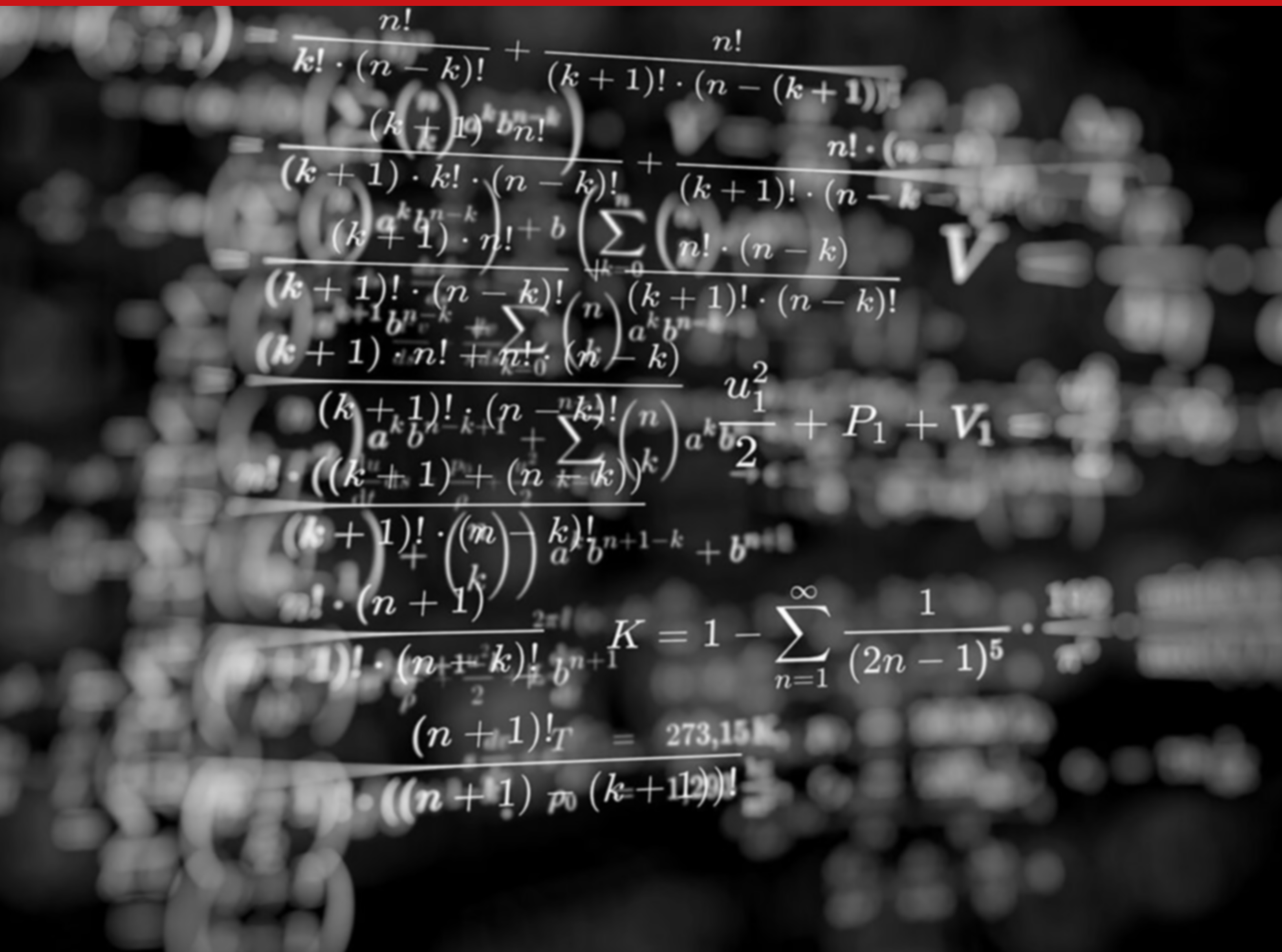
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden con aplicaciones en Ingeniería Química y Química Farmacéutico Biológica

Genaro Altamirano García



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden con aplicaciones en Ingeniería Química y Química Farmacéutico Biológica

Genaro Altamirano García

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza

Datos para catalogación bibliográfica

Autor: Genaro Altamirano García

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden con aplicaciones
en Ingeniería Química y Química Farmacéutico Biológica.

UNAM, FES Zaragoza, agosto de 2024.

Peso: 20.9 MB.

ISBN: 978-607-30-9332-3.

Diseño de portada: Carlos Raziel Leaños.
Diseño y formación de interiores: Israel Alvarez Mundo

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden con aplicaciones
enIngeniería Química y Química Farmacéutico Biológica.

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza
Av. Guelatao # 66, Col. Ejército de Oriente,
Alcaldía de Iztapalapa, C.P. 09230, Ciudad de México, México.

Contenido

Dedicatoria

A mi mamá.

Agradecimientos

Por supuesto que todo material didáctico se debe a la continua interacción entre el docente y los y las estudiantes.

A los alumnos y alumnas de Biología, Q. F. B. e Ingeniería Química de la FES “Zaragoza”, que por razones obvias no podemos nombrar a todos aquí, pero que juntos enseñamos y aprendimos, va mi más profundo agradecimiento. Juntos hicimos del salón de clase un laboratorio del proceso de enseñanza aprendizaje, juntos evolucionamos, no solo en una formación disciplinaria, sino también con valores que nos permiten ser y estar en esta dimensión.

Gracias también a los revisores anónimos de este libro, que me ayudaron a mejorar la versión final del trabajo.

A todos y todas que hicieron posible este libro… Gracias.

Prólogo

¿Por qué es importante para los estudiantes de licenciatura, del área de las ciencias físico – matemáticas y de las ingenierías, y también del área de las ciencias biológicas, químicas y de la salud aprender acerca de las matemáticas?, y, ¿de manera particular sobre una de las ramas de esta ciencia llamada ecuaciones diferenciales? Las respuestas a estas preguntas deben darse en los mismos sentidos en que están formuladas, es decir, atendiendo al tema de las matemáticas y al de las ecuaciones diferenciales.

El primero. Las matemáticas forman parte de la cultura general de la individua e individuo sin importar su nivel académico, aun cuando su conocimiento, uso y aplicación sea en el nivel básico. Por lo que toca a alguien que estudia el nivel licenciatura, se afirma que tiene la necesidad de aprender matemáticas porque prácticamente todas las carreras requieren de esta área de conocimiento, aunque sea en ínfima medida, debido a que, por ejemplo, debe aprender a realizar cálculos o gráficos de índoles diferentes, y también debe aprender a interpretarlos. Por lo tanto, la matemática es la ciencia que le aporta estos conocimientos. Y se vuelve aún más necesario cuando esa licenciatura es en alguna de las dos áreas de conocimiento científico mencionadas arriba y a las que está dirigido el presente texto, porque, si bien es cierto que el núcleo de conocimientos al que está obligada u obligado a aprender la y el estudiante no son las matemáticas, ésta sí constituirá una herramienta básica a la que deberán recurrir para poder entender lo que le presentará y demandará tanto su formación académica como su ejercicio profesional. Por ahora, bastará afirmar que, sin las matemáticas, su formación estaría incompleta.

El segundo. En cuanto a las ecuaciones diferenciales, las y los estudiantes de esas dos áreas científicas deben aprender sobre esta rama de la matemática porque ésta forma parte de ese bagaje intelectual que le ayudará a entender los temas estudiados desde una visión dinámica, esto es, cuando se requiere la observación desde la perspectiva de los cambios que le ocurren a una variable identificada como variable dependiente en términos o función de, cuando menos una variable establecida como variable independiente. Esta relación dinámica puede explicarse como el cambio instantáneo de la variable dependiente conforme cambia la variable independiente, y por esa misma razón (cambio instantáneo), el tiempo se constituye en la variable independiente empleada en muchas ocasiones, aunque no es la única. Una vez que se ha identificado como ocurre ese cambio instantáneo mediante una ecuación diferencial, lo que sigue es determinar (con algún método de solución de ecuaciones diferenciales) en forma integral el cambio global o total de esa variable en relación con el cambio, también global, de la variable independiente. Por lo tanto, el conocimiento sobre ecuaciones diferenciales le proporciona al estudiante de estas dos licenciaturas los aprendizajes acerca de cómo enfrentar problemas académicos o reales en los que se encuentren fenómenos dinámicos, ya sea que dependan del tiempo o de alguna otra variable.

Un poco de historia. Lo que está a punto de encontrar la lectora o el lector en este libro, es el resultado de varios siglos de estudios en las matemáticas, sintetizado en forma didáctica para su uso en la formación de los futuros profesionistas de las licenciaturas en ingeniería química y química farmacéutica biológica. Como ocurre con cualquier área del conocimiento, los nuevos conocimientos suceden, se descubren y se integran a los ya establecidos en un periodo dentro del desarrollo evolutivo de la sociedad, y son protagonizados por un cúmulo de personas y no por una sola. Los que se tratan en el presente texto, los relacionados con las ecuaciones diferenciales, el periodo en el que se desarrolla la mayor parte de la teoría que los fundamente se ubica en la historia en los siglos XVII a XIX, como ocurrió con tantos otros conocimientos en diferentes ciencias. Dentro del grupo de los personajes que dedicaron tiempo a descubrir y aportar conocimientos en la rama de las ecuaciones diferenciales, son célebres los apellidos Newton, Leibniz, Bernoulli, Euler, Fermat, Lagrange y Laplace en la historia moderna de las ecuaciones diferenciales. También, aunque no igualmente famosos, pero con contribuciones importantes a la teoría de las ecuaciones diferenciales están los apellidos Riccati, D'Alembert, Goldbach, Clairaut, entre otros. Sin embargo, el nombre de Arquímedes de la antigua Grecia debe incluirse, no por desarrollar algún conocimiento sobre ecuaciones diferenciales sino para mencionar que su contribución fue mostrar el proceso inverso de la derivación dos mil años antes de que ésta se inventara, es decir, el proceso de integración, recordando que las operaciones de diferenciación o derivación y la de integración, son ambas inversas una de la otra.

Sólo para abonar a la estimulación del interés de la lectora o el lector por las matemáticas y su historia, no debe dejarse pasar la oportunidad para mencionar la famosa rivalidad científica entre Newton y Leibniz. Ambos son íconos de la ciencia de los siglos XVII y XVIII y están estrechamente relacionados, de una forma u otra, con las ecuaciones diferenciales, y también son considerados como fundadores del área de la matemática llamada cálculo, aunque cada uno por su lado y a partir de enfoques e intereses diferentes. Newton, por un lado, estudiaba el movimiento cuando se dio cuenta de la necesidad de inventar una nueva forma de aproximación al entendimiento de este fenómeno, y para ello propuso un lenguaje matemático no formalizado hasta ese momento. Se trataba del cálculo infinitesimal al que después se llamaría cálculo diferencial. Leibniz, por su parte, se encontraba interesado en los problemas geométricos relacionados con la tangente a una curva y las líneas asociadas con aquella, conocidos desde la antigua Grecia pero que no habían podido resolverse. Para abordar esta problemática, también tuvo que inventar su propio lenguaje y terminología, y una nueva teoría. Se trataba de lo que ahora se conoce como cálculo integral. Tanto el cálculo diferencial como el cálculo integral son ahora áreas del conocimiento, de la matemática sumamente importantes y útiles. Se reconoce en la actualidad que el nombre de ecuaciones diferenciales se debe a Leibniz.

¿Qué aporta este texto al estudiante? Las ecuaciones diferenciales son expresiones matemáticas que, cuando se utilizan para modelar o representar el comportamiento de un fenómeno físico o social, muestran el comportamiento dinámico de estos, es decir, cómo es que su resultado va variando como efecto del cambio de la variable o variables de las cuales depende. Desde luego que esta perspectiva de las ecuaciones diferenciales necesita de un marco conceptual claro y preciso, y, además, de los métodos de solución adecuados que a través del desarrollo teórico diversos estudiosos han propuesto y formalizado. Estas son las ideas que la lectora y el lector del presente texto estarán esclareciendo conforme avancen en su estudio. En otras palabras, lo que las y los estudiantes de ingeniería química y de química farmacéutica biológica hallarán en este texto son los conceptos teóricos y prácticos relacionados con las ecuaciones diferenciales, los diferentes métodos para resolverlas, y, la aplicación a casos representativos de dichas áreas de ejercicio profesional, todas estas cuestiones presentadas con el enfoque didáctico que merece el tema.

Debe resaltarse que el presente libro está escrito con un enfoque pedagógico con cuando menos dos características que lo convierten en un material muy útil para la enseñanza y aprendizaje de esta área de conocimiento (las ecuaciones diferenciales). La primera es considerar de muy alta relevancia e importancia mostrar paso a paso el desarrollo de los conceptos o ejemplos propuestos, lo que muy pocos textos comerciales hacen, logrando con esto que el aprendizaje de la lectora o el lector sea alcanzado. La segunda es que presenta varios ejemplos resueltos, tanto conceptuales como de aplicaciones en las carreras de ingeniería química y química farmacéutica biológica, ambas importantes en la oferta educativa de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, y en general, de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Algo que las y los estudiantes interesados en el tema objeto de estudio de este texto deben saber es que, para poder enfrentar con éxito las instrucciones y los aprendizajes relacionados con las ecuaciones diferenciales y salir avante de ello y sólidamente preparadas y preparados, se requieren dos tipos de conocimiento previo muy importantes: las operaciones de derivación y las respectivas de integración, es decir, necesitarán del cálculo diferencial e integral y las demás áreas matemáticas que lo apoyan, conocimientos que han adquirido en semestres o unidades precedentes. Y también deben saber que esos conocimientos los deberán buscar y repasar en otros textos, porque el presente sólo trata, como se menciona arriba, acerca de los relacionados con las ecuaciones diferenciales y sus métodos de solución.

El autor. Varios años dedicados a la enseñanza de las matemáticas y algunas de sus áreas como la de ecuaciones diferenciales, convierten al autor en una autoridad reconocido en la materia, tanto por las generaciones de alumnas y alumnos a quienes ha instruido en las licenciaturas de ingeniería química y química farmacéutica biológica de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, como por sus colegas y pares de la misma institución. Cuenta con dos maestrías, una en educación matemática y una en economía. También posee el grado de doctor en economía. Sus estudios de posgrado los llevó a cabo en la Universidad Nacional Autónoma de México.

Alejandro Juvenal Guzmán Gómez

Profesor de Ingeniería Química

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM

Introducción

Este libro que tienes en tus manos sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden, es el resultado del trabajo y la experiencia de 20 años, que ha tenido quien esto escribe, al impartir la asignatura de Matemáticas II, en las carreras de **Ingeniería Química (I. Q.) y Química Farmacéutico Biológica (Q. F. B),** de la Facultad de Estudios Superiores “Zaragoza”, UNAM.

La asignatura de Matemáticas II en general, y las ecuaciones diferenciales en particular, son parte de la formación básica de los ingenieros químicos y de los químicos.

