejemplo, si las condiciones **de todo signo** es ser arbitrario, consensuado, histórico y cultural; o dicho de otra forma, **siempre que** se den estas tres condiciones hay un signo; y los símbolos son signos, entonces es imposible que existan símbolos universales, heredables y arquetípicos como lo plantea el psicoanálisis de Carl Jung, otra más de las formulaciones fantasiosas e imaginativas, pero falsas, del psicoanálisis. A esta conclusión que surge de la definición del signo, puede llegarse también mediante el método de la imposibilidad: si existe uno, y solo un signo y su significado que no cambien bajo cualquier circunstancia de uso, en otra cultura, región, y en otro momento histórico, entonces hay signos universales. Como todo signo cambia al cambiar sus condiciones de uso, entonces los universales son imposibles. Conclusión, no existen signos universales como lo propone Carl Jung.

Definir una categoría y establecer las condiciones bajo las cuales se cumple tal definición y sus presupuestos es un requisito fundamental en las ciencias. Lo primero que se debe de hacer en toda expresión teórica es definir sus categorías, así como las condiciones de su cumplimiento y sus presupuestos. Ello implica que, cambiando cualquiera de ellas, cambian las conclusiones lógicas, o cambian los hechos a los que hacen referencia la definición, ampliándose o restringiéndose (Escotto, 2002/2012).

Las alternancias semióticas suelen redefinir muchos de los conceptos previos utilizados en las matemáticas, y en tanto que los signos son herramientas cognoscitivas que potencian el alcance anticipatorio del pensamiento, la redefinición acompañada de alternancias semióticas ha hecho avanzar a las matemáticas a planos insospechados. Un ejemplo es la teoría de los números. El desarrollo de los números imaginarios llevó a

Leonhard Paul Euler (1707-1783) a los números complejos a + b_i (otro objeto epistémico). Gauss utilizó otra alternancia semiótica para enfrentar el sinsentido que en esos años tenían los números complejos: utilizó su representación geométrica. Cuando los números complejos $Z= re^{iB}$ se representan en el plano con una circunferencia, se vinculan a sus giros y se puede resolver el problema de que los números complejos no podían ser negativos o positivos, por lo que no se podía decir que su raíz cuadrada es un número positivo. Con la alternancia semiótica hacia su representación geométrica, si se puede decir que un único valor para la raíz cuadrada es elegir el giro más pequeño, i= z = e **π**/4 i, que implica el giro π/4 ; en otras palabras, se alternó semióticamente el número $i = \sqrt{-1}$, por la circunferencia y sus giros. La representación gráfica de los números complejos-imaginarios permitió desarrollar funciones con esos números. Potenció el análisis y elevó a otro nivel a las matemáticas, y con ello, al desarrollo de la tecnología. Por ejemplo, los números complejos y otras herramientas matemáticas permitieron desarrollar la teoría cuántica en física, y ésta a la computación cuántica como posibilidad teórica, y en estos momentos, ya se avanza en su realización técnica (Gómez, 2012). Las alternancias semióticas en matemáticas permiten desarrollos teóricos insospechados: pasar de la representación geométrica de la raíz cuadrada a la de los números nos llevó a descubrir la infinitud de sus decimales, y eso nos llevó a preguntarnos si tienen alguna significación física. Las raíces cuadradas están en toda la naturaleza (Alsina, 2011).

Las matemáticas han tenido como palanca de su propio desarrollo a las alternancias semióticas, como cuando Joseph-Louise Lagrange (1736-1813) desarrolló la noción de variaciones con un método analítico y notación apropiada diferente al geométrico-analítico de Leonhard Euler (1707-1783), lo que finalmente impulsó una rama propia de las matemáticas que no existía, y, a la par, la alternancia semiótica impulsada por Euler con el modelo gráfico de círculos basado en el análisis de las proposiciones lógicas, llevó a John Venn (1834-1923) a mejorarlo, y con ello, a representar un método completo para el álgebra booleana, la cual fue fundamento para el vínculo de electricidad y lógica, principio básico de la construcción de calculadoras electrónicas y circuitos integrados en el siglo XX; o cuando Carl Frederich Gauss (1777-1855) definió el número complejo como la expresión *a + bi* siendo a y b número reales, lo que finalmente permitió representar los números complejos en el plano mediante vectores, lo que a su vez llevó a William Rowan Hamilton (1805-1865) a generalizar los números complejos para representar vectores en el plano tridimensional y describir los movimientos de un cuerpo rígido en el espacio físico. El resultado de sus lucubraciones matemáticas fueron los números hipercomplejos o cuaterniones (del Vado, 2017), otro objeto epistémico.

La alternancia semiótica que está en el tema de los vectores es ilustrativa. Desde el siglo XVI los matemáticos utilizaban el vector, cuyo signo figurativo es un segmento con una dirección y un módulo.

Vector

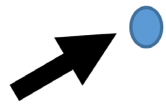


Figura 17. Representación dibujada de un vector.

Los vectores representan magnitudes, velocidades, o fuerzas, y en el plano se combinan geométricamente respondiendo a la suma, la multiplicación, la resta, y la división, lo que finalmente da otro vector. Caspar Wessel (1745-1818) y Jean-Robert Argand (1786-1822) utilizaron los números complejos (que se habían desarrollado también desde el siglo XVI) para representar los vectores. El resultado de esta alternancia semiótica fue que las operaciones con vectores ya no necesitaban su representación geométrica, ésta podía ser algebraica (Kline, 1980/1985). El avance producido por la alternancia semiótica orilló a otro más, si los números reales son unidimensionales y los complejos bidimensionales, entonces los vectores algebraicamente tratados necesitaban números tridimensionales. William R, Hamilton fue quien los desarrolló llamándolos cuaterniones. A partir de entonces, surgieron nuevas álgebras y los llamados hipernúmeros en el siglo XIX (Kline, 1980/1985).

Otro gran empuje al desarrollo de las matemáticas fue la alternancia semiótica que permitió la teoría de los grupos de Evariste Galois (1811-1832), pues se pasó de solucionar ecuaciones, a comprender su estructura; se transitó de una medida del desconocimiento para solucionar ecuaciones, a una medida de su simetría, y con ello se vinculó la simetría geométrica (Corbalán, 2017).

Las alternancias semióticas en las matemáticas han estado vinculadas a grandes progresos de la disciplina, a la potenciación y alcance teórico y práctico que ellas conllevan, y a replanteamientos teóricos. Por ejemplo, la importancia de pi (π) es, en gran medida teórica. El método geométrico fue superado por el algebraico desde el momento en que la mayor cantidad de los decimales de pi (π) sólo se pueden calcular mediante métodos algebraico, y si el algoritmo se mete a una computadora, llegamos «rápidamente» a millones de cifras. La representación numérica de pi (π) y phi (φ), sus decimales, tienen grandes limitaciones geométricas, pero no algebraicas. Para su conceptualización, se tuvo que avanzar teóricamente de los números naturales a los reales, es decir, con ciertos signos se puede ir más allá en la representación de los fenómenos que con otros, y al hacerlos, se descubren nuevas propiedades, en otras palabras, se avanza teóricamente en el conocimiento: se producen revoluciones teórico-conceptuales, se crean nuevos objetos epistémicos.

Otro ejemplo de alternancia semiótica, avance técnico y cambio teórico que impacta al mundo moderno es la transformada de Fourier (Stuart, 2016). La digitalización del mundo moderno le debe mucho a la transformada discreta de Fourier (DFT) proveniente del teorema de muestreo, una mezcla entre matemática y física. Permite pasar de señales analógicas a digitales, como en el caso de las señales sonoras, pues bastan 40,000 muestras por segundo para recuperar por completo los sonidos que el oído humano puede captar. Si generalizamos lo anterior, implica que todas las señales físicas se pueden discretizar sin perder la información que contienen (Almira, 2017). Su impacto en los servicios de salud es innegable, por ejemplo, en el electroencefalograma cuantitativo y en las neuroimágenes.

Finalmente, una revolución teórica en torno a nuestra concepción del caos ocurrió cuando se alternó su representación semiótica y se pensó en él como un sistema geométrico (Stewart, 2011, p. 328). Hoy la teoría del caos es indispensable para la representación matemática y física de los sistemas dinámicos complejos.

La enseñanza en torno a las alternancias semióticas en la historia de las matemáticas se hace evidente: no sólo debe ser un proceso que responda a la propia lógica interna de la disciplina, sino que puede ser un instrumento intencional para su aprendizaje y su enseñanza; para la búsqueda metodológica y heurística de nuevos conceptos y teorías dentro de ella; y lo más importante, no sólo sirven a las matemáticas, la historia misma de todas las ciencias está plagada de alternancias semióticas.

Las alternancias semióticas como pedagogía y didáctica de la enseñanza matemática

Las matemáticas son un sistema especial de signos y significados que se diferencian de las lenguas de habla cotidiana, otros sistemas de signos y significados. Las diferencias son fundamentales, y el no comprenderlas suele llevarnos por caminos pedagógicos y didácticos tortuosos al momento de querer enseñar las matemáticas, o aprenderlas. Hay, al menos, dos diferencias fundamentales que queremos destacar.

La primera. Las lenguas naturales (no incluimos en ellas a las de señas usadas por los sordos) no se enseñan mediante instrucción especializada, y menos escolarizada; se aprenden con solo el intercambio comunicativo dentro de una comunidad lingüística. Es suficiente la capacidad biológica normal (sistema fonador y nervioso) para que se desarrolle el idioma en un individuo que interactúa con su comunidad. La lengua matemática no es natural, por tanto, se aprende mediante instrucción escolarizada. Por supuesto, las matemáticas, como toda actividad psíquica, transcurren y se adquieren con el concurso del sistema nervioso, e incluso, se han reportado zonas de especialización funcional que algunos han llamado *numerosidad*, las cuales, de afectarse por daño cerebral, producen *acalculia* y dificultades en la solución de problemas matemáticos (Dehaene, 2016; Escotto-Córdova, et. al, 2013; Luria y Tsvetkova, 1981). Esta base biológica implica genes que determinan algunas configuraciones sinápticas (la mayoría surge de la experiencia) desde el nacimiento implicadas en la llamada *discalculia*, concebida como las dificultades para la adquisición de las matemáticas, en un sujeto con inteligencia normal y acceso a la escolaridad.

La segunda. La lengua matemática, en la casi totalidad de los miles de millones de personas del mundo, no se usa en la comunicación cotidiana entre las personas más allá de especificar cantidades de precios u objetos; no sirve en la cotidianidad para expresar intenciones, para describir emociones o sentimientos, para comunicar las aspiraciones o los planes; no la usan las personas que no son matemáticos como parte del lenguaje interno mediante el cual soliloquiamos en silencio (diálogo con uno mismo), ni cuando pensamos; no se expresa en los diálogos de los personajes oníricos; no es parte de la comunicación amorosa, aunque algunos poetas y matemáticos las utilicen en poemas o cartas; no se aplican para realizar exámenes de conciencia en juicios éticos o para prescribirlos, no son parte de la comunicación religiosa en las iglesias o con los dioses preferidos de cada comunidad, más allá de los juegos numerológicos de ciertas supersticiones, ni mucho menos en las prácticas mágico-supersticiosas tan extendidas en las sociedades modernas y no tan modernas. Solo los especialistas en matemáticas y los científicos harían uso de ellas para explicar científicamente estos temas. A diferencia de otras lenguas artificiales, como los diferentes sistemas de escritura de las lenguas naturales, o de las lenguas de señas de los mudos, o los sistemas de signos emergentes como los emoticones, que sí tienen un uso cotidiano en la comunicación de las personas, la lengua matemática, o lógico-matemática, no se usa en la comunicación cotidiana.

Estas dos diferencias deben considerarse para explicarnos las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Nuestra propuesta es utilizar las alternancias semióticas como recurso pedagógico y didáctico de la enseñanza de las matemáticas, para transitar del dominio de signos y significados de la lengua natural, al dominio de signos y significados de aquella disciplina. Y, en un proyecto de investigación posterior, investigar la manera de combinar las tres estrategias pedagógicas que están presentes en la enseñanza matemática, ninguna de las cuales es excluyente de las otras

1. La psicopedagógica, basada en la vigilancia personal del estudiante, el ejercicio de tareas matemáticas y la atención a la personalidad del estudiante (autoimagen, actitudes hacia las matemáticas, estados de ánimo, empatía profesor-alumno, etc.). Gómez (2019) hace una buena síntesis de sus propuestas.

2. La intuicionista, que se apoya en los conocimientos recientes de las neurociencias acerca de las matemáticas y el cerebro, que se aterriza en programas de computación que facilitan el aprendizaje y ejercitan las habilidades de los alumnos mediante aplicaciones. Uno de sus teóricos es Dehaene (1997/2016).

3. La basada en la naturaleza semiósica e histórico-cultural del psiquismo humano que teorizó Vigotski; en la teoría de la formación del conocimiento por etapas propuesto por P. Ya. Galperin (1957/2009a; 1957/2009b 1959/2009a; 1957/2009b, 1957/2009c;1965/2009), y el papel que los signos y significados tienen en la comprensión lógica y clasificadora que la enseñanza de las matemáticas requiere. Su fundamento teórico se ubica en la obra de Vygotski, Luria, Galperin, Talizina, Salmina, Solovieva y Quintanar, entre otros. En algunas modalidades de esta aproximación, se propone explícitamente enseñar a los niños habilidades para las alternancias semióticas como prerrequisito, o propedéutico, del curso de matemáticas en la primaria (Talizina, 2001). En la organización del curso de primaria, Salmina da un "curso propedéutico de símbolos[18]. Este se dirige a la asimilación de habilidades para la creación de signos y símbolos para determinar los objetos, a las características, etc." (Salmina, 2011, p. 46).

18 Esta investigadora rusa utiliza la palabra "símbolo" en el sentido tradicional de figura, dibujo, esquema, gráfico, imagen, o pictograma, y no como lo hemos definido en la pág. 39 de este texto.

Con respecto a la primera estrategia, hasta ahora es común tomar en cuenta que las matemáticas no son una lengua natural y deben ser enseñadas en un largo proceso instruccional, en consecuencia, las estrategias pedagógicas y didácticas se centran en diversos aspectos que describe sintéticamente Gómez (2019), tales como la vigilancia y evaluación personalizada de los aprendices, la práctica rutinaria de muchos ejercicios, su aplicación a problemas reales, el uso de la materialización de los conceptos (objetos) para ir de lo concreto a lo abstracto, el uso de juegos educativos, videojuegos, videos en *YouTube*, el manejo o tratamiento al estrés matemático, el cual llega a ser tan intenso que incluso existe una actividad exagerada de la amígdala y una disminución de la actividad de la corteza parietal y ventromedial prefrontal ante las matemáticas (Gómez, 2019, p. 132). Finalmente, se atiende hasta con terapia, la autoimagen de incompetencia para las matemáticas que lleva a los estudiantes a una profecía autocumplida (como el alumno se cree muy incompetente para las matemáticas, no intenta entenderlas, y como resultado, no las aprende y reprueba exámenes).

Con respecto a la segunda estrategia, el grupo encabezado por el francés Dehaene ha desarrollado diversos programas y páginas web para la enseñanza de las matemáticas basadas en sus investigaciones acerca del funcionamiento cerebral, la discalculia, y lo que él llama la *numerosidad* (percepción súbita de pequeñas cantidades de objetos). Esto lo lleva a proponer volver a las prácticas intuicionistas en la enseñanza de las matemáticas (Dehaene, 1997/2016), cuyas referencias y ubicaciones se pueden encontrar en:

www.unicog.org
www.low-numeracy.ning.com
www.unicog.org/numberrace/number_race_index.html
www.oecd.org/document/8/0,3343,en_2649_35845581_34495560_1_1_1_1,00.html
www.educationalneuroscience.org.uk

Con respecto a la tercera estrategia, nuestra propuesta de las alternancias semiótica como recurso pedagógico y didáctico coincide plenamente con la teoría de Galperin acerca de la formación del pensamiento por etapas, particularmente aplicada a las matemáticas. Esta teoría propone ir del conocimiento externo y materializado de los procesos, al dominio interno –mediante el lenguaje interno, también llamado actividad mental, o actividad intelectual- de los procesos que los determinan, a través de varias etapas programadas por el profesor. La primera etapa es materializada en objetos o cosas; la segunda es representada mediante dibujos o cualquier signo no verbal, la tercera es la formulación verbal y oralizada de lo que el sujeto percibe y ha aprendido, tanto con los materiales (objetos) como con su representación sígnica no verbal, y la última, consiste en su formulación mediante el lenguaje interno, es decir, silenciosamente, o mentalmente. Estas etapas son un ejemplo de alternancias semióticas. El libro de Talizina (2011) está compuesto de múltiples ejemplos en diferentes grados de enseñanza, desde primaria a secundaria, en los cuales se aplica el método por formación de etapas mentales de Galperin, con excelentes resultados.

Sin embargo, hay un aspecto ignorado hasta ahora en las consideraciones de la enseñanza de las matemáticas: se da por un hecho, o casi como perogrullada sin mayor trascendencia, de que la lengua matemática no se usa en la comunicación cotidiana y, por lo tanto, no se han investigado científicamente todas sus implicaciones. La más importante de ellas es la relación entre la lengua natural y la lengua matemática a través de las alternancias semióticas. Ciertamente, la lengua matemática no se usa en la inmensa mayoría de los asuntos sociales, culturales, emocionales, y vitales de las personas, incluyendo los matemáticos, pero está presente en todo aquello que dependa de la ciencia y la tecnología de uso cotidiano, absolutamente todo en la cotidianidad de la inmensa mayoría de los habitantes del planeta. Baste decir que han sido fundamentales en la construcción de todo aparato electrónico, como los celulares o las televisiones. La ceguera por no querer ver tal "perogrullada" impide analizar el camino creativo y comunicativo de todas las lenguas naturales y cotidianas para la enseñanza matemática. Es decir, cómo ir de la lengua natural a la lengua matemática.

Las lenguas naturales, así como la escritura o la lengua de señas se aprenden y dominan en su uso comunicativo cotidiano. Cuando el alfabetizado deja de leer o escribir aparecen las deficiencias comunicativas en la escritura, ya sea en la selección léxica, en la gramática, en la ortografía, o en la redacción. Estas lenguas cotidianas tienen la propiedad de que su uso comunicativo en contexto y circunstancias las desarrolla, crea nuevo léxico (signos y significados), amplía los significados incluso hasta invertirlos, y llega a modificar la sintaxis y la gramática en todas las categorías gramaticales (Campany-Campany, 2006, 2009, 2013). Desde nuestro punto de vista, el motor del cambio en las lenguas cotidianas son las alternancias semióticas impulsadas por las intenciones comunicativas en circunstancias y contextos de uso. Es en su uso cotidiano cuando las metáforas, las analogías, las sinécdoques, y demás recursos retóricos en la comunicación sirven como motor de cambio de las lenguas, facilitan la comunicación, esclarecen significados, los amplían, los modifican e incluso crean nuevos significados con sus respectivos signos.

En otras palabras, las alternancias semióticas son un motor de cambio de las lenguas naturales.

La lengua matemática comparte con las lenguas naturales las alternancias semióticas. Está presente con los sistemas de signos y significados matemáticos en el ámbito estrecho de la comunidad de esa disciplina, cuando se comunican mutuamente sus hallazgos y desarrollos. Solo que, durante siglos, la peculiaridad de la secta de los matemáticos con su lengua críptica para la gente común fue que, el desarrollo de sus sistemas de signos y significados ocurrió en gran medida a distancia: mediante cartas personales, libros y registros. Por supuesto también cara a cara, pero casi con pequeños círculos de discípulos. No fueron sólo los pitagóricos los que usaron la enseñanza cara a cara entre discípulos. Un ejemplo moderno de estas circunstancias fue el hecho de que los alumnos que acudían en 1913 a las clases del matemático y lógico Gottlob Frege (1848-1925) eran tres, Carnap y Wittgenstein entre ellos (Frege, 2002), y por supuesto, ganarse esos discípulos tuvo un impacto grande a principios del siglo XX. Frege terminó siendo el padrino del Círculo de Viena, del neopositivismo y la filosofía del lenguaje. Su libro *Leyes básicas de la aritmética de 1893* influyó en B. Russell, y cuando éste descubrió la llamada paradoja de Russell, el fundamento lógico de las matemáticas entró en crisis hasta casi mediados del siglo XX, cuya consecuencia produjo avances en las matemáticas. Pese a ello, la mayoría de la humanidad en su cotidianidad no se enteró, aunque el uso práctico de las matemáticas estuvo y está en la creación de todas las ingenierías y ciencias hasta nuestros días, aún con nuestra ignorancia de sus aportes.

Nuestra propuesta es abrir las puertas de las cofradías de los matemáticos al pueblo raso utilizando el motor que las lenguas naturales utilizan en la comunicación: las alternancias semióticas, con el fin de que el conocimiento matemático llegue con facilidad a muchas más personas, pero en particular a los estudiantes de cualquier nivel educativo y disciplina científica, como lo es la psicología. La facilidad con que las alternancias semióticas mejoran la comprensión de los “objetos” matemáticos radica en su apoyo en la intuición matemática, y en las alternancias semióticas de las lenguas naturales.

De la intuición a la alternancia semiótica

Entenderemos por ***intuición***, a la comprensión súbita y no reflexiva de patrones, tendencias, asociaciones y totalidades que la aprehensión sensoperceptual y/o emocional de los fenómenos nos facilita. La intuición de los fenómenos no requiere necesariamente del lenguaje, está presente en muchas especies y en bebés de semanas de nacidos, pero se potencia y transforma cualitativamente con el desarrollo de la lengua materna surgiendo el fenómeno de *la comprensión conceptual súbita*, no reflexiva que múltiples escritores, científicos, y profesores han reportado al estar trabajando sobre su objeto de estudio. La intuición fue un tema recurrente entre filósofos y la psicología filosófica de los siglos XVIII y XIX, y con el tiempo fue sustituida por los conceptos de sensopercepción, apareciendo el concepto de *insigth* (la reestructuración perceptual súbita vinculada a la concienciación) en la teoría psicológica de la Gestalt. La intuición humana no es sólo dependiente de las propiedades de su sistema nervioso, está condicionada por la historia personal o biográfica[19], por la instrucción académica, por la cultura, por la época histórica, por la lengua utilizada, por la región geográfica y por la práctica semiósica.

La comprensión intuitiva de las matemáticas ha generado entre los matemáticos intensos debates, dividiéndose entre los intuicionistas, los logicocistas y los formalistas, y más recientemente, desde los años sesenta del siglo pasado, algunos psicólogos y neurocientíficos la han estudiado como la base de las matemáticas, o más precisamente, de lo que han llamado la *subitación* (cálculo súbito, inmediato de pequeñas cantidades), o la *numerosidad*, llamado también *el sentido numérico*, incluso algunos llegan a proponer, en un exceso de reduccionismo biológico, el concepto del *instinto del número* (Dehaene, 1997/2016). *La numerosidad o subitación* se utiliza para explicar un conjunto de hechos muy interesantes: comunidades de la selva amazónica (mundurukú, pirahá) los walpiris de Australia, y ciertas poblaciones aisladas de Nueva Guinea cuyas lenguas no tienen palabras para números mayores del cinco, pero que distinguen sin mayor reflexión cuán numerosos son algunos eventos (uno o dos frente a cuatro, cinco o más), sin embargo, cuando la cantidad aumenta, utilizan palabras equivalentes a "un montón" o "muchos". El fenómeno de la numerosidad también se registra en las palomas, las ratas, los chimpancés, los delfines, los mapaches, los loros, los gatos, entre otras especies, en todas las cuales, la numerosidad está presente con el mismo límite perceptivo: son precisos en distinguir uno o dos, pero comienzan a elegir un rango de cantidades en la medida que se acercan a cinco, y este rango aumenta entre más grande es la cantidad de eventos u objetos percibidos. Por ejemplo, si hay cuatro objetos, eligen entre tres a seis; son menos exactos entre más grande es la cantidad de objetos. Lo mismo pasa

19 Algunas de las personas que han sufrido ceguera desde su infancia, vinculada a los ojos, no al sistema nervioso, y después de adultos logran ver mediante una cirugía, sufren mucho porque lo que ven no lo comprenden, no tiene sentido las formas, los colores, los patrones. Tardan en aprender, y en muchos casos, sufren depresión y pretenden volver a su ceguera.

con bebés de semanas y pocos meses de nacidos. La influencia de los experimentos de Piaget con lo que llamó pruebas de conservación desvió la atención de este fenómeno.

Piaget ponía dos hileras con cuatro o cinco fichas. Las igualaba una a una frente al niño. Luego, ante su vista, expandía las fichas de una hilera, y le preguntaba ¿cuál tiene más fichas? Invariantemente los niños respondían que la expandida.

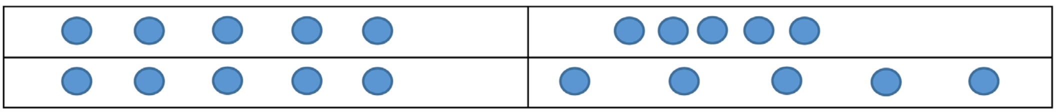


Figura 18. Representación de una tarea con fichas usada por Piaget para el concepto de conservación.

Piaget explicó este fenómeno diciendo que los niños no habían adquirido aún el principio de conservación que nos permite entender que, pese al cambio de forma, el número de objetos se mantiene. La conservación es lo que fundamenta la adquisición de la lógica y las matemáticas en su modelo teórico.

> las operaciones lógicas y matemáticas no podían formarse independientemente una de otras: el niño sólo puede aprehender una cierta operación si es capaz simultáneamente de coordinar operaciones modificándolas de diferentes maneras bien determinadas -por ejemplo, invirtiéndolas- …las operaciones presentan siempre estructuras reversibles que dependen de un sistema total… buscaba las estructuras operatorias más elementales y las encontré finalmente en los procesos psicológicos subyacentes bajo la formación de la idea de conservación o de constancia…las he llamado “agrupamientos”. Por ejemplo, una clasificación…es un agrupamiento.» (Piaget, 1950/1979, p. 27).

Sin embargo, en 1967 dos investigadores, Meher y Bever (Dehaene, 1997/2016, pp.70-74) modificando la tarea, demostraron que los niños si distinguían cantidades. En vez de ponerles fichas se les puso seis dulces apilados y cuatro desplegados; en vez de preguntarles cuál es más grande o cuál tiene más, se les pidió que eligieran uno, y todos los niños eligieron la de mayor cantidad de dulces. Es decir, ***percibían bien la mayor cantidad***. El asunto metodológico es que la tarea de Piaget utilizaba el lenguaje con preguntas más complejas de carácter relativo como ¿cuál tiene más?, mientras que Meher y col. les decían ¿cuál quieres?, y los niños mostraron que sí distinguían cantidades escogiendo la que tenía más dulces. Los experimentos con bebés utilizan la metodología de contabilidad del tiempo que los bebés miran un objeto. Cuando se aburren dejan de prestarles atención cuando surge algo novedoso fijan su atención. Una variante es cuántas veces succionan el chupón, otra variante es cuan agitadamente mueven brazos y piernas ante lo novedoso. Con esas metodologías, los bebés (sentados en las piernas de sus madres) miran una pantalla o un escenario de títeres, o un escenario con objetos o animales. Los bebés distinguen dos y tres objetos desde una semana de nacidos; miran más tiempo tres objetos acompañados de tres sonidos, y otras más variantes de este procedimiento. En pocas palabras, perciben la numerosidad (cantidad) desde muy temprana edad de nacidos. Lo sorprendente es que la numerosidad está limitada a no más de 5 objetos, igual que los pueblos sin sistemas numéricos y diversas especies de animales. En todos estos casos no hay lenguaje, pero si percepción de cantidades. En todos los casos estudiados se responde al efecto de la distancia (entre más alejados estén una cantidad de la otra se distingue mejor la cantidad) y magnitud (entre más cantidad hay, menor es la precisión y se amplía el rango en que se responde, por ejemplo, cuesta más distinguir 80 de 100 puntos, que 10 de 20). Finalmente, se ha encontrado evidencia de que en el surco intraparietal se encuentran neuronas cuya distribución se relaciona a la cantidad de objetos percibidos, en un lado, las neuronas responden a cantidades de 1 o 2 objetos, en el otro, a la cantidad de 3, 4, 5 objetos o más. Lo anterior lleva a Dehaene (1997/2016) a sostener que es la base neurobiológica de l*a intuición numérica, del sentido numérico, de la numerosidad o del instinto numérico*, pero limitada a pocas cantidades, estrechamente vinculada a las áreas de la percepción espacial. Más allá de ellas se requiere la instrucción, el lenguaje, la educación. Lo más sorprendente es que en muchos matemáticos, la llamada intuición matemática juega un papel clave:

> Dicen que, en sus momentos más creativos, que algunos describen como "iluminaciones", no razonan de forma voluntaria, ni piensan en palabras, ni realizan largos cálculos formales (…) Las intuiciones de los grandes matemáticos acerca de los números y otros objetos matemáticos no parecen depender tanto de ingeniosas manipulaciones de números como de la percepción directa de relaciones significativas. (Dehaene, 1997/2016, pp. 209 y 210)

Desde nuestro punto de vista, todos estos descubrimientos de la psicología infantil, de la antropología, de la lingüística, de las neurociencias, de la primatología y la psicología comparada interespecies apuntan a que la intuición matemática, y su vínculo estrecho con las zonas cerebrales vinculadas a la percepción visoespacial, juegan un papel importante en las alternancias semióticas que se basan en imágenes, esquemas, u objetos. También suelen aparecer en el uso lingüístico de metáforas visuales o sensoperceptuales en la cotidianidad de la enseñanza de las matemáticas. Cuando todo ello se aplica, el aprendizaje se facilita.

Nuestras investigaciones indican que los profesores que más utilizan las alternancias semióticas en los salones de clases suelen ser considerados por los alumnos como “mejores”, “más didácticos”, y “ más entendibles sus clases” (Escotto-Córdova, Sánchez- Ruiz, y Baltazar-Ramos, 2018; Sánchez-Ruíz y Escotto- Córdova, 2013; Corona, Escotto, Sánchez, y Baltazar, 2016; González, Escotto, Sánchez, y Baltazar 2016; Velásquez, Escotto, Sánchez, y Baltazar,2016.)

En nuestro entender, la conclusión de todo este conjunto de datos de investigaciones en múltiples áreas científicas es que las alternancias semióticas requieren ser incorporadas como herramientas pedagógicas y didácticas. Además, el camino didáctico es ir de la llamada intuición sensoperceptual a la abstracción conceptual. De hecho, el camino propuesto por Dehaene de apoyarse en la intuición matemática de los infantes para la enseñanza matemática, fue desarrollado bajo otras premisas teóricas y conceptos desde los años 30 del siglo XX por los psicólogos soviéticos Vigotski, Galperin, Leontiev, y más recientemente por Davidov, Talizina (2007); Solovieva y Quintanar (2019) con conceptos como zona de desarrollo próximo, nivel simbólico (dibujos), verbal (lenguaje oral e interno), materializado (objetos). Nosotros estamos proponiendo incorporar el uso planeado de las alternancias semióticas a todos estos procedimientos educativos.

Esta aproximación histórico-cultural a la enseñanza de las matemáticas ha evidenciado la distinción entre el aprendizaje memorístico de las demostraciones geométricas, comparado con la comprensión de éstas. Cuando es memorístico, si a los alumnos se les cambia la forma de presentar el problema, por ejemplo, cambiando la posición del dibujo y usando otros signos, ya no pueden realizar la demostración (Butkin, 2001), lo que indica que la ausencia de entrenamiento en las alternancias semióticas deja el aprendizaje de las matemáticas en un mero ejercicio de memoria de operaciones fijas y alejadas de la solución de problemas generales. Nuestra conclusión es que las alternancias semióticas no sólo pueden facilitar el aprendizaje, sino que son una necesidad pedagógica y didáctica para rebasar la mera memorización y avanzar a la comprensión de las matemáticas.

La pedagogía es la estrategia educativa de qué se debe enseñar; y su táctica es la didáctica, es decir, el cómo enseñarlo (Zambrano, 2016). El uso pedagógico y didáctico, consciente y propositivo de las alternancias semióticas, es decir, la didáctica de la pedagogía matemática (cómo se enseña el qué de lo que se debe aprender en cada grado escolar) tiene que ser bidireccional: ir del lenguaje NO formal o cotidiano al lenguaje formal de las matemáticas; de los signos que muestran, señalan, evidencian con su significado a su referente (los iconográficos, las metáforas, el lenguaje cotidiano); a los signos cuyo significado es conceptual y categorial, abstracto y teórico. Y viceversa, de los signos conceptuales y categoriales, a los signos iconográficos, indicadores, señalizadores.

Las alternancias semióticas, como herramienta didáctica, tienen varios objetivos: primero, facilitar el tránsito ***del lenguaje NO formal al lenguaje formal*** sin muchas dificultades para el educando en la comprensión de las nociones, signos y sintaxis de las matemáticas. Segundo: facilitar este tránsito para cualquier individuo con diferente formación académica y cultural, incluyendo aquellos con discapacidad intelectual. Tercero: lograr todo eso masivamente, es decir, para la mayoría de los pobladores de un país. Cuarto: mostrar a cada alumno el camino del autoaprendizaje matemático: del dominio natural que tienen de signos NO formales a dominio del lenguaje formal de las matemáticas, y viceversa, del lenguaje formal al lenguaje No formal.

En otras palabras, ir de la didáctica del cómo a la pedagogía del qué de las matemáticas; de las técnicas para asimilar mejor el sistema de signos matemáticos, a la pedagogía de la libertad individual para aprender las matemáticas. Y para eso proponemos las alternancias semióticas entre el lenguaje NO formal y el lenguaje formal de esa disciplina.

El lenguaje NO formal es el uso de todo tipo de signos (figuras, gráficas, colores, esquemas, dibujos, imágenes, objetos, videos, gestos, palabras de uso cotidiano, metáforas, etc.) que permiten esclarecer perceptual y prácticamente los conceptos y signos del lenguaje formal de las matemáticas. Su fuerza esclarecedora radica en que están presentes en la cotidianidad de los individuos y operan como signos intuitivos para la comprensión de nociones abstractas. Su debilidad es el corto alcance que tienen como herramientas cognitivas para ir a nociones muy abstractas, debido a su naturaleza concreta y perceptual.

El lenguaje formal de las matemáticas es aquél que utiliza letras (a, b, c…x, y, z), signos especiales (ç, φ, ∞, π, i, e, §, #, ∑, ≥, ≤ , ± , ×, ÷, =, ≠ , etc.), reglas específicas para la secuencia de los signos a manera de sintaxis (primero se realizan las operaciones dentro de los paréntesis y luego las de afuera, etc.), algoritmos específicos escritos como fórmulas $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, etc. mediante el cual se transmiten los conceptos abstractos de las matemáticas. Como herramienta cognitiva tiene la virtud de facilitar mayor alcance y potenciación del pensamiento, pero su debilidad consiste en las dificultades de muchas personas para su dominio en el plano formal y abstracto alejado de la cotidianidad sensoperceptual e intuitiva.

Para lograr el paso didáctico de lo No formal a lo formal utilizamos dos etapas generales: (1) para enseñar las nociones abstractas y complejas cuya escritura y formulación requiere del lenguaje matemático, hay que buscar otros signos y significados más intuitivos, perceptuales y objetales ***presentes en la cotidianidad de los aprendices***. Con ello esclarecemos los signos matemáticos formales, sus reglas y leyes usando signos que se comprenden con facilidad y que permiten el dominio paulatino del lenguaje formal matemático; (2) hay que ir del uso de signos y significados intuitivos, perceptuales y prácticos a los signos formales del lenguaje matemático, ***desvaneciendo*** lo sensoperceptual. Se sustituyen los primeros por los signos formales del lenguaje matemático y, en este tránsito, el ***recurrir a la historia*** misma de las matemáticas es uno de los caminos posibles, toda vez que esta disciplina recorrió precisamente esa ruta de ascenso de lo concreto y sensible a lo abstracto, conceptual y categorial. En otras palabras, utilizar la historia de las matemáticas como herramienta didáctica del aprendizaje de los signos formales.

En este transitar de ida y vuelta, un papel central lo juega el uso de la lengua de los participantes, aprovechando las propiedades lingüísticas y psicológicas que tiene el lenguaje. Primero, comenzando con el habla del profesor, es decir, utilizando su función reguladora de la actividad del aprendizaje. Es mediante el habla y el uso de la lengua cotidiana que el profesor orienta, dirige y regula las actividades del alumno para que éste domine el lenguaje formal de las matemáticas. Esto es más eficiente si utilizamos la formación del pensamiento por etapas de Galperin y Talizina. Segundo, el habla oral del alumno. Éste debe hablar en voz alta y decir los pasos y razonamientos que está realizando, lo que permite percibir al profesor las deficiencias y lagunas que presenta. Cuando el alumno comienza a dominarlos, poco a poco interioriza las palabras y conceptos que el profesor le dice (transita al lenguaje interno) y, los indicios de que se está manejando el lenguaje matemático, comienzan cuando el alumno hace las operaciones y cálculos más rápidamente y sin hablarlos en voz alta (Escotto-Córdova, Sánchez-Ruiz, Baltazar-Ramos, 2014).

Lo anterior son procedimientos psicológicos que utiliza la psicología educativa y que fueron propuestos por Galperin. Al aplicarse a la enseñanza de las matemáticas generan dos preguntas fundamentales que todo profesor deberá responderse en la planeación de sus cursos utilizando las alternancias semióticas: ¿con qué otros signos presentes en la cotidianidad de los estudiantes se podría enseñar esta noción matemática, esta fórmula, este concepto?, ¿hay una forma perceptual y práctica de enseñarles estas nociones matemáticas, estas fórmulas y conceptos? Un ejemplo esclarecerá estos puntos. Podemos enseñar qué es un radian con diversas alternancias semióticas:

a) Con el habla cotidiana: definido con palabras: es el ángulo formado por dos radios de una circunferencia. La medición en radianes es igual a la longitud del arco que delimitan los radios dividida entre el radio.

b) Con signos matemáticos: es decir, $\theta = s/r$, donde θ es el ángulo, s es la longitud de arco, y r es el radio. Por tanto, el ángulo completo que subtiende una circunferencia de radio r, medido en radianes;

c) Definido con signos del lenguaje formal de las matemáticas (alternancia semiótica) https://es.wikipedia.org/wiki/Radi%C3%A1n

θ *circunferencia* = L circunferencia = 2πr = 2π rad

d) Definido visualmente tal y como la misma página Web lo hace mediante imágenes (otra alternancia semiótica) de la formación de una circunferencia y su radio moviéndose hasta formar un pedazo del pastel con el ángulo correspondiente.

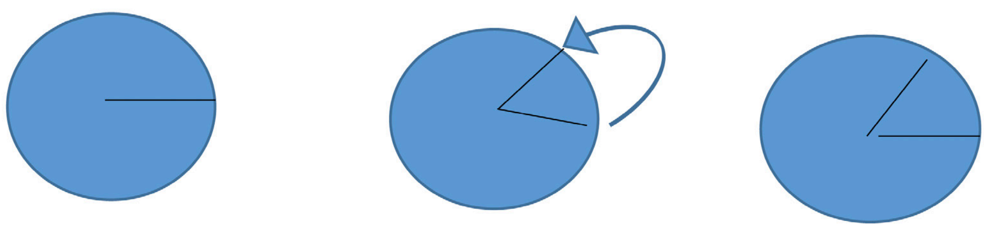


Figura 19. Representación del movimiento del radio en una circunferencia.

La alternancia semiótica de los dibujos facilita la comprensión de lo que las palabras dicen, y aún más, de lo que la fórmula expresa, pero la fórmula nos permite ir mucho más allá al permitirnos calcular senos, cosenos, etc., es decir, usar la geometría analítica, lo que los dibujo no lo facilitan.

Conclusiones

Comprender el efecto potenciador del pensamiento que las alternancias semióticas producen, así como de su función esclarecedora de sus conceptos más complejos, debe llevarnos a su utilización consciente y planificada en las políticas pedagógicas (desde las instituciones) y en la práctica didáctica (en el aula) de la enseñanza matemática.

Las alternancias semióticas son formas de decir el mismo significado con otros signos, o de establecer nuevos significados con el mismo signo, o de crear nuevos signos para nuevos significados. Las alternancias de los signos facilitan la comprensión de los significados, pero también, potencian la comprensión semiótica del mundo y, con ello, el alcance del pensamiento como herramienta cognitiva. Esto es muy claro en el caso de la historia de las matemáticas.

Las alternancias semióticas han puesto de manifiesto otro asunto de interés desde hace siglos: no todo razonamiento lógico es real en el sentido de no corresponder a la realidad objetiva. Cuando se confunde lo lógico con lo real surgen las paradojas lógicas, y a la inversa, estas desaparecen cuando se aterrizan los argumentos lógicos en la realidad objetiva. En otras palabras, no existen las paradojas lógicas en la naturaleza, solo en el uso de sistemas de signos y significados. Son una consecuencia del papel de la semiosis en la producción del pensamiento como función psíquica.

Las matemáticas, las lógicas, y todas las lenguas naturales son sistemas de signos y significados, y en cuanto tales, están sujetas a las leyes que rigen a cualquiera de ellos. Dos de ellas son pertinentes a este capítulo. La primera, todo signo es arbitrario, la persona que lo crea o inventa puede utilizar cualquier ente físico para ello: voz, grafismo, objeto, gesto, colores, pinturas, figuras, entes vivos, entes geológicos o estelares, etc., como sustituto de algo al que llamamos su referente o significado, sea este real (la palabra “sol” para referirse a la estrella Sol de nuestro sistema solar) o ideal (la palabra “Tonatiuhteótl” para el dios Sol, en la mitología Azteca). Segunda, muchos signos surgen como sustitutos de un referente real y objetivo, y luego, el nuevo signo-significado cobra independencia de lo real en la medida en que se inserta en el sistema de signos y significados, lo que conlleva que, cuando se utilizan dentro de una narrativa, los significados de muchos de ellos ya están alejados de lo real; son significados de significados de significados. Es el caso de los referentes físicos de los llamados números transfinitos, de los diferentes infinitos, de las ecuaciones que nos hablan de las múltiples dimensiones, etc. En cualquier de ellos, se expresan como alternancias semióticas no necesariamente existentes en la realidad objetiva.