En el capítulo I, se describen las generalidades acerca de las ecuaciones diferenciales: qué son, para qué sirven, cuál es la clasificación de las ecuaciones diferenciales, y por qué las estudiamos en las carreras mencionas en nuestra Facultad las estudian. En el capítulo II trata acerca de las ecuaciones diferenciales de variables separables; en el capítulo 3 nos dedicamos a analizar las ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos; posteriormente, en el capítulo 4 estudiamos las ecuaciones diferenciales exacta, e inmediatamente después, en el capítulo 5, las ecuaciones diferenciales inexactas, las cuáles requieren la búsqueda de un factor integrante. Siguiendo con la secuencia, el capítulo 6 trata sobre las ecuaciones diferenciales lineales y en el capítulo 7 estudiamos las ecuaciones diferenciales tipo Bernoulli, en todos estos temas como en el subsecuente que tratamos el tema de las Trayectorias ortogonales, incluimos tanto problemas resueltos como una serie de problemas propuestos, para que el lector ejercite sus habilidades matemáticas en la resolución de problemas de este tipo de ecuaciones.

Más adelante, en el capítulo 9, nos abocamos a la aplicación de las ecuaciones diferenciales en la Ingeniería química y en Q. F. B. Este capítulo es de suma importancia, ya que en este, aterrizamos la utilidad que tiene esta esfera de la matemática en nuestras carreras. Aquí explicamos con el mayor detalle la aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer en ámbitos como la Fisicoquímica, problemas de Velocidad de Reacción, Mezclado, Ley de Enfriamiento de Newton y muchas ramas más de la Química y de la Ingeniería Química. En esta misma sección proponemos a los lectores la resolución de unas decenas de problemas de aplicación.

A lo largo del libro, se hace uso de herramientas computacionales del paquete de programación MATLAB (Laboratorio de Matrices), realizando gráficas para que las explicaciones y el análisis de los resultados de los ejercicios, resulten sumamente didácticos a los lectores de esta obra.

El objetivo de este trabajo es que los estudiantes de las carreras de I. Q. y Q. F. B. de la FES Zaragoza, cuenten con más y mejores materiales didácticos que coadyuven en la formación académica de nuestros futuros profesionistas. Si este esfuerzo contribuye en esa línea, el autor se da por bien servido.

Resumen curricular sobre el autor:

Tiene la licenciatura en Ingeniería Química (I. Q.), por la FES (antes ENEP) “Zaragoza”, UNAM.

Realizó la Maestría en Educación Matemática en la FES “Acatlán”, UNAM.

Realizó la Maestría en Economía en la Facultad de Economía, UNAM.

Es Doctor en Economía, también por la Facultad de Economía, UNAM.

Ha tomado 4 diplomados sobre temas pedagógicos y otros temas relacionados con su actividad docente.

Ha impartido clases en la FES “Zaragoza” de las siguientes asignaturas: Matemáticas I en las carreras de I. Q .y Biología; Matemáticas II en I. Q. y en Q. F. B.; Bioestadística en la carrera de Biología; Métodos Numéricos e Ingeniería Económica en I. Q.

Capítulo 1

Qué son las ecuaciones diferenciales

Aunque los matemáticos puros generalmente se interesan en las matemáticas por sí mismas, como un sistema o estructura, los ingenieros, los químicos y los matemáticos prácticos generalmente se interesan en el empleo de las matemáticas para explicar, describir o ayudar a la comprensión de los fenómenos físicos.

La mayor revolución en los fundamentos científicos y tecnológicos de nuestra actual civilización se debió a la aplicación del cálculo a los problemas físicos. En efecto, gran parte del desarrollo del cálculo fue un resultado del esfuerzo del hombre para formular los problemas físicos en forma matemática de tal manera que los fenómenos físicos relacionados pudieran describirse y comprenderse mejor.

Algunos de estos esfuerzos condujeron eventualmente a un nuevo tipo de ecuación, la ***ecuación diferencial.***

Por ejemplo, sabemos que $\frac{dy}{dx}$ es la razón de cambio de y respecto de x. Supóngase que, por medio de experimentos y observaciones, podemos descubrir una expresión para esta razón. Podemos entonces establecer una ecuación que relacione x, y y dy/dx, y podemos estudiar esta ecuación para encontrar, si es posible, la relación directa entre x y y.

Para ilustrarlo supóngase que observamos la transformación radioactiva del Radio en otras sustancias. Podríamos notar que la velocidad a que se efectúa la transformación es proporcional a la cantidad de radio presente en cada instante. Podría adquirirse esta idea por una gráfica de datos tomados durante un largo período de tiempo. Si x representa la cantidad de *Radio* presente en el tiempo r, entonces dy/dx representa la razón de cambio de $\mathbf{x}$ respecto al tiempo.

1.1 Clasificación de una ecuación diferencial

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene diferenciales o derivadas.

Por ejemplo:

1. $\frac{dy}{dx} = x + 5$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

3. $xy' + y = 3$

4. $y''' + 2(y'')^2 + y' = cosx$

5. $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$

6. $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$

7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$

Si hay una sola variable independiente, como en 1-5, las derivadas son ordinarias y la ecuación se denomina ***ecuación diferencial ordinaria****.*

Si hay dos o más variables independientes, como en la 6 y 7, las derivadas son derivadas parciales y la ecuación se llama ***ecuación diferencial parcial o no ordinaria****.*

El orden de una ecuación diferencial es la derivada de mayor orden que interviene en ella. Las ecuaciones 1,3 y 6 son de primer orden; las 2, 5 y 7 son de segundo orden y la 4 es de tercer orden.

El *grado* de una ecuación diferencial que puede escribirse como un polinomio respecto a las derivadas es el grado de la derivada de mayor orden que intervienen en ella. Todas las ecuaciones de los ejemplos anteriores son de primer grado excepto la 5, que es de segundo grado.

No todas las ecuaciones pueden clasificarse por grado. Por ejemplo, la ecuación:

$$e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

No tiene grado puesto que no puede escribirse como un polinomio en la función desconocida y sus derivadas (a causa del término e^y).

Para determinar el grado de una ecuación diferencial con potencias fraccionarias, como, por ejemplo:

$$[y'']^{\frac{2}{3}} = [y + y']^{\frac{1}{2}}$$

Se eleva a una potencia tal que desaparezcan los exponentes fraccionarios, en este caso a la sexta potencia, para obtener:

$$[y'']^4 = [y + y']^3$$

Y vemos que esta ecuación diferencial es de segundo orden y de cuarto grado.

La observación experimental puede formularse matemáticamente por la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = -k\ x$$

Donde k es una constante de proporcionalidad, y donde el signo negativo indica que la cantidad x está decreciendo respecto al tiempo.

Una ecuación de este tipo implica una función desconocida y su derivada se llama *ecuación diferencial*. Una ecuación diferencial es frecuentemente una expresión de un problema físico en forma matemática. El problema de hallar la función desconocida, esto es, de resolver la ecuación diferencial, se convierte en un problema de técnica matemática.

Sir Isaac Newton y Gottfried Leibniz, quienes independientemente desarrollaron las ideas fundamentales del cálculo, fueron también los primeros en considerar las ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel importante en el estudio que hace el hombre del mundo físico, cuando el problema físico ha sido expresado en forma matemática, se convierte en un problema puramente matemático. Este último aspecto de las ecuaciones diferenciales es el que se considerará enseguida.

Notación**.** Las expresiones ***y', y''. y''' ..., y (n)*** se usan frecuentemente para representar respectivamente la primera, segunda, tercera,…,la enésima derivada de y con respecto a la variable independiente en consideración. Por lo tanto:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = D_x^2 y$$

…si la variable independiente es x**.**

Pero representaría también $\frac{d^2y}{dp^2}$ si la variable independiente es p.

Si la variable independiente es tiempo, generalmente representado por t, las primas se reemplazan por lo general por puntos. Así

$\dot{y}$ representa: $\frac{dy}{dt}$; $\ddot{y}$ representa: $\frac{d^2y}{dt^2}$; etc.

Aunque esta forma no es muy práctica.

Obsérvese que el paréntesis se usa en $y^{(n)}$ para distinguirlo de la potencia *enésima*, $\boldsymbol{y^n}$**.**

Una *ecuación diferencial lineal* es aquella en la cual la variable dependiente y cualquiera de sus derivadas aparecen en un grado no mayor que el primero. La forma general está dada por:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x)y^{(1)} + \cdots + a_0(x) = f(x)$$

Y además que no haya productos entre las variables dependientes y sus derivadas.

1.2 Solución de una ecuación diferencial.

Una solución de una ecuación diferencial ordinaria en dos variables es una relación funcional entre las dos variables que satisfacen la ecuación diferencial.

Si la solución de una ecuación diferencial en $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, tiene la forma:

$$y = f(x)$$

Resultará una identidad cuando y=f(x) y sus derivadas sean sustituidas por y y las derivadas de y en la ecuación diferencial dada. En estos casos f(x) se le llama integral, o una primitiva de la diferencial.

Ejemplo.

Demuestre que $y = 2x^3 + Ax + B$ es una solución de $y'' = 12x$

Solución:

Si $y = 2x^3 + Ax + B$, tenemos que: $y' = 6x^2 + A$

$$y'' = 12x$$

Sustituyendo y´´ en la ecuación diferencial, resulta.

$$\underbrace{12\,x}_{y''} \equiv 12x$$

1. 3 Problemas propuestos.

En las siguientes ecuaciones diferenciales determinar a) orden, b) grado (si es posible), c) si es lineal o no, d) la variable dependiente y e) la variable independiente.

1.1 $(D_x y)^3 = 3x^2 - 1$

1.2 $[D_x^2 y]^{\frac{1}{2}} = [x - D_x y]^{\frac{1}{3}}$

1.3 $(\frac{d^3y}{dx^3})^4 - (\frac{d^2y}{dx^2})^5 + x = 0$

1.4 $x^4\frac{dy}{dx} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} = y^4\frac{d^3y}{dx^3}$

1.5 $dy + (xy - cosx)dx = 0$

1.6 $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$

1.7 $y''' + xy'' + 2y(y')^2 + xy = 0$

1.8 $\frac{d^2v}{dx^2}\frac{dv}{dx} + x(\frac{dv}{dx})^2 + v = 0$

1.9 $[\frac{d^3w}{dv^3}]^2 - (\frac{d^2w}{dv^2})^4 + vw = 0$

1.10 $e^{y'''} - xy'' + y = 0$

1.11 $\sqrt{\varrho' + \varrho} = \sin\theta$

1.12 $y' + x = (y - xy')^{-3}$

1.13 $\frac{d^2\varrho}{d\theta^2} = \sqrt[4]{\varrho + (\frac{d\varrho}{d\theta})^2}$

1.14 $(y'')^2 - 3yy' + xy = 0$

1.15 $x^4y^{(4)} + xy''' = e^x$

1.16 $t^2\ddot{s} - t\dot{s} = 1 - \text{sen}\, t$

1.17 $y^{(4)} + xy''' + x^2y'' - xy' + \text{sen}\, y = 0$

1.18 $\frac{d^nx}{dy^n} = y^2 + 1$

1.19 $[\frac{d^2r}{dy^2}]^2 + \frac{d^2r}{dy^2} + y\frac{dr}{dy} = 0$

1.20 $[\frac{d^2y}{dx^2}]^{\frac{3}{2}} + y = x$

1.21 $\frac{d^7 b}{dp^7} = 3p$

1.22 $(\frac{db}{dp})^7 = 3p$

1.23 $\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$

1.24 $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$

1.25 $y^{III} - 3y^{I} + 3y = 0$

1.26 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

1.27 $(\frac{d^3 w}{dx^3})^2 - (\frac{d^2 w}{dx^2})^2 - xw = 0$

1.28 $L\frac{d^2 Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$

1.29 $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

1.30 $\frac{\partial y}{\partial x} = 1 - xy + y^2$

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables

2.1 Definición de una ecuación diferencial de variables separables

Cuando una ecuación diferencial tiene la forma

$$a(x)f(y)dx + b(x)h(y)dy = 0$$

La ecuación se denomina de variables separables porque la ecuación puede ser escrita en la forma.

$$\frac{a(x)}{b(x)}dx + \frac{h(y)}{f(y)}dy = 0$$

O como

$$F(x)dx + H(y)dy = 0$$

Donde F

$$F(x) = \frac{a(x)}{b(x)}F(x) = \frac{a(x)}{b(x)}, \quad H(x) = \frac{h(y)}{f(y)}$$

Y la solución (curvas integrales) está dada por:

$$\int F(x)dx + \int H(y)dy = C$$

Otra forma de definir una ecuación diferencial de variables separables es: si la ecuación diferencial tiene la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Y si además,

$$M(x,y) = M(x) * M(y)$$

$$N(x,y) = N(x) * N(y)$$

Entonces la ecuación diferencial es de variables separables y su resolución consiste de dos pasos, solo dos:

i) Se separan las variables

ii) Se integran las funciones son sus respectivas variables

2.2 Problemas Resueltos

Ejemplo 1:

Dada la siguiente ecuación diferencial, determinar si es de variables separables, y si así es, resolverla.

$$(3xy + 9x - y - 3)dx—(-xy + 2x - 4y + 8)dy = 0$$

Resolución.

En este caso:

$$M(x, y) = (3xy + 9x - y - 3)$$

$$N(x, y) = (xy - 2x + 4y - 8)$$

Pasamos a factorizar cada función por agrupación:

$$(3xy + 9x - y - 3)dx + (xy - 2x + 4y - 8)dy = 0$$

$$[3x(y + 3) - (y + 3)]dx + [(x(y - 2) + 4(y - 2)]dy = 0$$

$$(y + 3)(3x - 1)dx + (y - 2)(x + 4)dy = 0$$

Como podemos ver:

$$M(x, y) = M(x) * M(y) = (3x - 1)(y + 3)$$

$$N(x, y) = N(x) * N(y) = (x + 4)(y - 2)$$

Por lo que la ecuación diferencial es de **variables separables**. Ahora pasamos a separar las variables dividiendo toda la ecuación entre ***(y + 3) (x + 4)***, para tener las variables agrupadas.

$$\frac{(y + 3)(3x - 1)dx + (y - 2)(x + 4)dy}{(y + 3)(x + 4)} = \frac{0}{(y + 3)(x + 4)}$$

Quedando

$$\frac{(3x-1)dx}{x+4}+\frac{(y-2)dy}{y+3}=0$$

Ya que están separadas las variables, ahora pasamos a integrar las funciones:

$$\int\frac{(3x-1)dx}{x+4}+\int\frac{(y-2)dy}{y+3}=\int 0$$

Las funciones *integrandos* –ambas- son la división de dos polinomios, como son del mismo grado, hacemos la división y aplicamos el *algoritmo de la división*:

$$\frac{3x-1}{x+4}=3-\frac{13}{x+4}$$

$$\frac{y-2}{y+3}=1-\frac{5}{y+3}$$

Por lo tanto, las integrales quedan:

$$\int\left(3-\frac{13}{x+4}\right)dx+\int\left(1-\frac{5}{y+3}\right)dy=\int 0$$

Resolviendo:

$$3x-13ln|x+4|+y-5ln|y+3|=c$$

Esta es la solución, y hemos terminado.

Esta solución se llama **implícita** por que la variable ¨y¨ no está despejada (ni se puede despejar), si¨y¨ estuviera despejada la solución se llamaría, **explícita**.

Ejemplo 2.

Dada la siguiente ecuación diferencial, determinar si es de variables separables, y si así es, resolverla.

$$xy^3dx+e^{x^2}dy=0$$

Resolución.

En este caso, las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ están factorizadas, por lo que no es necesario factorizar, evidentemente es de variables separables; así que para resolverla, únicamente separamos las variables e integramos. ¡Manos a la obra!

Primero dividimos todo entre, y^3e^{x2}

$$\frac{xy^3dx+e^{x^2}dy}{y^3e^{x^2}}=\frac{0}{y^3e^{x^2}}$$

Quedando:

$$\frac{x\,dx}{e^{x^2}}+\frac{dy}{y^3}=0$$

Una vez separadas las variables, pasamos a integrar,

$$\int\frac{x\,dx}{e^{x^2}}+\int\frac{dy}{y^3}=0$$

Acomodamos:

$$\int xe^{-x^2}\,dx+\int y^{-3}\,dy=\int 0$$

La primera integral la resolvemos por sustitución, la segunda es directa.

$u = -x2$

$du = -2xdx$

$$\frac{du}{-2}=xdx$$

$$\int e^u\frac{du}{-2}+\frac{y^{-2}}{-2}=c \qquad -\frac{1}{2}e^u-\frac{1}{2}y^{-2}=c$$

$$-\frac{1}{2}e^{-x^2}-\frac{1}{2}y^{-2}=c \qquad -\frac{1}{2e^{x^2}}-\frac{1}{2y^2}=c$$

Finalmente multiplicamos por -1/2:

$$\boxed{\frac{1}{e^{x2}}+\frac{1}{y^2}=C}$$

Ejemplo 3.

$$xy^2dx + e^x dy = 0, \qquad x \to \infty,\ y \to \tfrac{1}{2}$$

Resolución.

1 Separamos variables:

$$\frac{x\,y^2\,dx + e^x\,dy}{e^x\,y^2} = \frac{0}{e^x\,y^2}$$

$$\frac{x\ dx}{e^x} + \frac{dy}{y^2} = 0$$

2 Integramos:

$$\int x\,e^{-x}\,dx + \int y^{-2}\,dy = \int 0$$

La primera integral se resuelve por partes, la segunda es directa.

$$\int x\,e^{-x}\,dx + \int y^{-2}\,dy = \int 0$$

Hemos terminado, esta es la solución general.

Ahora vamos a calcular la solución particular, para eso vamos a ocupar la información inicial (para calcular c):

$$x \to \infty,\ y \to \tfrac{1}{2}$$

Nota: es importante recordar que: pues lo vamos a ocupar en seguida.

$$\lim_{n\to\infty}\ (-xe^{-x} - e^{-x}) - \frac{1}{1/2} = c$$

$$\lim_{n\to\infty}\ \left(-\frac{x}{e^{-x}} - \frac{1}{e^{-x}}\right) - \frac{1}{1/2} = c$$

Aplicamos el límite: $(-0 - 0) - 2 = c, \qquad c = -2$

Como $c = -2$, entonces la **solución particular** es:

$$\boxed{-xe^{-x} - e^{-x} - \frac{1}{y} = -2}$$

Problema 4.

Resolver: $y' = e^{x-y}$

Resolución.

Primero cambiamos la escritura de la derivada: $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

Aplicamos una ley de los exponentes: $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$

Ahora escribimos la ecuación en la forma diferencial: $e^y = e^x\, dx$

$e^x\, dx - e^y\, dy = 0$

Las variables ya están separadas, ahora integramos: $\int e^x\, dx - \int e^y\, dy = \int 0$

$$\boxed{e^x - e^y = c}$$

La anterior es la **solución general**, no podemos hallar la solución particular porque no nos dan valores de x y y.

2. 3 Problemas Propuestos

1. Dada la siguiente lista de ecuaciones diferenciales, determinar su solución por separación de variables.

	Soluciones
1.1 $\frac{dy}{dx} = \cos 2x$	$y = \frac{1}{2}\sin 2x + c$
1.2 $dx - x^2 dy = 0$	$y = -\frac{1}{x} + c$
1.3 $(x+1)\frac{dy}{dx} = x$	$y = x - ln\|x+1\| + c$
1.4 $xy' = 4y$	$y = cx^4$

Soluciones

1.5 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x^2}$ — $y^{-2} = 2x^{-1} + c$

1.6 $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2y^2}{1+x}$ — $-3 + 3xln|x| = xy^3 + cx$

1.7 $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$ — $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + c$

1.8 $(4y + yx^2)dx - (2x + xy^2)dy = 0$ — $2 + y^2 = c(4 + x^2)$

1.9 $2y(x+1)dy = xdx$ — $y^2 = x - ln|x+1| + c$

1.10 $ylnx\frac{dx}{dy} = (\frac{y+1}{x})^2$ — $\frac{x^3}{3}lnx - \frac{1}{9}x^3 = \frac{y^2}{2} + 2y + \ln(y) + c$

1.11 $\frac{ds}{dr} = ks$ — $s = ce^{kr}$

1.12 $\frac{dP}{dt} = P(1-P$ — $\frac{P}{1-P} = ce^t \ \ o \ \ P = \frac{ce^t}{1+ce^t}$

1.13 $sec^2 x\, dy + cscydx = 0$ — $4cosy = 2x + sen2x + c$

1.14 $e^y senxdx + cosx(e^{2y} - y)dy = 0$ — $-2cosx + e^y + ye^{-y} + e^{-y} = c$

1.15 $(e^y + 1)^2 e^{-y}dx + (e^x + 1)^3 e^{-x}dy = 0$ — $(e^x + 1)^{-2} + 2(e^y + 1)^{-1} = c$

1.16 $\frac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$ — $ln|N| = te^{t+2} - e^{t+2} - t + c$

1.17 $\frac{dy}{dx} = senx(\cos 2y - cos^2 y) - coty = cosx + c$

Soluciones

1.18 $\sqrt{1-y^2}\,dx = dy$ $\quad$ $y = sen\,(\frac{x^2}{2} + c)$

1.19 $(e^x + e^{-x})\frac{dy}{dx} = y^2$ $\quad$ $-y^{-1} = \arctan\,(e^x) + c$

2.- En los siguientes problemas, resuelva las ecuaciones diferenciales sujetas a la condición inicial que se indica.

Soluciones

2.1 $senx(e^{-y} + 1)dx = (1 + cosx)dy \;\; ; \; y(o) = 0$ $\quad$ $(1 + cosx)(1 + e^y) = 4$

2.2 $ydy = 4x(y^2 + 1)^{\frac{1}{2}}dx \;\; ; \; y(0) = 1$ $\quad$ $\sqrt{y^2 + 1} = 2x^2 + \sqrt{2}$

2.3 $\frac{dx}{dy} = 4(x^2 + 1) \; ; \;\; x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ $\quad$ $x = \tan(4y - \frac{3\pi}{4})$

2.4 $x^2y' = y - xy \;\; ; \;\; y(-1) = -1$ $\quad$ $xy = e^{-\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

3.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

3.1 $x\;seny\;dx + \; e^{-x}dy = 0$

3.2 $senydx + (1 - cosx)dy = 0$

3.3 $y\;logx\;dx + (1 + 2y)dy = 0$

3.4 $(2x - 1)cos^4ydx + (x^2 - 2x + 2)dy = 0$

3.5 $y' = e^{x - \frac{y}{2}}$

3.6 $e^{x+y}y' = e^{2x-y}$

4.- Obtener la solución general o particular par a las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables.

4.1 $y' = \frac{2y}{x(y-1)}$ $\quad x = 1, y = 3$

4.2 $sen\ x\ sen\ y\ dx + \cos x \cos y\ dy = 0$ $\quad x = \frac{\pi}{4},\ y = \frac{\pi}{6}$

4.3 $x^2 dx + (xy - y)dy = 0$ $\quad x = -1, y = \frac{1}{2}$

4.4 $(x^2 y + x^2)dx + (xy^2 - y^2)dy = 0$ $\quad x = 4,\ \ y = -2$

4.5 $2xy\ y' = 1 + y^2;$ $\quad x = 2, y = 3$

4.6 $(3xy + 9x - y - 3)dx — (-xy + 2x - 4y + 8)dy = 0$ $\quad x = 1,\ y = 1$

4.7 $dm + 4mtdt = 0$ $\quad t = 0, m = m_0$

4.8 $dy/dx = 1 + y^2$; $\quad y(\pi/4) = 1$

4.9 $dy/dx = e^{x-3y}$ $\quad x = 0,\ \ y = -1$

4.10 $\frac{dy}{dx} = (3 + y) \cot x$; $\quad y(\pi/2) = 4$

Capítulo 3

Ecuaciones Diferenciales de Coeficientes Homogéneos

3.1 Definición de una ecuación diferencial de Coeficientes Homogéneos

Si los coeficientes ***M(x,y) y N(x,y)*** de la ecuación diferencial

$$M (x, y) \, dx + N (x, y) \, dy = 0 \text{ .... } (A)$$

Tienen la propiedad de que

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \equiv \frac{M(ax,ay)}{N(ax,ay)}$$

Donde aa es un número arbitrario, no igual a cero, la ecuación (A) se dice que es una ecuación diferencial de coeficientes homogéneos. Y cuando se cumple esta condición, la ecuación diferencial puede reducirse a una ecuación diferencial de variables separables, usando cualquiera de las sustituciones

$$y = vx \qquad dy = vdx + xdv$$

$$x = wy \qquad dx = wdy + ydw$$

Examinemos más de cerca la naturaleza de las funciones homogéneas.

Definición: se dice que $f(x,y)$ es una función homogénea de grado n, si para algún número real n,

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y) f(tx,ty) = t^n f(x,y), \qquad t \text{ es una constante.}$$

Ejemplo

Sea: $f(x,y) = x - 3\sqrt{xy} + 5y$

$$f(tx,ty) = (tx) - 3\sqrt{(tx)(ty)} + 5(t(y)$$

$$= tx - 3\sqrt{t^2xy} + 5ty$$

$$=t\left[x-3\sqrt{xy}+5y\right]=tf(x,y)$$

$$=tf\,(x,y)$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial es de coeficientes homogéneos de grado 1

Ejemplo

$$f(x,y) = 6xy^3 - x^2y^2$$

$$f(tx,ty) = 6(tx)(ty)^3 - (tx)^2(ty)^2$$

$$= 6t^4xy^3 - t^4x^2y^2$$

$$= t^4\underbrace{[6xy^3 - x^2y^2]}_{f(x,y)}$$

$$\therefore f(tx,ty) = t^4 f(x,y)$$

Es una ecuación diferencial es de coeficientes homogéneos de grado 4

Ejemplo

$$f(x,y) = x^2 - y$$

$$f(tx,ty) = (tx)^2 - (ty)$$

$$= t^2x^2 - ty \neq t^2 f(x,y)$$

La ecuación diferencial es de coeficientes homogéneos de grado 2..

Debemos aclarar que, como sucede con las integrales, sabemos que algunas de ellas se pueden resolver por varios métodos. Las ecuaciones diferenciales también pueden presentar las características de varios tipos. Es decir, una ecuación diferencial de variables separables, también puede ser de *coeficientes homogéneos* o *exacta* o, exclusivamente de *variables separables*.

Hay una manera, no formal, para identificar una ecuación diferencial de coeficientes homogéneos, no es formal, pero resulta muy práctico. Veamos.

Decimos que una ecuación diferencial de la forma:

$$(x^a y^b + x^c y^d + x^e/y^f)dx + \left(x^g y^h + x^i y^j + x^k/y^l\right)dy = 0$$

…es de coeficientes homogéneos si los exponentes de cada término, $x^a y^b$, $x^c y^d, \frac{x^e}{y^f}$, etc., suman (si se están multiplicando) o restan (si se están dividiendo) el mismo número.

Por ejemplo, en la siguiente ecuación diferencial, los exponentes de cada término son:

$$\left(x\,y^3 + x^4 + \frac{x^5}{y}\right)dx + \left(x^2y^2 + x^3y + \frac{x^6}{y^2}\right)dy = 0$$

1+3=**4** **4** 5-1=**4** 2+2= **4** 3+1=**4** 6-2=**4**

Todos los exponentes suman (o restan) 4, y se dice que esta es una **ecuación diferencial de coeficientes homogéneos de grado 4**.

En cambio, la ecuación diferencial:

$$(x\,y^3+x^3+x^5/y^1)dx+(x^2\,y^2+x\,y\text{^}+x^6/y)dy=0$$

Tiene exponentes: *1+3=4* *3* *5-1=4* *2+2=4* *1+1=2* *6-1=5*

Como no son los mismos exponentes, se dice que la ecuación diferencial NO es de coeficientes homogéneos.

Tomaremos otras ecuaciones diferenciales, para aportar más ejemplos que nos refuercen el concepto de la cualidad que cumple una ecuación diferencial de coeficientes homogéneos.

De las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y^2dx + (x^2 + 3xy + 4y^2)\,dy=0$

b) $(x^2+y^2)\,dx+2xydy = 0$

c) $(7x+2y)\,dx + (2x+7y)\,dy=0$

La a) y b) son de coeficientes homogéneos de grado 2.

En cambio, la c) es de grado 1:

Una vez que hemos comprendido a cabalidad la característica que tiene una ecuación diferencial de coeficientes homogéneos, pasamos a explicar el proceso de solución.

3.2 Problemas Resueltos

Ejemplo 1

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(7x + 2y)dx + (2x + 7y)dy = 0$$

Resolución.

Lo primero que observamos es que esta es una ecuación diferencial de coeficientes homogénea de grado 1. De pasada, observamos que no es de variables separables, ya que las variables no se pueden separar.

Ahora pasamos a explicar cómo se resuelve.

1 Hacemos un cambio de variable:

Sea: $y = ux$

2 Ahora diferenciamos: $dy = udx + xdu$

3 Sustituimos tanto a $\boldsymbol{y}$ como a $\boldsymbol{dy}$ en la ecuación.

$$(7x + 2(ux))dx + \big(2x + 7(ux)\big)(udx + xdu)dy = 0$$

4 Y hacemos las operaciones, uff (es más fácil escribir en el pizarrón que aquí, pin… coronavirus cábula!)

$$(7x + 2ux)dx + (2x + 7ux)(udx + xdu) = 0$$

$$7xdx+2uxdx+2uxdx+2x^2\, du+7u^2\, xdx+7ux^2du=0$$

Agrupamos: $7xdx+2uxdx+2uxdx+7u^2xdx\ 2x^2\ du+ 7u\, x^2\ du=0$

Factorizamos dx y du. $(7x+2ux+2ux+7u^2\ x)dx+(2x^2+ 7u\ x^2)du = 0$

$$(7x+4ux+7u^2\ x)dx + (2x^2+ 7u\ x^2)\ du = 0$$

5 Esta ecuación diferencial ahora es de **variables separables**, pues cada paréntesis se puede factorizar, y ahora la resolvemos como una ecuación diferencial de variables separables.