Quizás la alternancia más notoria en la historia de las matemáticas es el ir y venir de la apelación constante a la intuición, por un lado, y a la exaltación de la lógica algebraica, por el otro, para la fundamentación de cada avance matemático; de la comprensión matemática a partir de lo percibido a la comprensión de la realidad a partir de lo concebido. Este vaivén adquirió la forma de: fundamentación geométrica (intuitiva) o fundamentación lógica (álgebra, cálculo, etc.). El tema ha dividido a los matemáticos entre aquellos que sostienen que las matemáticas se nutren de los problemas físicos, de la realidad objetiva, de la intuición, y aquellos que postulan las matemáticas teóricas, las matemáticas puras sin liga alguna de la realidad objetiva o física:

> "…un tema matemático, cuando se entra a gran distancia de su fuente empírica, o después de mucho tiempo de endogamia abstracta, está en peligro de degeneración. Al principio, el estilo suele ser clásico; cuando muestra signos de barroquismo, ya está encendida la señal de peligro…" (Kline, 1980/1985, p. 352).

> "…lo único que verdaderamente implica una revolución en las ideas es el descubrimiento de que las matemáticas son totalmente independientes del mundo físico…" (Marshal Stone: citado en Kline, 1980/1985, p. 352)

En realidad, esta controversia es solo un caso particular de la unidad dialéctica en la epistemología, que se expresa como: el conocimiento a partir de la percepción vs. el conocimiento a partir de la conceptualización (basado en conceptos y categorías); de FENÓMENOS epistémicos (aquellos elementos de la realidad objetiva o subjetiva que se conocen a través de la sensopercepción) *versus* OBJETOS *epistémicos* (todo aquello que se cree conocer, o se atribuye como existente, surgido de una conceptualización o teorización, por lo general, lógicamente argumentada); de la teoría versus la práctica; de la aplicación práctica versus la fundamentación lógica.

Fueron las predicciones excelentes en astronomía y otros fenómenos físicos lo que fortaleció a las matemáticas pese a la carencia de un sistema axiomático y lógico de muchos de sus desarrollos, pero la necesidad de este rigor lógico llegó hacia el siglo XIX en adelante. Morris Kline resume didácticamente esta historia en la parte final de su libro *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre* (1980/1985), que, pese a ser escrito a finales de los años 70 del siglo XX, parece vigente en las matemáticas que se han desarrollado hasta la actualidad. Se pasó de unas matemáticas vinculadas a la utilidad directa de medir los terrenos (geometría) con los egipcios, a la noción de números naturales; de estos, con los griegos, a las llamadas verdades evidentes (axiomas) y la demostración lógica, que se cuestionó cuando el teorema de Pitágoras puso al descubierto números no reales, los "irracionales" $\sqrt{(-1)}$ y los números negativos. Se pasó de estos, con los árabes e indios hacia el siglo V d. C., al uso y reglamentación de los negativos, los irracionales, el surgimiento de los números complejos, el cálculo, las ecuaciones diferenciales, etc., sin cuestionar la geometría euclidiana. En el siglo XIX, la geometría de casi 20 siglos fue cuestionada con el surgimiento de geometrías no euclidianas, y con ellas los axiomas lógicos y la intuición en que se basaban. Surge entonces la necesidad de fortalecer el fundamento lógico de las matemáticas, no de verdades intuitivas, apareciendo la teoría de conjuntos. El siglo XX vivió la aparición de corrientes matemáticas divididas entre logicistas, intuicionistas, formalistas, y teóricos de conjuntos, hasta que Gödel demostró que cualquier sistema formalmente lógico tiene proposiciones indecibles y que ningún sistema de axiomas contiene verdades solo expuestas por su estructura, y "el teorema de Löwenheim-Skolem demostró que cada uno de ellos abarca más de lo que se pretendía" (Kline, 1980/1985, p. 374). Este ir y venir entre los partidarios de una u otra opción (lógica versus intuición; matemáticas puras o aplicadas) ha generado posturas radicales y enconados debates entre los matemáticos, y si ahora los sigue generando es porque no se acaba de comprender la dialéctica entre lo concreto y lo abstracto, entre la teoría y la práctica, entre la evidencia empírica y la explicación lógica, entre realidad objetiva y subjetividad construida.

A nuestro juicio, esta historia ilustra cómo los matemáticos han venido descubriendo lo que hemos llamado la paradoja de las paradojas de todo constructivismo (Escotto-Córdova, 2000/2012): hay argumentos lógicos, pero no reales. Y a la inversa, hay explicaciones reales sin argumentación lógica. Frente a esto, toda explicación científica debe ser real y lógica, no una u otra[20]. Por supuesto, nos referimos a la ciencia que resuelve problemas prácticos guiada por teorías, algunas de ellas muy abstractas. De ahí el apotegma: la mejor solución práctica es una buena teoría. Entender esta simple verdad del sentido común, puede atemperar las pasiones entre matemáticos puros y aplicados que, por cierto, en sus controversias entre intuición y lógica, parecen haber olvidado la práctica como criterio de verdad; la transformación de la realidad objetiva, el experimento. Este olvido de la práctica como criterio de verdad tiene larga historia, fue puesta de manifiesto en la alta edad media con la escolástica y su rigor lógico para convencer de cuántos ángeles caben por el agujero, o en la punta de una aguja. Las demostraciones lógicas nada tenían de reales.

Este vaivén histórico de las matemáticas estuvo basado en la dinámica propia de las alternancias semióticas que acompañó la polémica entre intuición versus lógica. Podemos destacar -solo por nuestro gusto personal- los ejemplos que nos parecen paradigmáticos de esta unidad dialéctica entre intuición y lógica expresada en diversas alternancias semióticas:

a) La alternancia semiótica de los números como objetos (los pitagóricos) a los números como abstracciones.

20 Cuando Gödel emigró a Estados Unidos por las amenazas nazis se estableció en Princeton. Ahí se hizo amigo de Einstein (convivieron de 1940 a 1954), lo que influyó para que escribiera tres artículos sobre la teoría de la relatividad. El primero (1949) utiliza las ecuaciones de Einstein para hablar de un universo en rotación, homogéneo, cerrado y estable, con líneas de tiempo cerradas que permiten viajes en el tiempo. Su descripción, a decir de Piñeiro (2012), es consistente con las ecuaciones de Einstein, solo que no es un universo real. En otras palabras, es lógico, pero no existe. En el segundo artículo (1949), de corte filosófico y para el público general, Gödel pretende demostrar que las tesis idealistas son demostradas por la teoría de la relatividad, es decir, que confirma la tesis de que la realidad objetiva no existe. Estas confusiones suelen pasarle a los que creen que la lógica es equivalente a la realidad, con argumentos lógicos acaban por no reconocerla, hasta que una pedrada los hace identificarla.

b) La alternancia de los números como conceptos a su tránsito como representación en segmentos geométricos, y con ello, a la aparición de números extraños, como los negativos o los números irracionales $\sqrt{1}$.

c) La alternancia de la geometría analítica con Descartes, al cálculo con Newton y Leibnitz en el mismo plano geométrico.

d) La alternancia de la representación geométrica de los números reales (completan todos los puntos de una recta) a su representación lógica, es decir, *el problema del continuo*, y el concepto de *sucesión fundamental* en el que Cantor (1872) fundamentó su propuesta: todo número real se define por una sucesión fundamental. Este avance fue esencial para el desarrollo lógico del cálculo. Para ello fue necesario el desarrollo de la teoría de conjuntos, cuyo iniciador fue Cantor hacia 1883 (artículo: "Fundamentos para una teoría de las variedades") (Piñeiro, 2013).

e) La alternancia de la representación geométrica de los números imaginarios $i = \sqrt{(-1)}$ y complejos $(a +b\sqrt{(-1)})$con Gauss, a la necesidad de su fundamentación lógica y algebraica.

f) La alternancia entre la representación del espacio mediante el modelo euclidiano versus la representación de las geometrías del espacio no euclidiano impulsada por Lambert, Gauss, Lobachevski, Bolyai, Riemann, que en el fondo implicaba su fundamentación lógica-algebraica[21].

g) La alternancia entre el álgebra aritmética y el álgebra simbólica que propuso George Peacock (1791-1858), al surgimiento de la fundamentación lógica del álgebra, comenzando por lo que él y sus seguidores no apreciaron: los cuaterniones o números hipercomplejos pusieron de manifiesto que se pueden inventar muchas álgebras.

21 Por cierto, la ausencia de utilidad de las geometrías no-euclidianas en el siglo XIX fue una razón para su cuestionamiento, si se le compara con la enorme permanencia de la geometría euclidiana que, pese a la ausencia de fundamentación lógica-algebraica ya notoria en ese siglo, si tenía grandes utilidades prácticas (Kline, 1980/1985). Después de Einstein, la geometría no euclidiana ha cobrado su importancia práctica y teórica.

h) La rigorización lógica de las matemáticas (aritmética, álgebra, el análisis) a partir de los números, no de la geometría. Solo el tiempo que pasó para llegar a ello fue de Euclides (330 a.C. a 275 a.C.) al año de 1900 cuando Poincaré, en el II congreso Internacional de matemáticas, afirmó que las matemáticas se aritmetizaban.

i) La alternancia semiótica incorporada por ruso-alemán George Ferdinand Ludwig Philip Cantor, mejor conocido como Georg Cantor (1845-1918), con la concepción de infinito como un conjunto cuyo cardinal puede relacionarse con el cardinal de otro conjunto infinito, y con ello, la definición de un conjunto infinito como aquel en que se da la correspondencia de uno a uno con un subconjunto de sí mismo (Kline, 1980/1985; Gracián, 2010-11, Piñeiro, 2012, 2013), lo llevó al reconocimiento de infinitos mayores y menores. Esto fue acompañado con sus respectivos nuevos signos, comenzando por el cardinal alef $\aleph$, signo de la primera letra del alfabeto hebreo, y el surgimiento de números transfinitos, cardinales y ordinales transfinitos, con nuevos signos, como ω, letra omega en minúscula del alfabeto griego. Cantor publicó su propuesta en dos partes de un artículo entre 1895 y 1897 ("Contribuciones a la creación de una teoría de los conjuntos transfinitos." Piñeiro, 2013). Estos números fueron una revolución teórica, aunque generaron mucho rechazo, porque hasta ese momento los números estaban ligados a realidad físicas finitas visualizables, pero $\omega +1$, o $\omega + \omega+2$; o $\aleph_0$, $\aleph_1$, … no lo estaban. Surgió la aritmética transfinita. A partir de Cantor, los objetos matemáticos ya no tienen la exigencia de un correlato real, solo deben tener coherencia lógica (Piñeiro, 2013).

j) Hacia finales del siglo XIX y principios del siglo XX surgió otra rama de las matemáticas, la teoría de conjuntos acompañada de la lógica simbólica, y con ellas una nueva crisis en las matemáticas: la presencia de múltiples contradicciones o paradojas en los fundamentos de varias ramas de la disciplina, de lo cual surgió la necesidad de axiomatizar todas las matemáticas. Otra alternancia semiótica fue necesaria, aparecieron nuevos signos y significados, y, con ellos, nuevos objetos epistémicos en las matemáticas, y un nuevo nivel de la vieja polémica intuición versus lógica matemática, con la obra de Alfred North Whitehead (1861-1947) y Bertrand Russel, *Principia mathematica*, publicados entre 1910 y 1913.

k) Y la sal y pimienta de las contradicciones: cada sistema lógico y axiomático depende de las premisas o axiomas que asuman. Por lo tanto, habrá tantos como supuestos se inventen. Fueron Gödel, Hilbert, Löwnheim y Skolem quienes mostraron la limitación de todo sistema axiomático, lógico, solo basado en sí mismo: la imposibilidad de no tener contradicciones, de no abarcar todas las verdades; de abarcar más de lo que dicen. Al pasar por alto lo anterior, surgieron las pasionales defensas y controversias entre matemáticos puros y aplicados que han llenado la historia de los últimos cincuenta años.

l) Finalmente, la alternancia semiótica de la estadística descriptiva a las leyes de la probabilidad, y estas aplicadas a la física estadística de la física cuántica, ha permitido descubrir que ahí en donde la variabilidad e indeterminación de un solo fenómeno (un átomo) que no se sujeta a regularidad o ley física alguna, cobra regularidad y se sujeta a leyes con alta predictibilidad cuando aumenta el número de casos, emergiendo leyes probabilísticas. Es decir, la causalidad que parece disolverse y no existir en un solo caso adquiere nueva forma y regularidad en millones de casos (Schrödinger, 1944/2016). La causalidad existe en la materia, pero tiene diversas formas de manifestarse. Por cierto, una de ellas es la teleológica, que sólo existe en el humano: cuando anticipando un objetivo futuro, regula su actividad presente para alcanzarlo. La anticipación futura aparece como parte de la causalidad de su presente.

La historia de las matemáticas concebidas como el desarrollo de unos sistemas de signos y significados y, por lo tanto, como caso particular del desarrollo de cualquier lengua, es un ejemplo más de una historia de alternancias semióticas. Su uso consciente es un recurso didáctico para su enseñanza-aprendizaje, pero también, una poderosa herramienta para potenciar al pensamiento.

La alternancia semiótica en las lenguas naturales, es decir, el cambio o uso de otros signos para expresar ciertos significados, conlleva dos procesos no excluyentes entre sí, pero distinguibles en el proceso de su génesis: en cierto momento expanden y desarrollan de los significados; en otro momento, cuando los significados ya están en desarrollo, necesitamos utilizar nuevos signos para expresarlos. Sin embargo, en las matemáticas y la lógica existe también el proceso contrario: el uso de signos con ***significado concreto pospuesto***. Al decir, por ejemplo:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \cdots:$$

La noción de ***pospuesto*** significa que, por el momento, ***No*** tenemos contenido concreto de los signos numéricos o de letras; puede tener el contenido concreto de cualquier fenómeno y, en ese sentido, los nuevos signos crean la necesidad de nuevos significados: ¿qué significado tendrían los números trascendentes al momento de su creación?, ¿qué significado tendría el alef $\aleph_2$ de Cantor?, ¿qué significado tiene varios infinitos de mayor tamaño cada uno con respecto al anterior? Un ejemplo de este proceso de significado pospuesto, a partir de otros significados pospuestos, es cómo llega Cantor a la noción de "potencia", lo que ahora se llama Cardinal, y que a partir de ello concluye que hay varios infinitos. Cantor utilizó la teoría de conjuntos para definir el cardinal como la cantidad de miembros de un conjunto, pero no utilizó números conocidos en ese entonces. Habló de cantidades sin números. Esto se ilustra mejor si consideramos lo siguiente: si tomamos tres vacas, luego usamos signos numéricos para referirnos a ellas (1,2,3), y después las relacionamos una a una en forma biyectiva, encontramos el Cardinal de los dos conjuntos sin necesidad de utilizar números naturales. Decimos entonces que se pasó de un referente físico a un signo numérico, y de este a un signo cardinal con significado pospuesto: no importa de qué están conformados los conjuntos, tienen el mismo cardinal.

vaca vaca vaca	TRES VACAS	Objetos
1 1 1	1+1+1 = 3	Números
∞ ∞ ∞	Vacas, números e infinitos tienen el mismo cardinal	Cardinal: cantidad sin números, por tanto, se pueden comparar los infinitos

Cuadro 1. Representación alternada del número cardinal tres.

De este desarrollo del signo y significado, Cantor dedujo que en un conjunto infinito no podemos contar uno a uno los elementos del conjunto, pero sí podemos vincularlos biyectivamente, es decir, uno a uno. Para eso hay que ordenarlos en una sucesión. Por ejemplo, los números naturales 1,2,3… se pueden asociar con los números pares 2, 4, 6… hasta el infinito, lo que es una relación biyectiva de dos conjuntos infinitos. Lo mismo puede hacerse entre números naturales y números primos, o entre números naturales y números cuadrados, o números naturales y enteros, etc. El método de demostración se llama "de la diagonal" (Piñeiro, 2012; 2013). Cantor utilizó la alternancia semiótica de, en vez de contarlos, vincularlos biyectivamente (con un nuevo signo y un nuevo significado, el de "potencia", que después se llamó "cardinal", entendido como la idea de cantidad de miembros finita o infinita, pero sin hablar de los números que se conocían entonces), y con esa herramienta semiótica llegó a la conclusión que existen diversos infinitos, unos más grandes que otros (los reales son más que los naturales), lo hizo en 1873. A partir de este desarrollo, el matemático alemán Julios Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) propuso después la definición de infinito matemático entendido como una colección coordinable con alguna parte de sí misma (Piñeiro, 2013).

Las alternancias semióticas son una propiedad del lenguaje humano, es decir, de la capacidad cerebral del *Homo sapiens* de crear, modificar, y usar signos y significados, y de hacerlo en forma recursiva. Dicho de otra forma: los signos y significados se desarrollan combinándolos y repitiéndolos, lo que lleva a crear nuevos signos y significados (Escotto-Córdova s/f)[22].

En su uso didáctico, el efecto inmediato de toda alternancia semiótica es aumentar la informatividad de los signos (aquello que dan a conocer) y con eso se transita de conceptos (abstracción y generalización de elementos comunes a varios entes) a categorías (conceptos con carga teórica). Con esta transformación, el usuario del nuevo signo evoca más información, y, el pensamiento, entendido como la capacidad de anticipar o reconstruir secuenciadamente el curso de los acontecimientos mediante signos y significados, se potencia aumentando su alcance anticipatorio, lo que finalmente hace emerger nuevos conceptos y categorías en el conocimiento con sus respectivos signos, y como resultado impulsa el desarrollo de teorías científicas.

Como ejemplo de lo anteriormente dicho usaremos una alternancia semiótica, una imagen, y la llamaremos ***la espiral ascendente del conocimiento:***

22 Libro: Intención y Signo: Sistema de Categorías de la Comunicación Semiósica. En preparación.

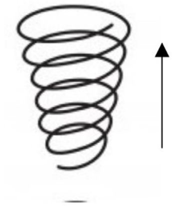
Lo perceptual. Signo Práctica		Lo conceptual. Significado Teoría

Figura 20. La espiral del conocimiento.

Todo conocimiento es una unidad dialéctica entre la teoría (signos y significados) y la práctica; va de lo concreto sensible a lo abstracto categorizado, y regresa a lo concreto sensible en un movimiento sin fin por el que se asciende en el conocimiento cada vez más amplio y complejo del mundo. Las matemáticas son el mejor ejemplo de este proceso expresado en su historia de alternancias semióticas. Éstas son una herramienta del pensamiento y pueden, y deben, ser un recurso pedagógico y didáctico para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en todas las escuelas aplicándolas en la práctica y en la vida cotidiana.

Algo más que matemáticas

Finalmente, las alternancias semióticas nos muestran dos aspectos de la naturaleza humana.

Primero. La naturaleza semiótica del psiquismo humano permite que los signos y significados sean una herramienta cognitiva que potencia al pensamiento, en consecuencia, aumenta la capacidad de anticipar o reconstruir secuenciadamente el curso de los acontecimientos, de predecirlos con exactitud, de simularlos virtualmente, incluso, de planearlos en su realización material. Esta capacidad de anticipar eventos futuros que no han existido, aun apoyándose en signos y significados, crean la ilusión de que las creaciones semióticas existen independientemente del humano en un mundo ideal. Se confunde la subjetividad semiótica con la realidad objetiva a la cual se refiere. La imagen mental de una lámpara no es, físicamente la lámpara, sino solo su imagen mental. Su única realidad objetiva es cerebral, psicológica, pero no es una lámpara que pueda sacarse abriendo el cerebro. Es solo la representación iconográfica de la lámpara cuya existencia es subjetiva gracias a la capacidad biológica representacional del cerebro humano.

Segundo. Las matemáticas y la lógica son solo un ejemplo más de un principio general del lenguaje humano expresado en cualquier lengua posible: con los signos y significados creamos ***objetos epistémicos:*** todo aquello que creemos que existe y asumimos conocerlo de tal o cual manera, pero que no necesariamente tienen existencia en la realidad objetiva, pero si en la realidad subjetiva de los individuos. La argumentación de su existencia suele ser lógicamente verdadera, pero no necesariamente real, en el sentido de realidad objetiva (aquello que existe independientemente y al margen de la conciencia. Lenin, 1908/1976). Bertrand Russell, Georg Cantor, Kurt Gödel y otros creyeron que sus objetos epistémicos, sus creaciones semióticas matemáticas, existían en la realidad objetiva. Gödel asumió el platonismo matemático estimulado por sus preferencias por los filósofos idealistas, por creencias en la transmutación de las almas, e ideas por el estilo, que lo llevaron a sostener -como todo matemático platónico- que los objetos epistémicos matemáticos existen en la realidad objetiva. Es decir, el idealismo matemático confunde la verdad lógica con la verdad objetiva; la realidad subjetiva con la realidad objetiva.

El mejor ejemplo de que un objeto epistémico cuya existencia semiótica, lógica y subjetiva es innegable, pero que no existe en la realidad objetiva, es la noción de que se puede regresar en el tiempo. Ésta es una deducción de las ecuaciones correspondientes al tiempo-espacio. Como toda ecuación se puede despejar, se puede concluir matemáticamente que podemos ir de ida y vuelta en el tiempo. Si el tiempo total es la suma de dos tiempos parciales, y lo representamos arbitrariamente como

$$t_1 + t_2 = T$$
$$T - t_1 = t_2$$

Entonces, de estas ecuaciones del tiempo-espacio se deduce que se puede regresar en el tiempo. Es lógico, pero no real. No existe evidencia física alguna que eso haya ocurrido alguna vez, la evidencia empírica desde que se analiza el surgimiento del Big Bang o gran explosión, en nada indica que algo en el universo esté regresando sobre sus pasos temporales; además, contradice física y lógicamente la segunda ley de la termodinámica. El regreso en el tiempo en la misma secuencia es una creencia lógica y matemáticamente fundamentada, pero no real, aunque en ciencia siempre debemos agregar: *hasta ahora*, acotación de prudencia, no de aceptación, pero que para muchos estimula sus más fantasiosas creencias.

Todas las creencias surgen de esta dinámica del lenguaje y sus alternancias semióticas, pero cuando no se distingue que una cosa son los hechos y otra las explicaciones de los hechos; cuando no se distingue que algo puede ser lógico, pero no real; que una cosa es la realidad objetiva percibida con nuestros sentidos, y otra los objetos epistémicos que inferimos, atribuimos, creamos, o inventamos sobre esa realidad objetiva; cuando confundimos la realidad subjetiva con la realidad objetiva, entonces, las creencias[23] llevan a los más peligrosos extremos: o los delirios enfermizos, o a las creencias extremas como el racismo, sexismo, clasismo, fanatismo, las pseudoterapias, y a la persecución del otro porque no "cree" en mis creencias. Finalmente, cuando estas creencias son usadas para justificar los intereses económicos o políticos más concretos y reales, pueden llevar a eliminar al otro justificándose con principios ideológicos, religiosos, materiales o morales. Por eso nunca hay que olvidar, parafraseando a Carlos Marx, que el principio de toda moral es un interés bien entendido; otra alternancia semiótica.

23 Distinguimos creencias de convicciones. La creencia es una explicación cuya certeza no se cuestiona, se asume como verdadera, no se duda ni se reflexiona en los criterios de verdad para su confirmación empírica. Una convicción es una explicación que tiene vigilancia epistemológica: se cuestiona su certeza, se reflexiona sobre los criterios de verdad, se duda y se busca confirmación empírica para aceptarla o rechazarla. Ambas se defienden con pasión, pero las convicciones son sensibles a cambiar con evidencia y argumentos, las creencias no.

Referencias

Alsina, C. (2011). *La secta de los números*. España, RBA.

Almira, J. M. (2017). *Un matemático al servicio de la física. Fourier.* España, RBA.

Bateson, G. (1998). *Pasos hacia una ecología de la mente. Argentina*, Lehlé-Lumien.

Beuchot, M. (2004). *La semiótica. Teorías del signo y el lenguaje en la historia*. México, fondo de Cultura Económica.

Blanco L. D. (2015). La flecha del tiempo. *¿Tiene el tiempo una única dirección?* España, RBA.

Butkin, G. A. (2001). La formación de las habilidades que se encuentran en la base de la demostración geométrica. En Talizina, N, F. (Comp.) (2001). *La formación de las habilidades del pensamiento matemático* (pp.151-194). México, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Facultad de psicología.

Campany-Campany, C. (2006). *Sintaxis histórica de la lengua española. Primera parte: la frase verbal. Volumen 1*. Universidad Nacional Autónoma de México y el Fondo de Cultura Económica.

-(2006). *Sintaxis histórica de la lengua española. Segunda parte: la frase verbal, Volumen 2*. Universidad Nacional Autónoma de México y el Fondo de Cultura Económica.

-(2009). *Sintaxis histórica de la lengua española. Primera parte: la frase nominal. Volumen 1*. Universidad Nacional Autónoma de México y el Fondo de Cultura Económica.

-(2009). *Segunda parte: la frase nominal. Volumen 2*. Universidad Nacional Autónoma de México y el Fondo de Cultura Económica.

-(2014). Sintaxis histórica de la lengua española. Primera parte: Preposiciones, adverbios y conjunciones, Relaciones interoracionales. Volumen 1. Universidad Nacional Autónoma de México y el Fondo de Cultura Económica.

-(2014). *Sintaxis histórica de la lengua española. Segunda parte: Preposiciones, adverbios y conjunciones, Relaciones interoracionales. Volumen 2*. Universidad Nacional Autónoma de México y el Fondo de Cultura Económica.

-(2014). *Sintaxis histórica de la lengua española. Tercera parte: Preposiciones, adverbios y conjunciones, Relaciones interoracionales. Volumen 3.* Universidad Nacional Autónoma de México y el Fondo de Cultura Económica.

Carroll, J, B, (1956/1973). *Language, Thought, and Reality. Selected writings of Benjamin Lee Whorf*. United States of America (10a ed.). Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts

Cela, C. J. y Ayala, F. J. (2013). *Evolución, el camino hacia nuestra especie humana.* España, Alianza Editorial.

Colegio de México (1996). *Diccionario del español usual en México. México*, Colegio de México.

Corbalán, F. y Sanz, G. (2011). La conquista del azar. *La teoría de la probabilidad.* España, RBA.

Corbalán, F. (2012). *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza*. España, RBA.

Corbalán, F. (2017). *La invención de la teoría de los grupos.* Galois. España, RBA.

Corripio, F. (1973). Diccionario etimológico. España, Bruguera.

Corona, G., Escotto, A., Sánchez, J. y Baltazar, A. (2016). Recursos semióticos en la estadística: Alternancias de lenguaje en el discurso docente, estudio de caso. *Revista Electrónica de Psicología de la FES Zaragoza-UNAM*, 6(11), 15-33.

Cruz, R. J. C. (2009). Imagen: *¿signo, icono o ídolo?* México, siglo XXI.

Darwin, Ch. (1859/1971). *El origen de las especies por medio de la selección natural.* México, Diana.

Dehaene, S. (2016). *El cerebro matemático. Cómo nacen, viven y mueren los números en nuestra mente*. Buenos Aires, Siglo XXI.

De Marco, T. (1986). *Minisemántica*. España, Gredos.

Del Vado V. R. (2017). *El creador del álgebra de la lógica. Boole*. España, RBA.

Eco, H. (1976/2000). *Tratado de Semiótica General* (5ª Ed.). España. Lumen.

Eliano, M. (s. II a. C. / 2008). *Historia de los animales: Libros I-VIII*. España, Gredos.

Ernesto-Piñeiro, G. (2017). *Historia de un número imaginario. La raíz cuadrada de menos 1*. España, RBA.

Escotto-Córdova E. A. (1996). Los múltiples nombres de Vigotski a cien años de su nacimiento. *Revista Episteme Año 1*, No.2, pp. 15- 17.

Escotto-Córdova, E. A. (2009/2012). La regulación semiótica de la actividad. En Eduardo Alejandro Escotto Córdova: *Ensayos de psicología materialista. Psicología, historia y neurociencias* (pp.331-364). Universidad Nacional Autónoma de México.

Escotto-Córdova, E. A. (2011). *El lenguaje interno como discurso dialógico. Su importancia teórica en la explicación de la conciencia y el pensamiento*. U.S.A, Alemania. Editorial Académica Española.

Escotto-Córdova, E. A (2002/2012). Hacia un nuevo paradigma para la teorización en psicología. En Eduardo Alejandro Escotto Córdova: *Ensayos de psicología materialista. Psicología, historia y neurociencias* (pp.69-102). Universidad Nacional Autónoma de México.

Escotto-Córdova, E. A. (2013). El lenguaje. En Israel Grande-García y Jesús Silva Bautista: Psicología. *Historia, teoría y procesos básicos* (pp.175-194). México, Manual Moderno.

Escotto-Córdova, E. A., Sánchez- Ruiz, J. G. y Baltazar-Ramos, A. (2018). Alternancias semióticas en el aprendizaje de la estadística. En Sánchez-Ruiz, J. G. y Escotto-Córdova, E. A. (2018). *Recursos semióticos en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-24). Universidad Nacional Autónoma de México.

Escotto-Córdova, E. A., Sánchez-Ruiz, J. G., Baltazar-Ramos, A. M. (2014). El método de Galperin de la formación de las imágenes mentales y su importancia para la enseñanza de las matemáticas. En A. Escotto y J. Sánchez (Eds.), *Estrategias de intervención-rehabilitación en las dificultades con el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 3–17). México: Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.

Escotto-Córdova, E. A., Sánchez- Ruíz, J. G., Baltazar-Ramos, A. M., Contreras- Ramírez, Ma. Del S., Becerra- Castellanos, J., García-Pérez, J. (2013). Acalculia. En José Gabriel Sánchez Ruíz y Eduardo Alejandro Escotto Córdova (Eds.). *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Factores neuropsicológicos, afectivos y socioepistemológicos.* Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.

Euclides, (300 a. C./2015). *Elementos, Tomo I*. España, Gredos.

Fascicoli, H. (2017). Wolfgang Köhler. *La formulación del insight*. España, Salvat.

Flores, L. J. C. (2006). *Neuropsicología de los lóbulos frontales*. México, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

Frege, G. (2002). *Estudios sobre semántica*. Barcelona, Ediciones Folio.

Galperin, (1957/2009). La formación de las imágenes sensoriales y los conceptos. En Luis Quintanar Rojas y Yulia Solovieva (Eds.). *Las funciones psicológicas en el desarrollo del niño* (pp. 64-75). México, Trillas.

Galperin, (1959/2009a). Tipos de orientación y tipos de formación de las acciones y los conceptos. En Luis Quintanar Rojas y Yulia Solovieva (Eds.). *Las funciones psicológicas en el desarrollo del niño* (pp. 76-79). México, Trillas.

Galperin, (1957/2009b). La formación de los conceptos y las acciones mentales. En Luis Quintanar Rojas y Yulia Solovieva (Eds.). *Las funciones psicológicas en el desarrollo del niño* (pp. 80-90). México, Trillas.

Galperin, (1957/2009b). Acerca del lenguaje interno. En Luis Quintanar Rojas y Yulia Solovieva (Eds.). *Las funciones psicológicas en el desarrollo del niño* (pp.91-97). México, Trillas.

Galperin, (1959/2009c). La investigación del desarrollo intelectual del niño. En Luis Quintanar Rojas y Yulia Solovieva (Eds.). *Las funciones psicológicas en el desarrollo del niño* (pp. 98-112). México, Trillas.

Galperin, (1965/2009). La dirección del aprendizaje. En Luis Quintanar Rojas y Yulia Solovieva (Eds.). *Las funciones psicológicas en el desarrollo del niño* (pp. 113-120). México, Trillas.

Gómez de Silva, G. (1991). *Breve diccionario etimológico de la lengua española*. México, Fondo de Cultura Económica.

Gómez, D. D. (2019). *Matemáticas y neurociencia. Las claves de nuestra capacidad para operar con números*. España, Salvat.

Gómez i Urgellés, J. (2017). *El precursor del lenguaje aritmético: Diofanto*. México, RBA.

Gómez i Urgellés, J. (2012). *Matemáticos, espías y piratas informáticos*. México, RBA. National Geographic.

González, V., Escotto, A., Sánchez, J. y Baltazar, A. (2016). Recursos semióticos en la estadística: Alternancias de lenguaje en el discurso docente, estudio de caso. *Revista Electrónica de Psicología de la FES Zaragoza-UNAM*, 6(12), 45-63.

Gracian, E. (2010-11). *Un descubrimiento sin fin: el infinito matemático*. España, RBA- National Geographic.

Gracián, E. (2011). *Los números primos. Un largo camino*. España, RBA-National Geographic.

Gould, S. J. (2006). *La vida maravillosa*. España, Crítica.

Hacking, I. (1995). *El surgimiento de la probabilidad*. España, Gedisa.

Jung, C. G. (2016). *La vida simbólica.* Obra completa, volumen 18/I. España, Trotta.

-(2015a). *Estudios sobre representaciones alquímicas*. Obra Completa, volumen 13. España, Trotta.

-(1934/2015). *Arquetipos e inconsciente colectivo*. España, Paidós.

-(1964/1995). *El hombre y sus símbolos*. España, Paidós.

Kline, M. (1985). *Matemáticas: la perdida de la certidumbre*. España, siglo XXI.

Kolmogorov, A. N. (2019). *Foundations of the Theory of Probability*. (Second English edition). United States, New York, Dover Publications Inc.

Larousse (2011). *Gran diccionario usual de la lengua española.* España, Larousse.

Lenin, V. I. (1908/1976). *Materialismo y empirocriticismo*. En Lenin, V. I., Obras Escogidas, tomo IV. Moscú, Progreso.

Linton, R. (1945/1967). *Cultura y personalidad* (6ª edición). México, Fondo de Cultura Económica.

Luria, A. L. y Tsvetkova, L. S. (1981). *La resolución de problemas y sus trastornos*. España, Fontanella.

Luria, A. R. (1984). *Conciencia y lenguaje* (2ª ed.). España, Aprendizaje Visor.

Madrid, C. M. (2012). *La descripción del universo en unas ecuaciones. Laplace*. España, RBA.

Mead, M. (1935/2016). *Sexo y temperamento*. España, Paidós.

Molina, V. (2017). *El cerebro adolescente. La construcción de la identidad*. España, RBA-*National Geographic.*

Moliner, M. (2007). *Diccionario de uso del español*. España, Gredos.

Monasterios, E. (2000). Poesía y filosofía: el aporte de Paul Ricoeur al estudio de la metáfora. En Mario J. Valdés (Coord.). *Con Paul Ricoeur. Indagaciones hermenéuticas.* (pp.35-50). *España, Monte Ávila Editores Latinoamericana.*

Morris, Ch. (1985/1971). *Fundamento de la Teoría de los Signos*. Barcelona, España. Editorial Paidós.

Muy Interesante, abril 2020. https://www.muyinteresante.es/salud/articulo/esto-es-lo-que-los-virologos-sabemos-hasta-hoy-sobre-el-coronavirus-sars-cov-2-901588156389?utm_source=indigitall&utm_medium=notificaciones_push

Navarro, J. (2011a). Los secretos del número π. *¿Por qué es imposible la cuadratura del círculo?* España, RBA.

Navarro, J. (2011b). *La vida secreta de los números. Temas curiosos de las matemáticas.* España, RBA.

Piaget, J. (1950/1979). *Autobiografía. El nacimiento de la inteligencia*. Argentina, Tierra Firme.

Piñeiro, G. E. (2012). *Los teoremas de incomplitud. Gödel: la intuición tiene su lógica*. España, RBA.

Piñeiro, G. E. (2013). *La formalización del concepto de infinito*. Cantor. España, RBA.

RAE-Real Academia Española (2014). *Diccionario de la Lengua Española*, vigesimotercera edición. México. Espasa.

Real Academia Española (2020). *Crónica de la lengua española 2020*. España, Editorial Planeta.

Rufián L. A. (2012/2017). *La revolución en la teoría de los números. Gauss*. España, RBA.

Salmina, N. G. (2001). La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. En N. F. Talizina (Comp.). *La formación de las habilidades del pensamiento matemático*. México, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Facultad de Psicología.

Schrödinger, E. (1944/2016). ¿Qué es la vida? En Mark A. Bedau y Carol E. Cleland (compiladores). *La esencia de la vida. Enfoques clásicos y contemporáneos de filosofía y ciencia* (pp. 115-152).. México, Fondo de Cultura Económica.

Shaolan (s/f). *Chineasy. The new way to read Chinese*. Thames & Hudson. Libro electrónico.

Solovieva, Y. y Quintanar-Rojas L. (2019). La metodología formativa en la psicología histórico cultural. Madrid: GIUNTIEOS.

Stewart, I. (2016). *Números increíbles*. México, Paidós.

Stewart, I. (2011). *La matemática de la vida*. España, Crítica.

Talizina, N, F. (Comp.) (2001). *La formación de las habilidades del pensamiento matemático*. México, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Facultad de psicología.

Talizina, N. F. (2007). La esencia de la aproximación de la actividad en psicología. Metodología e historia de psicología. 2(4), 157-162.

Velásquez, J., Escotto, A., Sánchez, J. y Baltazar, A. (2016). Recursos semióticos en la estadística: Alternancias de lenguaje en el discurso docente, estudio de caso. *Revista Electrónica de Psicología de la FES Zaragoza-UNAM*, 6(11), 33-57.

Veresov, N. (2014). Emociones, *perezhivanie* y desarrollo cultural: el proyecto inacabado de Lev Vygotski. En Christiane Moro y Nathalie Muller Mirza (dir.). *Semiótica, cultura y desarrollo psicológico*. España, Machado.

Vygotski, L. S. y Luria, A. R. *El instrumento y el signo en el desarrollo del niño.* (2007). Pablo del Río y Amalia Álvarez (editores). España, Fundación Infancia y Aprendizaje.

Zambrano, L., A. (2016). Pedagogía y didáctica: esbozo de las diferencias, tensiones y relaciones de dos campos. *Praxis, Saber, Vol. 7*, Núm. 3; pp. 45-61. Introducción

SECCIÓN II

Eduardo Alejandro Escotto Córdova

Introducción

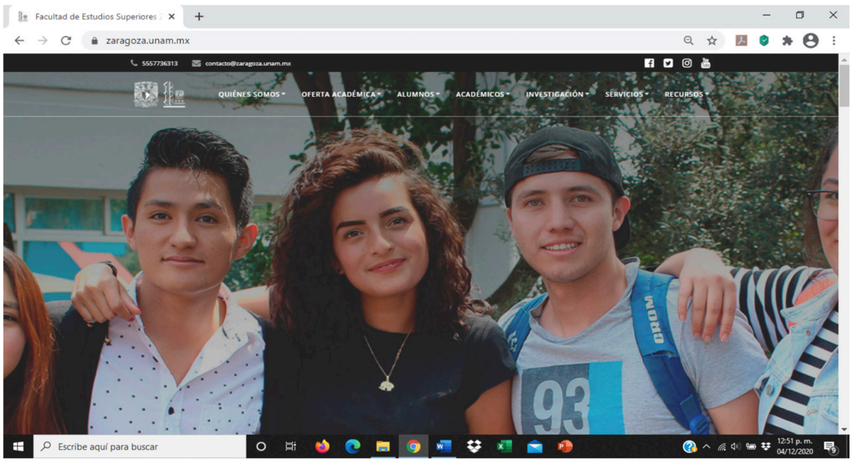
Esta sección responde a la necesidad de probar empíricamente que se puede mejorar la enseñanza de la estadística si utilizamos diversas alternancias semióticas que están a la mano de cualquier profesor que tenga comprensión de cómo utilizarlas usando la lengua materna y los objetos del entorno de los estudiantes, pero, más fácil aún, si se apoya en una computadora. Por ello, nuestra investigación empírica y teórica concluyó con la elaboración, por parte de nuestros tesistas becarios, de un curso completo de estadística descriptiva utilizando los recursos de multimedia que se encuentran a la mano en la computadora de cualquier estudiante universitario, más específicamente, el sencillo el Power Point. Esta sección muestra la justificación y los materiales comentados del proceso de su elaboración.

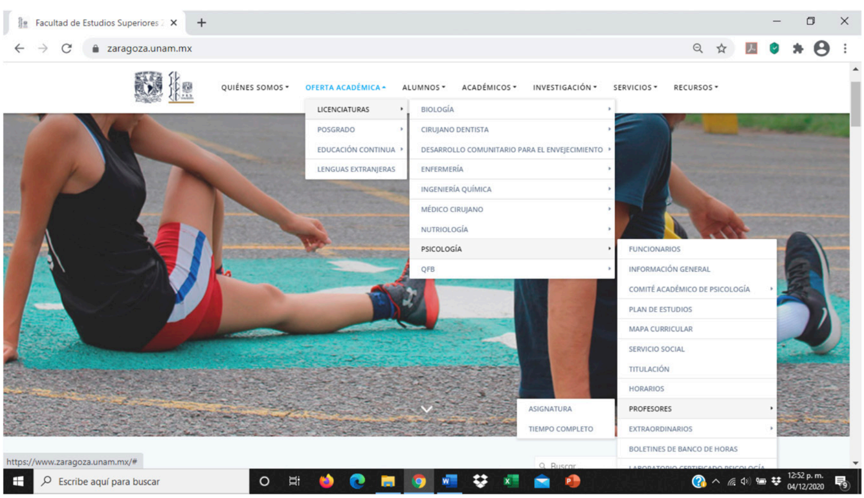
Para la elaboración del curso, tres de nuestros becarios pasantes, Mauricio Alfredo Ramírez Rodríguez, Raymundo Serrano Reyes y Raúl Ruíz Rocha, hoy licenciados en psicología, eligieron los temas que deberían abordar, y éstos se agruparon en dos capítulos. Los becarios tuvieron la libertad de elegir las referencias y apoyos teóricos, el tipo de imágenes, colores, palabras, figuras, narrativa y recursos multimedia para elaborar los temas de las medidas de tendencia central, la varianza, etc. Sus elaboraciones fueron discutidas con nosotros (Ana María Baltazar Ramos, José Gabriel Sánchez Ruiz y Eduardo Alejandro Eduardo Escotto Córdova), y reorientadas con los principios teóricos de las alternancias semióticas, pero la creatividad de la exposición, ampliación del marco teórico e implementación en multimedia correspondió a ellos. En todo momento tuvieron la libertad de expresar los temas como ellos lo consideraron.

El curso se aplicó a una muestra de estudiantes de la carrera de psicología de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza-UNAM de diferentes semestres, a estudiantes de prepa o secundaria y a personas alejadas del mundo académicos. Después, el curso fue subido a la página de la FES Zaragoza y desde ahí se aplicó a más personas, especialmente a la nueva generación de estudiantes de la carrera de psicología que iniciaron clases en agosto del 2019. Puede consultarse en la dirección electrónica siguiente:

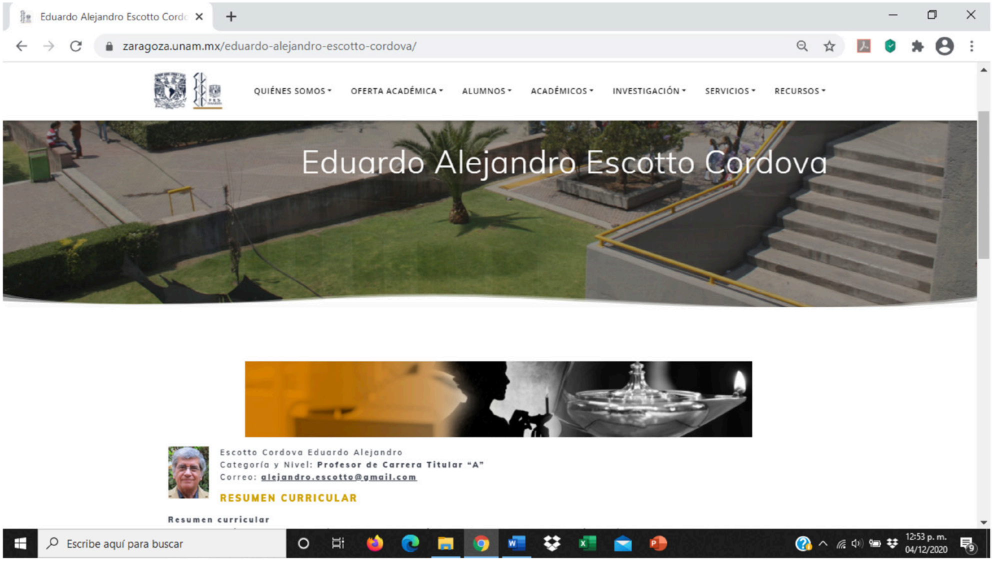
https://www.zaragoza.unam.mx/eduardo-alejandro-escotto-cordova/

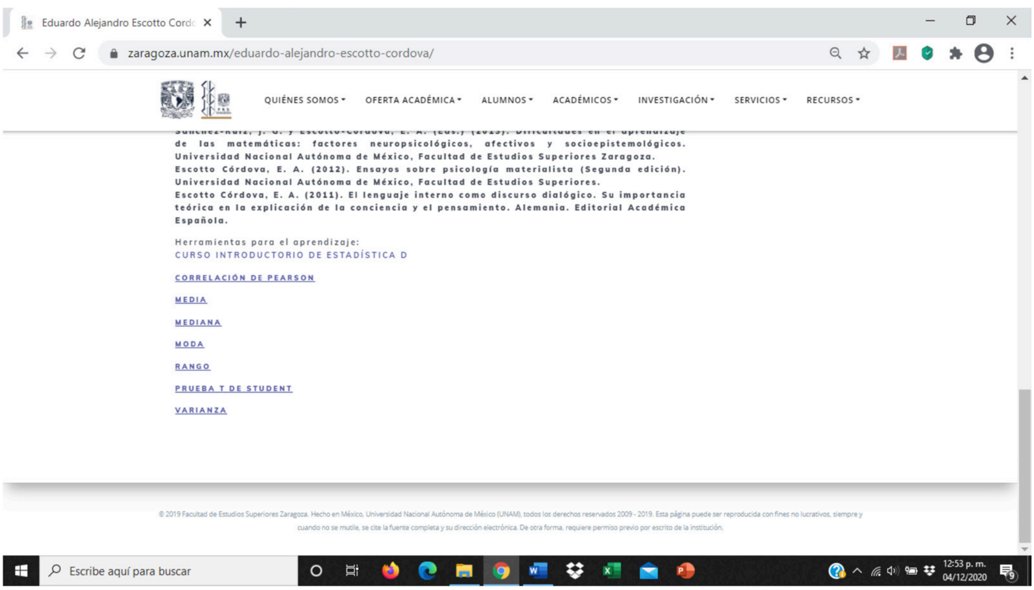
La ruta para ello es entrar a la página oficial de la FES Zaragoza-UNAM-oferta académica-licenciatura-psicología-profesores tiempo completo- Escotto Córdova Eduardo Alejandro (hasta el final del texto curricular viene el curso). Y por si no queda claro con palabras, usaremos alternancias semióticas:





Figuras 1 y 2. Imágenes de la página WEB de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.





Figuras 3. Imagen de la página WEB de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.

En todos los casos, se analizó la opinión de los participantes acerca de la facilidad o dificultad para entender los temas con el curso mediante encuestas. Los resultados mostraron que para muchos el curso les pareció claro y accesible, les aclaró los temas y les facilitó su aprendizaje. Para otros, los que ya tenían conocimientos en estadística, les pareció repetitivo. También se les pidió a los encuestados su opinión acerca de qué recursos semióticos eran claros o innecesarios, qué errores o limitaciones observaban, y qué sugerencias proponían.

Todo el proceso concluyó en enero de este año 2020, pero la pandemia de COVID-19 nos ha impedido hacer las correcciones en la página de la FES Zaragoza.

Los capítulos siguientes tienen el objetivo de explicitar la argumentación del uso de las alternancias semióticas y la lógica para elaborar el curso de estadística. Esperamos sea de utilidad para quienes decidan utilizar las alternancias semióticas en sus clases.

Dr. Eduardo Alejandro Escotto Córdova

Capítulo 2

Recursos semióticos para la comprensión de las medidas de tendencia central: moda, mediana y media

Raúl Ruiz Rocha

Resumen

Se evaluaron cualitativa y cuantitativamente los recursos multimedia elaborados y planeados con diversos apoyos semióticos para enseñar nociones estadísticas básicas de las medidas de tendencia central. El objetivo es conocer su efecto facilitador en la comprensión de los temas de estadística en diferentes sujetos de diferente escolaridad. El fundamento psicológico está basado en la teoría de la formación de acciones mentales concebido por Galperin. **Método**. La investigación es descriptiva, con una perspectiva mixta: se evaluó la comprensión y opinión sobre los temas de medidas de tendencia central con el método de análisis de discurso y se utilizó el Cuestionario de Evaluación de los Recursos Semióticos (CERS). **Participantes**. Tres grupos conformaron el estudio: el primero se integró por 11 estudiantes universitarios, 5 hombres y 6 mujeres con edad de 18 a 26; el segundo por una pareja de estudiantes femeninas con estudios técnicos en nivel medio superior, ambas de 18 años; el tercero por 9 participantes, 3 mujeres y 6 hombres, con diferente escolaridad desde secundaria hasta licenciatura y un rango de edad de 13 a 23. **Resultados**. Los recursos semióticos usados permitieron la comprensión de los temas de medidas de tendencia central en los tres grupos. Los principales errores de los participantes fueron: mencionar definiciones y ejemplos inadecuados, confusión de conceptos y aplicar procedimientos y cálculos incorrectos. Además, se recopiló información acerca de la experiencia de los participantes que incluye: opiniones y sugerencias. Los participantes evaluaron positivamente el tipo de recursos semióticos usados. **Discusión**. Usar varios recursos semióticos facilita el aprendizaje de los temas estadísticos, pero no es el único factor. Otro elemento importante que puede explicar el desempeño de los participantes son sus condiciones de desarrollo cultural.

Conclusiones. Se sugiere utilizar una mayor cantidad de recursos semióticos no formales para la enseñanza de las matemáticas apoyándose en la tecnología.

El uso del lenguaje natural para la enseñanza del lenguaje de la estadística como línea de investigación

El proyecto *El uso del lenguaje natural para la enseñanza de lenguaje formal de la estadística en la carrera de Psicología*, con clave PE302111, auspiciado por la Dirección General de Asuntos del Personal de la Universidad Nacional Autónoma de México (DGAPA-UNAM) es parte de una línea de investigación dentro del campo de la matemática educativa. Dicha línea de investigación se ha ocupado en otros proyectos apoyados por la UNAM de variados aspectos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas. Las primeras etapas de esta línea se enfocaron a justificar la importancia de las matemáticas para las ciencias del comportamiento y para el proceso de socialización. También se estudió el papel de factores neuropsicológicos, afectivos y sociales que contribuyen a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (Sánchez y Escotto, 2013). En una etapa posterior se centró en el análisis de los factores psicopedagógicos y en los métodos de enseñanza de los profesores (Escotto y Sánchez, 2014).

En esta última investigación se exploraron los recursos semióticos usados por el profesor en su discurso docente (González, Escotto, Sánchez y Baltazar, 2016). Al respecto se ha reportado que los recursos semióticos del profesor se relacionan con el rendimiento académico (Corona, Escotto, Sánchez y Baltazar, 2016) y que ciertas características en el uso de dichos recursos en el proceso de enseñanza facilitan la comprensión de los conceptos y los contenidos de las clases de estadística (Velázquez, Escotto, Sánchez y Baltazar, 2016). Actualmente se continúan generando propuestas concretas en esta línea (Salinas-Hernández y Trouche, 2018), este trabajo aspira a ser una de ellas, caracterizadas por emplear recursos semióticos en formato multimedia para la enseñanza de la estadística. Se pretende que constituyan un apoyo para cursos introductorios de estadística para los alumnos de nuevo ingreso de la carrera de Psicología de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza (FES-Z) de la UNAM, y como material didáctico de apoyo para cualquiera que deseé introducirse en la estadística[24].

24 Los materiales multimedia se encuentran disponibles en el siguiente enlace: https://www.zaragoza.unam.mx/psicologia-herramientas-para-el-aprendizaje/. En él se encuentran disponibles las presentaciones de moda, mediana, media, rango, varianza, prueba t de Student y correlación de Pearson, que en conjunto constituyen un curso introductorio de estadística.

Matemáticas en México y obstáculos para su aprendizaje

En México se realiza el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) el cual tiene como objetivo conocer la medida en que los estudiantes logran el dominio de un conjunto de aprendizajes esenciales en diferentes momentos de la educación obligatoria (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2015). En matemáticas el 66.2% de los estudiantes de Educación Media Superior se encuentran en el Nivel I en habilidad matemática. Esto significa que el alumno tiene dificultades para realizar operaciones con fracciones y operaciones que combinen variables representadas con letras, así como establecer y analizar relaciones entre dos variables (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2017). La prueba PLANEA hace énfasis en el uso del lenguaje matemático en diferentes niveles.

El bajo rendimiento en matemáticas, en el nivel medio superior se manifiesta en la reprobación de los estudiantes en materias relacionadas con estadística. En la licenciatura de Psicología de la FES-Z de la UNAM, los índices de reprobación de estadística de la primera generación del nuevo plan de estudios fueron los siguientes: en estadística descriptiva, de un total de 548 alumnos reprobaron 108 (19.7%); y en estadística inferencial reprobaron 215 (29.3%), siendo la materia de más alta reprobación (Escotto-Córdova, Sánchez-Ruiz y Baltazar-Ramos, 2014). Hay evidencia de que el fenómeno de la reprobación de materias relacionadas con las matemáticas no solo se manifiesta en la carrera de Psicología de la FES-Z UNAM, ya que también entre los alumnos de las carreras de Ingeniería Química y Química Farmacéutica Biológica, de la misma facultad, se han observado altos índices de reprobación en materias como: Matemáticas I (75%) y Fisicoquímica I (44%) (Martínez, Vivaldo, Navarro, González y Jerónimo, 1998). En un estudio más reciente en la carrera de Química Farmacéutica Biológica una de las materias con mayor índice de reprobación es Fisicoquímica II y las materias con bajo rendimiento académico son Bioestadística, Fisicoquímica I y II, y Matemáticas I y II (Cruz, Aguilar, García y González, 2009).

Un problema en la enseñanza de la estadística, y de las matemáticas en general, se deriva de la formalidad en su lenguaje (Puga, Rodríguez y Toledo, 2016). Esta formalidad no sigue las etapas de aprendizaje recomendables que abarcan desde la parte instruccional (externo) hasta la asimilación de los contenidos de los objetos matemáticos por parte del aprendiz (interno). Lo que es un factor, más no el único, que influye en los altos niveles de reprobación en materias relacionadas con matemáticas en diferentes niveles educativos. Palarea y Socas (1994) identificaron tres obstáculos o dificultades en el aprendizaje del álgebra:

a) Obstáculos cognitivos: son identificados como conocimientos que han sido satisfactorios para la resolución de ciertos problemas durante un tiempo, se fijan en la mente y, posteriormente, resultan inadecuados y de difícil adaptación al tenerse que enfrentar el alumno a problemas diferentes.

b) Dificultades en el álgebra debidos a errores en la aritmética: son problemas que persiste y que no se corrigen en el aprendizaje de la aritmética (fracciones, paréntesis, potencias).

c) Dificultades debidas a las características del lenguaje algebraico: en el lenguaje algebraico no se especifican los significados precisos de los signos que conforman las fórmulas y tampoco las relaciones entre ellos.

Cabe destacar que, en otros trabajos, también centrados en las dificultades en la comprensión de conceptos fundamentales del álgebra, se ha aportado evidencia acerca de las implicaciones de estas dificultades en el aprendizaje de otros temas matemáticos, por ejemplo, el cálculo (Neira, 2013).

Actividad matemática y semiótica

Las matemáticas son una práctica histórica-cultural porque son resultado de la actividad de grupos culturales concretos, ubicados en una sociedad y en un periodo de tiempo determinado (Blanco, 2011), con un carácter semiótico, mediada por signos y significados (Bartolini & Mariotti, 2008). La semiótica es la ciencia que estudia los sistemas de signos en general. Tradicionalmente se entiende por signo todo aquello que representa a otra cosa (Beuchot, 2004). Un acercamiento semiótico permite entender al álgebra como un sistema de representación que se ocupa del significado de los objetos matemáticos. En el álgebra los signos son instrumentos específicos para la actividad matemática de los estudiantes (Palarea, 1999).

Objetos matemáticos

Ahora bien, por medio de la aplicación de diferentes signos es posible representar un objeto matemático (OM) (D'Amore, 2006), la forma en que se representa el OM es esencial para su aprendizaje ya que los signos son la entidad mediante la cual el aprendiz asimila las nociones matemáticas.

Los OM son un conjunto de relaciones que surgen de la caracterización del mundo físico y sensible. Los OM cumplen la función de organizar e interpretar el contexto, tienen una existencia real, pero no material. Los OM pueden ser cualidades que se abstraen para interpretar el contexto, por ejemplo, la representación del mundo físico por medio de *figuras geométricas*. En otros casos, el OM pueden ser una acción o proceso que organiza el contexto, por ejemplo, los *conjuntos* para clasificar las características de una población. La comprensión de un objeto matemático es la percepción de la función que representa el objeto y la expresión de esta funcionalidad en un contexto. El aprendizaje de los objetos matemáticos parte de sus representaciones, que permiten su expresión y deben ser el medio para observar la función que representa el objeto. El objeto se debe de identificar con sus representaciones, con la actividad que se realiza con ellas y con su uso en situaciones diversas (Pecharromán, 2013). Los OM son indicadores de los elementos necesarios para la representación de conceptos matemáticos, como las medidas de tendencia central, que son acciones o procesos que resumen y describen las características de grupos o poblaciones.

Se pueden agrupar los objetos matemáticos en categorías o tipo de entidades, basándose en los diversos papeles o funciones desempeñadas por estas entidades en el trabajo matemático: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades y argumentaciones, son entidades primarias que forman la base de entidades secundarias complejas. A continuación, se indica la clasificación de los OM y los elementos de cada categoría, se destaca que estos elementos se incluyeron en los materiales didácticos en formato multimedia que se elaboraron en este trabajo:

1. **Lenguaje:** Términos, expresiones, notaciones, así como gráficos. En las presentaciones viene dado de forma escrita y oral.

2. **Situaciones:** Problemas, aplicaciones no formales o formal es de las matemáticas, ejercicios; son tareas que induce la actividad matemática.

3. **Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas:** Operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos.

4. **Conceptos:** Dados mediante definiciones o descripciones (adición, división, redondeo, jerarquía de las operaciones, etc.)

5. **Propiedades o atributos de los objetos:** Suelen darse como enunciados y proposiciones.

6. **Argumentaciones:** Se usan para validar y explicar las proposiciones sean deductivas o inductivas (Godino, 2002).

Las matemáticas se distinguen de otras áreas de conocimiento en que el único acceso a ellas es de naturaleza semiótica, vía la representación, porque los objetos matemáticos no son accesibles perceptiva o instrumentalmente. Cada representación no presenta las mismas propiedades o características del objeto y recíprocamente, ninguna representación es completa y adecuada al objeto.

Toda representación comporta dos dimensiones semánticas: la del contenido y la del objeto que representa, que es independiente del registro que se moviliza. El lenguaje simbólico implica una traducción semántica y sintáctica directa del lenguaje natural al formal y viceversa. Se ha planteado que lo más importante para la enseñanza de las matemáticas es lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos, propiciar la articulación de los registros, trabajar en su conversión y favorecer el tránsito entre unas y otras, reconocer el mismo objeto en ellas (Neira, 2013).

Lenguaje y aprendizaje

El lenguaje juega un papel fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, y de cualquier disciplina, porque propicia la construcción de significados compartidos, permite representar lingüísticamente el conocimiento construido, y es el principal medio de comunicación entre docentes y alumnos (Camargo y Hederich, 2010). El lenguaje se entiende como "la capacidad de significar, la función de atribuir significados a signos que, al duplicar al mundo, nos permiten operar con un mundo ausente y regular nuestra actividad mediante él" (Escotto, 2007, p.15). El lenguaje tiene una doble función: representativa y comunicativa. La primera es la función de representar nuestros propios conocimientos y dar sentido a nuestra experiencia. La segunda función consiste en compartir dichos conocimientos y experiencias con otros (Coll y Onrubia, 2001).

El lenguaje se posiciona como un recurso semiótico en el contexto de aprendizaje de las matemáticas, pero su uso no agota la variedad de recursos semióticos que van desde la interacción entre docentes y alumnos, la comunicación no verbal y el uso de la tecnología. Algunas investigaciones han reportado que el uso de medios tecnológicos, como apoyo o mediador, facilita la compresión y aplicación de los conceptos matemáticos, siempre y cuando, se haga en un contexto de aprendizaje y guiados por un profesor (Aragón, Castro, Gómez y González, 2009; Castro y Pardo, 2005; Gamboa, 2007).

Recursos semióticos

El rango de recursos semióticos utilizados en la enseñanza de las matemáticas se amplía desde la consideración del lenguaje oral, gestual y escrito hacia la inclusión de dibujos, fotos, mapas, tablas, gráficos, entre otros (Manghi, 2010; Salinas-Hernández y Trouche, 2018). Los recursos semióticos son diversos signos (grafismos, gestos, objetos, dibujos, gráficas, colores, palabras orales, etc.) que se utilizan para representar algo. Se caracterizan porque pueden, o no, regirse por un conjunto de reglas para representar diferentes significados. (Arzarello, Paola, Ornella & Sabena, 2008). Por su parte, González et al. (2016) menciona tres categorías en las que se pueden agrupar los diferentes recursos semióticos:

- **Recursos semióticos formales:** son palabras u oraciones que hacen referencia al lenguaje matemático conformado por números, fórmulas y operaciones aritméticas.

- **Recursos semióticos no formales:** son signos basados en el lenguaje natural que no involucran lenguaje matemático; son utilizados de manera cotidiana en la comunicación, pueden ser ejemplos, palabras y frases coloquiales que complementan las explicaciones formales.

- **Recursos semióticos diversos:** son signos que acompañan a los significados del discurso verbal, como tablas, gráficas, dibujos, esquemas u objetos para representar o complementar el componente formal de la enseñanza.

Etapas de formación de imágenes mentales

El aprendizaje humano es un proceso que transcurre, según Galperin, a partir de la formación de imágenes mentales, es decir, de la capacidad de realizar mentalmente una acción objetiva. La interacción del sujeto con el objeto forma representaciones que son acciones mentales para la formación de conceptos. Galperin (citado en Escotto-Córdova, Sánchez-Ruiz y Baltazar-Ramos, 2014) sistematiza la teoría sobre la formación de acciones mentales con base en las tesis de L. S. Vigotski sobre la ley genética de desarrollo cultural (LGDC) y la zona de desarrollo próximo (ZDP). La LGDC postula que el desarrollo cultural de las funciones psicológicas aparece primero en el plano social (externo) y después en el plano psicológico (interno), es decir, al principio el desarrollo es mediado por otros y después autorregulado por el sujeto. La tesis de la ZDP se refiere a la distancia que existe entre lo que un sujeto puede hacer por sí solo y lo que puede llegar a hacer con ayuda de otros. El modelo de formación de acciones mentales se conforma de cuatro etapas:

1. **La base orientadora de la acción (BOA):** se refiere al tipo de orientación conceptual que se le da al sujeto, o genera el mismo sujeto, en torno al qué del nuevo aprendizaje. La BOA significa que al sujeto se le explica que va a aprender, cuál es el objetivo y en qué condiciones de aprendizaje estará.

2. **La etapa de formación del aspecto material de la acción (FAMA):** hace referencia a que toda acción se expresa inicialmente en forma externa, material, y que esta forma es la condición de su asimilación, en esta etapa el aprendizaje pasa por operar directamente con las cosas o su representación material. El paso por esta etapa se divide en dos procesos, primero se generaliza al destacar los rasgos generales de la acción y en la medida que se domina la acción, se automatiza. Talizina (2000) hace la diferenciación entre la forma material y materializada, en la forma material se opera directamente con los objetos de la acción (mesa, libro, etcétera); en la forma materializada se opera con las representaciones o modelos de los objetos (modelos geométricos, gráficos, etcétera). Su diferencia es el nivel de abstracción en que se apoyan, el aspecto material hace referencia a un objeto de la realidad y la forma materializada es una representación de la realidad.

3. **La etapa de formación del plano verbal- lingüístico (FPVL):** significa que la acción se describe verbalmente, esto es, se dice oralmente lo que hay que hacer antes de hacerlo, liberándose así de la dependencia directa de los objetos. Esto implica tres cambios fundamentales: a) la acción no solo se describe, sino que se comunica a otros, subordinándose a la comprensión y el sentido que para los otros tenga la narración de la acción, concienciándose verbalmente. La acción se realiza en el plano verbal; b) a partir de ello, el concepto se constituye

como la base de la acción, el concepto regula la acción; c) a partir del dominio de esta fase, la forma verbal tiende a abreviarse y estereotiparse.

4. **La etapa de formación de la acción como acto mental (FAAM):** es la interiorización, es decir, la expresión mediante lenguaje interno. Esta etapa no se centra en la comunicación con otros, sino en el diálogo interno (habla para sí) y se da la transformación del objeto para un mejor análisis.

Estrategia y objetivo del trabajo

Por todo lo anterior, este trabajo se orientó y planeó siguiendo estas etapas con el fin de facilitar la comprensión de las medidas de tendencia central, partiendo de los objetos matemáticos primarios representados por recursos semióticos (formales, no formales y diversos).

El objetivo de la presente investigación es probar el uso de materiales multimedia construidos con fundamento semiótico para la enseñanza de las medidas de tendencia central y evaluar su impacto en la comprensión de este tema estadístico en diferentes participantes, los grupos no son homogéneos porque se pretende conocer si los materiales multimedia tienen el mismo efecto facilitador para la comprensión de los temas estadísticos en poblaciones diversas.

Bajo este marco surgió la siguiente pregunta de investigación: ¿cuál es el efecto de la aplicación de diversos recursos semióticos expuestos en tecnología multimedia en la comprensión de los conceptos de moda, mediana y media en personas con diferente grado de escolaridad?

Los efectos de los recursos semióticos sobre los participantes se evaluaron en claridad, secuencia y como facilitadores del aprendizaje con tres procedimientos: 1) en entrevistas a los sujetos explicándonos las virtudes semióticas utilizadas en el curso multimedia; 2) mediante un Cuestionario de Evaluación de Recursos Semióticos (CERS), y 3) mediante la comprensión de los temas estadísticos reportada por parte de los sujetos.

Método

Se realizó una investigación transversal, de tipo descriptiva con un muestreo no probabilístico e intencional. Se empleó una metodología mixta (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), para la parte cualitativa, se evaluó el efecto facilitador de los recursos semióticos multimedia en la comprensión de los temas de medidas de tendencia central con el método de análisis de discurso (Urra, Muñoz, Peña, 2013) y para la parte cuantitativa se utilizó el *Cuestionario de Evaluación de Recursos Semióticos* para conocer la opinión de los participantes respecto a las presentaciones multimedia.

Definición de variables

Los ***recursos semióticos*** se definen como el conjunto de signos (fónicos -verbales o escritos- iconográficos, visuales, etc.) expuestos con recursos multimedia. Es decir, cualquier cosa que represente a otra, en algún aspecto o cualidad, un conjunto de signos, con reglas entre ellos, que engloban una estructura de significados (Arzarello, Paola, Ornella y Sabena, 2008).

La ***comprensión*** de un objeto matemático es la percepción de la funcionalidad que representa el objeto y la expresión de esta funcionalidad en un contexto (Pecharromán, 2013), y se define como la capacidad del aprendiz para definir el concepto, citar ejemplos y resolver ejercicios prácticos.

Se tomaron en cuenta las siguientes definiciones de las medidas de tendencia central como referente para la evaluación de las definiciones y ejemplos de los participantes:

Moda:

Valor que más veces se repite en una muestra (García, 2012); categoría que tiene la mayor frecuencia (Bologna, 2011).

Mediana:

Es el número que se encuentra en el centro o punto medio (valor central), una vez que los datos han sido ordenados de manera creciente (García, 2012). Es el valor de la variable que no supera a más de la mitad de las observaciones (Martínez, 2012).

Media:

Suma de todas las puntuaciones, dividida entre el número de puntuaciones observadas (Ritchey, 2002). Suma de todos los valores, divididos entre el tamaño de la muestra (Wonnacott & Wonnacott, 1997).

Participantes

Hubo tres grupos de participantes en el estudio: el grupo 1 (G1) estuvo integrado por 11 estudiantes (6 mujeres y 5 hombres) de la carrera de Psicología de la FES-Z UNAM, de primer semestre, todos habían tomado un curso de estadística descriptiva, con un intervalo de edad de 18 a 26 años, la edad media del grupo fue de 19 años, su última calificación promedio en estadística fue 7.3.

El segundo grupo (G2) se conformó por dos participantes femeninas de 18 años: una era estudiante de la carrera técnica superior en Administración de Capital Humano, su última calificación en matemáticas fue 8, se consideró una alumna regular en matemáticas; la participante 2 era una estudiante de bachillerato del área de contabilidad, su última calificación en estadística fue 6 y se consideró una alumna mala en matemáticas.

En el tercer grupo (G3) había 9 participantes, 3 mujeres y 6 hombres, de diferente escolaridad: dos de secundaria, ambos de 13 años y su última calificación obtenida en matemáticas fue 10; cuatro de preparatoria con edades de 18 a 22 años, la última calificación promedio en matemáticas de estos participantes fue 8; dos estudiantes técnico-superior de 19 y 20 años, ambos obtuvieron 8 en su última evaluación en matemáticas; una participante de licenciatura de 18 que obtuvo 9 en su última calificación en estadística.

Instrumentos

Las presentaciones hacen énfasis en los significados, tanto de los conceptos como de los signos, y de las relaciones entre ellos; despliegan paso por paso el procedimiento, los temas se representaron con fórmulas, tablas y figuras, y contienen distintos ejemplos.

1. Presentaciones multimedia sobre las medidas de tendencia central (moda, mediana, media) realizadas con el programa Power Point versión 2013. Las presentaciones fueron diseñadas con apoyo de recursos semióticos variados:

voz, definiciones formales (signos matemáticos) y coloquiales orales y escritos, fórmulas, gráficos e imágenes, procedimientos desplegados, figuras, colores, flechas, ejemplos, tablas, animaciones, entre otros. Los materiales multimedia aparecen en el apartado 3.5 Funciones de los recursos semióticos de este trabajo.

2. El *Cuestionario de Evaluación de Recursos Semióticos* (CERS) diseñado por los autores de este trabajo en formato tipo Likert de 20 reactivos (ver Anexo 1). Evalúa cada uno de los recursos utilizados (definiciones, fórmulas, ejemplos, tablas, imágenes, animaciones, flechas, figuras, colores). Se validó por un comité conformado por dos expertos en psicometría, que revisaron la coherencia entre ítems y los objetivos, y la complejidad de los ítems (Urrutia, Barrios, Gutiérrez y Mayorga, 2015).

3. Ejercicios de evaluación correspondientes a cada tema de las presentaciones multimedia. Los ejercicios implican acciones del aprendiz ante los atributos del objeto, por ejemplo, aplicar el cálculo para conseguir un valor concreto (ver Anexo 2).

Materiales:

1. Computadoras personales, computadores de escritorio para la aplicación grupal y computadora portátil para la aplicación individual.

2. Videocámara marca Sony modelo HDRCx 405 para la grabación de la discusión de grupal.

3. Grabadora de voz para registrar en audio las charlas individuales, se instaló en un dispositivo móvil la aplicación Voice Record+ disponible para el sistema operativo IOS.

Procedimiento

Primero se les explicó a los participantes el objetivo y las condiciones de aprendizaje (base orientadora de la acción). Después se utilizaron presentaciones multimedia, realizadas con diferentes recursos semióticos, para la enseñanza de las medidas de tendencia central (etapa materializada de la acción). Al terminar lo anterior, se evaluaron en los sujetos los conceptos mostrados en las presentaciones multimedia solicitándoles oralmente definiciones, ejemplos y su utilidad (etapa verbalizada de la acción). Se espera que tras la visualización reiterada de las presentaciones los aprendices definan, ejemplifiquen y que puedan resolver ejercicios del objeto matemático por medio del lenguaje interno, esta etapa se completa cuando el aprendiz es capaz de desplegar los procedimientos mentalmente y reportar o identificar el resultado (etapa del lenguaje interno). El criterio para cambiar de una etapa a la otra radica en el dominio que el sujeto tenga de la etapa previa, esto se manifiesta porque la acción se estereotipa, se automatiza y se abrevia.

El G1 revisó las presentaciones multimedia en computadora personal, posteriormente contestaron el CERS y para la evaluación de la comprensión de las medidas de tendencia se realizó un grupo de discusión donde los participantes definieron los conceptos abordados (media, mediana y moda) y citarón ejemplos. En la discusión se abordó la experiencia de los participantes, se les preguntó acerca de sus opiniones y sugerencias respecto a las presentaciones multimedia. La duración de la sesión fue de 80 minutos.

El G2 siguió el mismo procedimiento del G1, pero la duración de la sesión fue de 91 minutos. Además, se agregaron los ejercicios de evaluación porque en primera instancia se solicitó a los participantes que mencionaran o identificaran diferentes objetos (cálculos, procedimientos) que se consideraron para la evaluación (definiciones, ejemplos). Cada ejercicio de evaluación correspondió a un tema, y tras la revisión de cada presentación multimedia, se les pidió que resolvieran el ejercicio de evaluación correspondiente.

Dentro del G3, cuatro participantes siguieron el mismo procedimiento del G1: con la diferencia de que la discusión fue individual en la que se abordaron definiciones, ejemplos, opiniones y sugerencias. Los cinco participantes restantes siguieron el mismo procedimiento del G2. La sesión tuvo una duración media de 73 minutos.

La información recabada en el grupo de discusión y en las charlas individuales se transcribieron y por medio de la metodología de análisis del discurso (Urra, Muñoz, Peña, 2013) se evaluó la comprensión de las definiciones y ejemplos, así como las opiniones y sugerencias obtenidas de los participantes. Las respuestas recopiladas mediante el CERS se analizaron descriptivamente por grupos, individual y grupal, las respuestas de la pareja de participantes se analizaron junto con la aplicación individual.

RESULTADOS

Análisis de definiciones, ejemplos y experiencia de los participantes
Respuestas del Grupo 1 (G1)

En este grupo se definió y ejemplificó correctamente el concepto de moda, la definición se hizo mediante los conceptos de repetitividad y visibilidad, y se refieren a las características más observadas, por ejemplo, sexo y enfermedad. Los ejemplos se centraron en las variables sexo, usuarios de lentes y no usuarios de lentes. El concepto de mediana se definió correctamente, el ejemplo se aplicó a la variable edad y se describió el procedimiento correctamente. La media se definió recurriendo al concepto de promedio y los ejemplos se aplicaron a las variables, estatura y edad.

Muestra de definiciones correctas observadas en el G1
Moda:

> “Es el dato que se repite más veces”.
> “es algo que se ve a simple vista… que va a tener mayor número de sujetos”.
> “Por ejemplo, el sexo de los que estamos aquí. Se puede ver fácilmente que la mayoría son mujeres”.
> “Pues las personas que traemos lentes y las que no”.

Mediana:

> “valor intermedio de toda una muestra y que significa que todos los datos que están arriba o abajo es el mismo número.”

Media:

> “Podría ser el promedio de un grupo de datos”
> Ejemplos correctos observados en el G1.

Moda:

> “Por ejemplo, el sexo de los que estamos aquí. Se puede ver fácilmente que la mayoría son mujeres”.
> “Pues las personas que traemos lentes y las que no”.

Mediana:

> "Quien tenga 18 años con 2 meses, 18 con 6 y 18 con 9. La mediana sería el 18 con 6 meses".

Media:

> "Hacerlo con estaturas… se tendrían que sumar todas las estaturas y luego dividirlas entre el número total de datos".
> "El promedio de edades a las que entran a la carrera".

Experiencia del G1

El G1 señaló que los conceptos pueden ser útiles en la investigación. Opinó que las presentaciones *explican detalladamente* los temas, y que son un recurso que *puede ayudar como introducción a la estadística.* Una integrante del G1 opinó que *"el manejo de tablas permitió ubicar los valores dentro de la fórmula"*. Otra participante del G1 consideró que "se generó un aprendizaje significativo", y que *"se usan las modalidades visual y auditiva"*. Calificaron el material como "entretenido" y se rescató el uso simultáneo de diferentes recursos, específicamente, imágenes y animaciones. El G1 consideró que puede ser un material de apoyo para realizar tareas. El G1 reportó conocer fórmulas diferentes para el cálculo y que ya conocían los temas de medidas de tendencia central antes de ver las presentaciones.

Un participante no consideró útil la animación con figuras en la presentación de media y recomendó incorporar recursos disponibles en internet.
Respuestas del Grupo 2 (G2).

Una participante de este grupo, identificada como Participante 1, definió correctamente el concepto de moda y el ejemplo lo aplicó a la variable música; el concepto de mediana no lo pudo definir por sí sola, tomó como referencia la definición de otra participante, identificada como Participante 2, para definir el concepto, además, tuvo dificultades para construir un ejemplo, recordó la recta que se usa para explicar el concepto en la presentación y con ayuda del investigador identificó que el valor del punto medio en la recta representa la mediana; no se definió el concepto de media aritmética y el ejemplo fue incorrecto, se analizará posteriormente.

La Participante 2 definió correctamente el concepto de moda y el ejemplo lo aplicó correctamente a la variable ropa; en el concepto de mediana se identifica la noción de posición, la definición y el ejemplo, no adecuados, se analizarán posteriormente; en el concepto de media aritmética se mencionaron las operaciones necesarias para el cálculo.

Definiciones correctas observadas en el G2

> ***Moda:*** *"Es lo que más se utiliza, lo que mas vez a diario, cotidiano, todo lo que usamos".*
>
> ***Mediana:*** *"Por lo que dijo ella [participante 2], es la mitad de algo que tenemos".*
>
> ***Media:*** *No se definió.*

3.1.2.2 Ejemplos correctos observados en el G2

> ***Moda:*** *"el tipo de música ahorita está muy de moda el reggaetón".*
>
> ***Mediana:*** *"lo estabas graficando con una recta… el número de personas que había… los que estaban calificados. La mitad… de la recta era la mediana".*
>
> ***Media:*** *ejemplo incorrecto.*

Experiencia del G2

La participante 1 considera que las presentaciones son *aburridas, sobresaturadas de texto y gráficas*. Los factores que influyen en su aprendizaje son: *distracciones en clase, no entrar a la misma y atender el celular en clase*. Se recomendaron más audios y reportó que los conceptos pueden ser útiles: *"podemos encontrar el valor de las cosas para que no, nos hagan fraudes"*. La participante 2 reporta que los ejemplos de mediana son *difíciles*. Considera las presentaciones aburridas por el uso predominante del texto, le resultan tediosas, menciona que solo aprende lo necesario para aprobar.

En él G2, una de las participantes definió el concepto de media aritmética mediante las operaciones necesarias para el cálculo (adición y división), pero no se señalaron las variables sobre las cuales se puede aplicar el concepto. Mencionó un ejemplo incorrecto porque aplica un procedimiento perteneciente al tema *"agrupación de datos"* de los temas moda o mediana. Confunde *"media aritmética"* con *"frecuencia"*.

El investigador hace uso de la ZDP aclarando la confusión y haciendo preguntas pertinentes para generar un ejemplo correcto e identificar el concepto:

> ***Investigador:*** *¿Recuerdas alguna definición de media?*
>
> ***Participante:*** *Solo se dividía y se sumaba, no me acuerdo de la definición.*
>
> ***Investigador*** *¿Algún ejemplo?*
>
> ***Participante:*** *Tienes números de 7 que no son pares, 7, 9, 15… entonces los tienes que ir juntando y encontrar del 7 al 10 el número que está entre esos ¿no?*
>
> ***Investigador:*** *Ese procedimiento es para la agrupación de datos. Se tenía que realizar previo al cálculo del tema anterior que era mediana, pero para este que es media, la última presentación ¿recuerdas algún ejemplo?*
>
> ***Participante:*** *Aquí se sumaban las calificaciones que tenían.*
>
> ***Investigador:*** *¿Y luego que se hacían con esas calificaciones?*
>
> ***Participante:*** *Pues ya se dividían entre el número de personas que había.*
>
> **Investigador:** *¿y ese valor que era?*
>
> ***Participante:*** *Era la media.*

En él G2, la participante 1 confundió el concepto de mediana con el de media cuando intentó construir un ejemplo. La participante 2 señaló que ese procedimiento corresponde al concepto de media aritmética: *"fue el ejemplo de los que tenían depresión eran 9… tenías que medir el que tan depresivos estaban, unos tenían 37, 40 y tantos, algo así. Y se sumaban… y se dividía"*.

Cuando se le pidió un ejemplo a la participante 2 y no lo pudo generar, la participante 1 fue capaz de generar un ejemplo aplicado a un contexto escolar, pese a que anteriormente, se mostró incapaz de desarrollar un ejemplo: *"En las calificaciones…*

Sumas lo que sacaste, por ejemplo: si sacaste en matemáticas 8, en ciencias 9 y todo eso, las sumas y las divides entre el número de materias que hay… [sirve] para encontrar un promedio general".

Respuestas del Grupo 3 (G3)

Los participantes no tuvieron dificultades para definir y ejemplificar el concepto de moda, los ejemplos se aplicaron a diferentes variables como: pan, canciones, ropa, colores, marcas, calificaciones y rating; en el concepto de mediana hubo menos variedad de definiciones correctas y solo se obtuvo un ejemplo correcto que se aplicó a la variable *"estatura"*; en media solo se obtuvieron dos definiciones correctas y el ejemplo se aplicó a las variables, calificaciones y embarazos al año. Solo 5 participantes resolvieron los ejercicios de evaluación, las respuestas fueron como sigue: tres participantes contestaron correctamente todos los ejercicios, 1 participante resolvió correctamente los ejercicios de moda y mediana, y 1 participante solo resolvió correctamente el ejercicio que corresponde a moda.

Definiciones correctas observadas en el G3

Moda:

"lo que se ve más, lo que aparece más, lo que está más repetitivo".

"Es la variable que más se repetía".

"Es lo que más se repite, como en un grupo es lo que más se repite, lo que más predomina".

"Es lo que más se repetía en un cierto grupo".

"la mayor cantidad de un producto o de un conjunto… es lo que más llama tu atención… es el conjunto de lo más predominante en una sociedad, en una persona, en un grupo de amigos".

"Moda es… el elemento que más se repite en una sucesión… Lo que más se usa".

"es el valor más frecuente dentro de un conjunto de datos".

Mediana:

"Pues era como la mitad ¿no?, de muchos datos la mitad".

"Era el elemento que se encontraba a la mitad de todos, acomodándolos de mayor a menor o al revés".

Media:

"Se suman cantidades y se dividen entre las mismas".

Ejemplos correctos observados en el G3

Moda:

"Me dedico a la venta de pan y, por ejemplo: lo más comercial son las conchas, es lo que más hay y es lo que más se vende… las conchas serían la moda".

"Con las canciones que más escucho… en mi celular tengo una lista de reproducción y me pone la más reproducida, o la más sonada… en mi ejemplo sería la canción que más reproduzco".

"Yendo a los colores. Está de moda el color rosa y ya vez a muchas niñas con suéter rosa".

"Tenemos 10 camisas y 7 son de color azul, y las otras son 2 negras y 1 blanca. Entonces la moda es la de color azul, porque es la que más se repite".

"En el 2017 la moda es la marca Adidas".

"Tal vez las calificaciones de un grupo, de los alumnos… tal vez la mayor sea 8 que es lo que más sacan los alumnos en esa clase".

"Para medir la frecuencia, en que temas hay más rating o qué temas le interesan a nuestro público… dividirlo en secciones. En base en eso tomar tres días diferentes para dividirlo en esas tres secciones y ver en qué día hay más rating".

Mediana:

"En las estaturas de algunos niños… acomodándolos de menor a mayor, el niño que se encuentre a la mitad de todos".