Regla general: **Toda ecuación diferencial de coeficientes homogéneos, se vuelve de variables separables haciendo un cambio de variable**.

Factorizamos: $x(7 + 4u + 7u^2)dx + x^2(2 + 7u)du = 0$

6 Separamos variables dividiendo entre $(7+4u+7u^2)x^2$:

$$\frac{x(7+4u+7u^2)dx+x^2(2+\ 7u)du}{(7+4u+7u^2)x^2}=\frac{0}{(7+4u+7u^2)x^2}$$

$$\frac{xdx}{x^2}+\frac{(2+\ 7u)du}{7+4u+7u^2}=0$$

7 Integramos:

$$\int\frac{xdx}{x^2}+\int\frac{(2+\ 7u)du}{7+4u+7u^2}=\int 0$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{(7u+\ 2)du}{7u^2+4u+7}=\int 0$$

La primera integral es directa, la segunda es por sustitución:

$$w=7u^2+4u+7,$$

$$dw=(14u+4)du$$

$$dw=2(7u+2)du$$

$$\frac{dw}{2}=(7u+2)du$$

Por lo que: $ln|x|+\int\frac{dw/2}{w}=c$

$$ln|x|+\frac{1}{2}\ln|w|=c$$

$$ln|x|+\frac{1}{2}\ln|7u^2+4u+7|=c$$

8 Finalmente, como $y=ux$, entonces: $u=\frac{y}{x}$

$$\boxed{\boldsymbol{ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|7\left(\frac{y}{x}\right)^2+4\left(\frac{y}{x}\right)+7\right|=c}}$$

Hemos terminado con el problema.

Ejemplo 2

$$(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0\,; \qquad x=1,\ y=1$$

En esta ecuación nos dan un valor de x y y $x = 1,\ y = 1)$. Esto es para encontrar el valor de la constante c (que siempre sale al final), y hallar la solución particular.

Resolución:

1 Hacemos el cambio de variable y diferenciamos: $y = ux, \qquad dy = udx + xdu$

2 Sustituimos: $(x^2 + (ux)^2)dx + 2x(ux)(udx + xdu) = 0$

3 Hacemos operaciones: $(x^2 + x^2\ u^2)dx + 2\,x^2\,u^2\ dx + 2\,x^3\,u\ du = 0$

$$(x^2 + x^2\ u^2\ + 2\,x^2\,u^2)dx + 2\,x^3\,u\ du = 0$$

$$(x^2 + 3\,x^2\,u^2)dx + 2\,x^3\,u\ du = 0$$

4 Separamos variables: $x^2(1 + 3\ u^2)dx + 2\,x^3\,u\ du = 0$

$$\frac{x^2(1+3\ u^2)dx\ +\ 2\,x^3\,u\,du}{(1+3\ u^2)\ x^3} = \frac{0}{(1+3\ u^2)\ x^3}$$

$$\frac{x^2dx}{x^3} + \frac{2\,u\,du}{1 + 3\ u^2} = 0$$

5 Integramos: $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2udu}{1+3\ u^2} = 0 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2udu}{1+3\ u^2} = 0$

$$ln|x| + \frac{1}{3}ln|1 + 3\ u^2| = c$$

6 $y = ux, \qquad u = y/x$

$$\boxed{ln|x| + \frac{1}{3}ln\left|1 + 3\ \left(\frac{y}{x}\right)^2\right| = c}$$

Esta es la solución implícita (por que no está despejada y) y también se llama solución general por que no conocemos el valor de c; pero como conocemos un punto: ($x = 1,\ y = 1$) ahora sustituimos en la ecuación solución y calculamos c.

$$ln|1| + \frac{1}{3} ln \left| 1 + 3 \ \left(\frac{1}{1}\right)^2 \right| = c$$

$$c = ln\left|\sqrt[3]{4}\right| = 0.46$$

Por lo tanto, la solución particular (e implícitaes☺):

$$\boxed{\boldsymbol{ln|x| + \frac{1}{3} ln \left| 1 + 3 \ \left(\frac{y}{x}\right)^2 \right| = ln\left|\sqrt[3]{4}\right|}}$$

Ejemplo 3

$$xydx - (x + 2y)^2 dy = 0$$

Resolución.

1 Cambiamos de variable: $y = ux, \qquad dy = udx + xdu$

2 sustituimos en la ecuación diferencial: $x\ u\ x\ dx - (x + 2ux)^2(udx + xdu) = 0$

3 Realizamos operaciones

$$x\ u\ x\ dx - (x^2 + 4ux^2 + 4\ u^2x^2)(udx + xdu) = 0$$

$$ux^2\ dx - (x^2udx + x^3du\ + 4u^2x^2dx + 4\ ux^3du + 4u^3x^2dx + 4u^2x^3du) = 0$$

$$\boldsymbol{ux^2\ dx - x^2udx} - x^3du - \boldsymbol{4u^2x^2dx} - 4\ ux^3du - \boldsymbol{4u^3x^2dx} - 4u^2x^3du = 0$$

4 Agrupamos diferenciales:

$$\boldsymbol{ux^2\ dx - x^2udx - 4u^2x^2dx - 4u^3x^2dx} \qquad - x^3du - 4\ ux^3du - 4u^2x^3du = 0$$

$$\boldsymbol{-4u^2x^2dx - 4u^3x^2dx} - x^3du - 4\ ux^3du - 4u^2x^3du = 0$$

$$(\boldsymbol{-4u^2x^2 - 4u^3x^2})\boldsymbol{dx} + (-x^3 - 4\ ux^3 - 4u^2x^3)du = 0$$

5 Multiplicamos por -1:

$$(4u^2x^2 + 4u^3x^2)dx + (x^3 + 4\,ux^3 + 4u^2x^3)du = 0$$

Esta ecuación diferencial ya es de variables separables.

6 Factorizamos: $x^2(4u^2 + 4u^3)dx + x^3(1 + 4\,u + 4u^2)du = 0$

Separamos Variables:

$$\frac{x^2(4u^2+4u^3)dx}{x^3(4u^2+4u^3)} + \frac{x^3(1+4\,u+4u^2)du}{x^3(4u^2+4u^3)} = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1 + 4\,u + 4u^2)du}{4u^2 + 4u^3} = 0$$

7 Integramos: $\int\frac{dx}{x} + \int\frac{(4u^2+4u+1)du}{4u^3+4u^2} = \int 0$

La primera integral es directa, la segunda es por fracciones parciales.

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{4(u^2 + u + \frac{1}{4})du}{4(u^3 + u^2)} = \int 0$$

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{(u^2 + u + \frac{1}{4})du}{u^3 + u^2} = \int 0$$

$$ln|x| + \int\frac{(u^2 + u + \frac{1}{4})du}{u^3 + u^2} = c$$

$$\int\frac{(u^2 + u + \frac{1}{4})du}{u^3 + u^2}$$

$$\frac{(u + \frac{1}{2})^2}{u^2(u+1)} = \frac{A}{u^2} + \frac{B}{u} + \frac{C}{u+1}$$

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{3}{4}, \quad C = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{(u+\frac{1}{2})^2}{u^2(u+1)}du = \int \frac{\frac{1}{4}}{u^2} + \int \frac{\frac{3}{4}}{u} + \int \frac{\frac{1}{4}}{u+1} = -\frac{\frac{1}{4}}{u} + \frac{3}{4}ln|u| + \frac{1}{4}ln|u+1|$$

Sustituyendo esta integral en la solución de la ecuación diferencial, tenemos:

$$ln|x| - \frac{\frac{1}{4}}{u} + \frac{3}{4}ln|u| + \frac{1}{4}ln|u+1| = c$$

Como $\qquad y = ux, \quad u = y/x$:

$$\boxed{\boldsymbol{ln|x| - \frac{x}{4y} + \frac{3}{4}ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{4}ln\left|\frac{y}{x}+1\right| = c}}$$

Ejemplo 4

$$y^2dx + (x^2 + 3xy + 4y^2)dy = 0; \qquad x = 2, \quad y = 1$$

Resolución.

1 Cambio de variable: $\qquad y = ux, \qquad dy = udx + xdu$

2 Sustituyendo en la ecuación diferencial:Escriba aquí la ecuación.

$$(ux)^2\,dx + (x^2 + 3x(ux) + 4(ux)^2)(udx + xdu) = 0$$

3 Realizamos operaciones:

$$u^2x^2\,dx + x^2udx + x^3du + 3u^2\,x^2dx + 3ux^3du + 4u^3x^2dx + 4u^2x^3du = 0$$

4 Agrupamos diferenciales:

$$u^2\,x^2\,\,dx+x^2\,udx+3u^2\,x^2\,dx+4u^3\,x^2\,dx+x^3du+\,3ux^3du+4u^2\,x^3\,dx=0$$

$$\left(x^2u + 4u^2x^2 + 4u^3x^2\right)dx + \left(x^3 + 3\ \ ux^3 + 4u^2x^3\right)du = 0$$

$$\left(x^2u + 4u^2x^2 + 4u^3x^2\right)dx + \left(x^3 + 4\ ux^3 + 4u^2x^3\right)du = 0$$

Esta ecuación diferencial ya es de variables separables.

6 Factorizamos: $x^2(u+4u^2+4u^3)dx + x^3(1+4\,u+4u^2)du = 0$

Separamos Variables:

$$\frac{x^2(u+4u^2+4u^3)dx}{x^3(u+4u^2+4u^3)} + \frac{x^3(1+4\,u+4u^2)du}{x^3(u+4u^2+4u^3)} = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1+4\,u+4u^2)du}{u+4u^2+4u^3} = 0$$

7 Integramos: $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(4u^2+4u+1)du}{4u^3+4u^2+u} = \int 0$

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{x} + \int \frac{4(u^2+u+\frac{1}{4})du}{4(u^3+u^2+u)} = \int 0$$

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{x} + \int \frac{(u^2+u+\frac{1}{4})du}{u^3+u^2+u} = \int 0$$

$$ln|x| + \int \frac{(u^2+u+\frac{1}{4})du}{u(u^2+u+1)} = c$$

La segunda integral la hacemos por fracciones parciales.

$$\int \frac{(u+\frac{1}{2})^2du}{u(u^2+u+1)}$$

Analizamos el denominador: $u(u^2+u+1)$

Un factor lineal: u (caso 1), y otro factor no lineal: u^2+u+1 ,(caso 3)

Por lo tanto las fracciones parciales son:

$$\frac{u^2+u+\frac{1}{4}}{u(u^2+u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+u+1}$$

Hacemos lo que siempre se hace, i) se multiplica por el denominador, ii) se sustituye la –única- raíz real (cero), para hallar A, iii) se igualan los polinomios y se encuentra B y C.

Así, $A=\frac{1}{4}, B=\frac{3}{4}, C=\frac{3}{4}$

Entonces:

$$\int \frac{(u^2+u+\frac{1}{4})du}{u(u^2+u+1)} = \int \left(\frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{u^2+u+1}\right) du$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{4}}{u} + \frac{\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}}{u^2+u+1}\right) du$$

Antes, de continuar, completamos el cuadrado de u^2+u+1

- Coeficiente de u:1
- Dividimos entre 2: ½
- Sumamos y restamos ½:
- $u^2+u+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1$
- Factorizamos: $u^2+u+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1 = \left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

Regresamos a la integral:

$$\int \left(\frac{\frac{1}{4}}{u} + \frac{\frac{3}{4}u+\frac{3}{4}}{u^2+u+1}\right) = \int \frac{\frac{1}{4}}{u}du + \frac{3}{4}\int \frac{u\,du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} + \int \frac{\frac{3}{4}du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

Con algunos cambios de variable, se obtiene:

$$= \frac{1}{4}\ ln|u| + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}ln\left|\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right| - \text{atan}\,2\left(u+\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{3}{4}.\frac{2}{1}atan\frac{2\ (u+\frac{1}{2})}{1}$$

Todo el problema quedaría (se sustituye u=y/x).

$$\boldsymbol{ln|x| + \frac{1}{4}\ ln|u| + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}ln\left|\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right| - \text{atan}\,2\left(u+\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{3}{4}.\frac{2}{1}atan\frac{2\ (u+\frac{1}{2})}{1} = c}$$

$$\boldsymbol{ln|x| + \frac{1}{4}\ ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}ln\left|\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right| - \text{atan}\,2\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{3}{2}.atan\frac{2\ (\frac{y}{x}+\frac{1}{2})}{1} = c}$$

Esta ecuación se llama solución general por que no conocemos la constante c, como nos dan los valores $x = 2, y = 1$, estos valores se sustituyen en la ecuación anterior, y así obtenemos c

.

$$\ln|2| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right| - \operatorname{atan} 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{3}{2}.\operatorname{atan}\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{1} = c$$

c=1.5

$$\ln|2| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{2}\right| + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right| - \operatorname{atan} 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{3}{2}.\operatorname{atan}2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 1.5$$

Por lo tanto, la solución particular quedaría:

$$\ln|x| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right| - \operatorname{atan} 2\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{3}{2}.\operatorname{atan}\frac{2\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\right)}{1} = 1.5$$

Ejemplo 5

Resolver:

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Condición para que una ecuación dada sea de coeficientes homogéneos.

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \equiv \frac{M(ax,ay)}{N(ax,ay)}$$

Cambios de variable.

$$A) y = vx \;\; ; \;\; dy = vdx + xdv$$

$$B) x = wy \;\; ; \;\; dx = wdy + ydw$$

Operaciones.