Media:

"Mis calificaciones, por ejemplo, cuando estábamos en la secundaria nos ponían a sacar el promedio. Teníamos que sumar las cantidades y al último tenemos que dividirlas por el número de materias".

"Las mujeres que se embarazan en promedio al año".

Experiencia del G3

El 78% de los participantes opinaron que los temas fueron fáciles de comprender y el 22% reportaron frustración principalmente porque hay demasiada lectura. Un participante considera que para la asimilación de los conceptos *"necesita más tiempo"*. En este grupo la fórmula que causó más confusión fue la de la media aritmética.

Un participante opinó que *"las presentaciones enseñan algo útil a largo plazo"*. Se reportó que es un método de enseñanza *"entretenido y variado"*. Como las presentaciones exigían retroceder para conseguir la comprensión de los temas, la participante dijo que eso *"las volvió tediosas"*.

Las recomendaciones que hizo el G3 fueron del siguiente tipo: *"más explicaciones verbales, más señalamientos, ejemplos con pocos datos, diapositivas sin textos largos, otros formatos para la explicación como un video, sustituir palabras complejas con sinónimos más coloquiales y una sección de ayuda basada en preguntas"*. Un participante considera que las razones de su reprobación son: *"falta de profesionalismo del profesor y desatención de su parte"*. Otra participante expresó que *"su comprensión depende del método instruccional del profesor"*.

Se recomendó incorporar otros recursos como figuras o mapas, porque permiten centrar los conceptos y palabras clave para acortar la lectura en los temas.

Errores en la comprensión de las medidas de tendencia central

En el Grupo 1 (G1)

En este grupo no se presentaron errores en la comprensión de las medidas de tendencia central, los conceptos se definieron correctamente y se citaron ejemplos pertinentes para cada concepto.

En el Grupo 2 (G2)

A continuación, se describen los errores en los conceptos de mediana y media aritmética. En el concepto de mediana se identifica la noción de posición y no se ubica el concepto dentro de una muestra. En ocasiones se confunde el concepto de mediana con el de media, en el concepto de media se mencionaron las operaciones necesarias para el cálculo. Cuando la participante 2 no fue capaz de generar un ejemplo, la participante 1 generó un ejemplo adecuado para un contexto escolar.

Definiciones y ejemplos con errores observados en el G2

Mediana

> ***Definición:*** *"podríamos decir que mediana es como el intervalo entre... si tenemos un rango...es la mitad... por ejemplo, del 1 al 10 podría ser 5".*
>
> ***Ejemplo:*** *"sí somos 10 alumnos y nos piden hacer equipos con partes iguales, podríamos seleccionar 5 y 5"*
>
> ***Descripción del error:*** Se menciona correctamente la noción de ***posición*** y el concepto de ***intervalo*** lo equiparó con el de ***conjunto de datos.***

El ejemplo señaló correctamente que la mediana divide en dos el conjunto de datos, pero su función principal no es dividir el conjunto de datos, sino el señalar el valor del punto medio en el conjunto.

Media

> ***Definición:*** *No se generó ninguna definición.*
>
> ***Ejemplo:*** *"el ejemplo de los que tenían depresión eran 9... tenías que medir el que tan depresivos estaban, unos tenían 37, 40...algo así...se sumaba [y] se dividía".*
>
> ***Descripción del error:*** *La participante 1 confundió el concepto de mediana con el de media cuando intentó construir un ejemplo. Solo se mencionaron las operaciones necesarias para el cálculo.*

Con la ayuda del investigador la participante 1 recordó un ejemplo de las presentaciones sobre calificaciones. Cuando se le pidió un ejemplo a la participante 2, la participante 1 fue capaz de aplicar el concepto a un contexto escolar.

En el Grupo 3 (G3)

Los errores también se presentaron en los conceptos de mediana y media aritmética. En las definiciones y ejemplos, los principales errores fueron los siguientes: confundir los conceptos de mediana y moda, definiciones redundantes, procedimientos inadecuados o incompletos, no se sitúan los conceptos dentro de una muestra o un conjunto de datos, se intercambia el concepto de ***"datos ordenados"*** por el de ***"adición (suma)"*** o el concepto de ***"observaciones"*** por el de ***"frecuencias"***, se generaron definiciones que no representan los conceptos o se redujeron los conceptos a procedimientos más simples.

Definiciones y ejemplos con errores observados en el G3

Mediana

Definición: *"es exactamente el punto medio".*

Ejemplo: *"La mediana es… el producto básico… es lo que más piden".*

Descripción del error: *No se identificó la definición con la pregunta ¿recuerdas alguna definición de mediana? La definición se identificó cuando se le preguntó ¿cómo le hiciste para calcular la mediana?*

En el ejemplo aplica de manera indistinta el concepto de mediana y moda.

Definición: *"Es el valor que se encuentra a la mitad de todo el valor medio de algunas cantidades".*

Ejemplo: *"Son 6 dígitos y están: 1, 2, 3, 4, 5, 6. La mediana va ser 3 porque es la que está a la mitad del 1 y del 6".*
"Podría ser el número de materia… tengo 9 y la mitad va ser 4 porque no se puede poner decimal. Entonces como es 4.5 creo el decimal tiene que subir a 5 porque está superando el .5".

Descripción del error: *Se identificó la noción de posición dentro del concepto y la definición es redundante.*

En los ejemplos se identificó correctamente la noción de posición, pero no se aplicó el procedimiento correcto. Cuando se le pidió un ejemplo diferente, aplicado a su vida cotidiana o su vida escolar, el participante aplicó erróneamente el concepto.

> ***Definición:*** *"La mediana es, pues digamos que el punto medio de un valor total".*
>
> ***Ejemplo:*** *"a mí me dan en un porcentaje del precio real del producto… el porcentaje es el 40%, entonces la mediana de todos mis productos pues es el 40% porque de ahí parto…es el porcentaje hacia el vendedor y el porcentaje hacia el proveedor".*
>
> ***Descripción del error:*** *Se identificó correctamente la noción de punto medio, pero se cometió el error de situarlo en un solo valor, lo correcto es situarlo dentro de un conjunto de datos.*

En el ejemplo se identificó la mediana incorrectamente por medio del concepto de porcentaje, aplicó el concepto de moda para el tema de mediana.

Definición: *"es el dato numérico… de en medio de todos los demás".*

Ejemplo 1: "el ejemplo de la cooperativa en la primaria…dije al parecer que niños preferían de paletas 3, papas 8 y 5 de refresco. Si los sumamos serían, bueno en este caso son 10 niños ¿no? Y podría ser, bueno sumar todos serian 8, 5, 13 y 3, 16…serían el 8 y el 9, entonces aplicaríamos la fórmula para datos agrupados, pero con números pares".

Ejemplo 2: "enfocado a mi carrera igual basándonos en el rating, no sé, que 1000 personas escuchen chismes, 500 en música, y 300, no sé, en deportes. Entonces igual sería sumar 1000+500+ creo que dije 300. Igual sería 1800 y seria 800 y 900 los números medios".

Descripción del error: *En los ejemplos 1 y 2, la noción de* ***"ordenar los datos"*** *se intercambia por la de* ***"adición (suma)"*** *de los datos. Los procedimientos son incompletos porque no se calcula el punto medio a partir de los valores centrales.*

Media

Definición: *"La mediana se centraba a la mitad… era la parte de en medio de todo el ejercicio, de todo el problema".*

Ejemplo: *"En este caso eran las personas que medianamente utilizaban el uso de su celular"*

Descripción del error: *Se identificó la noción de punto medio, esta noción no la ubicó dentro de un conjunto de datos por lo que a definición es incorrecta.*

El ejemplo se basó en el ejercicio de evaluación, pero señaló incorrectamente lo que representa el resultado, en este caso el punto medio representa el número de horas que una persona usa el celular, este valor se ubica a la mitad del conjunto de datos. El participante se mostró incapaz para construir un ejemplo diferente.

Definición: *"sería como que un poco más justo… tomas el total del valor, digamos el total del esfuerzo de los participantes y los dividimos entre los participantes, para que te quede una parte justa".*

Ejemplo: *"en el trabajo en equipo… sabemos que no siempre se hacen partes exactamente iguales … lo justo es que queden partes iguales [para] todos los participantes".*

Descripción del error: *Equiparó media aritmética con la noción de* **"justicia"***, redujo el concepto a la* **"repartición equitativa"***, en este caso, del trabajo en un grupo de personas.*

El ejemplo referente a media aritmética es correcto, aunque no se detalló el procedimiento a seguir.

Definición: *"Es el número total de tus frecuencias entre el número de datos".*

Ejemplo: *"cuando estás en el periódico igual lo dividen en secciones, entonces, podrías hacer diferentes periódicos, de diferentes temas: uno de deportes, uno de chismes, y otro de política… para sacar tu promedio igual sumas todas las unidades que vendiste y las divides entre las 3 secciones y de ahí sacas tu media"*

Descripción del error: *En la definición se intercambió la noción de* ***"observaciones"*** *o* ***"puntuaciones"*** *por el de* ***"frecuencia"****, que hace referencia al número de elementos que se acumulan en cada clase cuando los datos están agrupados.*

El procedimiento del ejemplo fue incorrecto, la relación del número de unidades vendidas entre las secciones del periódico no refleja la media aritmética.

Análisis cuantitativo descriptivo de la evaluación de los recursos semióticos

Los participantes del G1 están de acuerdo en que los recursos semióticos fueron útiles para la comprensión de los temas de medidas de tendencia central, la calificación promedio en el Cuestionario de Evaluación de Recursos Semióticos de $\bar{X}$ = 4.25, DE = 0.41, simetría = 1.52 y curtosis = -1.579, esto es: los datos tienden a distribuirse normalmente concentrándose por encima del puntaje medio de los datos (Figura 1).

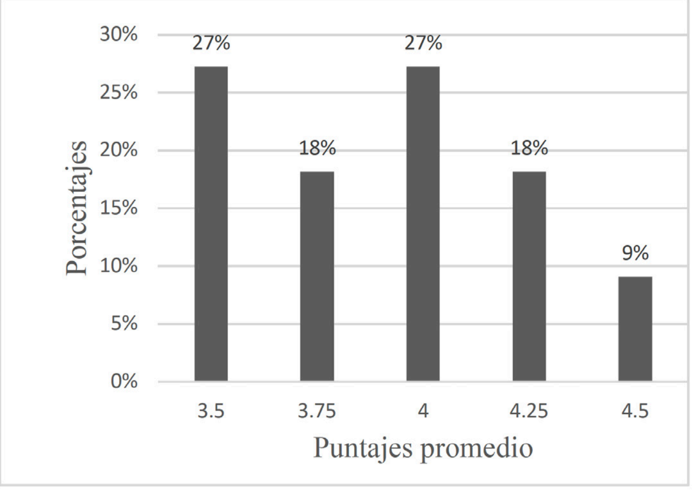


Figura 1. Puntajes promedio de los datos obtenidos en el Cuestionario de Evaluación de Recursos Semióticos en el G1 consideró el G2 y G3 como uno solo para analizar los datos obtenidos mediante el CERS. Los participantes calificaron los materiales multimedia como comprensibles y claros, reflejando una calificación promedio en el CERS fue $\bar{X}$ = 3.21, DE = 0.92, simetría = 0.492 y curtosis = -4.18 esto es: los datos tienden a distribuirse normalmente concentrándose por encima del puntaje medio de los datos (Figura 2).

Discusión

Los resultados indican que los tres grupos comprendieron las medidas de tendencia central con el apoyo de varios recursos semióticos, este hecho confirma la naturaleza de la actividad matemática como una práctica histórica-cultural mediada por signos y significados (Bartolini y Marioti, 2008). Además, los materiales didácticos permitieron superar los obstáculos cognitivos, los errores la aritmética y las dificultades debidas a las características del lenguaje algebraico, que son los tres principales problemas en el aprendizaje del álgebra (Palarea y Socas, 1994).

Se puede decir que el aprendizaje se beneficia con ayuda de otros, los pares, porque los contenidos se aclaran y se refuerzan mediante el diálogo. Los aprendices pueden obtener una base de conocimientos de sus pares cuando el método de enseñanza no fue adecuado para ellos, esto sucede cuando el aprendiz toma como referencia las acciones acertadas o los errores de los compañeros para asimilar el objeto de aprendizaje. Esto se observó en el G2 cuando la participante 1 confundió el concepto de mediana con el de media y la participante dos aclaró que el procedimiento descrito correspondía al concepto de media aritmética. Posterior al primer ejemplo correcto la Participante 1 desarrolló un ejemplo correcto aplicado a un contexto escolar.

Esta investigación apoyó la tesis de la eficacia del uso de los recursos semióticos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en particular de temas de estadística, específicamente de las medidas de tendencia central, lo que concuerda con diferentes investigaciones que hablan de los recursos semióticos como herramientas que optimizan la enseñanza por parte de los docentes y potencian el aprendizaje en los alumnos (Arzarello et al. 2008; Coll y Onrubia, 2001; Corona et al. 2016; González et al. 2016; Manghi, 2010; Velázquez et al. 2016).

Los materiales didácticos fueron evaluados de diferentes maneras, incluso contradictorias: por una parte, como *útiles y comprensibles*, por otra, los participantes evaluaron los materiales como *aburridos o tediosos*. Las respuestas en el CERS fueron, en general, positivas. Pese a las diferentes evaluaciones que recibieron las presentaciones, permitieron la comprensión de temas de medidas de tendencia central: moda, mediana y media.

Atribuimos las diferencias que presentaron los participantes a variables no controladas en nuestra investigación, como su medio cultural (nivel socioeconómico, grado de estudios, estilo de vida, ocupación, etc.) que determina las condiciones particulares para la formación de capacidades o aptitudes (Leontiev, 1967). Los aprendices deben exponerse a las condiciones culturales que propicien la formación de aptitudes matemáticas y de otros conocimientos básicos como la lecto-escritura. Esto conduce al desarrollo, individual y de la sociedad, que debe ser potenciado por la influencia de otros agentes culturales.

¿Cómo atender las dificultades que siguen presentes en la comprensión de tópicos matemáticos? Resulta pertinente la aplicación de métodos surgidos de la neuropsicología porque tienen un carácter educativo y psicopedagógico, la ZDP próximo no es el único método cualitativo para la formación de imágenes mentales. La Variación Sistémica de la Actividad (VSA) puede ser utilizada. Se entiende como la modificación sistemática de las condiciones de regulación de la actividad de las tareas evaluadas: lenguaje (oral, escrito, leído, mímico), en un contexto comunicativo o sin él, dibujar, realizar operaciones aritméticas, series inversas, tareas de identificación, comprensión de definiciones, etcétera (Escotto, 2014). La aplicación de la VSA permite la regulación consciente de la actividad por medio del lenguaje, lo que hace posible identificar y modificar los errores que se presenten en el proceso de aprendizaje.

Se aplicó la VSA a un participante del G3 que no definió correctamente los temas de mediana y media, pero resolvió correctamente los ejercicios de evaluación. Mediante la modificación de las preguntas y centrándose en la acción que realizó correctamente (resolución de ejercicios) se ejemplificó el concepto de media aritmética y se definió mediana, en la descripción del procedimiento se intercambió el concepto de ***"conteo"*** por el de ***"suma"***, a continuación, se presenta parte de las preguntas y respuestas…

> ***Investigador:*** *¿Recuerdas cómo se calcula la media?*
>
> ***Participante:*** *¡Sí! En mí caso, se suma todo lo que vendo y se divide entre el número de piezas que son.*
>
> ***Investigador:*** *¿Cómo le hiciste para calcular la mediana?*
>
> ***Participante:*** *¿La mediana? Es exactamente el punto medio. Ahora sí que solo sumé a los participantes y dividí entre dos y ya me salió el punto medio. Es el paso más fácil.*

El desempeño del participante demostró la importancia de la regulación consciente de la actividad. Este participante no definió y ejemplificó correctamente los conceptos de mediana y media, pero resolvió correctamente los ejercicios de evaluación, al parecer participante no es consciente de los conocimientos con los que cuenta. Esto indica que, para la evaluación de los tópicos matemáticos, se debe de considerar el objeto matemático en todas sus formas o tipos posibles, no solo el procedimiento, definición o representación gráfica en aislado, sino, los objetos enunciados más el contexto, su función y su significado.

Los objetos matemáticos siguen la misma trayectoria de la zona de desarrollo próximo (ZDP) porque se vuelven más complejos en la medida que el aprendiz los comprende y los utiliza para aprender nuevos objetos para lo que es necesario el conocimiento previo. Desde el principio, los objetos matemáticos se conforman por unidades más básicas que se denominan objetos primarios, que necesitan una asimilación previa. El objeto matemático conformado puede convertirse en un objeto primario perteneciente a un objeto más complejo, por ejemplo: para la asimilación de la media (objeto matemático) se necesita asimilar definiciones, expresiones, situaciones, acciones, notaciones (objetos primarios), la media puede convertirse en un objeto primario de objetos más complejos como la desviación estándar, la prueba t de Student, análisis de varianza o correlación. La trayectoria de la zona de desarrollo próximo (ZDP) es similar porque sigue un patrón de complejidad ascendente, en primer lugar, se parte de una Zona de Desarrollo Real (ZDR) que es lo que puede hacer el sujeto de manera independiente, la ZDP es lo que puede hacer el sujeto con la ayuda de los otros y es el medio para arribar a la Zona de Desarrollo Potencial (ZDP) que es cuando la persona consigue el aprendizaje. La ZDP puede convertirse en una ZDR para seguir ascendiendo en términos de complejidad (Figura 3).

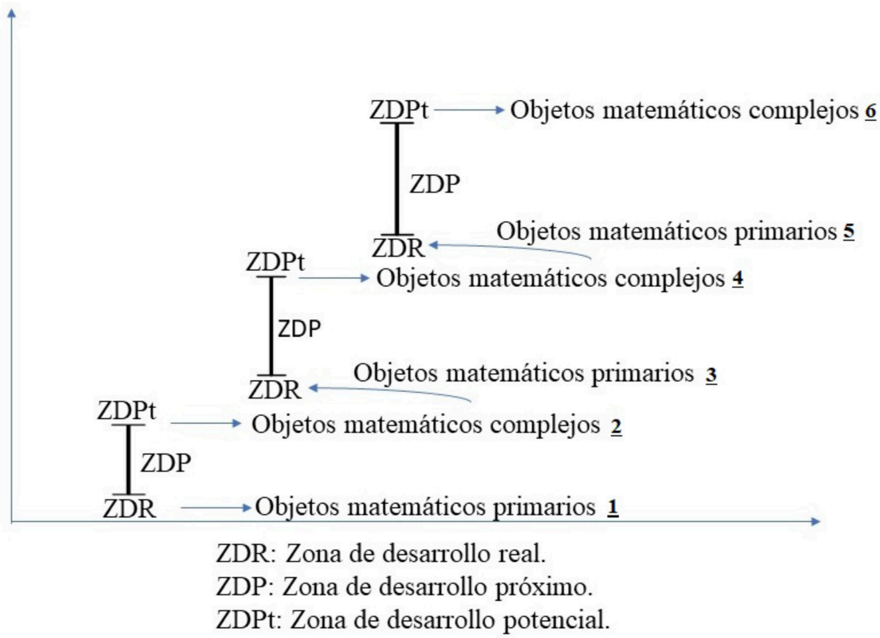


Figura 3. Trayectoria de la ZDP y los Objetos Matemáticos.

Conclusiones

Los materiales didácticos basados en diferentes recursos semióticos permitieron la comprensión de las medidas de tendencia central. Concretamente, los siguientes recursos fueron considerados útiles para la comprensión de los temas: tablas, gráficas, signos, flechas, la estructuración de las presentaciones, las explicaciones detalladas y el uso simultaneo de figuras, colores y animaciones, el lenguaje natural y esquemas. Los materiales didácticos fueron evaluados como útiles, entretenidos, variados, detallados y significativos y se rescató como una ventaja que el aprendiz lleve su propio ritmo de aprendizaje; muy pocos participantes los evaluaron como aburridos, difíciles y tediosos.

Los resultados permiten plantear que es necesario vincular los conceptos que se pretenden enseñar con la realidad de las personas, como en el concepto de moda, que fue el que se definió y ejemplificó sin ninguna dificultad. Solo vinculando los objetos matemáticos con la actividad humana se puede ubicar la funcionalidad de los objetos de aprendizaje, en este caso las medidas de tendencia central. Según Pecharromán (2013) la percepción de la funcionalidad y su expresión en un contexto son los requisitos para la comprensión de los conceptos matemáticos.

Hoy en día, el uso de la tecnología permite la materialización de diferentes contenidos. Este trabajo partió de la base orientadora de la acción porque se les explicó a los participantes lo que van a aprender, su objetivo y las condiciones de aprendizaje. Las presentaciones son representaciones materializadas (representaciones gráficas, modelos, dibujos) de los entes con los que interactúan los objetos matemáticos (medidas de tendencia central), no es posible materializar un objeto matemático por su naturaleza abstracta, en este caso, lo que es susceptible de representar de manera materializada son las variables con las que operan los objetos (edad, estatura, calificaciones, sexo, preferencias, puntajes de un test).

Existen diferentes ejemplos del uso de la tecnología que utilizan recursos semióticos variados para la enseñanza de las matemáticas. Uno de ellos son los juegos educativos PIPO CLUB, algunos de ellos están disponibles en internet, este conjunto de juegos enseña a los niños temas como: números romanos, series numéricas, geometría y aritmética[25]. Otro ejemplo del uso de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas es la propuesta del libro *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (Nagle, Saff & Snider, 2005), este libro viene acompañado de un CD ROM interactivo que contiene un software para el cálculo numérico y visualización gráfica de ecuaciones diferenciales.

Un ejemplo del uso de la tecnología, pero para la enseñanza de la lectura, es la aplicación interactiva *"Leer bien"* basada en la propuesta del libro *Enseñanza de la lectura* (Solovieva y Quintanar, 2014), esta aplicación *interactiva* permite la asimilación de la lecto-escritura, partiendo del análisis fonemático. El método puede ser útil para niños, adolescentes y adultos cuya lengua materna no sea el español, en personas con problemas de aprendizaje o daño cerebral. Esto demuestra las diversas aplicaciones de la tecnología utilizando recursos semióticos variados para la enseñanza de diferentes habilidades y conocimientos.

25 Los juegos educativos de PIPO CLUB se encuentran disponibles en la siguiente página web: http://www.pipoclub.com/matematicas-primaria/index-imprimir.html

Referencias

Aragón, E., Castro, C., Gómez, B., y González, R. (2009). Objetos de aprendizaje como recursos didácticos para la enseñanza de matemáticas. *Apertura*, 9(11), 100–111.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97–109.

Bartolini B. M. G., & Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Coord.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746–783). New York: Routledge.

Beuchot, M. (2004). *La semiótica. Teorías del signo y el lenguaje en la historia*. México: Fondo de Cultura Económica.

Blanco-Álvarez, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación Y Pedagogía*, 23(59), 59–66.

Bologna, E. (2011). *Estadística para psicología y educación*. Argentina: Brujas.

Camargo, Á., y Hederich, C. (2010). La relación lenguaje y conocimiento y su aplicación al aprendizaje escolar. *Folios*, (31), 105–122.

Castro, W. y Pardo, H. (2005). El computador en la clase de matemáticas: desde lo dinámico y lo semiótico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 727–731.

Coll, C., y Onrubia, J. (2001). Estrategias discursivas y recursos semióticos en la construcción de sistemas de significados compartidos entre profesor y alumnos. *Investigación En La Escuela*, (45), 21–31.

Corona, G., Escotto, A., Sánchez, J. y Baltazar, A. (2016). Recursos semióticos en la estadística: Alternancias de lenguaje en el discurso docente, estudio de caso. *Revista Electrónica de Psicología de la FES Zaragoza-UNAM*, 6(11), 15-33.

Cruz, M. M., Aguilar S. L., García, V. A, y González, M. R. (2009). Rendimiento académico en la carrera de química farmacéutico-biológica de la FES Zaragoza (2002-2008). *Bioquimia*, 34(1), 75.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime*, 9 (1), 177–195.

Escotto, A. (2007). El estudio del lenguaje: lingüística y neuropsicología. En A. Escotto, M. Pérez y Sánchez C. N. (Coord.), *Lingüística, Neuropsicología y Neurociencias Ante los Trastornos del Desarrollo Infantil*. (pp. 3-49). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Escotto-Córdova, E. A. (2014). La variación sistémica de la actividad y la zona de desarrollo próximo: dos estrategias para el diagnóstico y la intervención neuropsicológica. En M. Pérez, A. Escotto, J. Arango, L. Quintanar (Coord), *Rehabilitación Neuropsicológica. Estrategias en trastornos de la infancia y del adulto* (pp. 33-48). México: Manual Moderno.

Escotto, A. y Sánchez, J. (2014). *Estrategias de intervención-rehabilitación en las dificultades con el aprendizaje de las matemáticas*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Escotto-Cordova, E. A., Sánchez-Ruiz, J. G., Baltazar-Ramos, A. M. (2014). El método de Galperin de la formación de las imágenes mentales y su importancia para la enseñanza de las matemáticas. En A. Escotto y J. Sánchez (Coord.), *Estrategias de intervención-rehabilitación en las dificultades con el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 3–17). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* México: McGraw- Hill.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 3(2), 11–44.

García, U. L. (2012). *Estadística y probabilidad*. México: Competencias Matemáticas.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2.3), 237–284.

González, V., Escotto, A., Sánchez, J. y Baltazar, A. (2016). Recursos semióticos en la estadística: Alternancias de lenguaje en el discurso docente, estudio de caso. *Revista Electrónica de Psicología de la FES Zaragoza-UNAM*, 6(12), 45-63.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2015). Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA): Documento rector.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2017). Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA): Resultados nacionales 2017. Educación media superior.

Leontiev, N. (1967). *El hombre y la cultura. Problemas teóricos sobre educación*. México: Grijalbo.

Nagle, R. K., Saff, E. B. & Snider, A. D. (2005). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Pearson.

Neira, S. (2013). Representaciones, lenguaje, conversión, símbolos, semiótica, narrativas simbólicas... ¿qué tienen que ver con la comprensión de las matemáticas? Revista Científica (Edición especial), 378–382.

Manghi, D. (2010). Recursos semióticos del profesor de matemática: funciones complementarias del habla y los gestos para la alfabetización científica escolar. Estudios Pedagógicos, 36 (2), 99–115.

Martínez, B. C. (2012). *Estadística y muestreo*. Colombia: Ecoe.

Martínez, M. M. L., Vivaldo, L. J., Navarro, Padilha M. G., Gonzales, F. M. V., y Jerónimo, M. J. A. (1998). Análisis multirreferencial del fenómeno de la reprobación en estudiantes universitarios mexicanos. *Psicologia Escolar E Educaciona*l, 2(2), 161–174.

Palarea, M. M. y Socas R. M. M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del álgebra. *Revista Suma*, 16, 91–98.

Palarea, M. M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números*, 40, 3–28.

Pecharromán, G. C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Depósito Digital de Documentos de la UAB*, 3, 121–134.

Puga, P. L. A., Rodríguez, O. J. M. y Toledo, D. A. M. (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, 20, 197-220.

Ritchey, F. J. (2002). Estadística para las ciencias sociales. *El potencial de la imaginación estadística*. México: McGraw- Hill.

Salinas-hernández, U. A., y Trouche, L. (2018). Uso de gestos - como recurso- mediador- porun profesor de bachillerato para enfrentar un desafío didáctico no previsto por él. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (54), 6–24.

Sánchez, J. y Escotto, A. (2013). *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: Factores neuropsicológicos y socioepistemológicos*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2014). *Enseñanza de la lectura*. México: Trillas.

Talizina, N. F. (2000). *Manual de psicología pedagógica*. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Urra, E., Muñoz, A., y Peña, J. (2013). El análisis del discurso como perspectiva metodológica para investigadores de salud. *Enfermería Universitaria*, 10(2), 50–57.

Urrutia E., M., Barrios A., S., Gutiérrez N., M., y Mayorga C., M. (2015). Métodos óptimos para determinar validez de contenido. *Revista Cubana de Educación Médica Superior*, 28(3), 547–558.

Velásquez, J., Escotto, A., Sánchez, J. y Baltazar, A. (2016). Recursos semióticos en la estadística: Alternancias de lenguaje en el discurso docente, estudio de caso. *Revista Electrónica de Psicología de la FES Zaragoza-UNAM*, 6(11), 33-57.

Wonnacott, T. H. & Wonnacott, R. J. (1997). I*ntroducción a la estadística*. México: Limusa.

Apéndice A.

Cuestionario de evaluación de Recursos Semióticos

Introducción

Éste es un cuestionario para evaluar de los recursos semióticos utilizados en las presentaciones, la intención es obtener tu opinión acerca del tipo de recursos semióticos (colores, figuras, gráficas, flechas, movimiento, voz, etc.) utilizados para explicar cada tema de estadística.

Instrucciones: Lee cuidadosamente cada pregunta, responde lo que se te pide y marca la opción de respuesta que más se acomode a tu experiencia durante las presentaciones de Power Point.

Edad: Sexo: Ocupación:

Última calificación en estadística o matemáticas: Fecha:

¿Conocías los temas antes de ver las presentaciones? (SI) (NO)

Recursos semióticos para la comprensión de las medidas de tendencia central: moda, mediana y media

	Totalmente en desacuerdo	**Desacuerdo**	**Ni de acuerdo, ni en desacuerdo**	**De acuerdo**	**Totalmente de acuerdo**
Mi comprensión de las clases de estadística o matemáticas es buena	1	2	3	4	5
El resultado en mi última evaluación en estadística o matemáticas fue bueno	1	2	3	4	5
Las diapositivas son comprensibles	1	2	3	4	5
La secuencia de las diapositivas es comprensible	1	2	3	4	5
El procedimiento de las fórmulas es comprensible	1	2	3	4	5
El procedimiento desglosa claramente las fórmulas	1	2	3	4	5
Los ejemplos son útiles para entender las fórmulas	1	2	3	4	5
Entendí todos los temas a pesar de no conocerlos	1	2	3	4	5
Las definiciones son comprensibles	1	2	3	4	5
Las explicaciones ayudan a entender la información	1	2	3	4	5

	Totalmente en desacuerdo	Desacuerdo	Ni de acuerdo, ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
El apoyo visual permite entender las fórmulas a pesar de no conocerlas	1	2	3	4	5
Las imágenes ilustran suficiente al texto	1	2	3	4	5
Las imágenes ayudan al mejor entendimiento de la fórmula	1	2	3	4	5
Las figuras describen las fórmulas	1	2	3	4	5
Los colores ayudan a la comprensión de la fórmula	1	2	3	4	5
El movimiento ayuda a la comprensión de la fórmula	1	2	3	4	5
El audio ayuda a la comprensión de la fórmula	1	2	3	4	5
Las tablas ayudan a entender los temas	1	2	3	4	5
Las flechas asocian bien el texto con las imágenes	1	2	3	4	5
Después de ver las presentaciones de Power Point puedo dar ejemplos	1	2	3	4	5

Apéndice B.
Ejercicios de evaluación.

Estas son el número de horas de uso de celular durante el día de una muestra de personas…

1, 1, 2, 2, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 11, 12

¿Cuál es la **moda, mediana y media** en este conjunto de datos?

Moda =

Mediana =

Media =

Capítulo 3

Alternancias semióticas con multimedia en la enseñanza de la estadística

Rango, Varianza, Desviación Estándar, Correlación de Pearson y Prueba t de Student

Mauricio Alfredo Ramírez Rodríguez
Raymundo Serrano Reyes

Resumen

Las habilidades previas para el aprendizaje matemático se generan en los primeros años de vida (Cardoso y Cerecedo, 2008), se van afianzando en los primeros años de la educación formal, pero la enseñanza de éstas en todos los niveles educativos se enfrenta a múltiples dificultades de carácter pedagógico, psicológico e incluso neuropsicológico, entre otras. En este contexto, distintos estudios revelan una situación preocupante en el rendimiento en matemáticas en estudiantes mexicanos desde la educación básica, mostrando altos índices de reprobación y deserción escolar, temas que son de gran interés social, ya que afectan la eficiencia terminal en el nivel de educación superior (OCDE, 2016; INEE, 2018). Las matemáticas forman parte elemental en la formación profesional de casi todas las disciplinas. En el caso de la psicología, la estadística es de suma importancia ya que le permite al psicólogo tomar decisiones en la investigación a partir del análisis estadístico de datos (González, Escotto, Sánchez y Baltazar, 2016). La presente investigación buscó conocer el impacto didáctico de los diversos *recursos semióticos* no formales presentes en los materiales multimedia que, conforman un curso introductorio de estadística con los temas de: Rango, Varianza, Desviación estándar, Correlación de Pearson y Prueba t de Student, en estudiantes universitarios y personas sin actividad académica vigente al momento del estudio. Es una investigación empírica que utilizó un muestreo no probabilístico intencional para seleccionar a 65 estudiantes de la Carrera de Psicología de la FES Zaragoza-UNAM y 20 personas sin actividad académica actual. Se utilizaron alternancias semióticas apoyadas en multimedia con cinco presentaciones en PowerPoint, donde se desarrollan los

temas de: Rango, Varianza, Desviación estándar, Correlación de Pearson y Prueba t de Student. Tras haber interactuado con el material, se aplicó un cuestionario de evaluación de recursos semióticos no formales empleados. Asimismo, se realizaron entrevistas y grupos focales, con el fin de profundizar en la experiencia de los participantes. El análisis cualitativo de dichos datos se realizó mediante categorías de: Definición del concepto, Ejemplificación del concepto y Valoración del material. La información recopilada mostró que el material diseñado tuvo un efecto predominantemente favorable en el aprendizaje de los conceptos y procedimientos estadísticos seleccionados. Se concluyó que el uso de *recursos semióticos no formales* en los recursos multimedia elaborados sirvió como una red de apoyos y andamiajes que facilitaron la comprensión del lenguaje matemático formal, *recursos semióticos formales.*

LAS MATEMÁTICAS EN MÉXICO

Rendimiento en matemáticas de estudiantes mexicanos

Los resultados de la prueba PLANEA, aplicada por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en México, muestran una continuidad en los déficits de los alumnos en su capacidad para enfrentarse a problemas matemáticos (INEE, 2018). En la evaluación de 2018 realizada con niños de sexto de primaria, el 59% se encuentra en el Nivel I, con un dominio insuficiente; el 18%, con un dominio básico; el 15%, con dominio satisfactorio; y solo el 8% con dominio sobresaliente.

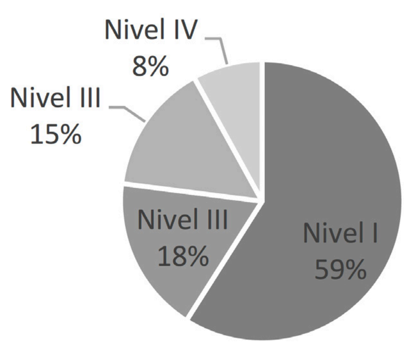


Figura 1. Resultados PLANEA 2018 – 6to de primaria.

A nivel secundaria, los resultados de 2017 en niños de 3°, presentan proporciones similares. En el nivel I se ubican 64.5% de los participantes; en el nivel II, 21.7%; en el nivel III, 8.6%, y finalmente en el nivel IV sólo el 5.1%

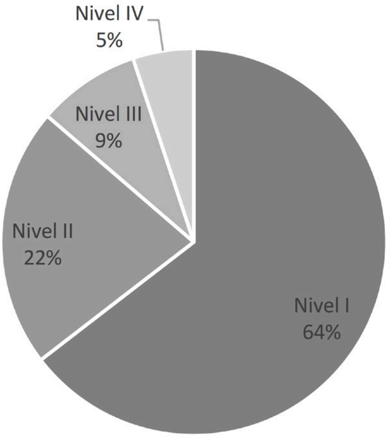


Figura 2. Resultados PLANEA 2017 – 3ro de secundaria.

Finalmente, a nivel bachillerato, la situación tampoco difiere sustancialmente de los niveles anteriores. El 66.2% se encuentra en el nivel I; 23.3% en el nivel II; 8% en el nivel III; y solo 2.5% en el último nivel.

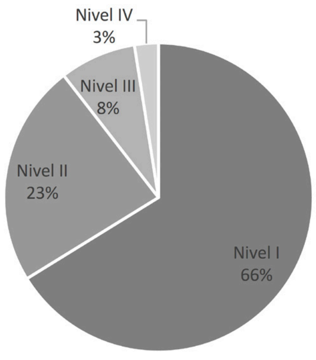


Figura 3. Resultados PLANEA 2017 – Media superior.

Ante estos datos, es clara la necesidad de indagar en el problema de la enseñanza de las matemáticas, pues es de esperar que el rendimiento a nivel superior presente deficiencias similares a la de los niveles previos.

Principios básicos

La investigación psicológica y matemática (Ávila, Ibarra y Grijalva, 2010; Escotto y Sánchez, 2014) ha encontrado que el aprendizaje en general, y especialmente en las matemáticas, ocurre a través de un proceso que recorre etapas llevando al dominio del carácter abstracto de las matemáticas y las operaciones algorítmicas propias mediante la interiorización de los significados de los objetos matemáticos. Tales etapas, permiten la formación de imágenes mentales, esto es, la capacidad de hacer mentalmente y de manera reducida una acción objetiva. Al respecto, Escotto, Sánchez y Baltazar (2014) retoman el modelo de formación de imágenes mentales de Galperin, el cual se apoyó en la concepción teórica de Vygotski, cuyas tesis exponen que:

> En primer lugar, las funciones psicológicas superiores son primero interpsíquicas, quiere decir que son mediadas por otros, después son intrapsíquicas, significa que son generadas por el propio sujeto, es decir, que las funciones que primero son reguladas socialmente, posteriormente se interiorizan para ser autorreguladas por el sujeto mismo. La segunda tesis expone lo que se llama *zona de desarrollo próximo* (ZDP) la ZDP es propia del desarrollo psicológico y se refiere a la distancia que existe entre lo que el sujeto es capaz de realizar por sí solo y lo que puede llegar a hacer con ayuda de otro (Escotto, Sánchez y Baltazar,2014, pp. 5-6).

El modelo de formación de imágenes mentales recorre cuatro etapas:

1. **Base Orientadora de la Acción (BOA):** hace referencia al tipo de orientación conceptual que se le da a un sujeto o que genera el mismo sujeto, en torno al qué del nuevo aprendizaje. Lo anterior significa que al sujeto se le explica qué va a aprender, cuál es el objetivo y en qué condiciones lo hará. (*Ibid.*, p. 7)

2. **Formación del Aspecto Material de la Acción (FAMA):** hace referencia a que toda acción se expresa inicialmente de forma externa, material, y que esta forma es la condición para su asimilación, significa que el aprendizaje en esta

etapa pasa a operar con las cosas o su representación material. Cabe mencionar que Talizina (2000) divide esta etapa en dos: materializada que opera con las representaciones de los objetos, y material que opera directo con los objetos (Escotto, Sánchez y Baltazar, 2014, p. 7).

3. **Formación del Plano Verbal-Lingüístico (FPVL):** significa que la acción se describe verbalmente, se dice oralmente lo que hay que hacer antes de hacerlo, liberándose de la dependencia directa de los objetos. En esta etapa ocurren tres cambios importantes: a) no solo se describe detalladamente la acción, sino que implica una comunicación con otros, subordinándose la comprensión y el sentido que tenga la narración de la acción para otros, concienciándose verbalmente. La acción se realiza en el plano verbal; b) a partir de ello, el concepto se constituye en la base de la acción, el concepto regula la acción; c) a partir del dominio de esta fase, la forma verbal tiende a abreviarse y estereotiparse (*Ibid*., p. 8).

4. **Formación de la Acción Como Acto Mental (FAAM)**: es la interiorización, es decir, es la expresión mediante el lenguaje interno, en esta etapa el sujeto ya no se comunica con otros, sino con sigo mismo, significa que la tarea de comunicación se sustituye por la tarea de reflexión. (*Ibid*., p. 8).

Se subraya que con base en estas etapas es que puede planearse la enseñanza de nuevos conceptos matemáticos.

Debido al carácter abstracto de estos conceptos es imposible imaginar un concepto matemático de manera concreta: cualquier representación constituye una imagen de algún objeto concreto; dicha imagen necesariamente tendrá algunas características, por lo que la posterior asimilación de los conceptos matemáticos a través de etapas se convierte en una imagen abstracta y generalizada, es decir, estos no son transmitidos en forma acabada, sino que los alumnos los obtienen a través de la interacción con los objetos relacionados con el concepto. El concepto matemático no puede ser una imagen concreta sensorial, sino que, es una imagen abstracta que funciona dentro del pensamiento en estrecha relación con el lenguaje (Talizina 2000). En relación con lo anterior, la autora propone que, durante la enseñanza de las matemáticas, ésta debe dirigirse a la formación de las imágenes generalizadas abstractas, las cuales reflejan diferentes clases de objetos matemáticos.

Lo anterior significa que se puede mejorar sustancialmente la enseñanza de las matemáticas si se toman en cuenta las etapas del proceso de aprendizaje y la estructura psicológica subyacente al cálculo. La complejidad de las matemáticas y particularmente la estadística han llevado a realizar investigaciones que han centrado su atención en los factores que facilitan el aprendizaje de las matemáticas, pero también de aquellos aspectos que lo dificultan (Ortiz, 2002; Castañeda y Álvarez, 2004; Flores, Ponce y Castillo, 2011; Juárez y Robles, 2013).

Castaño (2008) menciona que la dificultad proviene del desconocimiento de la estructura psicológica que subyace a los procesos de comprensión de las matemáticas. En la escuela, ante la falta de conocimiento sobre el procesamiento cognitivo que realizan los alumnos cuando tienen que lidiar con los signos y conceptos matemáticos, es escaso el apoyo que puede proporcionarles. Por otro lado, Duval (citado en Aragón, Castro, Gómez y Gonzáles, 2009) y Drouhard y Panizza (2009) consideran que la dificultad no está en los conceptos matemáticos sino en su representación, ya que es a través de ésta donde se tiene acceso a los objetos matemáticos, llevándolo a un problema semiótico que deben enfrentar tanto docentes como alumnos.