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - xy} = \frac{(ax)^2 + (ay)^2}{(ax)^2 - (ax)(ay)}$$

$$= \frac{a^2x^2 + a^2y^2}{a^2x^2 - a^2xy}$$

$$= \frac{a^2(x^2+y^2)}{a^2(x^2-xy)} \Rightarrow Ec. Dif. de\ coeficientes\ homogéneos\ de\ grado\ 2.$$

$$\therefore \frac{x^2+y^2}{x^2-xy} = \frac{x^2+y^2}{x^2-xy}$$

Como la ecuación diferencial es de coeficientes homogéneos, se procede a realizar un cambio de variable o a sustituir $y = vx$ y $dy = vdx + xdv$, y obtenemos

$$(x^2+y^2)dx + (x^2-xy)dy = 0$$

$$[x^2 + \underset{\underset{y}{\uparrow}}{(vx)}^2]dx + [x^2 - x\underset{\underset{y}{\uparrow}}{(vx)}]\underset{dy}{[vdx + xdv]} = 0$$

$$[x^2 + v^2x^2]dx + [x^2 - vx^2][vdx + xdv] = 0$$

$$x^2[1+v^2]dx + x^2[vdx + xdv] - vx^2[vdx + xdv] = 0$$

$$x^2[1+v^2]dx + x^2vdx + x^3dv - v^2x^2dx - vx^3dv = 0$$

$$[x^2(1+v^2) + x^2v - x^2v^2]dx + [x^3 - vx^3]dv = 0$$

$$x^2[1+v^2+v-v^2]dx + x^3[1-v]dv = 0$$

$$x^2[1+v]dx + x^3[1-v]dv = 0$$

$$\frac{x^2}{x^3}dx + \frac{1-v}{1+v}dv = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{x}dx + \frac{1-v}{1+v}dv = 0} \qquad Observación\ F(x)dx + F(v)dv = 0$$

Aislando el 2° término, e integrando, resulta.

$$\int \frac{1-v}{1+v}dv \Rightarrow Fracción\ impropia.$$

$$\therefore \begin{array}{r|l} & -1 \\ \hline 1+v & 1-v \\ & \underline{-1-v} \\ & 2+0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1-v}{1+v} = -1 + \frac{2}{1+v}$$

$$\therefore \int \frac{1-v}{1+v}dv = \int \left(-1 + \frac{2}{1+v}\right)dv$$

$$= \int (-1)dv + \int \frac{2}{1+v}dv$$

$$= -\int dv + 2\int \frac{dv}{1+v} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{c} t = 1+v \\ dt = dv \end{array}$$

$$= -v + 2\int \frac{dt}{t}$$

$$= -v + 2lnt + c* \quad = \quad v + 2ln|1+v| + c*$$

Entonces, sustituyendo este resultado en la ecuación diferencial de variables separables, obtenemos:

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1-v}{1+v}dv = 0$$

$$\ln x - v + 2\ ln|1+v| = -c* = -\ln c$$

$$\ln x + ln|1+v|^2 + \ln c = v$$

$$\ln cx\,(1+v)^2 = v$$

Como: $y = vx \;\Rightarrow\; v = \frac{y}{x}$

$$\therefore \ln cx\,(1 + \frac{y}{x})^2 = \frac{y}{x}$$

$$\ln cx\,[\frac{x+y}{x}]^2 = \frac{y}{x}$$

Tomando la función inversa

$$cx\,\frac{(x+y)^2}{x^2} = e^{\frac{y}{x}}$$

$$c\,\frac{x}{x}\left[\frac{(x+y)^2}{x}\right] = e^{\frac{y}{x}}$$

$$c\,(x+y)^2 = xe^{\frac{y}{x}}$$

Resolver la ecuación diferencial anterior, para la condición $y(1) = 1$.

Como $c\,(x+y)^2 = xe^{\frac{y}{x}}$

Entonces $c(1+1)^2 = (1)e^{\frac{(1)}{(1)}}$

$$c \cdot 1^2 = ec \cdot 1^2 = e, \qquad c = ec = e$$

$$e(x+y)^2 = xe^{\frac{y}{x}} \quad \Rightarrow \quad \textit{Solución Particular}$$

Ejemplo 6

$$\boldsymbol{y' = \frac{y^2 + x^2}{2xy}}$$

Resolución.

$$2xy\frac{dy}{dx} = y^2 + x^2$$

$$2xy\,dy = (y^2 + x^2)dx$$

$$(y^2 + x^2)dx - 2xy\,dy = 0$$

$$y = ux$$

$$dy = udx + xdu$$

$$((ux)^2 + x^2)dx - 2x(ux)\,(udx + xdu) = 0$$

$$(u^2x^2 + x^2)dx - 2u\,x^2\,(udx + xdu) = 0$$

$$(u^2x^2 + x^2)dx - 2\,u^2x^2\,dx - 2\,ux^3\,du = 0$$

$$(u^2x^2 + x^2 - 2\,u^2x^2)dx - 2\,ux^3\,du = 0$$

$$(x^2 - u^2x^2)dx - 2\,ux^3\,du = 0$$

$$x^2(1 - u^2)dx - 2\,ux^3\,du = 0$$

Separamos variables:

$$\frac{x^2(1 - u^2)dx - 2\,ux^3\,du}{x^3(1 - u^2)} = \frac{0}{x^3(1 - u^2)}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{2u}{(1 - u^2)}du = 0$$

Integramos:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{-2u}{1 - u^2}du = \int 0$$

$$ln|x| + ln|1 - u^2| = c$$

3. 3 Problemas Propuestos

1 En las siguientes funciones, determine si la función dada es homogénea. Si lo es, indique su grado de homogeneidad.

1.1 $x^2 + 2xy - \frac{y^3}{x}$ sol. Homogénea de grado 2.

1.2 $\frac{x^3y - x^2y^2}{x+8y}$ sol. Homogénea de grado 3.

1.3 $\cos\frac{x^2}{x+y}$ sol. No homogénea.

1.4 $lnx^2 - 2lny$ sol. Homogénea de grado 0.

1.5 $(x^{-1} + y^{-1})^2$ sol. Homogénea de grado -2.

2. En los siguientes problemas, resuelva la ecuación diferencial dada usando una sustitución apropiada.

2.1 $(x-y)dx + xdy = 0$ sol. $xln|x| + y = cx$

2.2 $xdx + (y-2x)dy = 0$ sol. $(x-y)ln|x-y| = y + c(x-y)$

2.3 $(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$ sol. $x + yln|x| = cy$

2.4 $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ sol. $\ln(x^2+y^2) + 2\,arctan\frac{y}{x} = c$

2.5 $-ydx + \left(x + \sqrt{xy}\right)dy = 0$ sol. $ln|y| = 2\sqrt{\frac{x}{y}} + c$

2.6 $2x^2ydx + (-1)(3x^3 + y^3)dy = 0$ sol. $y^9 = c(x^3 + y^3)^2$

2.7 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ sol. $(\frac{y}{x})^2 = 2ln|x| + c$

2.8 $y\frac{dx}{dy} = x + 4ye^{-\frac{2x}{y}}$ sol. $e^{\frac{2x}{y}} = 8ln|y| + c$

2.9 $\left(y + xcot\frac{y}{x}\right)dx - xdy = 0$ sol. $xcos\frac{y}{x} = c$

2.10 $(x^2 + xy - y^2)dx + xydy = 0$ sol. $y + x = cx^2e^{\frac{y}{x}}$

3. Resuelva la ecuación diferencial, sujeta a la condición inicial que se indica.

3.1 $xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3; y\,(1) = 2$ Sol. $y^3 + 3x^3 ln|x| = 8x^3$

3.2 $\left(x + ye^{\frac{y}{x}}\right)dx - xe^{\frac{y}{x}}dy = 0\,;\ \ y(1) = 0$ Sol. $ln|x| = e^{\frac{y}{x}} - 1$

3.3 $(x + \sqrt{xy}\,)\frac{dy}{dx} + x - y = x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}};\ \ y(1) = 1$ Sol. $3x^{\frac{3}{2}}ln|x| + 3x^{\frac{1}{2}}y + 2y^{\frac{3}{2}} = 5x^{\frac{3}{2}}$

3.4 $(x + \sqrt{y^2 - xy}\frac{dy}{dx} = y;\ \ y(1) = 1$ Sol. $ln|y| = -2(1 - \frac{x}{y})^{\frac{1}{2}}$

4. Hallar la solución general y la solución particular –si es posible- correspondiente a las condiciones iniciales dadas.

4.1 $y' = \frac{y^2 + x^2}{2xy}$

4.2 $\left[y + \sqrt{x^2 + y^2}\right]dx = xdy$

4.3 $(7x + 2y)dy + (2x + 7y)dx = 0$

4.4 $\left[x\csc\left(\frac{y}{x}\right) - y\right]dx + xdy = 0$

4.5 $(5v - u)du + (3v - 7u)dv = 0$

4.6 $xydx - (x + 2y)^2dy = 0$

4.7 $x^2y' = y^2 + xy\,;\ \ x = 1,\ y = 1$

4.8 $(x^2 + xy\ sen\ y/x)y' = y^2\ sen\ y/x;\ \ x = 1,\ y = \pi/2$

4.9 $y^2dx + (x^2 + 3xy + 4y^2)dy = 0;\ \ x = 2,\ y = 1$

4.10 $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0\,;\ \ x = 1,\ y = 1$

Capítulo 4

Ecuaciones Diferenciales Exactas

4.1 Definición de una ecuación diferencial Exacta

Para comprender este tema, es importante recordar algunos elementos de cálculo diferencial, como antecedentes de las *ecuaciones diferenciales exactas*.

i) La diferencial

En Cálculo Diferencial, se estudia el concepto de *la diferencial*, a saber: dada una función, $y = f(x)$, la diferencial se define como: $dy = f'(x)dx$. De manera similar para dos variables independientes, si $z = f(x,y)$la diferencial de z se define como: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$,

Por ejemplo, si $z = e^{x\,y^2}$, entonces:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$dz = y^2 e^{x\,y^2}dx + 2xye^{x\,y^2}dy \ldots\ldots\ldots (2)$$

ii) Derivadas cruzadas

En Cálculo diferencial en R^n, se estudia el concepto de las derivadas cruzadas, que dice: "la segunda derivada de z, primero respecto a x y luego respecto a y es igual a la segunda derivada de z, primero respecto a y y luego respecto a x":

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Por ejemplo, si $z = e^{x\,y^2}$, entonces:

Primera derivada de z respecto a x: $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^{x\,y^2}$

Ahora derivamos respecto a y: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 e^{x\,y^2}\right) = 2xy^3 e^{x\,y^2} + 2y\,e^{x\,y^2}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2xy^3 e^{x\,y^2} + 2y\,e^{x\,y^2}}$$

Ahora a la inversa.

Primero derivamos respecto a y: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xye^{x\,y^2}$

Ahora respecto a $\boldsymbol{x}$: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xye^{x\,y^2}\right) = 2xy^3e^{x\,y^2} + 2y\,e^{x\,y^2}$

Y llegamos al mismo resultado:

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 2xy^3e^{x\,y^2} + 2y\,e^{x\,y^2}}$$

Una vez, revisados estos temas, iniciamos con el desarrollo de las **ecuaciones diferenciales exactas**, partiendo del siguiente…

Teorema

Si las funciones $M(x,y), N(x,y)$ y las derivadas parciales $M_y(x,y)$ y $N_x(x,y)$ son continuas en una región R^2, una condición necesaria y suficiente para que la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Sea *exacta* es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$

En cada punto de R**.**

Demostración de Teorema

Tomamos la *forma diferencial* de la ecuación diferencial, como la hemos usado para las ecuaciones diferenciales de variables separables y de coeficientes homogéneos, es decir:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Observemos la similitud que tiene esta ecuación la definición de la diferencial (ecuación (1)).

Pues bien, aquí debemos encontrar una función $\boldsymbol{U(x,y)}$, de tal manera que cumpla con la definición de la diferencial, a saber:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dc \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Viendo las ecuaciones (4) y (5) se sigue que:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots....(7)$$

Otra manera de decirlo: buscamos una función $\boldsymbol{U}$ cuya derivada parcial respecto a $\boldsymbol{x}$ sea igual a $\boldsymbol{M(x, y)}$,y la derivada parcial respecto a y sea igual a $\boldsymbol{N(x, y)}$, Una ecuación diferencial que cumple con esas igualdades se llama exacta. Pero como no conocemos $\boldsymbol{U}$, en este momento no podemos saber cuándo cumple con las ecuaciones (6) y (7).

Por lo que tomamos la ecuación (6) y derivamos ambos lados respecto a $\boldsymbol{y}$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} M(x,y)$$

Y ahora tomamos la ecuación (7) y derivamos ambos lados respecto a $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} N(x,y)$$

Pero como las derivadas cruzadas son iguales, entonces:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{M(x, y)} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{N(x, y)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{(8)}}$$

Este es el criterio de exactitud de una ecuación diferencial. Esta identidad es la que usaremos para determinar cuándo una ecuación diferencial es exacta.

Antes de pasar a buscar la función $\boldsymbol{U}$, solución de la ecuación, vamos a tomar varias ecuaciones diferenciales para ejercitarnos en la identificación de exactitud.

Ejemplos

Determinar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas.

a) $(x + 2y)dx + (2x + y)dy = 0$

b) $(y^2 - 2xy + 6x)dx - (x^2 - 2xy + 2)dy = 0$

c) $(ye^{xy} - 2y^3)dx + (xe^{xy} - 6xy^2 - 2y)dy = 0$

Resolución

a) $$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = 2$$

b) $$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 2y - 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}N(x,y) = 2y - 2x$$

c) $$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = xye^{xy} + e^{xy} - 6y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = xye^{xy} + e^{xy} - 6y^2$$

Las tres ecuaciones diferenciales son exactas.

Cálculo de la función $U\,(x,y)$, solución de una ecuación diferencial exacta.

Usando las ecuaciones (6) y (7), y con un poco de álgebra, podemos llegar sin ningún problema a la fórmula solución.

Tomamos la ecuación (6):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x,y) \dots\dots\dots\dots\dots..(6)$$

Aquí, y es constante. Separamos variables:

$$\partial U = M(x,y)\partial x$$

Integramos:

$$\int \partial U = \int M(x,y)\partial x$$

$$U = \int M(x,y)dx + h(y) \dots\dots\dots..(9)$$

Donde $\boldsymbol{h\,(y)}$ es una función arbitraria de $\boldsymbol{y}$, y viene a representar al constante de integración, ya que aquí, $\boldsymbol{y}$ es una constante. Lo siguiente es hallar a $\boldsymbol{h\,(y)}$, para esto, tomamos la ecuación (7):

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x,y) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .(7)$$

Sustituimos U (ecuación (9)) en la ecuación (7):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx + h(y)\right] = N(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + h'(y) = N(x,y)$$

Despejamos $\boldsymbol{h\,(y)}$:

$$h'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

$$\frac{dh(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

$$dh(y) = \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy$$

$$\int dh(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy$$

$$\boldsymbol{h(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy}$$

Ahora, sustituimos $\boldsymbol{h\,(y)}$, en la ecuación (9):

$$U = \int M(x,y)dx + h(y) \ldots \ldots \ldots ..(9)$$

Esta es la fórmula solución de una **ecuación diferencial exacta.**

4.2 Problemas Resueltos

Ejemplo 1

$$(y^2 - 2xy + 6x)dx - (x^2 - 2xy + 2)dy = 0$$

Resolución.

Primerio checamos el criterio de exactitud.

$M(x,y) = y^2 - 2xy + 6x$ $\qquad\qquad$ $N(x,y) = -(x^2 - 2xy + 2)$

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 2xy + 6x) = 2y - 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[-(x^2 - 2xy + 2)] = 2y - 2x$$

Es exacta.