En relación con lo anterior, Salmina (2017) menciona la necesidad de introducir desde tempranos niveles escolares programas dirigidos al desarrollo de las habilidades matemáticas básicas, mismas que son necesarias para la asimilación de cualquier concepto matemático. Para ello, propone un programa propedéutico previo al curso de matemáticas básicas ya que, desde el inicio mismo de este programa, requiere del uso de signos y símbolos. Lo anterior, permite pasar gradualmente a los signos y símbolos matemáticos usados por la sociedad. Al respecto de la actividad semiótica, ella refiere que es necesario dirigir la enseñanza hacia la creación de signos y símbolos para expresar el contenido matemático (Objetos, fenómenos, características, relaciones, acciones, transformaciones) de un plano a otro.

Semiótica y matemáticas

La semiótica es la ciencia que estudia al signo en general; estos pueden formar lenguajes o sistemas. Por signo se entiende todo aquello que representa a otra cosa (Beuchot, 2004), más específicamente, un signo es cualquier *"ente material que está en lugar de algo para alguien, o que alguien usa para que esté en lugar de algo para alguien"* (Escotto, en la introducción de este texto, p. 24). En matemáticas existen diversas formas de representación semiótica, por lo que el papel más adecuado de las representaciones numérica, algebraica y gráfica de las nociones y procedimientos matemáticos se vuelve un asunto de investigación, a la vez que el lenguaje con el que se comunica (Duval, 2006). En los humanos, el entendimiento y conocimiento del mundo que nos rodea no solo es sensomotriz, sino mediado por signos transmitidos por la cultura y construidos en las interacciones sociales; se basa en la atribución de significado de aquello que percibimos, sentimos y actuamos, por ejemplo, la percepción visual implica una operación semiótica mediante la cual adjudicamos a algo algún tipo de sentido, orden o relación entre las partes del objeto percibido (Caivano, 2005; Fernández y García, 2012).

En ese orden de ideas, el lenguaje permite otorgarle significado a la realidad y, por consiguiente, conocerla de otra forma. Por lo anterior, el lenguaje se convierte en el recurso semiótico de comunicación natural, ya que, a través de él, la realidad puede ser analizada, interpretada y categorizada. Sin dejar de lado la función reguladora del lenguaje que, permite controlar el comportamiento tanto propio como ajeno, es decir, representar lo que se quiere y anticipar la acción antes de ejecutarla, de manera cada vez más compleja y diversa (Viera, 2009).

El lenguaje hablado y escrito mediante un idioma o lengua permite transmitir, comunicar y generar significados de manera intencional en el aula, dado que el lenguaje es la capacidad de significar, es decir, de usar, modificar y crear signos y significados (Escotto, 2007). El lenguaje, cuando se expresa como un sistema de signos socio-históricamente determinado, deviene en lengua. Las lenguas naturales, o idiomas, son el medio preferido para comunicar las ideas, ya que el estudiante construye su conocimiento por medio de toda la información que recibe (Coll y Onrubia, 2001; Godino, 2004; Villa, 2007; Zapata, 2011).

Lengua o idioma de uso cotidiano es el medio que se utiliza para dar a conocer otro tipo de lengua o sistema de signos: las matemáticas. Algunos autores no distinguen lengua de lenguaje, por lo que suelen utilizar el término “lenguaje matemático”. Hernando (2009) menciona que las matemáticas son un conjunto de símbolos semióticos que representan conceptos y que pueden ser comunicados con el lenguaje natural, es por eso que las matemáticas no utilizan únicamente un lenguaje propio, llamado lenguaje matemático (Vianey, 2012) concebido como el lenguaje universal. En relación con lo anterior, Villa (2007) denomina modelo matemático al símbolo o conjunto de símbolos que representan un concepto matemático que pretende explicar y resolver un fenómeno de la realidad, un ejemplo es la estadística, que para Ritchey (2012). Las matemáticas implican adquirir una visión de la realidad basada en el análisis cuidadoso de los hechos en cuya aplicación y análisis de objetos matemáticos, existe un proceso de representación semiótica o semiosis, ya que el despliegue de signos algebraicos es abstracto (Ariza, 2007).

Duval (2004) define semiosis como la adquisición o la generación de representaciones semióticas, del mismo modo que Vergel (2014) y Vygotski (1931/2000), menciona que las representaciones semióticas no cumplen únicamente una función de influencia y expresión, para con otro, lo cual permite un medio de relación social, sino también cumplen una función autorreferencial, es decir, para sí mismo. La función de objetivación puede ser cumplida independientemente de toda función de expresión. La representación en la actividad matemática es de naturaleza semiótica, tomar en cuenta la forma en que se lleva acabo implica tomar en cuenta los requisitos cognitivos que la involucran en su enseñanza.

En la enseñanza de la estadística, el lenguaje natural, basado en palabras cotidianas, considerado sencillo y común resulta indispensable para la enseñanza de los aspectos formales en matemáticas (Álvarez, 2012), es importante aclarar que, si bien el lenguaje natural oral y escrito es el recurso principal, los profesores de matemáticas pueden utilizar otros recursos semióticos no formales como las tablas, mapas, imágenes, figuras, gráficos, etc. cuyo potencial pedagógico se amplía considerablemente a través de los denominados medios semióticos como el uso del pizarrón y sobre todo con el uso de medios tecnológicos (Manghi, 2010).

En este sentido, la inclusión de imágenes apoyando palabras facilitan el aprendizaje e incluso lo mejoran y contribuyen a la construcción colaborativa del conocimiento (Mayer, 2001; Fanaro, Otero y Greca, 2005 y Kress, 2010). Los mensajes que combinan lo verbal con otro tipo de recursos como imágenes o dibujos, funcionando como complemento uno del otro, modifica la configuración cerebral garantizando el recuerdo consolidado de la información, esto es posible en al medio tecnológico que proporciona un alto grado de interactividad gracias a los aspectos de multimedialidad e hipertextualidad. La página web es un ejemplo de lo anterior, de la variabilidad, flexibilidad y fluidez con la que interaccionan los diferentes recursos textuales, visuales, sonoros y, con ello, las diversas actividades que se pueden realizar, de las cuales es el usuario quien tiene control, lo anterior constituye entonces una interfaz dinámica entre el contenido y el usuario o estudiante (Álvarez, 2012). En esta línea de ideas, estos medios virtuales o digitales que intervienen y facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje, son conocidos como TIC (Bautista, Martínez y Hiracheta, 2014).

TIC aplicadas a la enseñanza

Las TIC (Tecnologías de la Información y Comunicación) son aquellas herramientas que basadas en el uso del computador permiten adquirir, crear, procesar, almacenar, distribuir y acceder a información digitalizada (Gros, 2000). Es decir, son técnicas para administrar información, especialmente computadoras y programas que nos van a permitir desarrollar nuevas experiencias formativas, expresivas y educativas (Domínguez, 2017). Las TIC mejoran considerablemente la educación en general y específicamente la enseñanza de las matemáticas, generando un impacto didáctico positivo, entendido como el interés y la atención captada de los estudiantes, así como la mejora de la motivación y comprensión de los contenidos y, por ende, facilita el aprendizaje matemático: generación de significados y la formación de conceptos, lo anterior permite desarrollar habilidades cognitivas y nuevas formas de pensamiento (Moreno, Hegedus y Kaput, citados en Aragón y colaboradores, 2009; Vaquero, citado en Castellano, Jiménez y Urosa, 2012; Bautista y colaboradores, 2014).

En relación con lo anterior, Briseño (2015) afirma que: "con el uso de tecnologías el estudiante adquiere recursos de apoyo, estos recursos permiten al estudiante establecer puentes entre la representación del objeto matemático y sus propiedades" (p.11). Aragón y colaboradores (2009) enfatizan que la utilización de ambientes tecnológicos en la implementación de objetos de aprendizaje como elementos didácticos mejoran la actitud de los alumnos ante el aprendizaje de las matemáticas, dando como resultado la construcción, comprensión y aplicación del conocimiento, además de propiciar aprendizajes significativos. Lim (2007) menciona que el uso de tecnologías favorece de esta manera el desarrollo de habilidades de orden superior tales como el diseño, la toma de decisiones y la resolución de problemas que requieren análisis, evaluación, relación entre las partes, imaginación y síntesis en un todo integrado, habilidades y competencias que requiere desarrollar el psicólogo. Respecto a lo anterior, González y colaboradores (2016) mencionan que los docentes deben complementar la instrucción puramente verbal con el uso de diversos recursos semióticos a través de medios tecnológicos que, permitan recorrer adecuadamente las etapas de aprendizaje. Estos recursos, al representar un medio de formación de conceptos y aprendizajes significativos, se convierten en una necesidad para la educación en general y específicamente para las matemáticas, ya que permiten el desarrollo de habilidades específicas de la disciplina como la aplicación de conceptos, análisis e interpretación de datos que hacen posible resolver problemas (Ávila, Ibarra y Grijalva, 2010).

Algunas investigaciones (Castellano y colaboradores, 2012) muestran que la implementación de las TIC ya está generando cambios en la labor docente en otros países, sin embargo, Castro y Pardo (2005) consideran que el uso de medios tecnológicos no son suficientes en sí mismos si el entorno de aprendizaje no es interactivo, es necesario crear un ambiente dinámico, que los alumnos y profesores interactúen con los contenidos a través de la tecnología para favorecer la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Del mismo modo, Beiza (2015) realizó un estudio sobre los diferentes escenarios generados por estudiantes y los factores que influyen en la comprensión del lenguaje de las matemáticas, encontró que las competencias del profesor también son un factor que impactan en el aprendizaje matemático de los alumnos. Pero, como mencionan Coll y Onrubia (2001), para que este ambiente interactivo sea efectivo es de suma importancia el manejo del lenguaje natural como mecanismo semiótico rector, pues las diferentes formas de usarlo aunado con el uso de tecnología multimedia y los diferentes recursos que éstas involucran, permitirá llegar a la coincidencia casi completa sobre como representar los conceptos matemáticos de los que se esté hablando.

De lo anterior se puede concluir que el éxito de una correcta construcción de conocimientos y significados reside en asumir la complementariedad de los mecanismos psicológicos subyacentes al cálculo con el uso del dinamismo, la creatividad y con ellos los recursos semióticos no formales como formas de representación del lenguaje formal matemático (Domínguez, 2010). Sin embargo, si bien las matemáticas utilizan recursos semióticos formales (signos, operaciones, fórmulas, etc.) la lengua cotidiana permite una mejor comprensión de temas complejos (González y colaboradores, 2016). Al respecto, Salmina (2017) menciona que la asimilación de conceptos matemáticos requiere de un programa que use diferentes recursos, signos y símbolos, ya que estos permiten formar previamente la actividad de codificación –decodificación, para pasar gradualmente a los signos formales adoptados por la sociedad, pero si además se utilizan otros recursos semióticos como uso de tecnologías, imágenes, dibujos, tablas, el impacto sobre el aprendizaje significativo en matemáticas y, particularmente en estadística, es mayor.

Sin embargo, el uso de la tecnología en la educación no se limita a la actualidad, sino que se ha utilizado a lo largo de la historia en la educación. La cuestión hoy en día es cómo se inserta el uso de la tecnología en la era digital para que responda a la concepción de enseñar y aprender de manera no tradicional (Rodea, 2019).

Negroponte, Resnick y Cassell (2003) esquematizan las posibles interacciones que se pueden establecer con ellas:

1. **Exploración directa:** cuando los estudiantes usan las tecnologías digitales para crear y compartir ideas a medida que descubren sus propias voces.

2. **Expresión directa:** cuando los aprendices usan las tecnologías digitales para ampliar su capacidad para descubrir el mundo que les rodea.

3. **Experiencia directa:** cuando se utilizan para cruzar fronteras geográficas o culturales y explorar el mundo.

4. **Multiculturalidad:** cuando son utilizadas para desarrollar formas de trabajo y aprender de otras tradiciones culturales.

5. **Multilingüe:** cuando aprenden que con ellas es posible superar barreras del lenguaje.

6. **Multimodal:** utilizan múltiples formas de interacción, visual, verbal, gestual y otras formas no verbales de comunicación.

Los autores consideran que, cuando las tecnologías digitales se utilizan de manera efectiva, la educación se transforma, cambiando el cómo aprenden, lo que aprenden y con quién aprenden.

En este contexto, la noción de mediación (Wertsch, 1998) permite comprender las herramientas que proveen las tecnologías digitales: las TIC impactan en el aprendizaje de los estudiantes al ofrecerles soportes que les ayudan a dominar tareas o conceptos que inicialmente no podían obtener de forma independiente (Wood, Bruner & Ross, 1976); de tal manera que cuando los alumnos interactúan con las tecnologías en el ámbito material, pueden formar ideas mediante acciones que son representadas por iconos o sonidos. La tecnología, entonces, además de proveer soportes, también transforma el aprendizaje, colocando a los estudiantes en un proceso activo (Rodea, 2019).

Sin embargo, a pesar de su potencial en el ámbito educativo, un creciente número de investigaciones señalan la limitada aplicación de la tecnología en las aulas (Rees, 2001), posiblemente porque la forma de interactuar con ella es incompatible con la lógica organizativa de los sistemas educativos tradicionales (Cuban, citado en Flores 2015).

Recursos semióticos aplicados

Los recursos semióticos son diversos signos (grafismos, gestos, objetos, dibujos, gráficas, colores, palabras, etc.) que se utilizan para representar algo. Basados en la clasificación González y colaboradores (2016) para la diversidad de recursos semióticos, proponemos la siguiente clasificación:

1. **Recursos semióticos formales:** Incluye números, fórmulas y operaciones matemáticas o lógicas que (entre otros elementos) conforman el lenguaje matemático.

2. **Recursos semióticos no formales:**

   a. ***Naturales.*** signos basados en el lenguaje natural, utilizados de manera cotidiana en la comunicación, tales como ejemplos, palabras y frases de la vida diaria.

   b. ***Visuales.*** acompañan los significados del discurso verbal, como color, tablas, gráficas, figuras, ilustraciones, esquemas o movimientos para representar o explicitar los recursos formales en la enseñanza

Estos recursos semióticos fueron utilizados con tecnología multimedia para el curso introductorio sobre el rango, la varianza, la desviación estándar, la correlación de Pearson y la prueba t de Student. La exposición de cada tema (definición y ejemplificación) se realizó empleando profusamente diversos recursos semióticos no formales de manera simultánea, en un despliegue ordenado que acompañara, ilustrara y explicitara el contenido de cada recurso semiótico formal que, como se ha dicho, es inherente a las matemáticas; lo anterior con el fin de favorecer el desarrollo y comprensión de su significado. La implementación de herramientas dinámicas como las TIC permite extraer los conceptos o significados de sus representaciones, generando el entendimiento de estos y, por lo tanto, favorecer al desarrollo del pensamiento analítico (Haciomeroglu, citado en Briseño, 2015).

A continuación, se ejemplifican brevemente los recursos semióticos usados en la exposición de los temas mencionados.

Recursos semióticos formales

Números. Se utilizaron para representar el conjunto de datos que fueron objeto de análisis en los ejemplos propuestos. En la siguiente figura se observa una serie de seis datos, dentro de una tabla, que representa la estatura de un grupo de personas.

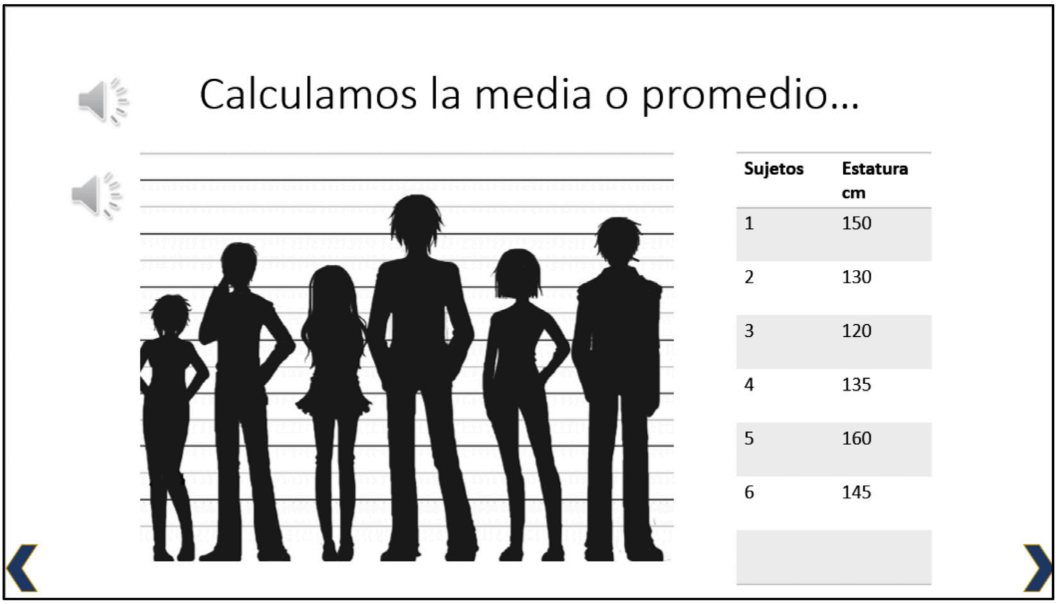


Figura 4. Recursos semióticos formales: números.

Fórmulas. Establecen relaciones entre los elementos que componen un objeto matemático, jerarquizando las operaciones matemáticas necesarias para obtener un resultado, mediante un procedimiento específico.

En la siguiente figura, se muestra la fórmula de varianza que se presenta en el Power Point:

$$V = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N}$$

Figura 5. Recursos semióticos formales: fórmula de varianza.

Operaciones. En los temas desarrollados se emplearon las operaciones aritméticas básicas: suma, resta, división y multiplicación. En la siguiente figura se observa una operación divisoria.

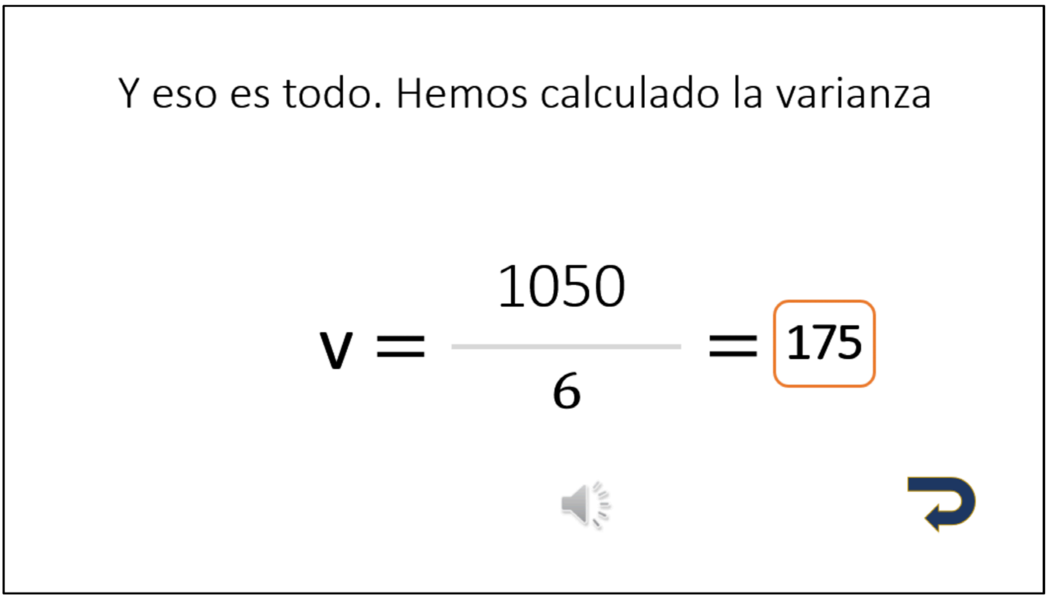


Figura 6. Recursos semióticos formales: operaciones aritméticas.

Recursos semióticos no formales

Naturales

Describe los contenidos de cada diapositiva y provee instrucciones al usuario, guiando su atención a determinado aspecto. Al igual que el color, este recurso está presente en todo el material. Se encuentra en forma de audio y texto. En la siguiente figura, el título que encabeza la diapositiva está redactado en lenguaje natural.

Figura 7. Planteamiento de un problema.

a. VISUALES.

Figuras. Líneas y flechas relacionan elementos de naturaleza similar: texto-texto, o diferente: figura-texto, como se observa en la Figura 8. Rectángulos y círculos señalan elementos (Figura 9).

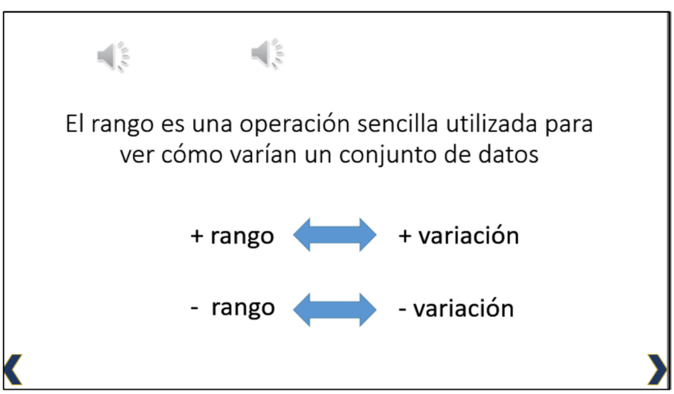


Figura 8. Recursos semióticos no formales: flechas.

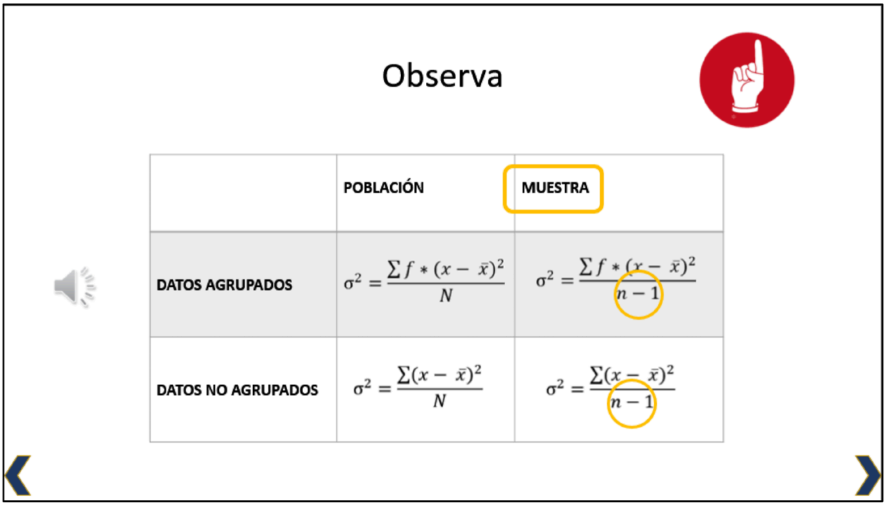


Figura 9. Relación texto-texto mediante flechas.

Ilustraciones. Transfieren definiciones textuales o variables en imágenes pertinentes, evocando referentes concretos (Figura 10 y 11)

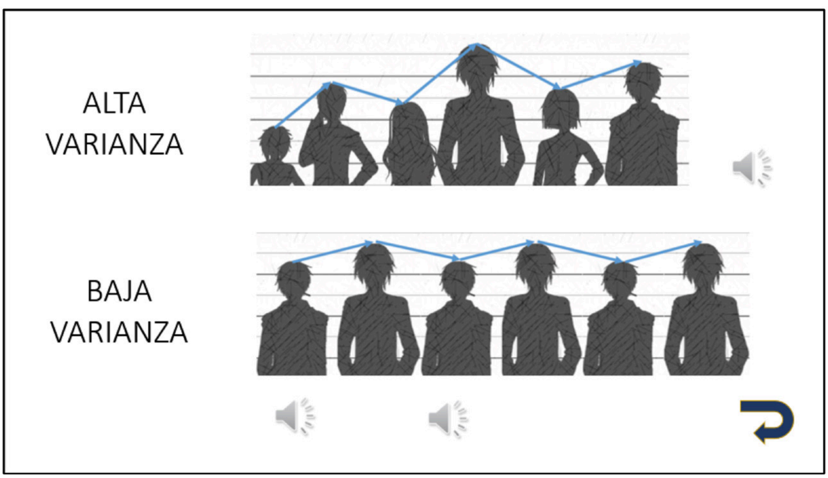


Figura 10. Ilustración de dos grupos con diferente dispersión de datos.

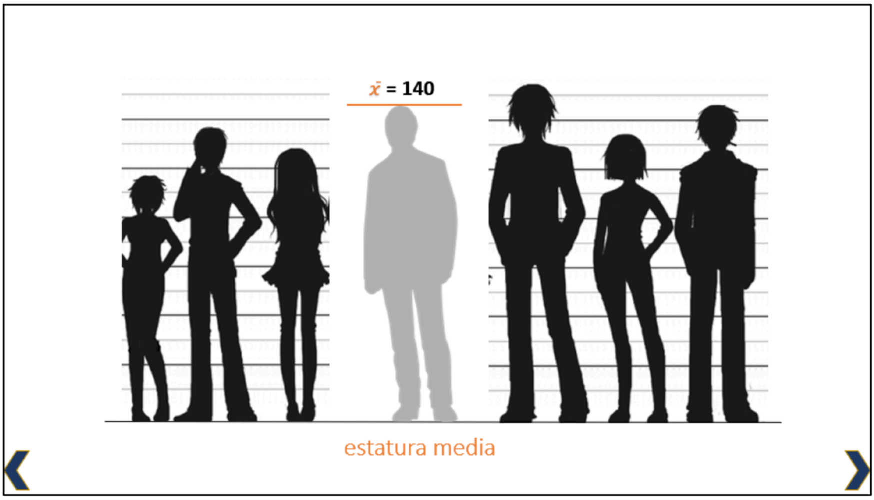


Figura 11. Ilustración de la estatura media en el ejemplo de varianza.

Tablas. Organizan los datos y los resultados de las operaciones de cada procedimiento, al igual que fórmulas. En la Figura 12 y 13 se muestra su uso en el tema de varianza.

…de la columna al cuadrado

Sujetos	Estatura	Desviación $(x-\bar{x})$	Desviación al cuadrado $(x-\bar{x})^2$
1	150	10	100
2	130	-10	100
3	120	-20	400
4	130	-5	25
5	160	20	400
6	140	5	25
		Sumatoria $\sum =$	$\boxed{1050}$

Figura 12. Organización de resultados y operaciones mediante una tabla en el ejemplo de varianza.

Por lo demás, en esencia, tanto el procedimiento como la interpretación de los resultados son iguales al ejemplo que aquí hemos explicado.

	POBLACIÓN	MUESTRA
DATOS AGRUPADOS	$\sigma^2 = \frac{\sum f * (x - \bar{x})^2}{N}$	$\sigma^2 = \frac{\sum f * (x - \bar{x})^2}{n-1}$
DATOS NO AGRUPADOS	$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N}$	$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}$

Figura 13. Organización tipológica de fórmulas de varianza mediante una tabla.

Movimiento. Este recurso es posible por la relación que se establece entre las diapositivas anterior y posterior a la visualizada. Observe la relación entre la figura 14 y 15, a continuación. Permite aclarar el origen de los valores sobre los que se realizará una operación.

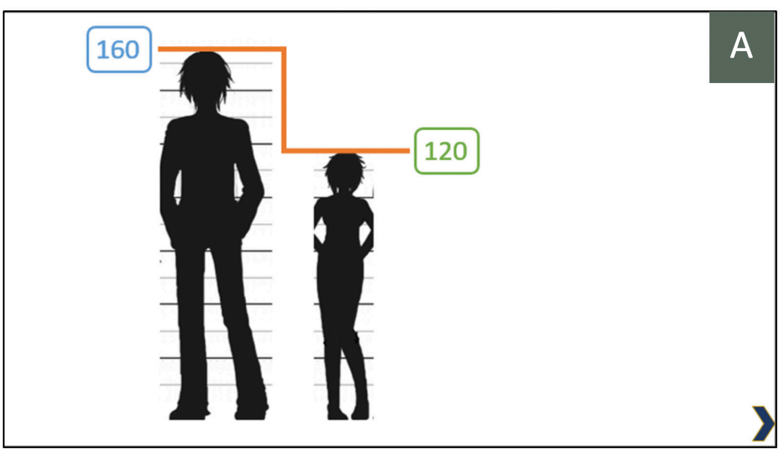


Figura 14. Relación entre diapositivas para expresar el rango de mayor a menor estatura a través del movimiento.

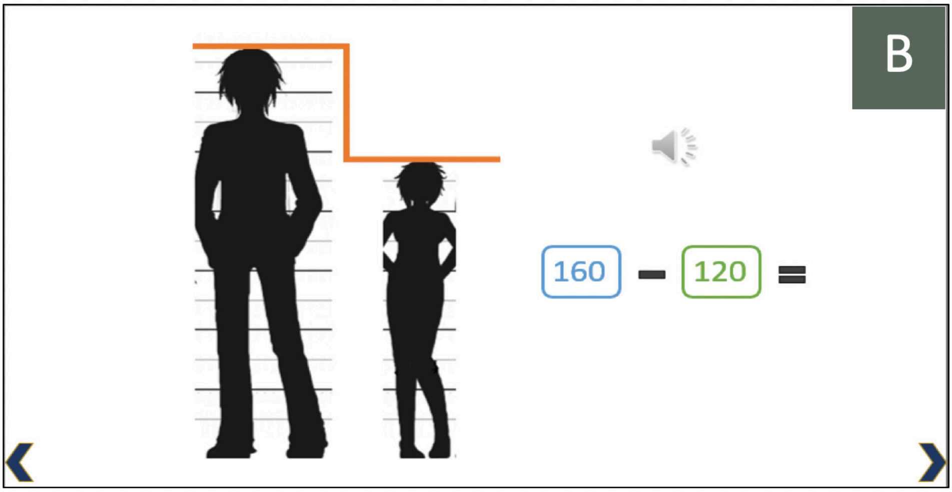


Figura 15. El efecto obtenido entre la diapositiva A y B consiste en identificar el origen de los datos sobre los que se realizan las operaciones.

Dentro de esta categoría, la conjunción entre la variación del color de elementos textuales y el movimiento de diapositivas genera un efecto focalizador al que llamamos señalización cromática (SC), que destaca el elemento clave con el que se trabajará en cada etapa del ejemplo, o en el análisis conceptual de la definición. La transición entre la figura 16 y 17 ejemplifica este efecto.

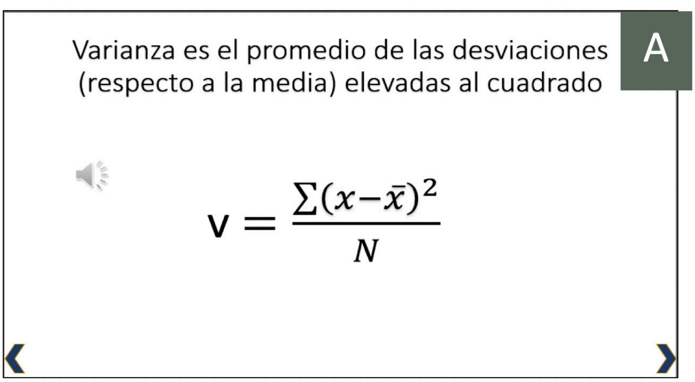


Figura 16. Señalización cromática: diapositiva A.

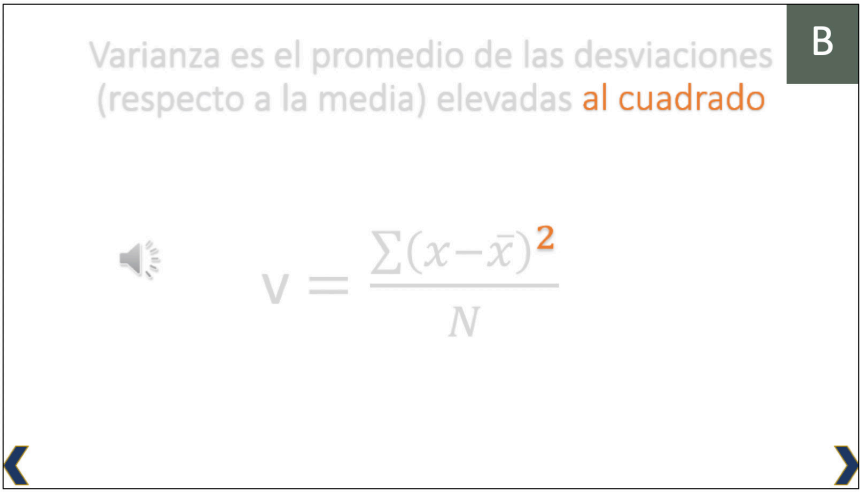


Figura 17. Señalización cromática, diapositiva B.

Color. Su función es puesta en acción desde la selección de la paleta de colores. En el material diseñado se optó por la simplicidad. El fondo de las diapositivas es blanco y el texto negro, en primer lugar, para emular un pizarrón, pero principalmente para potenciar el resto de los colores usados en los demás recursos semióticos. De este modo, se evitó saturar cada cuadro usando colores excesivos, que resaltaran lo suficiente de un fondo ya colorido. Por otra parte, la paleta de colores de los recursos semióticos es más amplia que la diapositiva base, pero restringido. Se procuró hacer un uso consistente de cada color; es decir, usar cada uno para resaltar determinado tipo de contenido: definiciones, operaciones, etc., a fin de establecer un código cromático simple y estable que el usuario pudiera identificar y aprender en el transcurso de su interacción con el material. Este recurso está presente en todo el material.

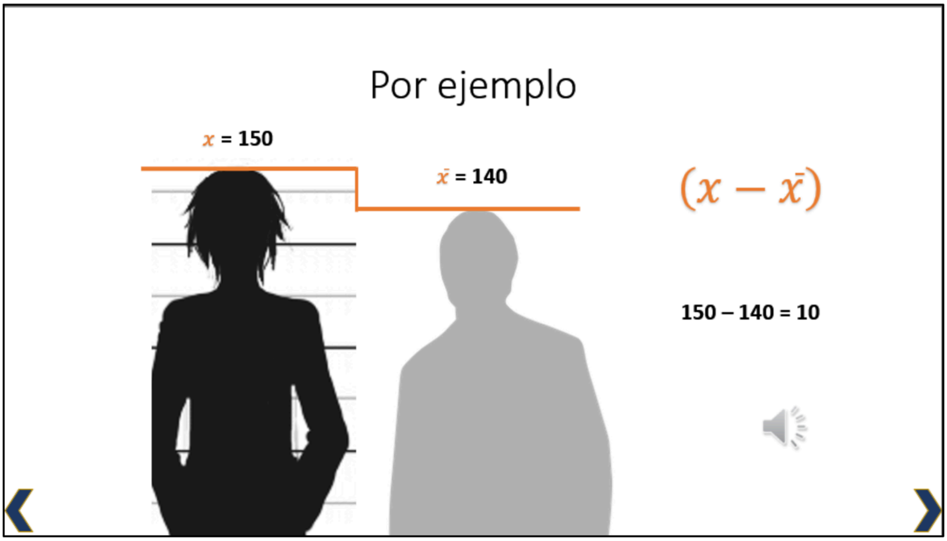


Figura 18. Uso de color en una operación de sustracción.

Figura 19. Uso de color para resaltar texto.

Como ha podido observarse en las figuras anteriores, los recursos semióticos no formales no se presentan aislados, sino que concurren en cada diapositiva: texto, figuras, ilustraciones, tablas, movimiento, audio, color; tal como se expone en la Figura 16.

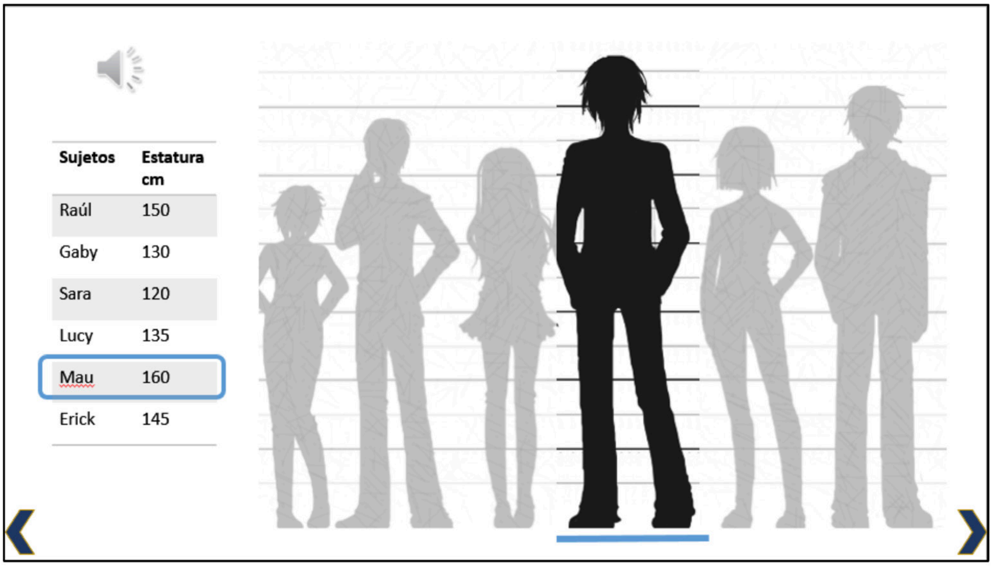


Figura 20. Concurrencia de diferentes recursos semióticos en la misma diapositiva.

MÉTODO

3.1 OBJETIVOS

La presente investigación buscó conocer el impacto didáctico de los diversos recursos semióticos no formales presentes en los materiales multimedia que, conforman un curso introductorio de estadística, con los temas de: Rango, Varianza, Desviación estándar, Correlación de Pearson y Prueba t de Student en:

- Estudiantes de nuevo ingreso a nivel licenciatura de la carrera de psicología
- Personas sin actividad académica o escolar vigente al momento del estudio.

3.2 MATERIAL

- Se utilizaron cinco archivos multimedia elaborados en el programa Microsoft Office con PowerPoint. Cada uno define, desarrolla, ejemplifica y expone la utilidad e importancia de los siguientes procedimientos estadísticos: Rango, Varianza, Desviación estándar, Correlación de Pearson y Prueba t de student; empleando para ello diferentes recursos semióticos no formales. Cada presentación tiene una duración de 20 minutos en promedio. Los materiales pueden ser consultados en el siguiente link:
- https://www.zaragoza.unam.mx/psicologia-herramientas-para-el-aprendizaje/

- Un cuestionario elaborado para evaluar los recursos semióticos utilizados en los archivos multimedia, que fue sometido a revisión por dos expertas en elaboración de instrumentos; consta de 19 ítems y mide lo siguiente: percepción que tienen los participantes de su desempeño en la materia de estadística, relación entre los diferentes recursos semióticos, poder explicativo de cada recurso semiótico y capacidad de los participantes de poner en práctica dicho contenido.

- Cámara de video Sony Handycam® CX405 con zoom óptico de 60x y videograbación en calidad HDR.

3.3 DISEÑO

Se utilizó un diseño descriptivo de metodología mixta (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). En la dimensión cuantitativa se utilizó un cuestionario de evaluación de los recursos semióticos (Apéndice 1). Asimismo, se realizó un análisis cualitativo de las participaciones recabadas mediante grupos de discusión y entrevistas, para explorar el valor didáctico del material multimedia presentados, la opinión y experiencia de aprendizaje de los participantes.

3.4 MUESTRA

Se emplearon dos grupos. El primero de ellos consistió en 65 alumnos de la Carrera de Psicología de primer semestre de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza de la UNAM con una edad promedio de 20 años. El segundo consistió en 21 personas sin actividad académica o escolar vigente en el momento del estudio. A su vez, ambos grupos se dividieron en secciones, a las que se les aplicaron diferentes temas del taller (Tabla 1).

Tabla 1
Muestra utilizada para el estudio

	Grupo 1 (Con actividad académica)	*Grupo 2 (Sin actividad académica)*	*Sección*
Rango y varianza	50	11	A
Desviación estándar, Correlación de Pearson y Prueba t de student	15	10	B

De este modo, en la sección A, conformado por 61 participantes (50 con actividad académica y 11 sin actividad académica vigente en el momento del estudio), se aplicaron los temas de Rango y Varianza, mientras que en la sección B, conformado por 25 participantes (15 con actividad académica y 10 sin esta) se aplicaron los temas de Desviación estándar, Correlación de Pearson y Prueba t de Student.

3.5 PROCEDIMIENTO

La investigación se llevó a cabo en las siguientes etapas:

1. Se presentaron los archivos PowerPoint a los participantes; cada estudiante tuvo una computadora para revisar el material.

2. Se aplicó el cuestionario de evaluación de recursos semióticos.

3. Se formó un grupo de discusión. Las discusiones fueron video grabadas y tuvieron una duración de 20 minutos aproximadamente.

4. Las video filmaciones fueron transcritas en su totalidad: palabras, ejemplos, definiciones y sus opiniones acerca del material que permitieron evaluar al mismo.

5. Se establecieron categorías de análisis con el objetivo de cuantificar a los participantes que cumplen con dichas categorías.

Definición del concepto: paráfrasis de las definiciones presentadas en cada uno de los temas de estadística presentados o elaboración de una definición propia a partir de la revisión de los temas en el material multimedia.

Ejemplificación del concepto: elaboración de un ejemplo de la vida cotidiana o cualquier contexto donde puede aplicarse el concepto.

Valoración del material: brindar opiniones acerca de su experiencia con el material y el impacto provocado en los participantes

6. Finalmente, la información obtenida se analizó cuantitativa y cualitativamente, en cuanto a su impacto didáctico en la experiencia de aprendizaje.