Ahora pasamos a resolverla. Todo el proceso consiste en utilizar la fórmula (9), parte por parte. Empezamos

•Tomamos y resolvemos la primera integral de la fórmula (10):

$$\int M(x,y)dx = \int (y^2 - 2xy + 6x)dx = xy^2 - x^2y + 3x^2,$$

(La *guardamos* en la memoria)

• A esta integral la derivamos respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 - x^2y + 3x^2) = 2xy - x^2$$

• A $N(x,y)$ $N(x,y)$ le restamos $\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$

$$N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

$$[-(x^2 - 2xy + 2)] - (2xy - x^2) = -2$$

- Realizamos la integral: $\int [\, \boldsymbol{N(x,y)} - \frac{\partial}{\partial y} \int \boldsymbol{M(x,y)dx}\,]\boldsymbol{dy}$

$$\int -2dy = -2y$$

- Por lo tanto, la solución es:

$$\boldsymbol{U(x,y) = \int M(x,y)dx + \int [\, N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx\,]dy = C}$$

$$\boldsymbol{U(x,y)} = \; xy^2 - x^2y + 3x^2 + (-2y) = \boldsymbol{c,} \qquad\qquad \text{ó}$$

$$\boxed{\boldsymbol{U(x,y) = \; xy^2 - x^2y + 3x^2 - 2y = c}}$$

Comprobación:

Con la definición de la diferencial:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

$$\boldsymbol{dU(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{(xy^2 - x^2y + 3x^2 - 2y)}\; dx \; + \frac{\partial}{\partial y}\; \boldsymbol{(xy^2 - x^2y + 3x^2 - 2y\;)}\; dy = \boldsymbol{dC}$$

$$\boldsymbol{(y^2 - 2xy + 6x)}\; dx \; + \; \boldsymbol{(2xy - x^2 - 2)}\; dy = 0$$

Llegamos a nuestra ecuación diferencial, por lo que queda comprobado la solución.

Ejemplo 2

$$(3x^2 \, sen \, y)dx + (x^3 \cos y)dy = 0$$

Resolución

Checamos el criterio de exactitud.

$$M(x,y) = 3x^2 \, sen \, y, \qquad N(x,y) = x^3 \cos y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 \, sen \, y) = 3x^2 \cos y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 \cos y) = 3x^2 \cos y$$

Es exacta.

Ahora pasamos a resolverla.

• Tomamos y resolvemos la primera integral de la fórmula (10):

$$\int M(x,y)dx = \int (3x^2 \, sen \, y)dx = x^3 \, sen \, y,$$ (La guardamos)

• A esta integral la derivamos respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 \, sen \, y) = x^3 \cos y$$

• A $N(x,y)$ le restamos $\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$

$$N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

$$x^3 \cos y - x^3 \cos y = 0$$

- Realizamos la integral: $\int [\, N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \,]dy$

$$\int 0dy = c1$$

- Por lo tanto, la solución es:

$$U(x,y) = \int M(x,y)dx + \int [\, N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y)dx \,]dy = C$$

$U(x,y) = \ x^3\, sen\ y + c1 = c,$ **...** ó agrupando las constantes:

$$\boxed{\boldsymbol{U(x,y) = \ x^3\, sen\ y = C}}$$

Comprobación:

Con la definición de la diferencial:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

$$dU(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3\, sen\ y)\ dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^3\, sen\ y\,)\, dy = dC$$

$$(3x^2\, sen\ y)\, dx \ + \ (x^3\ \cos\ \ y\,)\, dy = 0$$

Ejemplo 3

$$(r + sen\theta - cos\theta)dr + r(sen\theta + cos\theta\ \ )\, d\theta = 0$$

Resolución.

En este caso, las variables son diferentes a las que estamos acostumbrados, sin embargo, adaptaremos la resolución a estas “nuevas” variables.

Aquí,

$$M(x,y) = M(r,\theta) = \ r + sen\theta - cos\theta$$

$$N(x,y) = N(r,\theta) = \ r(sen\theta + cos\theta)$$

De aquí sale que, $\boldsymbol{r}$ sería como la $\boldsymbol{x}$, y $\boldsymbol{\theta}$ sería el equivalente a $\boldsymbol{y}$.

Por lo que el criterio de exactitud, para estas variables sería:

$$\frac{\partial M(r,\theta)}{\partial \theta} \equiv \frac{\partial N(r,\theta)}{\partial r}$$

Pasamos a derivar:

$$\frac{\partial M(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(r + sen\theta - cos\theta) = \boldsymbol{cos\theta + sen\theta}$$

$$\frac{\partial N(r,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\, r(sen\theta + cos\theta) = \boldsymbol{sen\theta + cos\theta}$$

Como las derivadas parciales son iguales, entonces la ecuación diferencial es exacta. Ahora pasamos a resolverla; para esto, usamos la fórmula solución de una ecuación diferencial, pero ahora en términos de $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{\theta}$, es:

$$U(r,\theta) = \int \boldsymbol{M dr} + \int [N - \frac{\partial}{\partial \theta}\int \boldsymbol{M dr}\,]\, d\theta = c$$

Empezamos:

- Primero resolvemos la Integral:

$$\int M dr = \int (r + sen\theta - cos\theta) dr = \frac{1}{2}r^2 + r(sen\theta - cos\theta)$$

- La guardamos en la memoria.
- Mientras, esta misma integral la derivamos respecto a $\boldsymbol{\theta}$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\int M dr = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{2}r^2 + r(sen\theta - cos\theta)\right] = r(cos\theta + sen\theta)$$

• A $N\,(r,\,\theta)$ le restamos esta derivada parcial de la integral respecto a $\boldsymbol{\theta}$.

$$N(r,\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}\int M dr$$

$$r(sen\theta + cos\theta) \; - r(cos\theta + sen\theta) = 0$$

• Ahora integramos esta solución respecto a $\boldsymbol{\theta}$:

$$\int 0\, d\theta = c1$$

• Sustituyendo los cálculos en la fórmula solución:

$U(r,\theta) = \int M dr + \int [N - \frac{\partial}{\partial\theta}\int M dr] \; d\theta = c$, (fórmula solución)

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2}r^2 + r(sen\theta - cos\theta) + c1 = c$$

• Agrupando constantes, c1 y c, en una C, (finalmente la solución es):

$$\boxed{\boldsymbol{U(r,\theta) = \frac{1}{2}r^2 + r(sen\theta - cos\theta) = C}}$$

• Comprobación: $dU = \frac{\partial U}{\partial r}dr + \frac{\partial U}{\partial \theta}d\theta = dC$

$$dU = \frac{\partial[\boldsymbol{\frac{1}{2}r^2 + r(sen\theta - cos\theta)}]}{\partial r}dr + \frac{\partial[\boldsymbol{\frac{1}{2}r^2 + r(sen\theta - cos\theta)}]}{\partial \theta}d\theta = dC$$

$$dU = (r + sen\theta - cos\theta)\,dr + r(cos\theta + sen\theta)\,d\theta = 0$$

Esta es nuestra ecuación diferencial original -que resolvimos-, por lo que hemos terminado y bien.

Ejemplo 4

$$(4+5y)dx+(1+5x\ )\,dy=0, \qquad x=-1, \quad y=-1$$

Resolución.

En este caso,

$$M(x,y)=4+5y$$

$$N(x,y)=1+5x$$

Checamos si:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

Pasamos a Derivar:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(1+5y)=5$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\ (1+5x)=5$$

Como las derivadas parciales son iguales, entonces la ecuación diferencial es exacta. Ahora pasamos a resolverla; para esto, recordamos la fórmula solución de la ecuación diferencial exacta:

$$\boldsymbol{U(x,y)=\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy=c}$$

Empezamos:

• Primero resolvemos Integral:

$$\int M dx=\int(4+5y)dx=4x+5xy$$

• Esta integral la derivamos respecto a y

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M dx = \frac{\partial}{\partial y}[4x + 5xy] = 5x$$

• A $N(x, y)$ le restamos esta derivada.

$$N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M dx$$

$$1 + 5x \; - 5x = 1$$

• Ahora integramos esta solución respecto a y:

$$\int 1\, dy = y$$

• Sustituyendo los cálculos en la fórmula solución:

$$U(x, y) = \int \boldsymbol{M dx} + \int [N - \frac{\partial}{\partial y}\int \boldsymbol{M dx}]\; dy = c2,$$

$$U(x, y) = 4x + 5xy + y = c$$

• Esta es la solución general, pero como en este caso, nos dan valores de x y de y, pasamos a calcular la solución particular (calculando la constante, c)

$$U(x, y) = 4x + 5xy + y = c$$

$$U(-1, -1) = 4(-1) + 5(-1)(-1) - 1 = c, \qquad c = 0$$

• Por lo tanto, la solución particular es:

$$\boxed{\boldsymbol{U(x, y) = 4x + 5xy + y = 0}}$$

• Comprobación: $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = dc$

$$dU = \frac{\partial[\mathbf{4x + 5xy + y}]}{\partial x} dx + \frac{\partial[\mathbf{4x + 5xy + y}]}{\partial y} dy = dC$$

$$(4 + 5y)dx + (1 + 5x)dy = 0$$

Esta es nuestra ecuación diferencial que resolvimos, por lo que hemos terminado.

Ejemplo 5

Resolver.1

$$(e^{2y} - y\cos xy)dx + (2xe^{2y} - x\cos xy + 2y)dy = 0$$

Resolución (otro método).

Incognitas:

Determinar

• $g(x,y) + cg(x,y) + c$

• $g(x,y) = cg(x,y) = c$

Ecuaciones:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\Rightarrow d[g(x,y)] = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

$$= g_x(x,y)dx + g_y(x,y)dy$$

$$\therefore g_x(x,y) = M(x,y) \quad y \quad g_y(x,y) = N(x,y)$$

a) Si $y = cte.$

$$g(x,y) = \int^{x} M(x,y)dx + h(y)$$

$$g_y(x,y) = N(x,y)$$

b) Si $x = cte.$

$$g(x,y) = \int^{y} N(x,y)dy + h(x)$$

$$g_x(x,y) = M(x,y)$$

Operaciones

$$(e^{2y} - y\cos xy)dx + (2xe^{2y} - x\cos xy + 2y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[e^{2y} - y\cos xy]$$

$$2e^{2y} - [y(-sen\ xy)(x) + \cos xy]$$

$$= 2e^{2y} + xysenxy - cosxy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[2xe^{2y} - \mathrm{x}\cos xy + 2y]$$

$$= 2e^{y} - [x(-sen\ xy)(y) + \cos xy(1) + 0]$$

$$= 2e^{y} + xy\ sen\ xy - \cos xy$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Primer método:

Si y = cte.

$$g(x,y) = \int (e^{2y} - y\cos xy)dx + h(y)$$

$$e^{2y}\int dx - y\int \cos xy\, dx + h(y)$$

$$\boxed{\begin{aligned} t &= xy \\ dt &= y\, dx \\ \frac{dt}{y} &= dx \end{aligned}}$$

$$g(x,y) = e^{2y}(x) - y\int \cos t \cdot \frac{dt}{y} + h(y)$$

$$= xe^{2y} - \int \cos t\, dt + h(y)$$

$$= xe^{2y} - sen\ t + h(y)$$

$$g(x,y) = xe^{2y} - sen\ xy + h(y)$$

$$** \ g_y(x,y) = N(x,y)$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y}[g(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}[xe^{2y} - sen\ xy + h(y)]$$

$$N(x,y) = 2xe^{2y} - (\cos xy)(x) + h'(y)$$

$$2xe^{2y} - x\cos xy + 2y = 2xe^{2y} - x\cos xy + h'(y)$$

$$2y = h'(y)$$

$$h'(y) = 2y$$

$$Dy\ h(y) = 2y$$

$$\int Dy\ h(y) = \int 2ydy$$

$$h(y) = 2\frac{y^2}{2} + c$$

$$h(y) = y^2 + c$$

$$\therefore \boldsymbol{g(x,y) = xe^{2y} - sen\ xy + y^2 + c} \quad \rightarrow \quad \text{"}\boldsymbol{SOLUCIÓN}\text{"}$$

Segundo método:

Si x=cte.

$$g(x,y) = \int (2xe^{2y} - x\cos xy + 2y)dy + h(x)$$

$$= 2x\int e^{2y}dy - x\int \cos xy\ dy + 2\int ydy + h(x)$$

$$u = 2y \qquad t = xy$$

$$du = 2dy \qquad dt = xdy$$

$$\frac{du}{2} = dy \qquad \frac{dt}{x} = dy$$

$$= 2x\int e^u \cdot \frac{du}{2} - x\int \cos t \cdot \frac{dt}{x} + 2\frac{y^2}{2} + h(x)$$

$$= xe^u - \int \cos t\ dt + y^2 + h(x)$$

$$= xe^{2y} - sen\ t + y^2 + h(x)$$

$$\therefore g(x,y) = xe^{2y} - sen\ xy + y^2 + h(x)$$

$$** \; g_x(x,y) = M(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[g(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[xe^{2y} - sen\ xy + y^2 + h(x)]$$

$$M(x,y) = e^{2y} - (\cos xy)(y) + 0 + h'(x)$$

$$e^{2y} - y\cos xy = e^{2y} - y\cos xy + h'(x)$$

$$0 = h'(x)$$

$$h'(x) = 0$$

$$D_x\, h(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(x) = c$$

$$\therefore \boldsymbol{g(x,y) = xe^{2y} - sen\ xy + y^2 + c} \quad \rightarrow \quad \text{"}\textbf{\textit{SOLUCIÓN}}\text{"}$$

Ejemplo 6.

Resuelva la ecuación.

$$(\cos x\ sen\ x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$$

Sujeta a la condición $y(0) = 2.y(0) = 2.$

Incógnitas

$$g(x,y) = c.$$

Ecuaciones

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Condición de exactitud

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\Rightarrow d[g(x,y)] = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

$$= g_x(x,y)dx + g_y(x,y)dy$$

$$\therefore g_x(x,y) = M(x,y) \quad y \quad g_y(x,y) = N(x,y)$$

a) Si y = cte

$$g(x,y) = \int^x M(x,y)dx + h(y)$$

$$g_y(x,y) = N(x,y)$$

b) Si x= cte.

$$g(x,y) = \int^y N(x,y)dy + h(x)$$

$$g_x(x,y) = M(x,y)$$

Operaciones

$$\frac{\partial}{\partial y}M = \frac{\partial}{\partial y}[\cos x sen\, x - xy^2] = -2xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[y(1-x^2)] = y\frac{\partial}{\partial x}[1-x^2]$$

$$= -2xy$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Aplicando ¨A¨, resulta.

Si y = cte.

$$\Rightarrow g(x,y) = \int (\cos x \; sen\; x - xy^2)dx + h(y)$$

$$= \int \cos x \; sen\; x\; dx - y^2 \int x dx + h(y)$$

$$u = \cos x$$

$$du = \; -sen\; x\; dx$$

$$-du = senx\; dx$$

$$= \int u(-du) - y^2 \cdot \frac{x^2}{2} + h(y)$$

$$= -\int udu - \frac{1}{2}x^2y^2 + h(y)$$

$$= -\frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}x^2y^2 + h(y)$$

$$\therefore\; g(x,y) = -\frac{1}{2}cos^2x - \frac{1}{2}x^2y^2 + h(y)$$

$$**\;\; g_y(x,y) = N(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[g(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}[-\frac{1}{2}cos^2x - \frac{1}{2}x^2y^2 + h(y)]$$

$$N(x,y) = 0 - \frac{1}{2}x^2(2y) + h'(y)$$

$$y(1 - x^2) = -x^2y + h'(y)$$

$$y - x^2y = -x^2y + h'(y)$$

$$\therefore h'(y) = y$$

$$Dy\ h(y) = y$$

$$\int Dy\ h(y) = \int y\ dy$$

$$h(y) = \frac{1}{2}y^2 + c *$$

$$\therefore g(x,y) = -\frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2 + c *$$

$$-\frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2 = -c *$$

$$\cos^2 x + x^2y^2 - y^2 = c$$

$$\boldsymbol{\cos^2 x + y^2(x^2 - 1) = c} \quad \rightarrow \quad \text{"}\boldsymbol{SOLUCIÓN\ GENERAL}\text{"}$$

Cálculo de la solución particular.