RESULTADOS GRUPO 1, SECCIÓN A, RANGO

En el tema de rango, el 100% de las definiciones y ejemplos propuestos por los participantes del grupo 1 fueron correctos. (Figura 21)

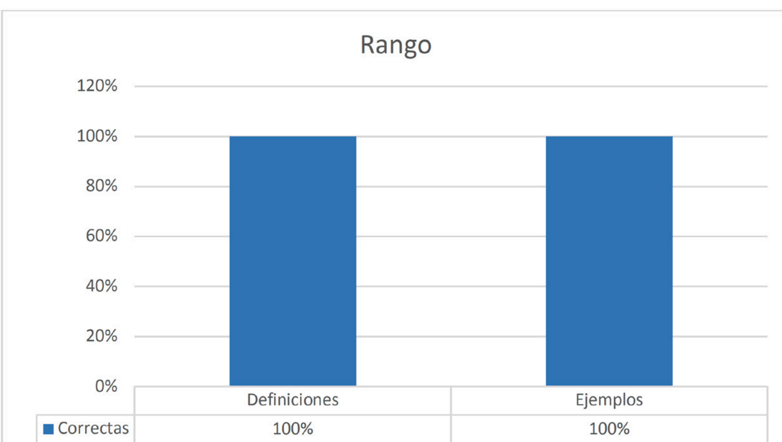


Figura 21. Porcentaje de respuestas correctas del tema de rango.

En la Tabla 2 se muestran las definiciones dadas por los participantes. Como se puede observar, éstas usan tres conceptos centrales para definirlo: diferencia, intervalo, resta. La noción de diferencia predomina ampliamente sobre las demás.

Tabla 2
Definiciones de Rango del Grupo 1

Definiciones		
Es el intervalo entre el valor máximo y mínimo	Es la diferencia de la cantidad más pequeña y las más grande un conjunto de datos	La diferencia que hay entre el mayor dato y el menor
En una práctica de memoria, para saber cuál fue la diferencia entre el que más recordó palabras y el que menos	La diferencia entre el número de convulsiones que experimentan pacientes con epilepsia, antes y después de una intervención	Diferencia que hay entre el valor de mayor cantidad y el de menor cantidad.
Intervalo entre el dato mínimo y máximo de una muestra o población.	Cuando en un conjunto de datos restamos el valor mayor y menor	Es el resultado que se da de un dato mayor menos el dato menor

Por otra parte, la mayoría de los ejemplos se enfocaron en resultados de pruebas psicológicas y edades en diferentes contextos, así como precios de productos y tiempos de traslado; sin embargo, se citan los ejemplos más heterogéneos en la Tabla 3.

Tabla 3
Ejemplos de Rango del Grupo 1

Ejemplos		
En la clase de experimental, cuando hacemos una investigación, pedimos las edades de nuestros participantes, sin embargo, estas varían y utilizando la operación de rango podríamos conocer que tanto lo hacen	La edad de participantes en alguna dinámica. Donde la edad más pequeña puede ser de un niño hasta la de un adulto mayor, y el rango serán todas las edades dentro de este intervalo.	Al aplicar un instrumento de aprendizaje a estudiantes de una escuela privada contra una escuela pública, ver si el rango es alto o por el contrario es muy bajo.
La diferencia entre el valor más alto y el valor más bajo en un conjunto de datos	Es la diferencia entre el dato más grande y más chico	En el laboratorio cuando trabajamos con ratas y las pesamos, para saber qué tanto varía su peso y así controlar mejor su alimento
Cuando voy al supermercado, saco el rango de los precios de las frutas, ya que hay muchas marcas y así decido cual me conviene más en cuanto a precio.	En el rango de tiempo que tardó en llegar a la escuela, sirve para saber con cuanto tiempo de anticipación debo salir de mi casa para llegar bien a la escuela	Digamos que trabajas en una carpintería, tu jefe te pide que le traigas tablas que midan más de 30 cm, pero no menos de 50 cm, entonces todas las tablas de madera que se encuentren dentro de este intervalo servirán.

VARIANZA

Respecto a las definiciones y ejemplos dados por los participantes, se encontró que el 90% refirió definiciones correctas, mientras que el 10% generó definiciones parciales. El 75% de los ejemplos propuestos fueron correctos, el 20% parciales y el 5% incorrectos. (Figura 22).

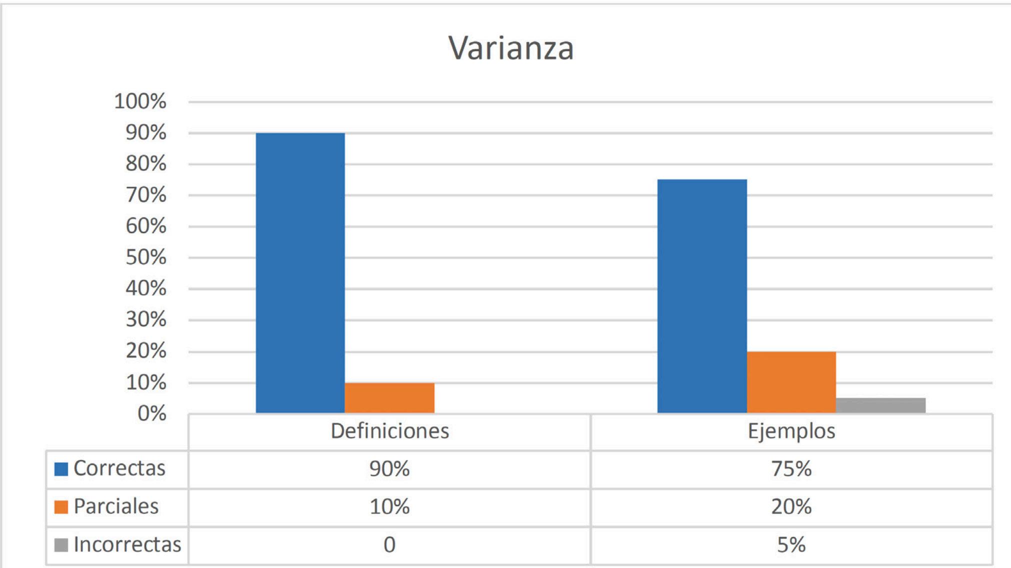


Figura 22. Porcentaje de respuestas correctas del tema de varianza.

En la Tabla 4 se muestran las definiciones dadas por los participantes. Como se puede observar, en las definiciones parciales se omite algún componente del concepto, ya sea la operación cuadrática o el referente de la desviación; es decir, el promedio del conjunto de datos a analizar.

Tabla 4
Definiciones de Varianza del Grupo 1

Definición	
Correcta	Parcial
es el promedio de las desviaciones respecto a la media al cuadrado	es el promedio de distancia a la que se encuentran los datos a partir de la media
La diferencia entre la media y los datos obtenidos… el resultado de estos datos se elevan al cuadrado y se divide entre el número de datos obtenidos	La varianza es el promedio de las desviaciones de un conjunto de datos Te dice la variabilidad o que tan dispersos están los datos
es el promedio de las desviaciones, o sea, la distancia que hay entre la media y cada dato… elevadas al cuadrado	Es el promedio de las desviaciones elevadas al cuadrado

En este tema, los ejemplos se enfocaron en temas de psicología y toma de decisiones basadas en la comparación de la varianza de dos grupos de datos. En la Tabla 5 se muestran transcripciones de algunos ejemplos.

Tabla 5
Ejemplos de Varianza del Grupo 1

Ejemplos	
Correcta	Parcial
En laboratorio experimental, al trabajar con una rata en la caja de Skinner. Vas registrando las veces que la rata palanquea durante diferentes sesiones. Puedes ver la variabilidad de número de palanqueos de la rata en las diferentes sesiones y ver si influye el reforzador que se le dio	*En las horas de sueño que tiene cada uno de los que integramos la sección. Podría servir para saber las horas que duerme un alumno y que tan alejado esta de la media obtenida en el grupo sabiendo que todos tenemos la misma cantidad de tarea por hacer*
Podría determinar la variabilidad que se tiene del clima en la CDMX en un mes, esto me sirve para poder establecer cómo es el clima en determinado mes y si en eso influye en la estación del año o no	*Saber la distribución de las edades de los compañeros de clases. Es útil para saber la frecuencia de edad con la que te relacionas más*
En los pacientes que reciben al mes en una dependencia de gobierno los psicólogos, semana a semana, y en un privado, para saber en cuál conviene trabajar por la carga de trabajo que se va a tener	*varianza en un mes de las horas que ocupo el celular al día en entretenimiento. Para determinar qué días son los que me entretengo más con el celular conforme a la media de los otros días*
Incorrecto	
Digamos que tienes una población a la que le vas a traer ciertos materiales para alguna dinámica, pero no sabes la cantidad promedio de cuanto material podrías llegar a necesitar, entonces con esto puedes hacer alguna aproximación y no desperdiciar recursos	

VALORACIÓN DE LOS RECURSOS SEMIÓTICOS

Los resultados del cuestionario aplicado indican que los recursos semióticos empleados en las presentaciones recibieron una valoración predominantemente positiva. A excepción del color (reactivo 14) y el movimiento (reactivo 15), ningún otro recurso rebasa una valoración neutra del 20%. La valoración negativa, aunque marginal, se dirigió a imágenes (reactivo 11) y colores (reactivo 14); mientras que el audio (reactivo 16) fue el único recurso semiótico que recibió valoraciones negativas por el 10% de los participantes. En la Figura 23 se resumen los datos para cada reactivo.

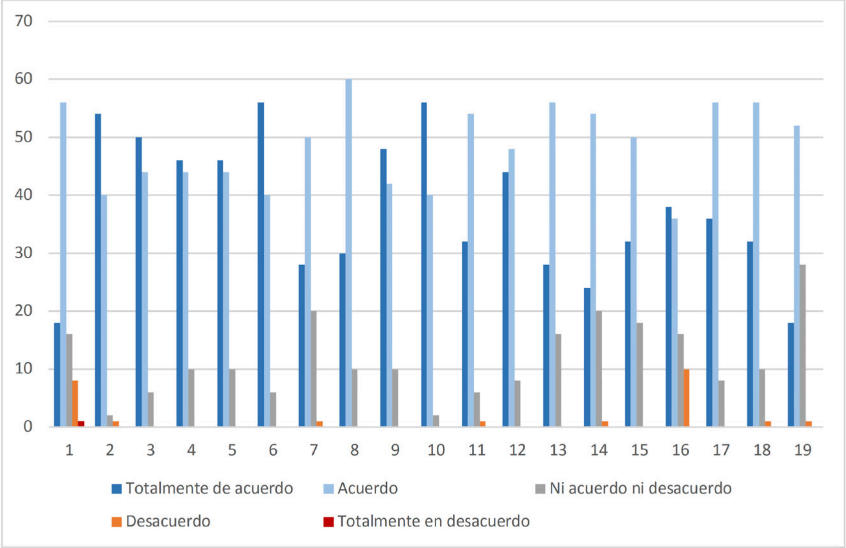


Figura 23. Evaluación de recursos semióticos. Grupo 1 – Sección A. 1) Mi comprensión de las clases de estadística es buena. 2) Las diapositivas son comprensibles. 3) La secuencia de las diapositivas es comprensible. 4) El procedimiento de las fórmulas es comprensible. 5) El procedimiento desglosa claramente las fórmulas. 6) Los ejemplos son útiles para entender las fórmulas. 7) Entendí todos los temas a pesar de no conocerlos. 8) Las definiciones son comprensibles. 9) Las explicaciones ayudan a entender los conceptos. 10) El apoyo visual permite entender las fórmulas a pesar de no conocerlas. 11) Las imágenes ilustran suficiente al texto. 12) Las imágenes ayudan al mejor entendimiento de la fórmula. 13) Las figuras ayudan a comprender las fórmulas. 14) Los colores ayudan a la comprensión de la fórmula. 15) El movimiento ayuda a la comprensión de la fórmula. 16) El audio ayuda a la comprensión de la fórmula. 17) Las tablas ayudan a entender los temas. 18) Las flechas asocian bien el texto con las imágenes. 19) Después de ver las presentaciones de PowerPoint puedo dar un ejemplo.

Finalmente, en su valoración general del material, los participantes narraron una experiencia sencilla, atractiva y clara. En la tabla 6 se exponen fragmentos de las transcripciones.

Tabla 6
Opiniones y valoración del material multimedia del Grupo 1 - sección A

VALORACIÓN DEL GRUPO 1 – SECCIÓN A
La explicación es muy buena y los ejemplos muy claros por lo que es de fácil comprensión el tema además de ser un material muy dinámico. *Me parece buena la idea de utilizar este tipo de materiales, el uso de gráficos ayuda al entendimiento de los temas.* *Completo, ejemplifica bien los temas y es didáctico.* *Es una muy buena manera de explicar los temas de estadística, muy fluido, comprensible y didáctico.* *Los ejemplos fueron muy claros y sencillos, buenos para aplicar en otros ejemplos de la vida diaria* *Me gustaron las presentaciones, sobre todo porque no solo se explicaba mediante palabras, sino que contenía audio.* *Son unas diapositivas muy buenas y podrían ser muy efectivas y didácticas para las clases normales.* *Se comprende de manera eficaz el contenido, aunque no sé si en temas más complejos resulte fácil la comprensión* *Muy buenas presentaciones, se entendían y eran muy ilustrativas para un mejor entendimiento* *Lo de los audios, fue curioso, quiero decir, la presentación sin ellos podría funcionar, pero estos agregaron el punto extra que creo la hace excelente. Porque, pues no todos aprendemos igual, y pues si das la posibilidad de aprender de otras formas, que mejor.*

VALORACIÓN DEL GRUPO 1 – SECCIÓN A
El material me pareció bastante bueno y comprensible, ya que los ejemplos que se te ponen te ayudan a entender mejor los temas, sobre todo el de varianza. *Las diapositivas están muy bien, todo es comprensible y las explicaciones son geniales para la comprensión del tema.* *Es un buen material para comprender la estadística.* *Muy extenso, pero súper entendible.* *Es una manera dinámica y sencilla de aprender estadística. Estaba muy interactiva la presentación, muy bien explicada, todo muy cool.* *Es muy bien explicado y de una manera sencilla de comprender.* *los conceptos son muy claros y el audio te ayuda a entenderlo mejor.* *Es una buena forma de aprender, Esta bien estructurado y se entiende lo expuesto.* *Entendí bien los conceptos y me gustó el análisis conceptual de la varianza* *Buena iniciativa ya que a muchas personas hay cosas que no nos quedan claras y son necesarias para la carrera* *Es un buen material donde de manera didáctica y rápida se puede dar de manera introductora y general una idea del tema, teniendo la capacidad de dar ejemplos y definiciones después de ver las presentaciones.* *Entendible al utilizar imágenes y terminología no muy complicada.* *Todos los elementos estaban bien colocados, las explicaciones eran bastante sencillas, por lo que era más fácil su comprensión. Nunca se volvió tediosa la presentación* *Es un buen material de apoyo, pero para mí no sustituye una asesoría con algún profesor.*

Por otra parte, las críticas al material realizadas por los participantes se dirigieron a tres aspectos: audio, ejemplos y formato. En el caso de los audios, la instrucción verbal en sí misma les pareció apropiada, pero sugirieron modificar su formato: velocidad, volumen, prosodia y frecuencia. Respecto a los ejemplos, la sugerencia general fue incluir más de ellos, empleando alguna variable de la fórmula básica, y que estén relacionados a los temas de su carrera. Finalmente, sobe el formato se sugirió incluir la función de regresar al menú desde cualquier diapositiva, así como incrementar la velocidad de las transiciones. En la tabla 7 se muestran transcripciones de las críticas.

Tabla 7
Críticas del Grupo 1 a la Sección A del material

CRÍTICAS
AUDIO
No ser tan repetitivo en unas cosas, no poner audio por audio en una sola diapositiva, tal vez en un solo y mantener la secuencia. Hacer que las diapositivas pasen solas al terminar el audio y tener la opción de regresar a la anterior simplemente. *Los audios unos después del otro se tardan mucho en comenzar y la voz me pareció como si el instructor tuviera flojera.* *Algunos audios se grabaron con un volumen más bajo que los demás* *Algunos audios son muy repetitivos* *Con respecto a los audios en ocasiones tardan en cargar o están un poco desfasados.* *La voz es plana, sería más atractivo con un tono de voz más expresivo.* *Verificar que desde cualquier dispositivo sea posible escuchar los audios* *No me gusto lo de que tuviera que esperar a que terminara el audio para avanzar de diapositiva, entiendo por qué, pero en lo personal no fue de mi agrado, aun así en todo lo demás me gustó.*

CRÍTICAS
AUDIO
Hacer más didáctico el uso de los audios de forma que no sean tan monótonos y tarden menos en reproducirse y que no sean tan monótonos *Los audios tardaban un poco*
EJEMPLOS
Poner al menos un ejemplo más por cada tema *Ninguna, excelente trabajo, aunque sería muy bueno que haya más ejemplos* *Los ejemplos son muy claros, pero debe de haber más por tema* *El mayor problema... en mi opinión... que tienen los profesores al momento de impartir estadística en Psicología es que no saben explicar los términos, no aclaran las dudas debidamente y no tratan de que la clase sea más comprensible, ni tampoco dan ejemplos que se relacionen con nuestra carrera, tampoco explicar la utilidad de dicha aplicación en nuestro ámbito.* *Poner un ejemplo más.* *Explicar con un ejemplo detallado cómo funcionan las diferentes fórmulas cuando se habla de varianza, sobre todo en la fórmula de varianza de datos agrupados.*
FORMATO
Dar la opción en todas las diapositivas de poder regresar al menú en cualquier momento. *Que se pueda regresar al menú desde cualquier diapositiva* *Que tarde menos la transición de las diapositivas* *La transición de las diapositivas es algo lenta*

Como se puede observar, la principal divergencia en la valoración de los participantes fue respecto al audio, pues mientras a unos les pareció claro y sencillo, e incluso clave para facilitar la comprensión, a otros les pareció monótono, plano, o un obstáculo para seguir avanzando en la explicación.

SECCIÓN B

DESVIACION ESTANDAR

En la Figura 24, puede apreciarse que no hubo ninguna definición ni ejemplos incorrectos. La totalidad de las definiciones aportadas para desviación estándar en el Grupo 1 cumplieron con los objetos matemáticos correspondientes al concepto; sin embargo, 60% de los ejemplos aportados expresan parcialmente la definición del concepto.

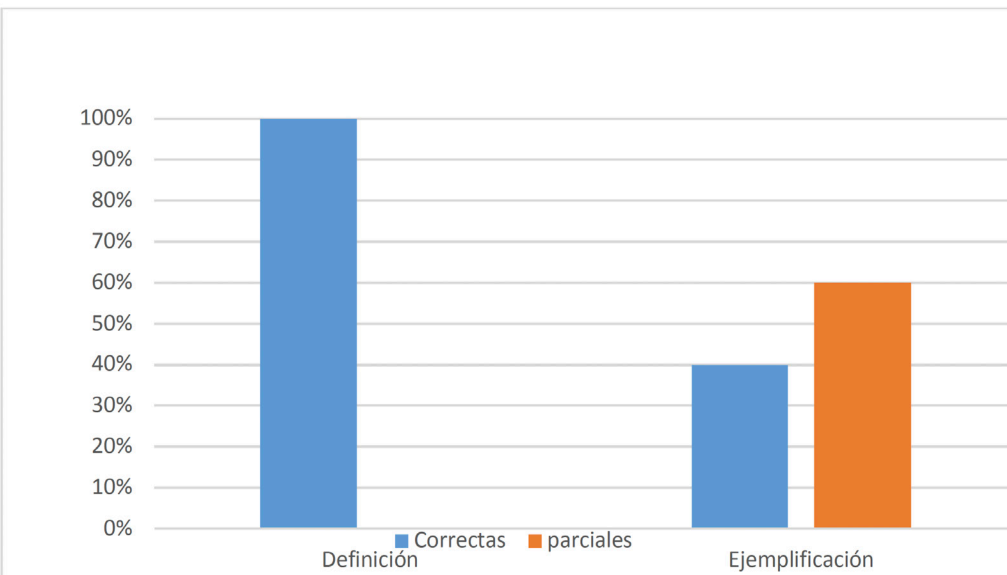


Figura 24. Porcentaje de respuestas correctas y parciales de Desviación estándar.

En la Tabla 8 se muestran las definiciones y ejemplos dadas por los participantes. Como se puede observar, tres de los ejemplos aportados para desviación estándar son parciales, debido a que no contemplan con todos los elementos el concepto. El ejemplo de la alumna 10 sólo muestra referirse a la media, pero le agrega elementos que no corresponden al concepto, como grupos y más de una muestra. El ejemplo de la alumna 2 también se centra en el dato promedio, que es una parte de la desviación estándar, pero carecen de demás elementos como la distancia entre el dato medio y los datos individuales. El ejemplo de la alumna 15 si hace referencia al dato medio y con ayuda de gestos y movimientos de mano hace referencia a la distancia entre el dato medio y datos individuales, sin embargo, en su discurso no son explícitos dichos elementos.

Tabla 8
Definiciones y ejemplos de Desviación estándar del Grupo 1

Definiciones
Correctas
Alumno 13: *dice que es una medida de dispersión que siempre hay unos datos que se quedan en el centro y hay otros que se desvían de la media por así decirlo y ese es el rango de desviación estándar.* ***Alumna 9:*** *dice que mide la distancia entre el promedio y los que están individuales (haciendo ademanes con la mano ejemplificando distancia).* ***Alumna 8:*** *pues sí, es eso, la diferencia que hay entre cada individuo y el promedio que hay así en general (mueve la mano en círculo haciendo referencia a lo general).*
Ejemplos
Correctos
Alumna 1: *pues para ver el promedio y ver cuánto… bueno en un experimento si… ver la utilidad que tiene el rango que viene antes y después del promedio (mueve las manos refiriéndose a más una desviación estándar y menos una desviación estándar)* ***Alumna 4:*** *pues… si, igual, para ver la diferencia entre… [Pausa prolongada] los datos grupales e individuales.*

Parciales
Alumna 10: *se podría utilizar una técnica que sea como generalizada para poderles enseñarles…que puedan aprender cierto grupo de estudiantes, pero tener otras alternativas para los estudiantes que no aprendieron de esta forma.* ***Alumna 2:*** *Pues estaba pensando que en la investigación con pueblos indígenas que tienen su lengua nativa, podría ser investigar cuál es el grado de las personas que aparte de esa lengua nativa hablan el español.* ***Alumna 15:*** *ahá, si, venia un ejemplo de… bueno, no recuerdo si era el de las materias de español y matemáticas o era el de… [Inaudible] es que venía otro ejemplo que era de, no sé si era de promedios o no me acuerdo de qué, pero… hablaba de que… no es cierto, era de las estaturas, ya me acordé, que… estaba, bueno ahí se podía medir (mueve las manos como queriendo representar comparaciones o mediciones) lo que era el promedio y lo que era [inaudible] (mueve las manos representando arriba y debajo de algo) con la desviación estándar.*

CORRELACION DE PEARSON

En la Figura 25 puede apreciarse que no hubo ninguna definición ni ejemplo parcial e incorrecto para Correlación de Pearson, todas las aportaciones para ambas categorías cumplieron con las características del concepto.

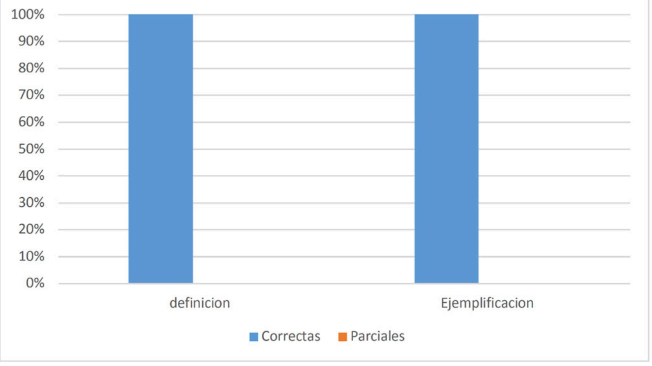


Figura 25. Porcentajes de respuestas correctas de correlación de Pearson.

En la Tabla 9 se muestran las definiciones y ejemplos dadas por los participantes. Como se puede observar, las definiciones aportadas son expresadas con las propias palabras de los participantes e incluyen las características del concepto. Los ejemplos cumplen con las características del concepto y se relacionan con las actividades académicas que realizan los participantes. Tanto definiciones como ejemplos son correctos a pesar de ser el tema desconocido para los participantes.

Tabla 9
Definiciones y ejemplos de Correlación de Pearson del Grupo1

CORRELACIÓN DE PEARSON	
Correctos	Correctos
Alumna 8: *es el grado de correlación que existe entre dos variables, si una aumenta la otra disminuye, y dice que no necesariamente van juntas, sino que pueden ser diferentes.* ***Alumna 9:*** *En ésta se ve el grado de relación entre las variables (moviendo las manos representando que dos cosas van juntas) sin que una influya en la otra, son independientes, únicamente se ve el grado de relación.* ***Alumna 11:*** *Es la relación entre dos variables, pero no es necesario que [inaudible] y aparte menciona… ¿Qué de la positiva? Eh… la positiva era cuando una aumentaba y la otra disminuía del mismo lado…*	***Alumno 13:*** *Podría ser con alguna, alguna acción constante que se vea en un trastorno, eh… hacer como una investigación y una correlación de Pearson para ver si ese, esa acción está correlacionada con ese trastorno.* ***Alumna 1:*** *Pues, este, mmm… lo que estábamos viendo, relacionarlo con algún experimento que hicimos, era que aumentando un distractor iba disminuyendo la atención que se le ponía a la tarea.* ***Alumna 15:*** *Pues… podría ser como en el ejemplo de la… de la presentación de dos materias, la correlación que tiene cada una y como lo mencionó aquí que la correlación no era en cuanto a causalidad, causalidad, que una influya sobre otra o dependiera de la misma, sino solamente, así como que si una tiende a subir la otra tiende a bajar.*

CORRELACIÓN DE PEARSON	
Correctos	Correctos
Alumno 14: *Es para poder observar si las dos variables tienen algo de relación y daba el ejemplo de las materias (alumna 15 asienta la cabeza) de español y de matemáticas, y pues ahí se puede notar si una depende o influye en la otra.*	***Alumna 3:*** *Podría ser igual, pero en motivación, influye como cambia la motivación si puede ser más alto o las acciones serán más bajas.*

PRUEBA T DE STUDENT

En la Figura 26 puede apreciarse que la totalidad de los ejemplos aportados para Prueba t de student cumplieron con la definición del concepto. Por su parte, un tercio de las definiciones aportadas cumple parcialmente con las características del concepto, mientras que el resto son definiciones correctas.

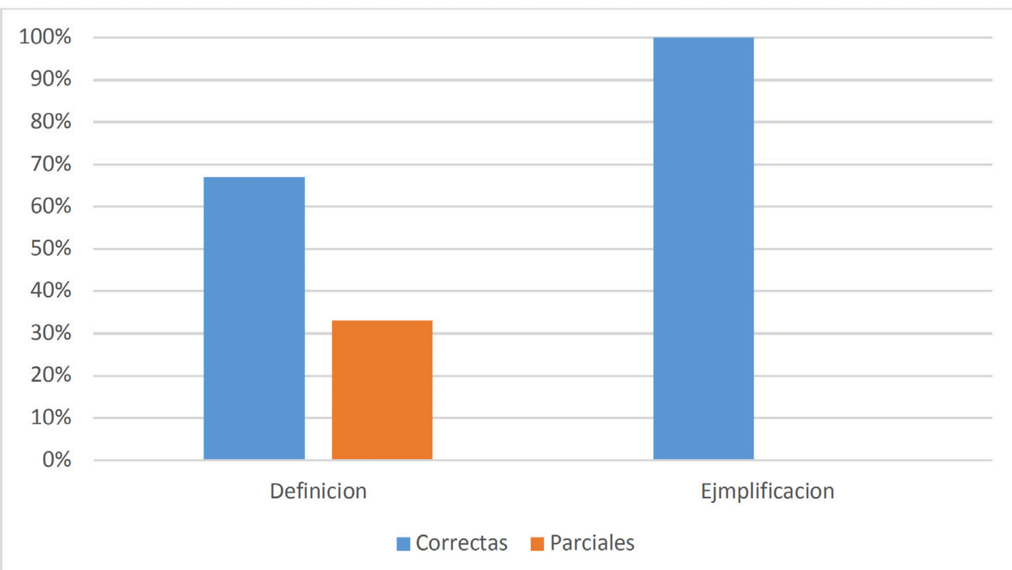


Figura 26. Porcentajes respuestas correctas y parciales de prueba t de student.

En la Tabla 10 se muestran las definiciones y ejemplos dadas por los participantes. Como se puede observar, de las tres definiciones aportadas, una es parcial y hace referencia a la aceptación de la hipótesis nula. A pesar de ser un objeto primario muy importante que le da sentido a la definición de prueba t de student, no expresa respecto a qué de la hipótesis. Los ejemplos aportados cumplen con las características del concepto, el ejemplo de la alumna 12 expresa de manera explícita la comparación de muestras y el establecimiento de hipótesis, mientras que el ejemplo de la alumna 4 no menciona de manera explícita la comparación de las muestras; sin embargo, el ejemplo expresa un experimento donde se establecen hipótesis y de manera implícita está la comparación de muestras. En prueba t de student, a pesar de ser el tema más complejo sólo hubo una respuesta parcial.

Tabla 10
Definiciones y ejemplos de Prueba t de student del Grupo 1

PRUEBA T DE STUDENT	
Correctos	Correctos
Alumna 8: *Pues es la prueba que nos permite rechazar o comprobar nuestras hipótesis de manera estadística, apegándonos más a lo que la estadística nos dice que a lo que podemos observar [inaudible].* ***Alumna 1:*** *Sirve para comparar los resultados cuando se hicieron investigaciones con dos grupos (mueve la mano para representar un grupo en cada mano).*	***Alumna 12:*** *amm… nosotros hicimos un experimento… sobre… lo del grupo control y el grupo experimental y basándonos en nuestros resultados… [Inaudible] este… pudimos ver si aceptábamos la hipótesis nula.* ***Alumna 4:*** *Pues… igual en nuestro caso hicimos una un experimento de atención y… fue de la música si [inaudible] de los participantes, como hipótesis nula pusimos que no, que la música no los distraía y como alterna que sí, que si los distraía y en nuestro caso se aceptó la hipótesis nula.*
Parciales	Parciales
Alumna 11: permite saber si es efectiva la hipótesis nula.	

VALORACIÓN DE LOS RECURSOS SEMIÓTICOS

En la Figura 27 puede apreciarse que los participantes del grupo 1 evaluaron la efectividad de cada uno de los recursos semióticos no formales utilizados en los materiales multimedia. Todos los recursos semióticos tuvieron una evaluación positiva, pero aquellos valorados neutrales fueron las figuras, los colores y el audio. Por otro lado, los ejemplos, las tablas, el orden de las diapositivas, el desglose de las fórmulas y los procedimientos tuvieron una aprobación del 100%, al haber sido evaluados entre totalmente de acuerdo y de acuerdo.

Las observaciones del Grupo 1 – Sección B (Ver Tabla 11) acerca del material multimedia y los diversos recursos semióticos que lo componen se centran en la utilidad de los recursos para mejorar el aprendizaje de los conceptos estadísticos en cuestión, expresan el gusto por este tipo de materiales y la facilidad de entender y recordar el material por el lenguaje sencillo utilizado y las características semióticas del material como las imágenes, movimiento, colores, figuras, tablas, ejemplos y el audio, al respecto, la alumna 9 del grupo uno refiere que ella recuerda el contenido por las animaciones con las que cuenta el material, mientras que la alumna 7 considera que cualquier persona puede entender los temas revisados.

Los participantes reportan que los ejemplos y las imágenes son los recursos que más ayudaron durante la revisión de los tres temas estadísticos; también reportan que los ejemplos son muy buenos porque no son tan específicos, sino que son de cosas generales que todos conocen. Además, resaltan la flexibilidad de controlar su propio ritmo de aprendizaje, elemento que no está presente en una clase normal, lo cual les permitió retroceder en el material si lo consideraban necesario para reforzar el aprendizaje, además de que les permitió decidir en qué momento terminar. Los participantes opinan que las presentaciones desarrollan claramente las fórmulas permitiéndoles entender los temas pese a no conocerlos todos, y consideran que el material puede servirles en sus futuras clases de estadística.

Los participantes mencionan que este tipo materiales tienen características que no se encuentran en una clase normal, por ejemplo: propio control del ritmo de aprendizaje, elementos primarios muy desplegados, énfasis en ciertos aspectos clave de la fórmula, además del tiempo en el que se desarrolla, nótese que la alumna 9 del Grupo 1 afirma que se pueden estudiar los temas en poco tiempo con los materiales presentados. Asimismo, mencionan que la experiencia durante la revisión de los materiales multimedia

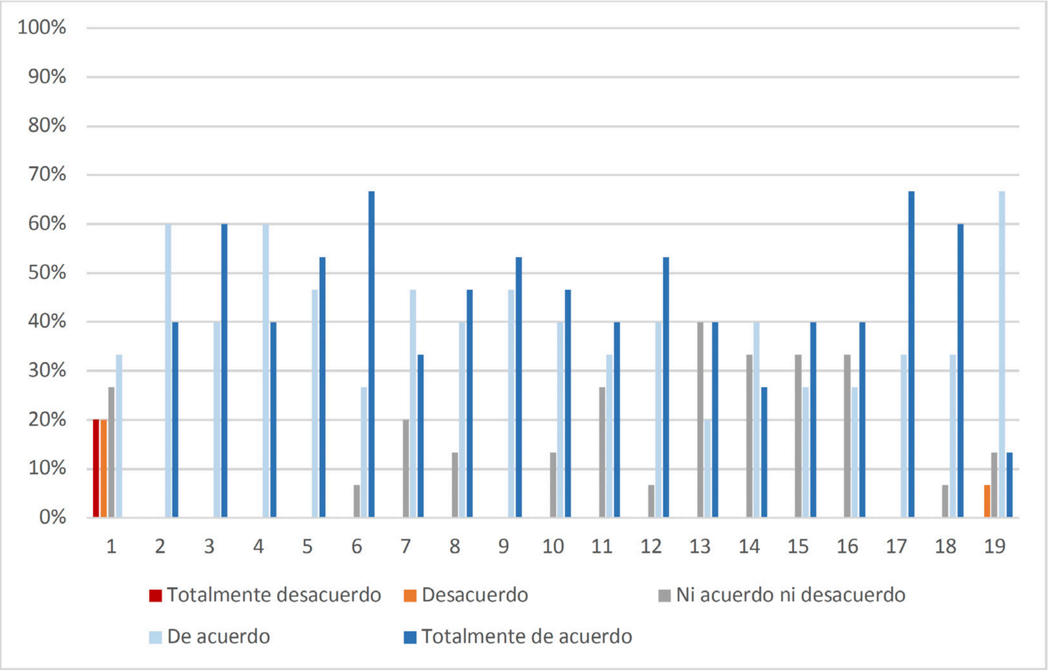


Figura 27. Evaluación de recursos semióticos (Grupo 1 – sección B). 1) Mi comprensión de las clases de estadística es buena. 2) Las diapositivas son comprensibles. 3) La secuencia de las diapositivas es comprensible. 4) El procedimiento de las fórmulas es comprensible. 5) El procedimiento desglosa claramente las fórmulas. 6) Los ejemplos son útiles para entender las fórmulas. 7) Entendí todos los temas a pesar de no conocerlos. 8) Las definiciones son comprensibles. 9) Las explicaciones ayudan a entender los conceptos. 10) El apoyo visual permite entender las fórmulas a pesar de no conocerlas. 11) Las imágenes ilustran suficiente al texto. 12) Las imágenes ayudan al mejor entendimiento de la fórmula. 13) Las figuras ayudan a comprender las fórmulas. 14) Los colores ayudan a la comprensión de la fórmula. 15) El movimiento ayuda a la comprensión de la fórmula. 16) El audio ayuda a la comprensión de la fórmula. 17) Las tablas ayudan a entender los temas. 18) Las flechas asocian bien el texto con las imágenes. 19) después de ver las presentaciones de PowerPoint puedo dar un ejemplo.

es positiva porque los materiales son muy específicos y desmenuzan la información de tal manera que pueden entenderla.

Los participantes aportaron críticas constructivas y sugerencias para mejorar los materiales multimedia. Sus observaciones son variadas: algunos consideran innecesario los círculos y líneas mientras que otros no; otros como las alumnas 4 y 5 consideran que los audios deben mejorarse o quitarse porque iban desfasados o no correspondían al avance de los materiales; sin embargo, otros participantes como los alumnos 10 y 13 consideran que el audio les facilitó el avance en los materiales. También hicieron referencia a los textos, la alumna 10 considera que, si está el audio, no es necesario leer.

Tabla 11

Opiniones y valoración del material multimedia del Grupo 1 – Sección B

VALORACIÓN DEL GRUPO 1 – SECCIÓN B
Alumna 8: *Bueno, yo en personal me gustaron porque son como muy didácticas y esquematizan muy bien lo que son las diferentes pruebas estadísticas y nos permite un mayor entendimiento con los colores y esas cosas.*   ***Alumna 10:*** *Yo creo que fueron entretenidas, sobre todo por el audio porque luego como que estar leyendo pues… a veces da un poco de flojera que estas intentando entender un tema y estar leyéndolo no es tan divertido, entonces el audio ayudo muchísimo junto con los colores [inaudible].*   ***Alumna 9:*** *Sí, creo que, creo que de igual manera es muy sencillo, vimos un tema en 20 minutos y pues lo puedes estar regresando en lo que te atoras y pues como el video lo explica bien, no hay como mayor complicación*   ***Alumna 1:*** *Pues es que en algunas partes me parecía a veces muy repetitiva, pero así en concreto como que tiene un lenguaje muy fácil y que cualquier persona los puede entender.*   ***Alumna 10:*** *Eh… tal vez que fuera un poquito más expresivo para el momento de dar las instrucciones, el audio [ríe] porque lo hacía muy… no sé, como que muy mecánico y a veces eso también (moviendo las manos como ondas hacia abajo) es un poco tedioso, sí solamente, por ejemplo, en mi caso, yo prefería escuchar el audio que estar leyendo, entonces tal vez como que ponerle más entusiasmo (mueve las manos con fuerza) [Risas].*

VALORACIÓN DEL GRUPO 1 – SECCIÓN B
Alumna 9: *Yo creo que las animaciones son muy buenas, en lo personal a mí me ayudaron mucho, a veces cuando trato de recordar un tema y veo por ejemplo videos (señala a la computadora refiriéndose al material visto), lo recuerdo no por el texto o la explicación, lo recuerdo por la animación que se le puso, entonces yo creo que estuvo muy bien, a mí me ayudaron mucho.* ***Alumno 14:*** *Yo creo que los ejemplos que se dan son muy buenos porque si ayudan mucho a entender, ya que son estudios como muy cotidianos la calificación y las estaturas y no tan complejos como otras cosas.* ***Alumna 7:*** *Bueno, algo que también me pareció interesante, es como la diferencia entre ese tipo de presentaciones y como te lo explica el profesor, porque en muchas ocasiones profesores te lo explican a como ellos lo entienden y creen que tú lo vas a entender y en estas presentaciones pues… creo que fueron diseñadas a como uno…a como todas las personas lo pueden manejar.* ***Alumno 13:*** *Yo creo que [inaudible] a mí me gustaron mucho y aunque no tuve la… el audio (Señala a los audífonos). creo que… a mí, bueno, se me facilitó porque fue… fue dinámico, fue práctico y muy específico.* ***Alumna 4:*** *Bueno yo [inaudible] me parece que el audio no, porque… bueno, si me daba risa y… y me aburrí un poco (hablando entre risas).* ***Alumna 5:*** Bueno, yo no digo que está fea tu voz, pero no recuerdo si fue en la primera o segunda diapositiva que… lo que hablaba no iba de acuerdo a lo que decía el texto.

GRUPO 2

SECCIÓN A

RANGO

El Grupo 2 obtuvo un puntaje menor de definiciones correctas. En el caso de las definiciones, el porcentaje fue del 64%, mientras que el de ejemplos fue del 73%. Las definiciones y ejemplos parciales fueron del 18% y 27%, respectivamente. Finalmente, 18% de las definiciones fueron incorrectas. (Figura 28)

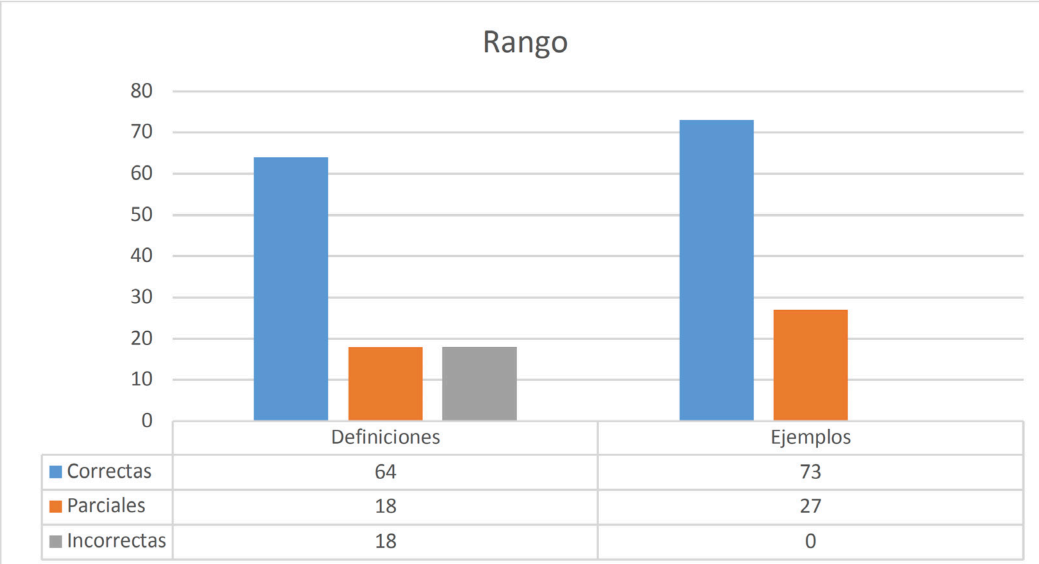


Figura 28. Porcentaje de respuestas correctas del tema de rango.

Las respuestas parciales refieren algún aspecto relacionado o adyacente a la definición, mientras que las incorrectas agregan elementos que no pertenecen propiamente a la definición. En la tabla 12 se observan fragmentos de las transcripciones para cada categoría.

Tabla 12
Definiciones de Rango del Grupo 2

Definiciones
Correctas
Dato de la variable de puntuaciones que van de menor a mayor *La diferencia que existe entre un dato y otro* *es la diferencia entre el valor máximo y mínimo* *el valor más grande menos el más pequeño en un conjunto de datos* *intervalo que se encuentra entre el valor mínimo y el valor máximo* *Es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo* *Es el intervalo entre el valor máximo y el valor mínimo.*
Parciales
Porción que existe entre un punto máximo y un punto mínimo *Es la variación del total de datos*
Incorrectas
La clasificación de menor a mayor *El rango es el promedio obtenido al comparar todos los datos.*

Los ejemplos de este grupo nuevamente se enfocan principalmente en tiempos de traslado y costo de productos. Destaca que la mayoría de ellos toman el cálculo del rango como base para algún proceso de toma de decisiones. En la tabla 13 se muestran fragmentos para cada categoría.

Tabla 13
Ejemplos de Rango del Grupo 2

Ejemplos
Correctas
se podría aplicar a los puntajes de depresión de un grupo al que se piensa intervenir, pues por ejemplo si el rango es elevado, es decir, existe gran variación en los niveles de depresión se podría tomar la decisión de identificar solo los sujetos con niveles mayores para ser intervenidos, ya que no tendría gran sentido intervenir a todo el grupo si existen casos sin depresión o niveles de depresión muy bajos. *En medicina puede aplicarse para registrar la efectividad de una cirugía, recabando datos de varios hospitales, ciudades e incluso países, y con esto tener una noción de los riesgos y posibilidades de éxito. Al saber esto pueden tomarse otras alternativas si es de alto riesgo o de realizarla si es la mejor opción.* *Podría ser el tiempo. Por ejemplo, el rango de tiempo que te toma ir al trabajo, de eso puedes sacar diferentes tiempos dependiendo de las circunstancias que se presenten día a día, y una vez recabados datos de varios días, el rango obtenido servirá de referencia para los siguientes días.* *Me permite dar un seguimiento en las evaluaciones del SISAT entre un periodo y otro, esto me ayuda a buscar estrategias que les permita a los alumnos a mejorar su nivel de desarrollo* *analizar bases de datos para encontrar el PIB más grande y más chico de la última década* *preguntar a las familias en diferentes delegaciones cuanto gastan en agua para ver si varía dependiendo de la delegación* *Podría cotejar los precios de la fruta en los tianguis que se ubican en diferentes días cerca de mi hogar, de esta manera si el valor del rango es elevado identificaría a que tianguis corresponde el valor mínimo para así saber dónde y en qué día me convendría más comprar la fruta.*

Ejemplos
Correctas
Calculo el rango de las ventas que hago para llevar el control *El tiempo que me tardo haciendo limpieza para poder crear un horario semanal*
Parciales
en mi trabajo, qué rango mantenemos por ventas *qué tipo de motor de auto es más funcional en cuanto aspiración de aire y potencia, de este y hacer un nuevo prototipo* *en un producto… mayor y menor precio para ver cuál te conviene*

VARIANZA

En el Grupo 2 se encontró que el 64% refirió definiciones correctas, 9% definiciones parciales y 27% incorrectas. El 64% de los ejemplos propuestos fueron correctos, el 27% parciales y el 9% incorrectos. (Figura 29)

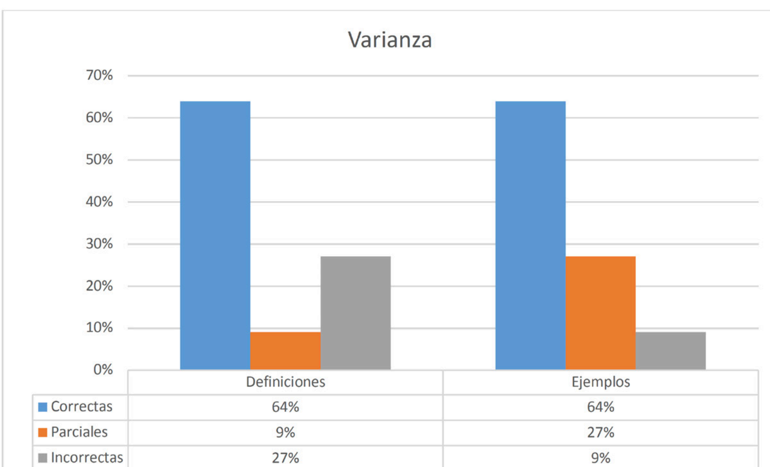


Figura 29. Porcentaje de respuestas correctas del tema de varianza.

En la tabla 14 se muestran fragmentos de las definiciones proporcionadas. Como se puede observar, en las definiciones parciales se omite uno o más elementos del concepto, ya sea la operación cuadrática o el referente de la desviación; es decir, el promedio del conjunto de datos a analizar. Mientras que en las incorrectas se aluden elementos inconexos.

Tabla 14
Definiciones de Varianza del grupo 2 (participantes individuales)

Definiciones
Correctas
Es el promedio de… el cuadrado de las desviaciones respecto a la media *Es el promedio de las variaciones al cuadrado, es decir el promedio de las diferencias elevadas al cuadrado... entre cada uno de los puntajes respecto de la media.* *Es la media de las diferencias con la media elevadas al cuadrado.* *de la distancia que hay entre los valores individuales y el valor medio… elevado al cuadrado, se saca un promedio general* *el promedio de las desviaciones respecto a la media elevadas al cuadrado* *La varianza es la diferencia al cuadrado… del promedio menos cada dato, y esto dividido entre el número de datos.*
Parciales
Es el promedio entre una desviación y otra *Es la media de las diferencias elevadas al cuadrado*
Incorrectas
Es la media de la suma de los datos *el promedio de un conjunto de datos* *es la diferencia de la media de un conjunto*

En la tabla 15 se muestran fragmentos de los ejemplos proporcionados. Se mencionan ejemplos de tiempo de traslado y situaciones prácticas para las que conocer la variación en los datos se usaría para tomar decisiones.

Tabla 15
Ejemplos de Varianza del Grupo 2 (participantes individuales)

Ejemplos
Correctos
Si busco comenzar a impartir clases en un nuevo grupo podría consultar sus calificaciones anteriores para determinar si su nivel académico es similar o es muy variable. Lo cual me ayudaría tomar decisiones sobre que método de enseñanza implementar. *Podría utilizar la varianza para determinar la normalidad de mi periodo menstrual registrando las fechas de mi menstruación durante un año de esta manera si el valor de la varianza es elevado sabría que mi periodo no es normal y por lo tanto no podría hacer uso de algunos métodos anticonceptivos.* *los ingresos anuales de distintos despachos, pero pertenecientes a un mismo dueño.* *Para calcular la varianza del tiempo que un alumno tarda en llegar de la escuela a su casa y viceversa.* *Serviría para calcular los alimentos consumidos diariamente a la semana para ayudarnos a saber cómo es la diferencia de tu alimentación y comprar las cantidades necesarias y no se eche a perder lo demás* *en el cobro de servicios durante los bimestres correspondientes a un año, se calcularía para administrar mejor y evitar pagos excesivos* *En la colonia, para comparar los costos de las escuelas por zonas y ver qué tanto varían*

Parciales
La varianza sirve mucho en química para realizar diversas pruebas de fármacos, es por eso que se realizan en poblaciones. *Conocer el tiempo que tarda mi mamá en realiza actividades del hogar para poder repartirnos entre todos el trabajo* *Me pueden funcionar como Indicadores estadísticos o herramientas de análisis respecto algún valor económico… podría usarse para medir el PNB*
Incorrectos
No puedo dar un ejemplo

VALORACIÓN DE LOS RECURSOS SEMIÓTICOS

Los resultados del cuestionario aplicado indican que los recursos semióticos empleados en las presentaciones recibieron una valoración predominantemente positiva. Solo el color (reactivo 14) presenta una valoración neutra por arriba del 20%. En la Figura 30 se observa la predominancia de valoraciones positivas en tonos azules, la neutralidad en color gris y la valoración negativa en tonos rojizos.

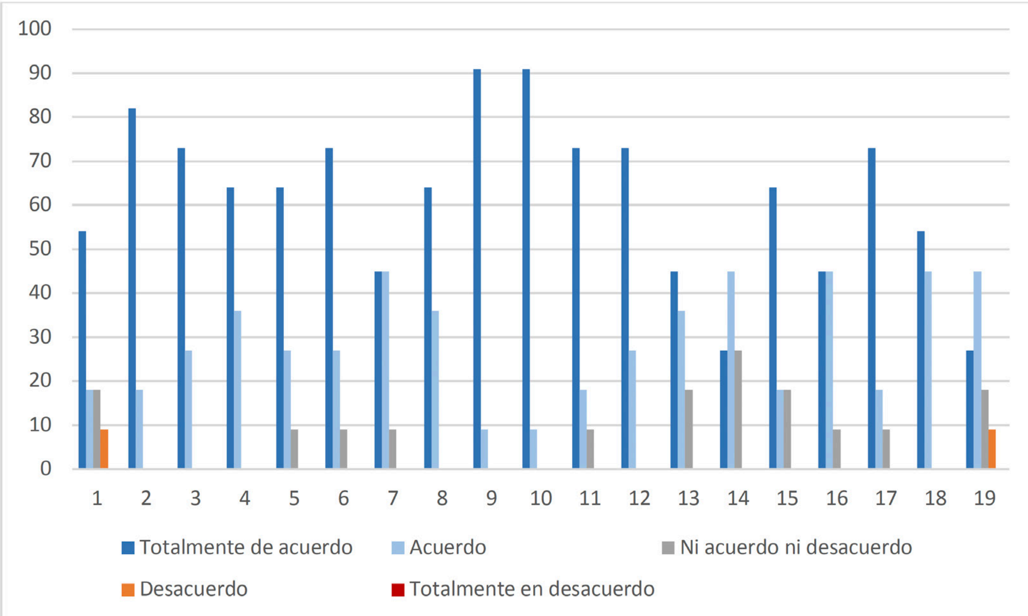


Figura 30. Evaluación de recursos semióticos (Grupo 2 – sección A). 1) Mi comprensión de las clases de estadística es buena. 2) Las diapositivas son comprensibles. 3) La secuencia de las diapositivas es comprensible. 4) El procedimiento de las fórmulas es comprensible. 5) El procedimiento desglosa claramente las fórmulas. 6) Los ejemplos son útiles para entender las fórmulas. 7) Entendí todos los temas a pesar de no conocerlos. 8) Las definiciones son comprensibles. 9) Las explicaciones ayudan a entender los conceptos. 10) El apoyo visual permite entender las fórmulas a pesar de no conocerlas. 11) Las imágenes ilustran suficiente al texto. 12) Las imágenes ayudan al mejor entendimiento de la fórmula. 13) Las figuras ayudan a comprender las fórmulas. 14) Los colores ayudan a la comprensión de la fórmula. 15) El movimiento ayuda a la comprensión de la fórmula. 16) El audio ayuda a la comprensión de la fórmula. 17) Las tablas ayudan a entender los temas. 18) Las flechas asocian bien el texto con las imágenes. 19) después de ver las presentaciones de PowerPoint puedo dar un ejemplo.

Por otra parte, los participantes narran una experiencia favorable al interactuar con el material, como se observa en la siguiente Tabla 16.

Tabla 16
Opiniones y valoración del material multimedia del Grupo 2 – sección A

VALORACIÓN DEL GRUPO 2
La información está bien distribuida y a mi parecer logré entender más de lo que creí. *Es una herramienta excelente para personas que no tienen ningún acercamiento con estos temas ya que está muy desglosada toda la información.* *Está muy bien explicado, ayuda bastante el audio ya que por sí solo sería un poco complicado entender, pero es buen trabajo.* *Me parece que es un material sumamente funcional pues simplifica algunos conceptos que a algunos compañeros les causan dificultad.* *Excelente presentación, te facilita la comprensión del tema de manera rápida y eficaz.* *Es un curso introductorio muy explícito y eficaz, ya que es comprensible y dinámico.* *Es una opción diferente y curiosa a todas las demás formas de enseñanza.* *el material es muy bueno, muy autodidáctico, las instrucciones son sencillas y el material está lleno elementos, que ayudan y el acompañamiento del audio es como un maestro electrónico.* *Me permitió comprender los conceptos de manera sencilla y a aplicarlos a situaciones concretas.*

En este grupo, las sugerencias se dirigieron a incrementar el número de ejemplos, con diferentes grados de complejidad, profundizar en la explicación de las diferentes fórmulas de varianza, la velocidad de reproducción de los audios, como se observa en la Tabla 17.

Tabla 17
Críticas del material multimedia del Grupo 2 – Sección A

Críticas y sugerencias
Todos los recursos utilizados tanto el color como los movimientos ayudan mucho a la comprensión del concepto, sin embargo, fue un poco repetitivo tener que regresar todo el tiempo a la definición de varianza, también en algunas ocasiones me hubiera gustado que el audio explicara más de lo que yo leo en las diapositivas. Hace falta explicar un poco más acerca de las tablas de la fórmula de varianza. Considero que sería excelente organizar la temática por nivel de complejidad por ejemplo una aplicación básica, intermedia y avanzada; sin embargo… creo que su método de enseñanza es innovador y definitivamente me ayudaría a comprender temas más complejos de la varianza.
Ejemplos con variación de más de un color, pero que sea de manera formal para no perder la esencia del profesionalismo.
Tal vez meter más ejemplos y más ejercicios.
Agregar color a las diapositivas, integrar más ejemplos de la vida cotidiana e integrar actividades interactivas para poder practicar sobre los conceptos que se están revisando.
Me hubiera gustado ir un poco más rápido en las diapositivas, terminaba de leer todo y el audio apenas estaba terminando.

SECCIÓN B

DESVIACIÓN ESTÁNDAR

En la Figura 31 puede apreciarse que, en este grupo, el 50% de las definiciones fueron correctos, el 20% parciales y el 30% incorrectos. A su vez, 40% de los ejemplos fueron correctos, 30% parciales y 30% incorrectos.

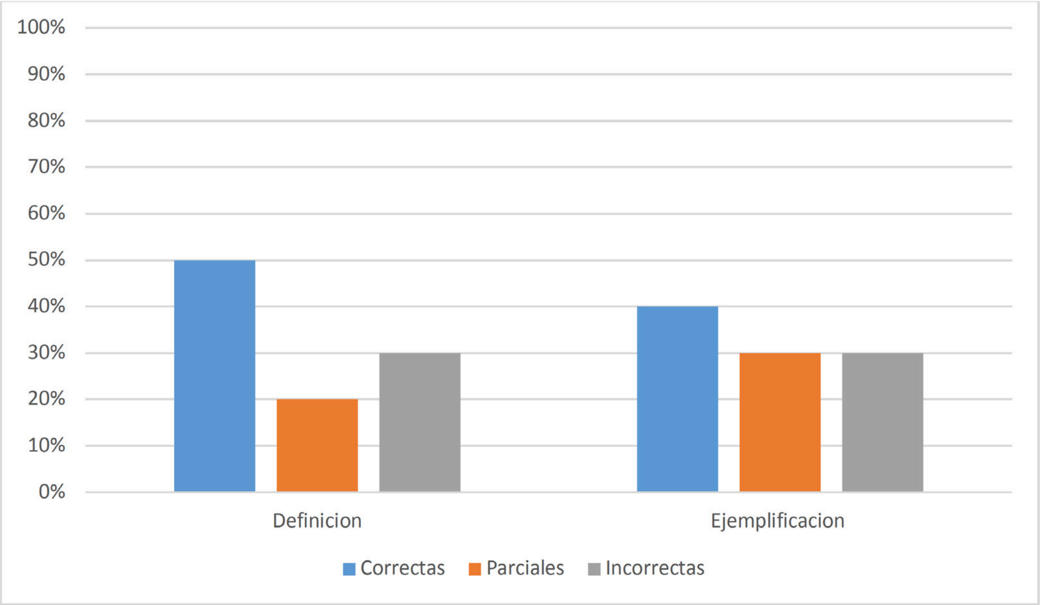


Figura 31. Porcentaje de respuestas correctas, parciales e incorrectas de Desviación Estándar.

En la Tabla 18 se muestran las definiciones y ejemplos dadas por los participantes. Como se puede observar, las definiciones aportadas por los participantes 2 y 3 para desviación estándar son parciales, se reducen a la media, que, aunque forma parte de la desviación estándar, no es suficiente para definirla.

Los ejemplos aportados por los participantes 2 y 4 son parciales se centran en el dato medio, pero es el único elemento que ejemplifican, omitiendo elementos como datos individuales y distancia entre dato medio y datos individuales. El ejemplo del participante 6 también parte del dato medio, pero agrega elementos que no corresponden a desviación estándar, como comparación entre dos cosas.

Las definiciones incorrectas para este concepto fueron dadas por los participantes 1 y 4, las cuales no expresan ningún elemento del concepto, sino que son tautológicas y aluden a la fórmula. Finalmente, el participante 5 no pudo definir el concepto. Los participantes 3 y 5 aportan ejemplos cuyos elementos no corresponden en nada al concepto. El participante 3 ejemplifica moda y no media ni desviación estándar, mientras que la participante 5 no desarrolla su ejemplo y está mal aplicado, la participante 1 no pudo aportar ejemplos.

Por otro lado, los participantes 7, 8, 9 y 10 aportaron definiciones y ejemplos correctos, las cuatro definiciones cumplen con los elementos matemáticos de desviación estándar (media, datos individuales y distancia entre dato medio y datos individuales), sus ejemplos de igual manera cumplen con la definición de desviación estándar.

Los participantes 1 y 5 respondieron tanto definiciones como ejemplos incorrectos. La participante 1 tiene grado de estudios de secundaria, mientras que la participante 5 tiene bachillerato trunco. Los participantes 3 y 4 ejecutan una categoría parcial y otra errónea, de igual manera cuentan con bachillerato y bachillerato trunco respectivamente. Estos participantes no conocían ninguno de los temas presentados en el curso. El participante 2 ejecuta ambas categorías de manera parcial, es decir, ejecuta ambas categorías mejor que los participantes mencionados, este participante tiene estudios de licenciatura y ya conocía esta fórmula durante su bachillerato.

Nótese que en las ejecuciones parciales e incorrectas los participantes reducen la desviación estándar a la media y en algunos casos confunden la media con moda debido; por ello que el grupo tuvo algunos errores, a pesar de que es un tema relativamente sencillo, incluso forma parte de los planes de estudio de bachillerato, grado académico con que la mayoría del grupo cuenta, con excepción de la participante 1, lo anterior implica que los otros nueve participantes pudieron estar expuestos a este tema o temas relacionados, sin embargo, sólo la mitad del grupo reportó conocerlo.

Tabla 18
Definiciones y ejemplos de Desviación estándar del Grupo 2

Definición	Ejemplos
DESVIACIÓN ESTÁNDAR	
Correctos	Correctos
Participante 6: *Pues es la, dentro de la media, es para calcular todo lo que se aleja tanto para más como para menos (Mueve sus manos, en una simula "mas" y en otra "menos") respecto a la media del grupo que se esté estudiando.* ***Participante 7:*** *Es la medida que se emplea dentro del centro (se refiere a la media) a las distancias cortas o largas (se refiere a los datos individuales), dependiendo de las medidas.* ***Participante 8:*** *pues es este… es la distancia que se divide en las observaciones de una población estudiada a través de la media.* ***Participante 9:*** *Desviación estándar es una medida que… [Silencio prolongado] va a tomar en cuenta que tan alejado está de la media, son los datos que están alejados de la media.* ***Participante 10:*** *La desviación estándar es una medida que te dice la diferencia que hay entre, la distancia que hay entre el promedio y los otros números (se refiere a los datos individuales).*	***Participante 7:*** *puede ser en la escuela, hay un número promedio de alumnos por grupo, pero unos van para el A y otros van para el B (Se refiere que al A y B como grupos con diferente número de alumnos, como datos individuales).* ***Participante 8:*** *ah, pues porque… ah, podríamos ver en promedio cuánto ganan las personas en México y ver que tanto se alejan otros salarios de la media.* ***Participante 9:*** *Cuando, si por ejemplo, la media era un promedio de calificaciones es de 8, entonces están los parámetros de cuanto o hasta donde están alejados, por ejemplo, de 7.5 a 9.5, algo así, ahí está lo que es desviación estándar.* ***Participante 10:*** *mmm… puede ser… el número de demandas que caen cada semana durante un mes, o… no, si, las demandas que caen en un mes, entonces si en promedio al mes caen 10 asuntos la fórmula sirve para ver la diferencia (refiriéndose a la distancia) que hay entre esas 10 promedio y la que caen en cada semana durante ese mes.*

Parciales	Parciales
Participante 2: *la primera fórmula es para buscar la media, como decía la diapositiva, la estatura media de la población.* *Participante 3: El primero fue de la media, del promedio de estatura de una población.*	***Participante 2:*** *mmm… digamos, se ocupa… para en un caso, bueno un ejemplo que te puedo dar para saber de qué edad, que edades este… son aptos para una actividad deportiva, dependiendo de su… si, dependiendo de su actividad motriz como deportista.* ***Participante 4:*** *Es como para ver el porcentaje ¿no?, porque primero hablaba sobre el porcentaje promedio de las personas chaparritas y cuanto era el promedio (refiriendo un ejemplo de la presentación), ya después te empezó a decir los valores, pero es lo mismo, para saber más o menos que promedio es el que está…* ***Participante 6:*** *Yo podría sacar el promedio de cuanto me gasto diario yendo a mi trabajo que me desplazo del Estado de México a la Ciudad de México, la utilidad seria para ver cuál es la diferencia entre el distrito y el estado, donde gasto más o menos, cuanto se aleja de mi gasto diario.*

Incorrectos	Incorrectos
Participante 1: ¿la de estándar? (intenta recordar) [silencio prolongado] pues es para alcanzar un numero estándar, por decir, para asemejar y llevar un número estándar (refiriéndose a la media). ***Participante 4:*** la media promedio y bueno es una fórmula que la tienes que hacer… [Pausa prolongada] le entendí más o menos [Riéndose]. ***Participante 5:*** No definió.	***Participante 1:*** *no ejemplificó.* ***Participante 3:*** *por ejemplo, mi mamá que vende, que vende afuera ¿no? cuánto tiempo va o cuales son los días con que se vende con más frecuencia.* ***Participante 5:*** *Pues del tamaño de las personas ¿no?*

CORRELACION DE PEARSON

En la Figura 32 puede apreciarse que, la mitad de las definiciones aportadas para Correlación de Pearson cumplen con las características y objetos primarios del concepto, mientras que la otra mitad de las definiciones aportadas son parciales (20%) o incorrectas (30%). De igual manera, la mitad de los ejemplos aportados expresan la definición del concepto, en tanto que la segunda mitad de ejemplos son incorrectos, en tanto que no expresan la definición del concepto.

En la Tabla 19 se muestran las definiciones y ejemplos dadas por los participantes. Como se puede observar, los participantes 3 y 4 aportan definiciones parciales para Correlación de Pearson, el participante 3 define el concepto a partir del procedimiento para resolver la fórmula junto con un ejemplo, sin embargo, expresa relación entre variables, características principal del concepto de correlación de Pearson, por otro lado la participante 4 define el concepto reduciéndolo a relación entre variables, lo cual es correcto, sin embargo, hace énfasis en tipos de relación, en realidad no hay tipos de relación, solo hay relación fuerte o débil, pero el elemento principal de correlación de Pearson es si hay o no relación entre variables, no qué tipo de relación, estos son las únicas definiciones parciales aportadas para correlación de Pearson, no hay ejemplos parciales.

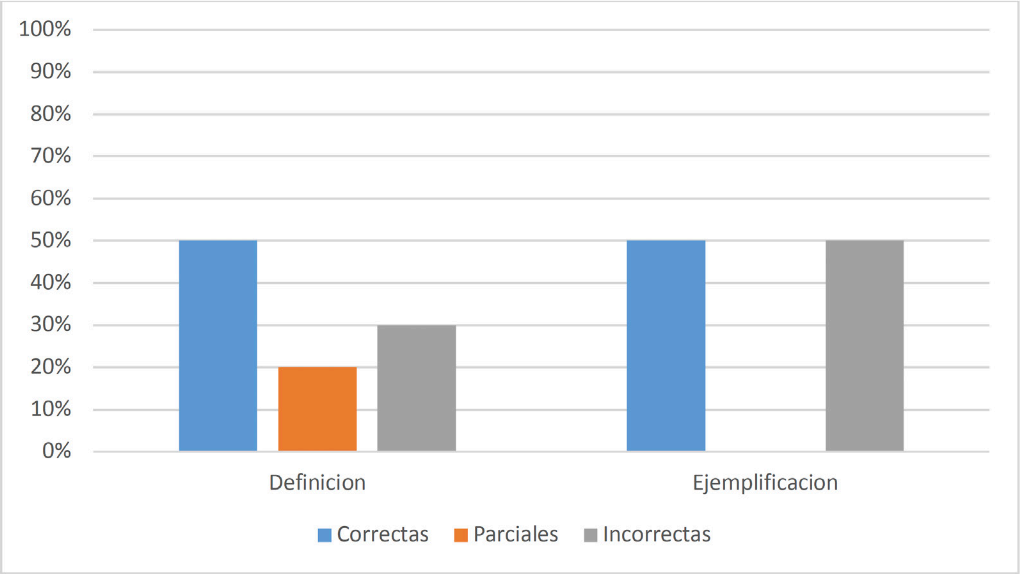


Figura 32. Porcentaje de respuestas correctas en correlación de Pearson.

La participante 1 definió incorrectamente el concepto, intenta referirse a las variables, pero nada respecto a qué de esas variables, los participantes 2 y 5 no pudieron definir el concepto. Los participantes 3, 4 y 5 aportaron ejemplos incorrectos, sus ejemplos no cumplen con ninguna característica ni objeto primario matemático de correlación de Pearson, el ejemplo del participante 3 hace referencia a la moda y no a relación entre variables, mientras que el ejemplo de la participante 4 hace referencia a comparación entre dos cosas respecto a una misma variables y no relación entre variables, la participante 5 si menciona dos variables, pero están mal aplicadas, sólo hace referencia a valores de esas dos variables, los participantes 1 y 2 no pudieron aportar ejemplos para correlación de Pearson.

Por otro lado, los participantes 6, 7, 8 y 9 definen y ejemplifican correctamente, es decir, ejecutan ambas categorías de manera correcta, sus definiciones no son necesariamente formales, pero cumplen con los objetos matemáticos del concepto de correlación de Pearson, en sus ejemplos cumplen con la definición de Correlación de Pearson y no omiten ni agregan elementos que no correspondan, cabe mencionar que ninguno de los participantes del grupo conocía esta fórmula.

Los participantes 1, 2 y 5 ejecutaron ambas categorías erróneamente, es decir, definieron y ejemplificaron incorrectamente correlación de Pearson, la participante 1 cuenta con estudios de secundaria mientras que la participante 5 cuenta con bachillerato trunco, sin embargo, el participante 2 cuenta con estudios de licenciatura. Los participantes 3 y 4 definen parcialmente y ejemplifican incorrectamente, ambos cuentan con bachillerato y bachillerato trunco respectivamente. Los participantes mencionados no conocían correlación de Pearson.

Por otro lado, los participantes 6, 7, 8, 9 y 10 ejecutan ambas categorías correctamente, es decir, definen y aportan ejemplos correctos a correlación de Pearson, de estos participantes ninguno conocía este tema a pesar de que todos tienen estudios universitarios con excepción del participante 6 que cuenta con bachillerato trunco.

Nótese que en este tema de correlación de Pearson a pesar de que en ambas categorías hubo casi las mismas ejecuciones correctas que en desviación estándar, también hubo más ejecuciones incorrectas. Las ejecuciones incorrectas en ambas categorías son de los participantes quienes tienen bachillerato y secundaria con excepción del participante 2, cuyo nivel escolar es de licenciatura. Sin embargo, a pesar de que ninguno de los participantes del grupo 2 tiene experiencia ni conoce correlación de Pearson, las ejecuciones correctas en ambas categorías fueron aportadas por participantes con estudios de licenciatura, con excepción del participante 6, que cuenta con bachillerato trunco. Dentro de las ejecuciones incorrectas hubo participantes que no pudieron aportar tanto definiciones como ejemplos debido a la complejidad del tema, a pesar de que el material multimedia de este tema está desplegado con los diversos recursos semióticos, mismos que permitieron a los participantes que ejecutaron correctamente ambas categorías, lo anterior puede deberse a que correlación de Pearson es operativamente más compleja que desviación estándar, al igual que su definición y lógica de uso, por lo que se requiere de previos conocimientos estadísticos que sólo la educación superior puede proporcionar para comprender temas complejos.

Tabla 19
Definiciones y ejemplos de Correlación de Pearson del Grupo 2

Definición	Ejemplos
CORRELACIÓN DE PEARSON	
Correctos	Correctos
Participante 6: *Es un análisis de dos variables para ver que tanto se presentan una con la otra sin afectarse directamente.* ***Participante 7:*** *es, este… dos variables que son diferentes pero que pueden tener relación porque están juntas.* ***Participante 8:*** *Es la manera en que se relacionan una y otra variables.* ***Participante 9:*** *También es una medida estadística para poder… Se necesitan de dos variables para poder medir la correlación que hay entre estas dos variables, puede que dependa una de la otra o que no tengan nada que ver una con la otra y es de forma cuantitativa.* ***Participante 10:*** *Si, la correlación de Pearson es una medida estadística que te permite ver como se relacionan 2 variables, aunque decía que no significa que una influya sobre la otra.*	***Participante 6:*** *Puede ser en la medicina, personas que sufren hipertensión y ver cuántas de ellas también tienen diabetes y ver si aumenta la hipertensión que tanto afecta en la diabetes.* ***Participante 7:*** *En los negocios se maneja mucho esta variable, yo como empresaria tengo la variable de que si aumenta el dólar me afecta en mis ganancias.* ***Participante 8:*** *Pues podría ser como el nivel de relación que tiene el peso con la estatura.* ***Participante 9:*** *Por ejemplo, con una amoxicilina sola, entonces si le agregan con clavulánico o por ejemplo un analgésico que lleva naproxeno con paracetamol, se puede tomar esta fórmula para saber si incrementa el efecto analgésico o no hay ninguna relación en ello.* ***Participante 10:*** *Un ejemplo, mmm… [Silencio prolongado] por ejemplo, la cantidad de llamadas telefónicas para ofrecer un producto y la cantidad de ventas hechas en un mes.*

Parciales	Parciales
Participante 3: *El segundo fue de… eh… igual más o menos de sacar la media y el promedio y el valor de cuanto había de cercanía entre el examen de español y matemáticas (quieres decir de la relación entre español y matemáticas).* **Participante 4:** *Para saber qué tipo de relación tiene cierto tipo de cosas (se refiere a cuanta relación puede haber entre 2 variables) .*	
Incorrectos	Incorrectos
Participante 1: *Pues sí, lo que yo entendí es (tartamudea) para dos cosas parecidas pero que son diferentes.* **Participante 2:** *No definió.* **Participante 5:** *No definió.*	**Participante 1:** *no ejemplificó.* **Participante 2:** *No ejemplificó* **Participante 3:** *Pues igual el mismo ejemplo de la venta de cuáles son los días que se genera ganancia que otros.* **Participante 4:** *Por ejemplo, si vas a la… por ejemplo al Chedraui y compras y compras una pantalla y luego vas a la Aurrera y luego vas a otro lado y compras igual una pantalla, igual la misma, pero va a ser un valor diferente.* **Participante 5:** *pues es para calcular las calificaciones ¿no? en una salía más o menos y en otra no.*

PRUEBA T DE STUDENT

En la Figura 33 puede apreciarse que el 60% de las definiciones aportadas son correctas, mientras que el 40% no cumplen con las características de la definición; en los ejemplos, el 20% de las aportaciones son parciales y el 30% incorrectas, mientras que el 50% restante son correctas.

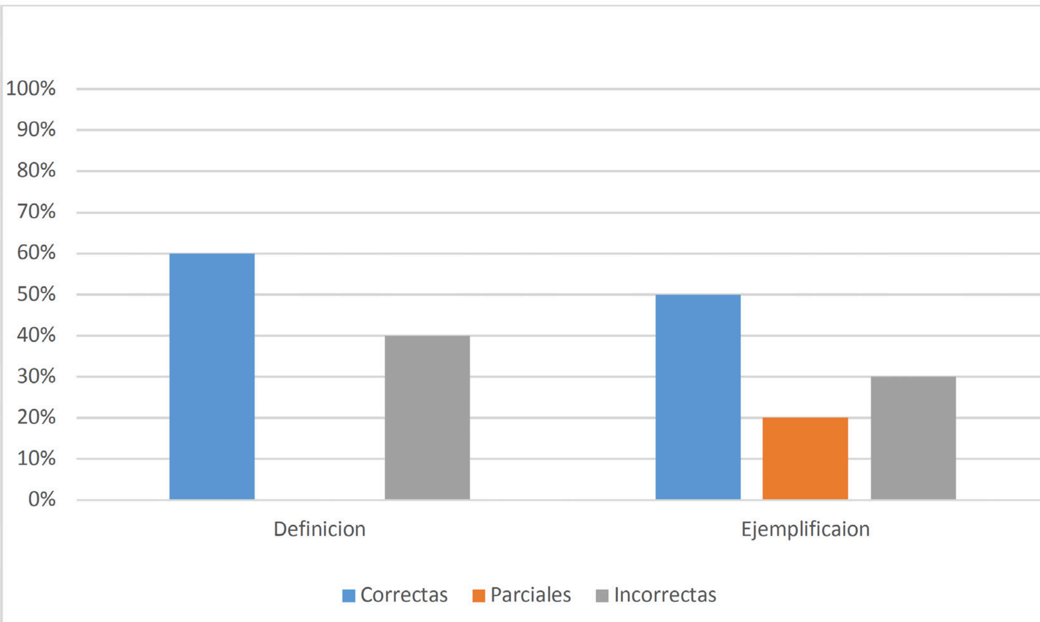


Figura 33. Porcentajes de respuestas de prueba t de student.

En la Tabla 20 se muestran las definiciones y ejemplos dadas por los participantes. Como se puede observar, para prueba t de student no hay definiciones parciales por parte del grupo 2, pero sí ejemplos parciales aportados por los participantes 4 y 6, cuyos ejemplos expresan comparación entre muestras, pero la participante 4 no menciona contra qué otra muestra se tiene que comparar el ejemplo del que parte, mientras que el participante 6 si explicita una muestra poblacional comparada con una población en general, pero agrega el elemento de hipótesis en cada muestra, y las hipótesis deben ser tomando en cuenta las dos muestras que se están comparando, además de que incluye que se deben comparar variables cuando estas sobran dentro del concepto de prueba t de student. Los participantes 1, 4 y 5 aportaron definiciones incorrectas, la participante 1 intenta definir con un ejemplo que no tiene nada que ver con el concepto, la participante 4 intenta describir el material multimedia como definición, mientras que la participante 5 sólo menciona que es respecto a dos muestras, lo cual es verdad, pero no define nada respecto a qué con esas dos muestras, no está presente ningún objeto matemático característico del concepto, el participante 3 no pudo aportar definición alguna para prueba t de student. Para los ejemplos incorrectos, los participantes 1, 3 y 5 fueron incapaces de proporcionar algún ejemplo que cumpla con las características de prueba t de student.

Sin embargo, los participantes 2, 7, 8, 9 y 10 ejecutan ambas categorías de manera correcta, es decir, definen y ejemplifican correctamente, sus definiciones no son formales, pero cumplen con las características de prueba t de student, también muestran los elementos primarios que la componen y no agregan ni dejan ausentes elementos, de igual manera, los ejemplos cumplen con la definición de Prueba t de student. El ejemplo del participante 2 no corresponde al tipo de prueba t que fue desarrollado en el material multimedia, sin embargo, es correcto porque corresponde al tipo de prueba t con una sola muestra, pero comparada en diferentes momentos. Cabe mencionar que la participante 8 fue la única del grupo que conocía esta fórmula en sus estudios de licenciatura.

En este tema hubo más ejecuciones correctas en ambas categorías en el grupo 2 que en los dos temas anteriores y casi los mismos errores que en desviación estándar a pesar de que sólo una participante conocía este tema y que es el tema más complejo del curso estadístico. Lo anterior puede deberse a que prueba t de student es el tema más complejo en cuanto al procedimiento para resolver la fórmula, es decir, los objetos primarios de los que está compuesto son más complejos que los de los temas anteriores, además del orden el que se van desplegando para la resolución final de la fórmula. Por otro lado, la prueba t de studen se usa para análisis estadísticos complejos, por lo tanto, las características de su definición son complejas, sin embargo, el despliegue ordenado de los diversos recursos semióticos para explicar el significado del concepto permitió generalizar las características de este hacia contextos cotidianos.

Tabla 20
Definiciones y ejemplos para Prueba t de student del Grupo 2

Definición	Ejemplos
PRUEBA T DE STUDENT	
Correctos	Correctos
Participantes 2: *la tercera que era la formula t de student o mejor conocida como fórmula t es para saber si hay diferencias entre dos muestras, para saber si hay alguna diferencia, podría decirse de esa manera, aunque sea muy mínima pero que haya una diferencia.* ***Participante 6:*** *Es para sacar una hipótesis de algo determinado entre los sujetos de prueba y la población en general y verificar si la hipótesis es cierta o falsa (se refiere a si se acepta o no).* ***Participante 7:*** *pues es básicamente de varias muestras sacar mis hipótesis de si son iguales o no son iguales (se refiere a las hipótesis nula y alterna, si se rechaza o se acepta)* ***Participante 8:*** *La prueba t nos sirve para ver el comportamiento entre una muestra y una población total y ver si ese comportamiento se asemeja y podemos ver si, digamos si esa muestra podría explicar algún objetivo en especial que nosotros tengamos respecto a la población total.*	***Participante 2:*** *para ver si hay alguna diferencia de… igual al hablando del deporte de… mmm… podría ser de rendimiento, antes de macro ciclo y compararlo con el rendimiento después del macro ciclo.* ***Participante 7:*** *Para lanzar un producto, y quiero ver si es más viable para hombre o para mujer hago este estadístico para decir que es mejor para el hombre o es mejor para la mujer.* ***Participante 8:*** *Pues a lo mejor teniendo una población, pon tu, tenemos una población de 5000 estudiantes de economía, entonces de esa tenemos una muestra de 324, entonces en lugar de que nosotros encuestemos a 5000 vamos a encuestar a 324, vamos a ver el promedio que tienen, entonces el promedio de la población es "x" y el de la población es "y", entonces cuando hacemos todo el procedimiento de la prueba t podemos ver si nuestra muestra que nosotros obtenemos del total puede explicar el promedio de la población total.*

Definición	Ejemplos
PRUEBA T DE STUDENT	
Correctos	Correctos
Participante 9: *En la prueba se te necesitan de dos muestras, una como individual y una como de la población (aunque en prueba t si se pueden comparar dos muestras, en este ejemplo se refiere a la media de la muestra y a la media de la población) para poder sacar, bueno hablaba de una hipótesis para saber si realmente tienen diferencias significativas entre ellas o no las hay.* ***Participante 10:*** *Prueba t es otra medida estadística que te permite comparar dos cosas, mmm… creo que había varias maneras de aplicarlo, una muestra con una población o entre dos muestras, para ver si son iguales o diferentes.*	***Participante 9:*** *Bueno, puede ser te digo para saber el rendimiento en una competencia, entonces necesitan saber el, por ejemplo, en natación, cual es la velocidad que, el tiempo que llevan hacerlo en ciertos metros de su piscina, entonces para saber si necesitan aumentar ese rendimiento, esa velocidad lo comparan con algunas otras instituciones igual que tengan que ver con el deporte.* ***Participante 10:*** *Si, puede ser cuando comparas el desempeño en alguna cosa de estudiantes de diversas universidades privadas con alumnos de varias universidades públicas y ves si hay diferencia o no, cual es mejor o cosas así.*
Parciales	Parciales
	Participante 4: *Entonces por eso sería más, por ejemplo, si te sacan sangre en un examen de glucosa ahí ya te ponen el índice que es, que tienes y cuál es la diferencia o cosas así.* ***Participante 6:*** *por ejemplo, en la prueba de un tratamiento nuevo a las personas que se les está dando, que variables tienen contra la población en general, que efectos secundarios podría tener y checar esa hipótesis con el grupo específico que la está tomando contra la población en general.*

Incorrectos	*Incorrectos*
Participante 1: *pues también fue como para diferenciar de dos líneas o dos sustancias o dos cosas que son aparentemente muy semejantes pero que son diferentes.* ***Participante 3:*** *No definió* ***Participante 4:*** *ah… pues está bien, habla sobre la investigación de t de student que se puede llamar solo prueba t, por lo que entendí se puede utilizar más en el método científico.* ***Participante 5:*** *Pues es para ver dos muestras.*	***Participante 1:*** *no ejemplificó.* ***Participante 3:*** *No ejemplificó.* ***Participante 5:*** *No ejemplificó.*

Dentro del Grupo 2, los participantes quienes ejecutaron correctamente ambas categorías en los 3 temas (participantes 7, 8, 9 y 10) cuentan con estudios de licenciatura, sin embargo, el participante 2 también cuenta con licenciatura y sólo ejecuta correctamente ambas categorías en prueba t de student, incorrectamente ambas categorías en correlación de Pearson y parcialmente ambas categorías en desviación estándar. Los participantes quienes ejecutaron ambas categorías erróneamente en los tres temas (participantes 1 y 5) cuentan con secundaria y bachillerato trunco, de igual manera los participantes quienes ejecutaron ambas categorías parcialmente y erróneamente, sin ninguna ejecución correcta en los 3 temas (participantes 3 y 4) cuentan con bachillerato y bachillerato trunco respectivamente, sin embargo, el participante 6 también cuenta con bachillerato trunco y en correlación de Pearson tuvo una ejecución correcta en ambas categorías, mientras que en desviación estándar y prueba t define correctamente pero sus ejemplos son parciales en ambos temas. Nótese que los participantes quienes conocían una o dos de los temas son los participantes que tienen estudios de licenciatura (participantes 2, 7, 8, 9 y 10).

VALORACIÓN DE LOS RECURSOS SEMIÓTICOS

En la Figura 34 puede apreciarse que todos los recursos tuvieron una evaluación muy positiva, la gran mayoría con el 100% de aprobación, los ejemplos y las imágenes fueron los mejor evaluados con el 80% de totalmente de acuerdo y el 20% de acuerdo, pero otros recursos semióticos como el color, apoyos visuales, audio, tablas, flechas, el orden de las diapositivas y el desglose de las fórmulas también fueron evaluados entre totalmente de acuerdo y de acuerdo.