Para:

$$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 2 \end{matrix}$$

$$\therefore \cos^2(0) + (2)^2[(0)^2 - 1] = c_o$$

$$1 + 4(-1) = c_o$$

$$1 - 4 = c_o$$

$$\therefore c_o = -3$$

$$\therefore \boldsymbol{\cos^2 x + y^2(x^2 - 1) = -3} \quad \rightarrow \quad \text{"}\boldsymbol{SOLUCIÓN\ PARTICULAR}\text{"}.$$

4. 3 Problemas Propuestos

1 Verificar si cada una de las ecuaciones diferenciales es exactas, y si lo es, proceder a su resolución.

1.1 $(x + 2y)dx + (2x + y)dy = 0$

1.2 $(y^2 - 2xy + 6x)dx - (x^2 - 2xy + 2)dy = 0$

1.3 $(r + sen\theta - cos\theta)dr + r(sen\theta + cos\theta)d\theta = 0$

1.4 $(ye^{xy} - 2y^3)dx + (xe^{xy} - 6xy^2 - 2y)dy = 0$

1.5 $y(1 + \cos xy)dx + x(1 + \cos xy)dy = 0$

1.6 $(4 + 5y)dx + (1 + 5x)dy = 0; \quad x = -1\,,\ y = -1$

1.7 $e^x \cos y\, dx - e^x\, sen\, y\, dy = 0; \quad x = 0,\ y = \pi$

1.8 $5x^4 y\, dx + x^5\, dy = 0$

1.9 $(3x^2\, sen\, y)dx + (x^3 \cos y)dy = 0$

1.10 $(ye^x - sen\ y)dx + (e^x - x cos\ y)dy = 0$

1.11 $(e^{2y} - y\, cos\, xy)\, dx + (2x\, e^{2y} - x\, cos\, xy + 2y)\, dy = 0$

2. En los siguientes problemas, determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si es exacta, resuélvala.

2.1 $(2x + 4)dx + (3y - 1)dy = 0$ Sol. $x^2 + 4x + \frac{3}{2}y^2 - y = cx^2 + 4x + \frac{3}{2}y^2 - y = c$

2.2 $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$ Sol. $\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = c\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = c$

2.3 $(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0$ Sol. $x^2y^2 - 3x + 4y = cx^2y^2 - 3x + 4y = c$

2.4 $(x + y)(x - y)dx + x(x - 2y)dy = 0$ Sol, No es exacta, pero es homogénea

2.5 $(y^3 - y^2 senx - x)dx + (3xy^2 + 2y\cos x)dy = 0$ Sol. $xy^3 + y^2 \cos x - \frac{1}{2}x^2 = c$

2.6 $(y \ln y - e^{-xy})dx + (\frac{1}{y} + x \ln y)\, dy = 0$ Sol. *No es exacta.No es exacta.*

2.7 $x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$ Sol. $xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = c$

2.8 $\left(1 - \frac{3}{x} + y\right) dx + \left(1 - \frac{3}{y} + x\right) dy = 0$ Sol. $x + y + xy - 3\ln|xy| = c$

2.9 $\left(x^2y^3 - \frac{1}{1+9x^2}\right) dx + x^3y^2 dy = 0$ Sol. $x^3y^3 - tan^{-1}(3x) = c$

2.10 $(\tan x - sen\ x\ sen\ y)dx + \cos x \cos y\ dy = 0$ Sol. $-\ln|\cos x| + \cos x\ sen\ y = c$

2.11 $(1 - 2x^2 - 2y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4xy$ Sol. $y - 2x^2y - y^2 - x^4 = c$

2.12 $(4x^3y - 15x^2 - y)dx + (x^4 + 3y^2 - x)dy = 0$ Sol. $x^4y - 5x^3 - xy + y^3 = c$

3. En los siguientes problemas, resuelva la ecuación diferencial dada, sujeta a la condición inicial que se indica.

3.1 $(x + y)^2dx + (2xy + x^2 - 1)dy = 0$ $y(1) = 1$ Sol. $\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = \frac{4}{3}$

3.2 $(4y + 2x - 5)dx + (6y + 4x - 1)dy = 0$ $y(-1) = 2$ Sol. $4xy + x^2 - 5x + 3y^2 - y = 8$

3.3 $(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)dx + (2y\ sen\ x - x^3 + \ln y)\ dy = 0$ $y(0) = e$

Sol. $y^2 sen\ x - x^3y - x^2 + y\ \ln y - y = 0$

4. En los siguientes problemas, encuentre el valor de k de modo que la ecuación diferencial dada sea exacta.Æ

4.1 $(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$ Sol. $k = 10\ k = 10$

4.2 $(6xy^3 + \cos y)dx + (kx^2y^2 - x\ sen\ y)dy = 0$ Sol. $k = 9k = 9$

4.3 $(ye^{xy} - ky^3)dx + (xe^{xy} - 6xy^2 - 2y)dy$ Sol. $k = 2k = 2$

Capítulo 5

Ecuaciones Diferenciales Inexactas

(Factor Integrante)

5.1 Definición de una ecuación diferencial inexacta

Hasta ahora hemos expresado las ecuaciones diferenciales en la forma *diferencial*, es decir:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

En el capítulo anterior, dijimos que una ecuación diferencial como la ecuación (1) es exacta si:

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) \equiv \frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

Abreviando:

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}M \equiv \frac{\partial}{\partial x}N}$$

A partir de este momento, vamos a escribir las derivadas parciales de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial y}M = \boldsymbol{M_y = Derivada\ parcial\ de\ M\ respecto\ a\ y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N = \boldsymbol{N_x = Derivada\ parcial\ de\ N\ respecto\ a\ x}$$

Por lo tanto, el criterio de exactitud lo escribiríamos:

$$M_y \equiv N_x$$

Esta igualdad es exactamente la misma que la ecuación (2), pero las derivadas parciales son más prácticas de escribir.

Una ecuación diferencial escrita en la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1)$$

…es **Inexacta** si:

$$M_y \neq N_x \dots\dots\dots\dots\dots.\dots\dots\dots\dots(3)$$

Y si es inexacta, entonces buscaremos un factor, llamado **factor integrante**, tal que, como su nombre lo dice, es una expresión matemática que se va a multiplicar por la ecuación diferencial para hacerla **exacta**, y una vez que es exacta, entonces la resolvemos como aprendimos en el tema anterior, con la fórmula:

$$\boldsymbol{U(x,y) = \int M(x,y)dx + \int [N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\,]dy = c}$$

Hay dos métodos para hallar el Factor Integrante, por lo regular, se le llama método 1 y método 2. En esta ocasión les vamos a llamar: 1) Método Corona y 2) Método Virus.

5.2 Factor Integrante. Método *Corona* y Método *Virus.*

Factores integrantes.

Cuando una ecuación de la forma

$$M(x,y)dx + \ N(x,y)dy = 0$$

No es exacta, entonces podemos intentar encontrar un *factor integrante*; es decir una función ***I (x, y)*** que tenga la propiedad de convertir a la ecuación

$$I(\ x,y)[\ M(x,y)dx + N(x,y)dy] = 0$$

en *exacta.*

a) Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables.

Cuando una ecuación tiene la forma:

$$a(x)\hbar(y)dx + b(x)h(y)dy = 0$$

Se dice que es de variables separables. Es fácil ver que la función

$$\frac{1}{b(x)k(y)} \quad ; \quad b(x)k(y) \neq 0$$

Es un facto integrante y esta puede ser escrita como:

$$\frac{a(x)}{b(x)}dx + \frac{h(y)}{k(y)}dy = 0$$

Ya que si hacemos:

$$M = \frac{a(x)}{b(x)}, \quad M = \frac{h(y)}{k(y)}$$

Entonces:

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{a(x)}{b(x)}\right] = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h(y)}{k(y)}\right] = 0$$

Es exacta

b) Ecuaciones diferenciales con Coeficientes Homogéneos.

Si los coeficientes $M(x,y)$ y $N(x,y)$ de la ecuación diferencial.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad ; \quad N(x,y) \neq 0$$

Tiene la propiedad de que:

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \equiv \frac{M(ax,ay)}{N(ax,ay)}$$

Donde aa es un número arbitrario no igual a cero, la ecuación se dice que tiene coeficientes homogeneos.

El factor integrante para este tipo de ecuaciones está dado por:

$$I(x,y) = \frac{1}{xM + yN}$$

c) Factores integrales de forma exponencial.

$$i)\quad \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

Donde

$$f(x) = \frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

$$ii)\ \mu(y) = e^{\int f(y)dy}$$

Donde

$$f(y) = \frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

Los métodos para encontrar un factor integrante, son muy simples, solo se sigue algún algoritmo sistemático. Iniciamos con el método *Corona*.

1 Método Corona.

a) Verificamos que una ecuación diferencial de la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, es inexacta, es decir: $M_y \neq N_x$, $\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{M} \ \neq \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{N}$).

b) Calculamos:

$$\frac{My - Nx}{N}$$

c) Se simplifica la expresión, y si esta expresión es función solo de ***x, f (x)***, o es constante, o sea, $f(x) = \frac{My-Nx}{N}f(x) = \frac{My-Nx}{N}$, entonces el factor integrante, I, es: $\boldsymbol{I = e^{\int f(x)dx}}$

d) Si la función $\frac{My-Nx}{N}$, no fue función de xx o constante, entonces calculamos:

$$-\frac{\boldsymbol{My - Nx}}{\boldsymbol{M}}$$

e) Se simplifica la expresión, y si esta expresión es función de ***y, f(y)*** , o es constante,o sea, $f(y) = -\frac{My-Nx}{M}$, entonces el factor integrante, I, es: $\boldsymbol{I = e^{\int f(y)dy}}$

f) Si la función $\frac{My-Nx}{N}\frac{My-Nx}{N}$, no fue función de $\boldsymbol{y}$ o constante, entonces el método Corona no resulta útil y habrá que usar el método **Virus**, el cual vemos más adelante.

Ejemplo 1 (aplicando el método Corona)

Resolver la siguiente ecuación diferencial.

$$\boldsymbol{x^2\, sen\, x\, dx + xy\, dy = 0}$$

Observación. Esta también es una ecuación diferencial de variables separables.

Iniciamos, aplicando el método:

a) Verificamos que la ecuación diferencial es inexacta, es decir: $\boldsymbol{M_y \neq N_x}$,

$$M = x^2\, sen\, x\,, \quad N = xy$$

$$My = 0$$

$$Nx = y$$

b) Calculamos:

$$\frac{My - Nx}{N}$$

$$\frac{My - Nx}{N} = \frac{0 - y}{xy}$$

c) Simplificamos la expresión, y observamos que esta expresión es función de $\boldsymbol{x}$:

$$f(x) = \frac{-1}{x}$$

Por lo tanto, el factor integrante, $\boldsymbol{I}$, es:

$$\boldsymbol{I = e^{\int f(x)dx} = I = e^{\int \frac{-1}{x}dx} = e^{-lnx}}$$

$$e^{-lnx} = e^{lnx^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Hasta aquí el método ***Corona*** para hallar el factor integrante. Esto significa que si multiplicamos la ecuación diferencial (nuestro problema) por $\frac{1}{x}$, la ecuación diferencial es exacta…Pasamos a resolverla (como ya sabemos)

• Multiplicamos la ecuación diferencial por $\frac{\mathbf{11}}{\boldsymbol{xx}}$:

$$\frac{1}{x}(x^2\, sen\ x\ dx + xy\ dy) = \frac{1}{x}(0), \qquad x\ sen\ x\ dx + y\ dy = 0$$

• Ahora la ecuación diferencial, $x\ sen\ x\ dx + y\ dy = 0$, es exacta porque:

$$My = 0$$

$$Nx = 0$$

• Como ambas derivadas parciales son iguales, la ecuación diferencial es exacta, ahora la resolvemos como ya sabemos. Atraemos la fórmula solución…

$$\boldsymbol{U(x,y) = \int M(x,y)dx + \int [N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\,]dy = c}$$

• Resolvemos la integral: $\int M(x,y)dx$

$\boldsymbol{\int M(x,y)dx = \int xsen\ x\ dx = -\ x\ cosx + senx,}$ la guardamos en la memoria.

Ahora: $\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$

$$\boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}[-xcosx + senx] = 0}$$

Calculamos: $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$

$$\boldsymbol{N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx}$$

$$\boldsymbol{y - 0 = y}$$

Integramos: $\int [N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\,]dy = c$

$$\boldsymbol{\int ydy = \frac{1}{2}y^2}$$

• Por consiguiente la solución es:

$$\boxed{U(x,y) = -x\ cosx + senx + \frac{1}{2}y^2 = c}$$

• Comprobación:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dc$$

$$dU = \frac{\partial}{\partial x}[-x\ cosx + senx + \frac{1}{2}y^2]dx + \frac{\partial}{\partial y}[-x\ cosx + senx + \frac{1}{2}y^2]dy = dc$$

$x\ sen\ x\ dx + y\ dy = 0$, lo que queda demostrada la solución.

Ejemplo 2

Resolver:

$$(2xy + y^4)dx + (3x^2 + 6xy^3)dy = 0$$

Iniciamos, aplicando el método ***Corona***:

a) Verificamos que la ecuación diferencial es inexacta.

$$M = 2xy + y^4, \quad N = (3x^2 + 6xy^3)$$

$$My = 2x + 4y^3$$

$$Nx = 6x + 6y^3$$

$$M_y \neq N_x$$

b) Calculamos:

$$\frac{My - Nx}{N}$$

$$\frac{My - Nx}{N} = \frac{2x + 4y^3 - (6x + 6y^3)}{3x^2 + 6xy^3}$$

c) Simplificamos la expresión, y observamos que esta expresión No es función solo de x:

$$f(x) \neq \frac{-2(2x+y^3)}{3x(x+2y^3)}$$

d) Como la función: $\frac{My-Nx}{N}$, no fue función de x o constante, entonces calculamos:

$$-\frac{My-Nx}{M}$$

$$-\frac{My-Nx}{M} = -\frac{2x+4y^3-(6x+6y^3)}{2xy+y^4}$$

e) Se simplifica la expresión,

$$f(y) = -\frac{My-Nx}{M} = -\frac{2x+4y^3-(6x+6y^3)}{2xy+y^4} = \frac{2(2x+y^3)}{y(2x+y^3)} = \frac{2}{y}$$

Y como esta expresión es función de y.

$$f(y) = \frac{2}{y}$$

Entonces el factor integrante, I, es:

$$I = e^{\int f(y)dy} I = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2lny} = e^{lny^2} = y^2$$

Nuevamente, hasta aquí el método ***Corona*** para hallar el factor integrante. Esto significa que, si multiplicamos la ecuación diferencial (nuestro problema) por y^2, la ecuación diferencial se hace exacta… Pasamos a resolverla (como ya sabemos). Confirmamos esto último.