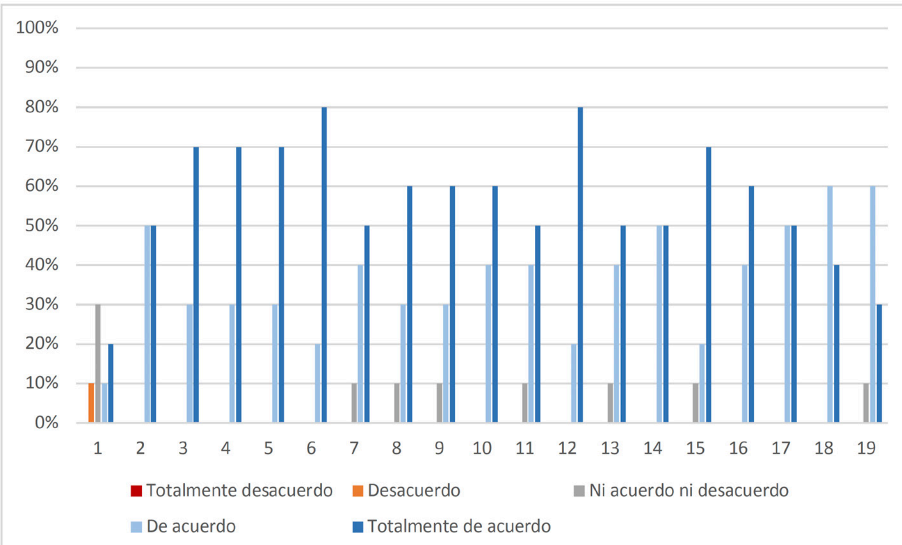


Figura 34. Evaluación de recursos semióticos (Grupo 2 – sección B). 1) Mi comprensión de las clases de estadística es buena. 2) Las diapositivas son comprensibles. 3) La secuencia de las diapositivas es comprensible. 4) El procedimiento de las fórmulas es comprensible. 5) El procedimiento desglosa claramente las fórmulas. 6) Los ejemplos son útiles para entender las fórmulas. 7) Entendí todos los temas a pesar de no conocerlos. 8) Las definiciones son comprensibles. 9) Las explicaciones ayudan a entender los conceptos. 10) El apoyo visual permite entender las fórmulas a pesar de no conocerlas. 11) Las imágenes ilustran suficiente al texto. 12) Las imágenes ayudan al mejor entendimiento de la fórmula. 13) Las figuras ayudan a comprender las fórmulas. 14) Los colores ayudan a la comprensión de la fórmula. 15) El movimiento ayuda a la comprensión de la fórmula. 16) El audio ayuda a la comprensión de la fórmula. 17) Las tablas ayudan a entender los temas. 18) Las flechas asocian bien el texto con las imágenes. 19) después de ver las presentaciones de PowerPoint puedo dar un ejemplo.

En la Tabla 21 se muestran las opiniones brindadas acerca del material multimedia por parte del Grupo 2. Las observaciones acerca del material multimedia y los diversos recursos semióticos que lo componen se centran en la flexibilidad que brindan los materiales, pues resultó ser innovador para los participantes de este grupo.

Al igual que el grupo 1, los participantes del grupo 2 comentan la facilidad de entender y recordar el material por el lenguaje sencillo utilizado y las características semióticas del material como las imágenes, movimiento, colores, figuras, tablas, ejemplos y el audio.

Para el grupo 2 los ejemplos y las imágenes son los recursos que más ayudaron durante la revisión de los tres temas estadísticos. Además, resaltan la flexibilidad de controlar su propio ritmo de aprendizaje, en cuanto tenían dudas o no entendían algo podían retroceder. Al respecto, el participante 10 menciona que fue tal el desglose que casi no tuvo necesidad de retroceder y entendió los tres temas a pesar de no conocerlos; considera además que, si no pudiera retroceder cuando no entiende y controlar su ritmo, no hubiera entendido el resto del material.

Todos los participantes de este grupo mencionan que la experiencia durante la revisión de los materiales multimedia es positiva porque los materiales son muy específicos y desmenuzan la información de tal manera que pueden entenderla. En ese sentido, las participantes 1 y 7 del grupo dos reportaron haberse sentido nerviosas porque era nuevo lo que estaban viendo, no sabían de qué se trataban. En el caso del participante 3 le resultó confuso ver las fórmulas desde el inicio, pero conforme fue revisando el material se sintió orientado.

En relación con lo anterior, los participantes de este grupo consideran que entendieron el material independientemente de si pudieron definir y ejemplificar correctamente. Las participantes 1 y 5 ejecutaron ambas categorías en los tres temas de manera incorrecta, sin embargo, ellas se perciben positivamente en su desempeño, consideran que entendieron los temas

Al igual que el grupo 1, los participantes del grupo 2 aportaron críticas constructivas, sugerencias para poder mejorar los materiales multimedia, sus observaciones son variadas, algunos consideran innecesario los círculos y líneas mientras que otros no, la participante 7 considera que los audios deben mejorarse o quitarse porque iban desfasados o no correspondían al avance de los materiales, sin embargo, la participante 9 considera que el audio le facilitó el avance en los materiales, otros participantes sugirieron más color, más ejemplos e incluso poner ejercicios, las diferentes opiniones y en algunos casos contrarias se debe a las características individuales de cada participante y cómo influyen éstas en su aprendizaje.

Tabla 21
Opiniones y valoración del material multimedia del Grupo 2 – sección B

VALORACIÓN DEL GRUPO 2
Participante 1: *Eh… pues no, para mí al parecer este…pues fue lo suficiente [silencio prolongado] lo suficiente para entenderlo, creo que no le agregaría nada ni tampoco le quitaría, al principio tenía miedo de no entenderle, pero los ejemplos y lo demás son muy buenos.*
Participante 2: *Realmente tienen muy buen…muy buena ejemplificación, se entiende, pero hay un error aquí que… que, bueno, que he escuchado mucho, que no debería de ser tan de un solo golpe… porque la atención promedio de la población es de 15 minutos en general, y ya en la segunda presentación me perdí un poco y ya en la tercera me perdí todavía un poco más. Yo creo que hace falta un poco de más color.*
Participante 3: *Bueno no, al principio no le entendía al punto al que querían llegar, pero… pero ah… pero conforme iba viendo la diapositiva le iba entendiendo a lo que al principio fue una fórmula que no sabía ni que pedo y a cómo iba viendo la presentación ya me di cuenta que cosa significaba para cada o para sacar las fórmulas, para sacar el resultado.*
Participante 4: *Están bien, bueno están bien explicadas, te lo explican bien paso a paso cada… cada uno de sus puntos.*
Participante 5: *Estaba muy nerviosa, no sé por qué [Risas] a la primera si le entendí, a la segunda también un poquito más… a la tercera también, y más por… este… por como las desglosas y así, pues si se entienden. Tus ejemplos son muy buenos para explicar, igual tú te explicas muy bien porque o sea… iba yo viendo y leyendo y aparte de tu lo explicabas lo iba yo leyendo. Quizá le pondría más ejemplos.*

VALORACIÓN DEL GRUPO 2
Participante 6: *Bien, de hech, son muy amigables, son fáciles de digerir, es muy didáctico, este… vuelvo a lo mismo, o sea… muy accesible. Considerando que yo no conocía ninguna de las fórmulas de las tres presentaciones eh… fue muy gráfico, muy específico y explicó muy bien todo. Me gusta porque el cambio de simbología que mane… que llega a tener la diapositiva esta especificada para evitar tener confusiones, los ejemplos son muy tangibles, vuelvo a lo mismo, a pesar de que eran nuevas para mí, las entendí bien, porque cuando iba a la escuela es un poco más tedioso porque este… aquí es proactiva la clase, con diapositivas, tú vas a tu ritmo, si no entendiste algo te regresas, cosa que con el maestro no, el maestro lo hace general y explica y si entendiste bien y si no, ya pasó.* ***Participante 7:*** *Este… pues en la primera me sentí nerviosa, pero en la segunda ya sabía cómo es esto y se me hizo muy fácil y la tercera si la sentí difícil porque definitivamente no conocía esa fórmula. Yo pienso que las líneas que se convertían en división me confundían más, las figuras de los círculos como que no… el audio como que se corta o dicen otras palabras a lo que dice el texto, entonces o te escuchaba o te leía y pues no…. pero si está bien explicado, considero que son muchas diapositivas, pero si está muy bien explicado. El desglose de la fórmula está muy bien, yo creo que con un poquito de más de color y más ejemplos.* ***Participante 8:*** Son útiles, son diferentes a otras que yo he visto, o sea yo como ya vi el tema de, por decir de desviación estándar y el coeficiente de Pearson se me hicieron tediosa, pero, por ejemplo, ésta de prueba t me refrescó algunas cosas que ya se me habían olvidado porque pues no es un tema fácil. Yo creo que facilita, porque no te haces tanto, bueno, por decir en la fórmula de prueba de t no podrías identificar bien cuál es el numerador porque es como una fracción con muchas fracciones, entonces ahí te pierdes, pero ahí sí estuvo bien. Igual en las otras. Si, si es didáctico, quizás lo pondrías ahorita como para exponer y eso, pero quizás después de cada… después de que lo veas quizás sea como chido que pongas como ejercicios.

VALORACIÓN DEL GRUPO 2
Participante 9: *Mmm… pues si está bien, mmm… me gusta que tenga el audio, vas explicando poco a poco, entonces tienes como que la forma como de –¿sabes qué? No le entendí, puedo regresar otra vez (hace alusión a controlar el propio ritmo) hasta que me concentre. A veces era un poco repetitivo, pero obviamente tienes que aclarar, yo creo que poner ejemplos cortitos puede mejorarlo.* ***Participante 10:*** *Yo creo que están bien, iba señalando como que la imagen pórtense a algo de la formula o del cuadro con las flechas, excepto te digo por los círculos, pero por lo demás está bien, además solo tuve que hacer como dos veces, pero me regresé para volver a leer porque no entendía y eso está bien porque si no pudiera regresarle no le hubiera entendido a lo demás (hace alusión al control del propio ritmo de aprendizaje).*

SUMARIO

En promedio, el Grupo 1 obtuvo en los temas del curso el 91% de definiciones correctas, 8.6% parciales y 0% incorrectas. En cuanto a sus ejemplos, el 83% fueron correctos, el 16% parciales y el 1% incorrectos.

El Grupo 2, por su parte, obtuvo en promedio 57.6% de definiciones correctas, el 21.4% parciales y el 21% incorrectas. A su vez, el 55.4% de los ejemplos fueron correctos, el 30% parciales y el 13.8% incorrectos.

Al comparar los resultados de ambos grupos para cada tema, se observa un decremento sistemático en el porcentaje de definiciones y ejemplos correctos del Grupo 2 respecto al Grupo 1, que se distribuye de forma desigual en cada tema entre parciales e incorrectos.

En el tema de rango, el porcentaje de definiciones correctas es menor en el grupo 2 por 36% y el de ejemplos 27%. (Figura 35).

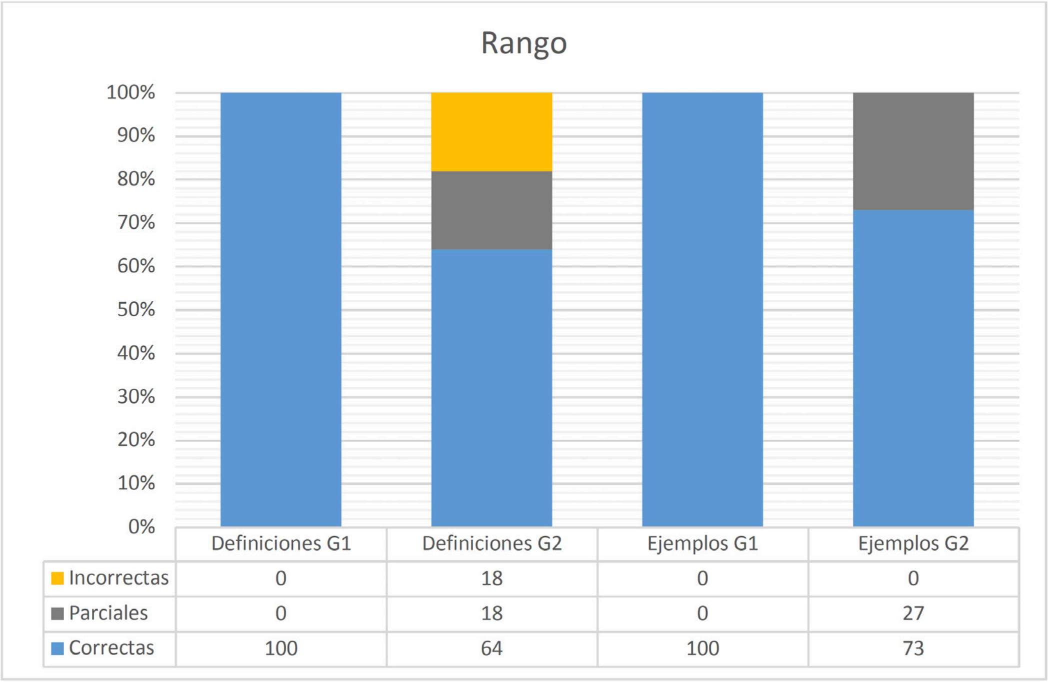
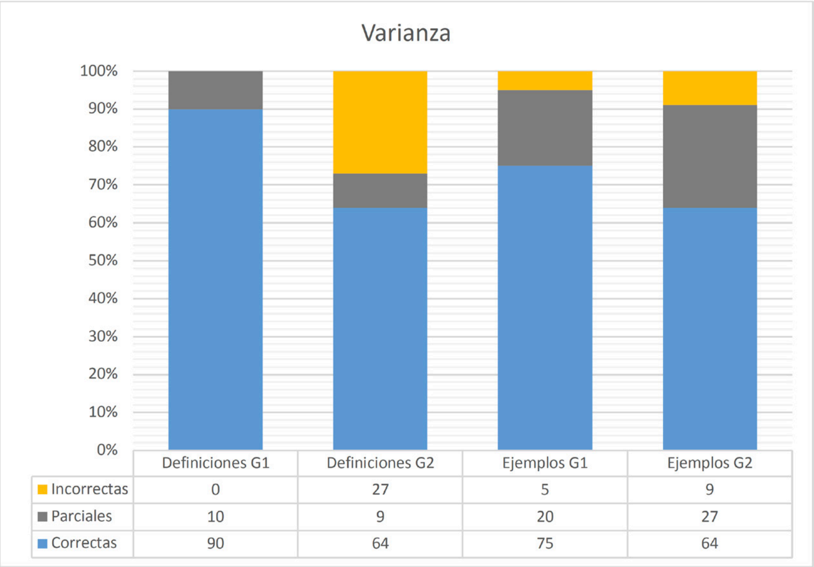


Figura 35. Distribución de respuestas en el tema de Rango en el grupo 1 y 2.

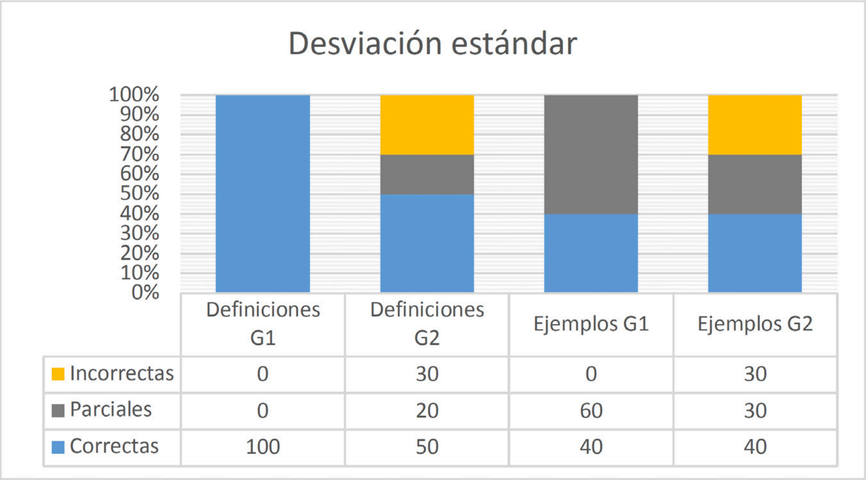
En el tema de varianza, el porcentaje de definiciones correctas del grupo 2 es menor en 26% y 27% mayor en incorrectas, mientras que los ejemplos correctos difieren 11% y los parciales e incorrectos son mayores en 7% y 4% respectivamente (Figura 36).

Las respuestas correctas en el tema de desviación estándar son %50 menores y se distribuyen en 20% parciales y 30% incorrectos. Los ejemplos correctos proporcionados por el grupo 2 se mantienen en el mismo porcentaje, pero incrementa el número de ejemplos incorrectos, en 30% (Figura 37).



	Definiciones G1	Definiciones G2	Ejemplos G1	Ejemplos G2
Incorrectas	0	27	5	9
Parciales	10	9	20	27
Correctas	90	64	75	64

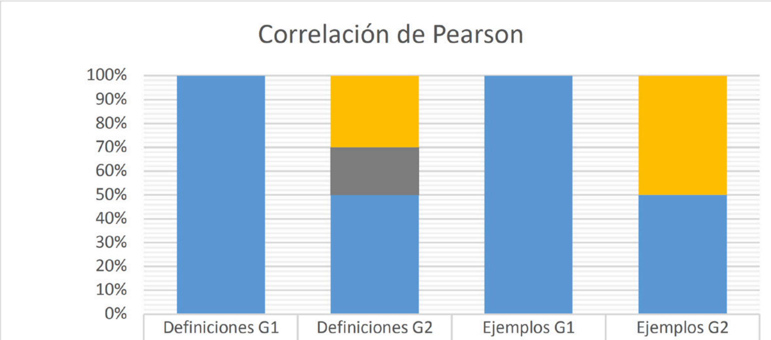
Figura 36. Distribución de respuestas en el tema de Varianza en el grupo 1 y 2.



	Definiciones G1	Definiciones G2	Ejemplos G1	Ejemplos G2
Incorrectas	0	30	0	30
Parciales	0	20	60	30
Correctas	100	50	40	40

Figura 37. Distribución de respuestas en el tema de Desviación estándar en el grupo 1 y 2.

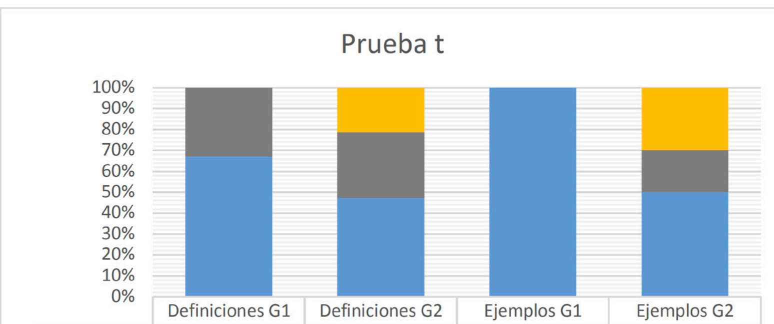
En el tema de correlación de Pearson, el grupo 2 presenta definiciones incorrectas y parciales en 30% y 20%. El porcentaje de ejemplos incorrectos en el grupo 2 es 50% mayor respecto al grupo 1 (Figura 38).



	Definiciones G1	Definiciones G2	Ejemplos G1	Ejemplos G2
Incorrectas	0	30	0	50
Parciales	0	20	0	0
Correctas	100	50	100	50

Figura 38. Distribución de respuestas en el tema de Correlación de Pearson en el grupo 1 y 2.

Finalmente, en el tema de prueba t de student, las definiciones incorrectas del grupo 2 son mayores en 27% y las parciales 7%, mientras que 20% de los ejemplos son parciales y 30% incorrectas (Figura 39).



	Definiciones G1	Definiciones G2	Ejemplos G1	Ejemplos G2
Incorrectas	0	27	0	30
Parciales	33	40	0	20
Correctas	67	60	100	50

Figura 39. Distribución de respuestas en el tema de Prueba t en el grupo 1 y 2.

DISCUSIÓN

Para el desarrollo de los conceptos estadísticos durante el curso, la introducción de la definición jugó un papel importante, ya que permitió a los participantes obtener las características del concepto con los que elaboraron sus participaciones. Al respecto, Vigotsky (citado en Talizina, 2000) menciona que la asimilación de los conceptos se inicia con la comprensión consciente de las características del concepto, lo cual se logra a través de la introducción de la definición. Sin embargo, tales características no fueron suficientes para que todos los participantes asimilaran los conceptos; en ese sentido, Talizina (2000) reporta que en diversos estudios se demostró que el conocimiento verbal de las definiciones no cambia, en esencia, el transcurso de la asimilación del concepto.

Talizina (2000) menciona que la definición del concepto matemático representa la base orientadora para la valoración de los objetos con los cuales se interactúa, es decir, con la definición del concepto matemático, se puede analizar diferentes objetos relacionados con las características de ese concepto, en ese sentido, debido al carácter abstracto y al nivel de complejidad de los conceptos de la Desviación Estándar, la Correlación de Pearson y la Prueba t es imposible tratar con objetos concretos que contengan las características de dichos conceptos, sin embargo, es posible tratar con los objetos matemáticos que componen a dichos conceptos y con las situaciones concretas que contengan las características de tales conceptos, en las cuales es posible aplicar estos conceptos.

La implementación de las TIC permite utilizar diversos recursos semióticos no formales, estos recursos semióticos no formales permiten la materialización de los conceptos matemáticos por su misma naturaleza semiótica no formal; al no serlo permite dirigir la enseñanza de los conceptos desde una etapa materializada Talizina (2000). El carácter semiósico y cultural de la psique humana implica que el aprendizaje de nuevos conocimientos y habilidades puedan ser incorporados a los ya existentes Galperin (citado en Escotto, Sánchez y Baltazar, 2014), muestra de ello es que los sujetos con distintas características de desarrollo y de aprendizaje hayan sido sometidos a un mismo objeto (material multimedia) cuyo rendimiento varía según sus características contextuales y conocimientos previos. Briseño (2015), indica que la visualización de diversos recursos a través de ambientes tecnológicos promueve la construcción de significados matemáticos, pero la interpretación por parte del alumno de la representación de un objeto matemático depende de sus conocimientos previos y del contexto.

Los resultados muestran que, pese a que no conocían algunos temas o tenían nula o alejada experiencia con los conceptos matemáticos, algunos participantes lograron la comprensión de los conceptos estadísticos, esto debido a las características semióticas no formales del material que permitieron recorrer las etapas propuestas de aprendizaje para su interiorización, tal como lo menciona Castro (2014). Lo importante es la organización del contenido y la significación dentro de la enseñanza. Por otro lado, los resultados también son congruentes con lo afirmado por Briseño (2015) respecto a que, si bien la visualización de recursos semióticos provenientes de ambientes dinámicos potencia el entendimiento de ideas matemáticas abstractas, el uso de la de la tecnología como herramienta de enseñanza no garantiza la adquisición de conceptos matemáticos abstractos de manera profesional.

Ávila y colaboradores (2010) mencionan que los significados que los estudiantes asignan a los objetos matemáticos están determinados por el contexto de la enseñanza. En este trabajo se mostró que las aplicaciones y ejemplificaciones de los conceptos matemáticos por parte de los participantes están relacionados con el contexto de estos, es decir, tienen que ver con su situación histórica y cultural.

Encontramos que los participantes tuvieron una experiencia de aprendizaje positiva con el material multimedia, contrario a lo que menciona Córdoba (2014) que el uso de estos nuevos materiales no despierta en los estudiantes una motivación importante y que no representa para ellos una vía que facilite el tránsito hacia el aprendizaje de las matemáticas de manera significativa.

Las diferentes opiniones, en algunos casos contrarias, se debieron a las características individuales de cada participante y a los modelos de aprendizaje a los que están acostumbrados. Una conclusión específica al respecto es que el material debe incluir la posibilidad de elegir cuáles y cuándo reproducir los audios que acompañan la explicación gráfica, a fin de evitar redundancias entre la explicación escrita y la oral, quedando a criterio del usuario la configuración de ese aspecto de la interfaz. Destacan, además, las interferencias en la experiencia debidas a la capacidad técnica de las computadoras en las que era reproducido el material, pues algunos participantes reportaron lentitud en el audio o las transiciones en sus críticas.

Gil, Blanco y Guerrero (2006), por otro lado, mencionan que las matemáticas son percibidas como conocimiento complejo, esto aunado a que, si el docente no cuenta con las competencias adecuadas, pueden generar intranquilidad, miedo, inseguridad y repudio hacia las mismas, Tsvetkova (1988) menciona al respecto que el material debe ser emotivo.

En relación con lo anterior, se recomienda partir de lo simple a lo complejo. Rojas (2015) sostiene que es necesario comprender los objetos primarios (previas definiciones, operaciones básicas, acciones, etc.) para llegar a la asimilación completa del objeto o concepto matemáticos (desviación estándar, correlación de Pearson y prueba t de student), es decir, organizar los contenidos con base en la extensión, diversidad y complejidad del material de enseñanza. En este trabajo se partió de los temas más sencillos hasta los más complejos, iniciando con rango, varianza, desviación estándar, continuando con correlación de Pearson y terminando con prueba t de student. Cabe mencionar que, si bien cada tema tiene sus objetos primarios, un tema puede ser objeto primario de otro más complejo, por ejemplo, para entender correlación de Pearson fue necesario comprender desviación estándar.

Pese a que algunos participantes fueron incapaces de definir o ejemplificar o ambas, al modificarse la tarea proporcionando ejemplos en lugar de pedirlos estos reconocían fácilmente a qué concepto matemático pertenecía. Esta variación demostró que si hay regulación consciente de la acción matemática lo que hace posible identificar y modificar los errores que se presentaron durante en el proceso de aprendizaje y por lo tanto la asimilación del objeto matemático.

CONCLUSIONES

La estadística, al igual que todas las matemáticas, tiene su lengua formal de tipo algebraico compuesta de fórmulas, números y expresiones formales, esto la hace un conocimiento complejo y poco accesible cuando la enseñanza formal no sigue las etapas de aprendizaje adecuadas. Los resultados sugieren utilizar diversos recursos semióticos no formales para representar la lengua formal de las matemáticas, hace de éstas un conocimiento más accesible y comprensible. Es decir, utilizar las alternancias semióticas.

La utilización de las tecnologías que incluyan estos recursos semióticos no formales modifica la experiencia de aprendizaje, al permitirle a los alumnos tener el control de la información que reciben controlando su propio ritmo de aprendizaje. De esta manera, el alumno decide avanzar o retroceder en el contenido cuando lo considere necesario, otorgando mayor flexibilidad a su proceso de aprendizaje.

La dinámica interactiva entre los alumnos, los conceptos matemáticos y los materiales multimedia permite establecer vínculos entre las unidades textuales, visuales y auditivas, generando un proceso de representación matemática. En este trabajo, dichas características semióticas organizadas permieron recorrer adecuadamente las etapas de aprendizaje propuestas por Galperin. La interacción entre los participantes y material multimedia favoreció el paso de lo concreto a lo abstracto, al desarrollar los conceptos matemáticos con otros recursos no formales desde una computadora, facilitaron ir de una etapa materializada del concepto matemático a etapas superiores hasta llegar a la interiorización del concepto. Se sugiere para futuras investigaciones poner ejercicios matemáticos para evaluar la completa interiorización de los objetos matemáticos.

Los resultados obtenidos muestran que el material diseñado tuvo un efecto favorable en el aprendizaje de los conceptos y procedimientos estadísticos seleccionados. Los testimonios y valoraciones de los participantes sugieren que el uso de recursos semióticos no formales en los recursos multimedia elaborados sirvió como una red de apoyos y andamiajes que facilitaron la comprensión del lenguaje matemático formal. No obstante, si bien la utilización de recursos semióticos no formales para representar el lenguaje formal matemático impacta didácticamente en términos de su comprensión, los conceptos matemáticos no pueden ser asimilados sin la existencia previa de todo un sistema de conocimientos y actividades lógicas iniciales, es decir, se hace necesario un mínimo de conocimiento matemático sistematizado y organizado previamente.

Por otra parte, textos escolares que emplean esta clase de recursos, al ser introducidos en formato digital, estos adquieren una dimensión dinámica e interactiva; es decir, mientras en un libro los recursos semióticos son simultáneos y estáticos, en formato digital pueden ser secuenciales, permitiendo jerarquizar o señalizar temporalmente algún elemento de la explicación del tema en cuestión con mayor claridad, incluso bajo el control del propio alumno.

Sin embargo, el empleo de material digital en la enseñanza exige una serie de condiciones técnicas y habilidades previas sin las que es imposible usarlo: conexión eléctrica, computadora, internet (en ciertos casos), hardware y software pertinente, familiaridad con la computadora y su sistema operativo, así como con el software específico necesario para reproducir el material, etc. Estas condiciones son posibles en las escuelas, pero quizás no en todas las casas particulares del os estudiantes.

Aunado a ello, las variaciones de hardware y software generan distorsiones en la experiencia final de usuario, lo que a la postre podría disminuir el interés de los educandos en tales materiales, así como reducir su impacto didáctico. Por tanto, se debe procurar el diseño de materiales en formatos multiplataforma que reduzcan el riesgo de distorsiones, y requieran la menor cantidad de especificaciones técnicas para su correcta ejecución.

Finalmente, deberá seguir trabajándose en estrategias que incrementen la adopción de estos recursos digitales por parte de los docentes en activo y en formación.

Referencias

Álvarez, G. (2012). Hacia una propuesta de análisis semiótico integral de ambientes virtuales. *ONOMÁZEIN*, 25(1), 219-239.

Aragón, E., Castro, C., Gómez, B. y González R. (2009). Objetos de aprendizaje como recursos didácticos para la enseñanza de matemáticas. *Apertura*, 9(11), 100-111.

Ariza, M. (2007). Hacia una interpretación semiótica de los signos matemáticos. *Mathesis* 3(2), 227-251.

Ávila, R., Ibarra, S. y Grijalva, A. (2010). El contexto y significado de los objetos matemáticos. *Relime* 13(4), 337-354.

Bautista, M., Martínez, A. y Hiracheta, R. (2014). El uso del material didáctico y las tecnologías de la información y comunicación (TIC's) para mejorar el alcance académico. *Ciencia y Tecnología*, 14, 183-194.

Beiza, E. (2015). *Semiótica en la comprensión del lenguaje matemático.* (Tesis de Maestría en Investigación Educativa inédita). Universidad de Carabobo, Venezuela.

Beuchot, M. (2004). *La semiótica. Teorías del signo y el lenguaje en la historia*. México: Fondo de Cultura Económica.

Briseño, C. (2015). Construcción de conceptos matemáticos mediante la visualización geométrica. *XIV CIAEM-IACME*, 1-12.

Caivano, J. (2005). Semiótica, cognición y comunicación visual: los signos básicos que construyen lo visible. *Tópicos del Seminario*, 13, 113-135.

Cardoso, E. y Cerecedo, M. (2008). El desarrollo de las competencias matemáticas en la primera infancia. *Revista Iberoamericana de Educación*, 47(5), 1-11.

Castañeda, A. y Álvarez, M. (2004). La reprobación en Matemáticas. *Tiempo de Educar*, 5, 141- 172.

Castaño, J. (2008). Una aproximación al proceso de comprensión de los numerales por parte de los niños: relaciones entre representaciones mentales y representaciones semióticas. *Universitas Psychologica*, 7(3), 895-907.

Castellano, A., Jiménez, A. y Urosa, B. (2012). Errores conceptuales en el aprendizaje de las matemáticas con o sin derive. *Revista de Medios y Educación*, 41, 47-61.

Castro, M. (2014). *Variaciones de lenguaje (formal e informal) en el contexto educativo en la ciudad de Tefé (Amazonas, BR): ¿Diversidad o fracaso escolar?* (Tesis Doctoral inédita). Universidad de Valladolid, España.

Castro, W. y Pardo, H. (2005). El computador en la clase de matemáticas: desde lo dinámico y lo semiótico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 727-731.

Coll, C. y Onrubia, J. (2001). Estrategias discursivas y recursos semióticos en la construcción de sistemas de significados compartidos entre profesor y alumno. *Investigación en la escuela*, 45, 21-31.

Córdoba, F. (2014). Las TIC en el aprendizaje de las matemáticas: ¿qué creen los estudiantes? *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*, 1-14.

Domínguez, A. (2010). *La construcción de objetos-lenguaje. Estrategias de Creatividad para la Clase de Español. México: Alfaomega.*

Domínguez, S. (2017) *Uso de las TIC en el proceso enseñanza aprendizaje de la carrera de Cirujano Dentista*. Tesis Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México

Drouhard, J. y Panizza, M. (2009) Aspectos semióticos y lingüísticos en didáctica de la matemática. En *II Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales*. Argentina: FAHCE.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RESME*, 9(1 143-168.

Escotto, A. (2007). El estudio del lenguaje: *lingüística y neuropsicología. En A. Escotto, M. Pérez y N. Sánchez (Eds.), Lingüística, Neuropsicología y Neurociencias Ante los Trastornos del Desarrollo Infantil*. (pp. 3-49). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Escotto, A., y Sánchez, J. (2014). Estrategias de intervención-rehabilitación en las dificultades con el aprendizaje de las matemáticas. México: Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.

Escotto-Córdova, E. A., Sánchez-Ruiz, J. G., Baltazar-Ramos, A. M. (2014). El método de Galperin de la formación de las imágenes mentales y su importancia para la enseñanza de las matemáticas. En A. Escotto y J. Sánchez (Eds.), *Estrategias de intervención-rehabilitación en las dificultades con el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 3–17). México: Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.

Fanaro, M., Otero, M. y Greca, I. (2005). Las imágenes en los elementos educativos: las ideas de los profesores. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 4(2), 1-24.

Fernández, C. y García, J. (2012). Lectura de la imagen: ¿semiótica o hermenéutica? *Imaginario visual*, 2(4), 48-55.

Flores, C. F. (2015) *La tecnología digital en la enseñanza experimental de la ciencia.* México: Lito Grapo.

Flores, M., Ponce, B. y Castillo, M. (2011). *Determinación de los factores de reprobación en alumno de la materia de estadística*. Memorias en extenso XIV Congreso APCAM: Chihuahua.

Gil, I., Blanco, N. y Guerrero, B. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 349, 551-559.

Godino, J. (2004). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros.* Granada: Proyecto Edumat Maestros.

González, V., Escotto, A., Sánchez, J. y Baltazar, A. (2016). Recursos semióticos en la estadística: Alternancias de lenguaje en el discurso docente, estudio de caso. *Revista electrónica de psicología de la FES Zaragoza-UNAM*, 6(12), 45-63.

Gros, B. (2000) El ordenador invisible: hacia la apropiación del ordenador en la enseñanza. España: Gedisa

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5ta. Ed.). México: McGraw-Hill.

INEE. (2018). PLANEA resultados nacionales 2017. México: INEE.

INEE. (2018). PLANEA resultados nacionales 2018. México: INEE.

Juárez, B. y Robles, O. (2013). Las matemáticas y el entorno socioeconómico como causa de deserción escolar en el nivel medio superior en México. *Multidisciplina*, 15, 72-90.

Kress, G. (2010). *Multimodality. A social semiotic approach to contemporary Communications*. London: Routledge.

Lim, C. (2007). "Effective integration of ICT in Singapore schools: pedagogical and policy implications". *Education Tech Research De*, 55, 83–116.

Manghi, D. (2010). Recursos semióticos del profesor de matemática: funciones complementarias del habla y los gestos para la alfabetización científica escolar. *Estudios Pedagógicos*, 36(2), 99-115.

Mayer, R. (2001). *Multimedia Learning*. USA: Cambridge University Press.

Negroponte, N., Resnick, M., y Cassell, J. (2003). *Creating a Learning Revolution*. MIT Media LAB. Recuperado de www.unesco.org/

OCDE (2016). PISA 2015. Resultados clave. Disponible on-line:
https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015results-in-focus-ESP.pdf

Ortiz, L. (2002). El aprendizaje de las matemáticas, un problema social. *Gaceta Universitaria*, 2(256), 14-15.

Rees, F. (2001) *Equipos de trabajo. 10 pasos para obtener resultados*. México: Prentice Hall Hispanoamericana

Ritchey, F. J. (2002). *Estadística para las ciencias sociales. El potencial para la imaginación estadística*. México: McGraw-Hill.

Rodea, R. (2019). *Una propuesta educativa con TIC para abordar el tema del cerebro y la conducta en el bachillerato*. (Tesis de Maestría). Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Rojas, P. J. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de la ciencia*, 33.1, 155-161.

Salmina, N. G. (2017). La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. En N. Talizina, Y. Solovieva y L. Quintanar (Coord.), Enseñanza de las matemáticas desde la teoría de la actividad (pp. 33–68). México: Ediciones CEIDE.

Talizina, N. F. (2000). *Manual de psicología pedagógica*. México: Universidad Autónoma de San Potosí.

Tsvetkova, L. S. (1988). Bases teóricas, objetivos y principios de la enseñanza rehabilitatoria. En L. Quintanar y Y. Solovieva (Coord.). *Rehabilitación neuropsicológica: historia, teoría, y práctica* (pp. 177-192). México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria* (9-10 años). (Tesis de Doctorado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.

Viera, A. (2009). El desarrollo del lenguaje y la actividad matemática, dos elementos básicos en la práctica educativa en la etapa infantil. *CEE Participación Educativa*, 12, 77-86

Vygotski, L. S. (2000). *Obras escogidas (Vol. III)* (L. Kuper, Trad.). Madrid: Visor. (Original publicado en 1931).

Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno-Lógicas*, 63-85.

Wertsch, J. V. (1998). *Mind as action. New York*, US: Oxford University Press.

Wood, D., Bruner, J., y Ross, G. (1976) The role of tutoring in Problem Solving. *Journal of Child Psyshology and Psyachitry*, 17(2), 89-100.

Zapata, L. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? *Revista Virtual Católica del Norte,* 33, 234-247.

Apéndice 1

Cuestionario de evaluación de recursos semióticos
Introducción

Éste es un cuestionario para evaluar de los recursos semióticos utilizados en las presentaciones, la intención es obtener tu opinión acerca del tipo de recursos semióticos (colores, figuras, gráficas, flechas, movimiento, voz, etc.) utilizados para explicar cada tema de estadística.

Instrucciones: Lee cuidadosamente cada pregunta, responde lo que se te pide y tacha la opción de respuesta que más se acomode a tu experiencia durante las presentaciones de Power Point.

Edad: ***Sexo:*** ***Ocupación:*** ***Grado de estudios:***

Última calificación en estadística: ***Fecha:***

¿Conocías los temas antes de ver las presentaciones? (SI) (NO)

	Totalmente desacuerdo	**Desacuerdo**	**Ni acuerdo ni desacuerdo**	**De acuerdo**	**Totalmente de acuerdo**
Mi comprensión de las clases de estadística es buena					
Las diapositivas son comprensibles					
La secuencia de las diapositivas es comprensible					
El procedimiento de las fórmulas es comprensible					
El procedimiento desglosa claramente las fórmulas					
Los ejemplos son útiles para entender las fórmulas					
Entendí todos los temas a pesar de no conocerlos					
Las definiciones son comprensibles					
Las explicaciones ayudan a entender los conceptos.					
El apoyo visual permite entender las fórmulas a pesar de no conocerlas					

	Totalmente desacuerdo	**Desacuerdo**	**Ni acuerdo ni desacuerdo**	**De acuerdo**	**Totalmente de acuerdo**
Las imágenes ilustran suficiente al texto					
Las imágenes ayudan al mejor entendimiento de la fórmula					
Las figuras ayudan a comprender las fórmulas					
Los colores ayudan a la comprensión de la fórmula					
El movimiento ayuda a la comprensión de la fórmula					
El audio ayuda a la comprensión de la fórmula					
Las tablas ayudan a entender los temas					
Las flechas asocian bien el texto con las imágenes					
Después de ver las presentaciones de Power Point puedo dar ejemplos					

ALTERNANCIAS SEMIÓTICAS:

ESTRATEGIA DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

La enseñanza que aporta la historia de las matemáticas

Las matemáticas son una lengua (un sistema de signos y significados) formal que se enseña con otra lengua, una natural. En el caso del español, se enseñan matemáticas entre los 580 millones de hablantes de esa lengua. El paso del uso la lengua española cotidiana a la lengua formal de las matemáticas es un ejemplo, entre muchos, de lo que llamamos alternancias semióticas: el cambio de un signo por otro para comunicar el mismo significado (en vez de una palabra un dibujo, o en vez de un dibujo un gesto, en vez de un gesto un objeto-estatua) o construir nuevos significados y signos.

Las investigaciones que años antes habíamos realizado nos llevaron a sospechar que los profesores con la reputación de pésimos profesores preferían utilizar en todo momento la lengua formal de las matemáticas (figuras, números, gráficas, curvas, ecuaciones, etc.), mientras que restringían el uso de la lengua cotidiana para nombrar las categorías matemáticas, por ejemplo, a la par que escribían en el pizarrón 2x + y, decían "dos equis más ye", o la usaban para dictar ejemplos y problemas a resolver, o para preguntar "¿entendieron", ¿hay alguna pregunta", y temas por el estilo. Por el contrario, los profesores con la mejor reputación solían tener un equilibrio en su uso. Decidimos pasar a investigar sistemáticamente esta sospecha.

Esperamos que este libro sea de utilidad teórica, didáctica y práctica para los estudiosos de las matemáticas, así como para los profesores y alumnos.

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza,
Campus I. Av. Guelatao No. 66 Col. Ejército de Oriente,
Campus II. Batalla 5 de Mayo s/n Esq. Fuerte de Loreto.
Col. Ejército de Oriente.
Iztapalapa, C.P. 09230 Ciudad de México.
Campus III. Ex fábrica de San Manuel s/n,
Col. San Manuel entre Corregidora y Camino a Zautla,
San Miguel Contla, Santa Cruz Tlaxcala.

http://www.zaragoza.unam.mx

9 786073 044783