• Multiplicamos la ecuación diferencial por $\frac{11}{xx}$:

$$y^2(2xy+y^4)dx + (3x^2+6xy^3)dy = y^2(0)$$

$$(2xy^3+y^6)dx + (3x^2y^2+6xy^5)dy = 0,$$

Ahora esta ecuación diferencial,

$(2xy^3 + y^6)dx + (3x^2y^2 + 6xy^5)dy = 0$, es exacta porque:

$My = 6xy^2 + 6y^5$

Como ambas derivadas parciales son iguales, la ecuación diferencial es exacta, ahora la resolvemos como ya sabemos. Atraemos la fórmula solución…

$$\boldsymbol{U(x,y) = \int M(x,y)dx + \int [N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\,]dy = c}$$

Resolvemos la integral: $\int M(x,y)dx$

$\int M(x,y)dx = \int (2xy^3 + y^6)dx = x^2y^3 + xy^6$, la guardamos en la memoria.

• Ahora: $\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$

$$\frac{\partial}{\partial y}[x^2y^3 + xy^6] = 3x^2y^2 + 6xy^5$$

• Calculamos: $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$

$$N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

$$3x^2y^2 + 6xy^5 - (3x^2y^2 + 6xy^5) = 0$$

• Integramos: $\int [N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\,]dy = c$

$$\int 0dy = c1$$

• Por consiguiente la solución es:

$$\boldsymbol{U(x,y) = x^2y^3 + xy^6 + c1 = c}$$

• Agrupando las constantes :

$$\boxed{\boldsymbol{U(x,y) = x^2y^3 + xy^6 = c}}$$

• Comprobación:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = dc$$

$$dU = \frac{\partial}{\partial x}[x^2y^3 + xy^6]dx + \frac{\partial}{\partial y}[x^2y^3 + xy^6]dy = dc$$

$$(2xy^3 + y^6)dx + (3x^2y^2 + 6xy^5)dy = 0$$

Por lo que queda demostrada la solución.

2) Método Virus.

Aclaración**.** Este método lo utilizamos solo cuando no funciona el método **Corona**, lo que queremos decir es que, primero probamos el método **Corona** y**,** solo que no funcione este**,** entonces usamos el método **Virus.** En otras palabras, los métodos se usan en serie, no en paralelo.

El método Virus consiste en el siguiente algoritmo:

a) Verificar que una ecuación diferencial de la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, es inexacta, es decir: $M_y \neq N_x$ $\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{M} \neq \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{N}$).

b) Verificar que el método **Corona** no funciona.

c) Multiplicar la ecuación diferencial $\boldsymbol{M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0}$, por $\boldsymbol{x^m y^n}$ $x^m y^n$ este $x^m y^n$ es el factor integrante, *I*: $\boldsymbol{I = x^m y^n}$ y el proceso consiste en encontrar los valores de $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$.

$$x^m y^n[M(x,y)dx + N(x,y)dy] = x^m y^n[0]$$

$$x^m y^n M(x,y)dx + x^m y^n N(x,y)dy = 0$$

d) Realizar las operaciones correspondientes.

Se obtendrá una nueva M y N: $\quad M\,(x,y)dx + (x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

e) Aplicar el criterio de exactitud, es decir, se cumplan las derivadas parciales:

$$My = Nx$$

f) Igualar los términos que tienen las mismas potencias de x y y.

g) Calcular –mediante el álgebra- los valores de m y n (exponentes de x y y, respectivamente). Con esto se encuentra el factor integrante, $I = x^m y^n$. Una vez hallado I, multiplicamos la ecuación diferencial inexacta y se hace exacta, y entonces la resolvemos como tal.

Ejemplo 1

Resolver:

$$(4y^2 - 5xy)dx + (6xy - 5x^2)dy = 0$$

Por cierto, si somos observadores, nos daremos cuenta que esta también es una ecuación diferencial de coeficientes homogéneos. Bueno le entramos a la aplicación del algoritmo.

a) Verificamos que la ecuación diferencial es inexacta, es decir: $M_y \neq N_x M_y \neq N_x$,

$$M = 4y^2 - 5xy\,, \quad N = 6xy - 5x^2$$

Derivamos parcialmente:

$$My = 8y - 5x$$

$$Nx = 6y - 10x$$

b) En esta ecuación diferencial no funciona el método ***Corona***. Dejamos a la banda del grupo de mate II, comprobar esta aseveración (que sirve como práctica del método **Corona**). Así que…seguimos con el método **Virus**.

c) Multiplicamos la ecuación diferencial $(4y^2 - 5xy)dx + (6xy - 5x^2)dy = 0$ por $x^m y^n x^m y^n$, este

$$x^m y^n[(4y^2 - 5xy)dx + (6xy - 5x^2)dy] = x^m y^n(0)$$

d) Realizamos las operaciones correspondientes:

$$(4x^m y^{n+2} - 5x^{m+1}y^{n+1})dx + (6x^{m+1}y^{n+1} - 5x^{m+2}y^n)dy = 0$$

$$M = 4x^m y^{n+2} - 5x^{m+1}y^{n+1}$$

$$N = 6x^{m+1}y^{n+1} - 5x^{m+2}y^n$$

e) Aplicamos el criterio de exactitud, es decir, primero derivamos parcialmente:

$$\mathrm{My} = 4(n+2)x^m y^{n+1} - 5(n+1)x^{m+1}y^n$$

$$Nx = 6(m+1)x^m y^{n+1} - 5(m+2)x^{m+1}y^n$$

f) Igualamos las derivadas parciales (que es el criterio de exactitud),

$$\mathrm{My} = \mathrm{Nx}$$

$$4(n+2)x^m y^{n+1} - 5(n+1)x^{m+1}y^n = 6(m+1)x^m y^{n+1} - 5(m+2)x^{m+1}y^n$$

Para que las dos derivadas parciales sean iguales, implica que los coeficientes de las mismas potencias deben ser iguales, esto es:

$$4(n+2) = 6(m+1) \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$-5(n+1) = -5(m+2) \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

g) Resolvemos el sistema de ecuaciones y encontramos que: ***m=3***, ***n=4***. Por lo tanto el Factor integrante es: $I = x^m y^n = \boldsymbol{x^3 y^4}$

Si ahora multiplicamos la ecuación diferencial inexacta por este factor integrante, se vuelve exacta, veamos.

$$x^3y^4[(4y^2 - 5xy)dx + (6xy - 5x^2)dy] = x^2y^3(0)$$

$$(4x^3y^6 - 5x^4y^5)dx + (6x^4y^5 - 5x^5y^4)dy = 0$$

Derivamos parcialmente:

$$My = 24x^3y^5 - 25x^4y^4$$

$$Nx = 24x^3y^5 - 25x^4y^4$$

Como

$$\mathrm{My} = \mathrm{Nx}$$

La ecuación diferencial es exacta y se resuelve como tal. Con la ecuación que ya conocemos:

$$U(x,y) = \int M(x,y)dx + \int [N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\,]dy = c$$

Se pide a los estudiantes resolver la ecuación diferencial exacta para aumentar su pericia en la resolución de problemas.

Ejemplo 2

Resolver:

$$(3y^3 - xy)dx - (x^2 + 6xy^2)dy = 0$$

a) Verificamos que la ecuación diferencial es inexacta, es decir: $M_y \neq N_x$.

$$M = 3y^3 - xy\,, \quad N = -(x^2 + 6xy^2)$$

Derivamos parcialmente:

$$My = 9y^2 - x$$

$$Nx = -(2x + 6y^2)$$

b) En esta ecuación diferencial no funciona el método ***Corona***. Dejamos a los estudiantes, comprobar esta aseveración (que sirve como práctica del método **Corona**). Así que…seguimos con el método **Virus**.

c) Multiplicamos la ecuación diferencial

$$(3y^3 - xy)dx - (x^2 + 6xy^2)dy = 0$$

…por $x^m y^n$, este $x^m y^n$ es el factor integrante, $I = x^m y^n$.

$$x^m y^n[(\mathbf{3y^3 - xy)dx - (x^2 + 6xy^2)dy = 0}(x^m y^n)$$

d) Realizamos las operaciones correspondientes:

$$(3\,x^m\, y^{n+3} - x^{m+1}y^{n+1})dx - (x^{m+2}y^n + 6\,x^{m+1}y^{n+2})dy = 0$$

$$M = 3\,x^m\, y^{n+3} - x^{m+1}y^{n+1}$$

$$N = -(x^{m+2}y^n + 6\,x^{m+1}y^{n+2})$$

e) Aplicamos el criterio de exactitud, es decir, primero derivamos parcialmente:

$$My = 3(n+3)x^m y^{n+2} - (n+1)x^{m+1}y^n$$

$$Nx = -(m+2)x^{m+1}y^n - 6(m+1)x^m y^{n+2}$$

f) Igualamos las derivadas parciales (que es el criterio de exactitud),

$$My = Nx$$

$$3(n+3)x^m y^{n+2} - (n+1)x^{m+1}y^n = -(m+2)x^{m+1}y^n - 6(m+1)x^m y^{n+2}$$

Para que las dos derivadas parciales sean iguales, implica que los coeficientes de las mismas potencias deben ser iguales, esto es:

$$3(n+3) = -6(m+1) \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$-(n+1) = -(m+2) \ldots\ldots\ldots ::::\ldots(2)$$

g) Resolvemos el sistema de ecuaciones y encontramos que: ***m=-2, n=-1.*** Por lo tanto, el Factor integrante es:$I = x^m y^n = \boldsymbol{x^{-2}y^{-1}}$

Si ahora multiplicamos el factor integrante por la ecuación diferencial inexacta, esta se hará exacta.

$$\boldsymbol{x^{-2}y^{-1}}[(3y^3 - xy)dx - (x^2 + 6xy^2)dy] = \boldsymbol{x^{-2}y^{-1}}(0)$$

$$\boldsymbol{(3x^{-2}y^2 - x^{-1})dx - (y^{-1} + 6x^{-1}y)dy \ = 0}$$

Derivamos parcialmente:

$$\mathrm{My} = 6x^{-2}y$$

$$Nx = 6x^{-2}y$$

Como:

$$\mathbf{My = Nx}$$

La ecuación diferencial es exacta y se resuelve como tal. Con la ecuación que ya conocemos:

$$U(x, y) = \int M(x, y)dx + \int [N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx\,]dy = c$$

Se pide a los estudiantes resolver la ecuación diferencial exacta para aumentar su pericia en la resolución de problemas.

5.3 Problemas Resueltos

Ejemplo 1

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{x^{-2}\,y^{-5}\,dx + x^{-3}\,y^{-4}\,dy = 0}$$

Observación. Esta ecuación diferencial también es de *variables separables*, y es evidente que es de *coeficientes homogéneos*, también. Por lo que se puede resolver por cualquiera de estos dos métodos. Ahora pasamos a ver si es *Exacta*, para esto calculamos las derivadas parciales, de $\boldsymbol{M\,(x, y)}$ y $\boldsymbol{N\,(x, y)}$.

En este caso: $M(x, y) = \ x^{-2}\,y^{-5}$ $\qquad N(x, y) = \ x^{-3}\,y^{-4}$

$$My(x, y) \ = -5\,x^{-2}\,y^{-6}, \qquad Nx(x, y) \ = \ -3x^{-4}\,y^{-4}$$

Las derivadas parciales son diferentes: $\quad My \neq Nx$

Por lo tanto, la ecuación diferencial es Inexacta (además de *variables separables* y de *coeficientes homogéneos*). Bueno, ahora pasamos a usar el método **Corona,** para intentar hallar el factor integrante.

Iniciamos.

Método Corona

• Calculamos la expresión:

$$\frac{My - Nx}{N}$$

$$\frac{My - Nx}{N} = \frac{-5\,x^{-2}\,y^{-6} - (-3x^{-4}\,y^{-4})}{x^{-3}\,y^{-4}}$$

• Simplificamos la expresión,

$$\frac{My - Nx}{N} = \frac{-5\,x^{-2}\,y^{-6} + 3x^{-4}\,y^{-4}}{x^{-3}\,y^{-4}}$$

$$\frac{My - Nx}{N} = \frac{x^{-2}\,y^{-4}\,(-5\,y^{-2} + 3x^{-2}\ )}{x^{-3}\,y^{-4}}$$

$$\frac{My - Nx}{N} = \frac{(-5\,y^{-2} + 3x^{-2}\ )}{x^{-1}}$$

Esta expresión no es solo función de x, por lo que el factor integrante no lo podemos calcular como: $I = e^{\int f(x)dx} I = e^{\int f(x)dx}$.

• Ahora calculamos:

$$-\frac{My - Nx}{M} =$$

$$-\frac{-5\,x^{-2}\,y^{-6} - (-3x^{-4}\,y^{-4})}{x^{-2}\,y^{-5}}$$

• Simplificamos:

$$-\frac{-5\,x^{-2}\,y^{-6}+3x^{-4}\,y^{-4}}{x^{-2}\,y^{-5}}$$

$$-\frac{x^{-2}\,y^{-4}\,(-5\,y^{-2}+3x^{-2}\ )}{x^{-2}\,y^{-5}}$$

$$-\frac{(-5\,y^{-2}+3x^{-2}\ )}{y^{-1}}$$

• Como esta función no depende exclusivamente de y, entonces no podemos calcular el factor integrante como: $\boldsymbol{I=e^{\int f(y)dy}I=e^{\int f(y)dy}}$.

• Conclusión: No nos funciona el método Corona, así que pasamos al método **Virus.**

Método Virus

• Multiplicamos la ecuación diferencial por $\boldsymbol{x^m y^n}$**:**

$$x^m y^n(x^{-2}\,y^{-5}\,dx+x^{-3}\,y^{-4}\,dy)=x^m y^n(0)$$

$$(x^{m-2}\,y^{n-5}\,)dx+(x^{m-3}\,y^{n-4}\,)dy=0$$

• Calculamos Las derivadas Parciales:

$$My(x,y)\,=(n-5)\;x^{m-2}\,y^{n-6},$$

$$Nx(x,y)\,=(m-3)x^{m-3}\,y^{-4}$$

• Igualamos las derivadas parciales

$$My=Nx$$

$$(n-5)x^{m-2}\,y^{n-6}=(m-3)\;\;x^{m-4}\;y^{-4}$$

• Las potencias son diferentes, por lo tanto, ***n - 5 - 0***, ***m - 3 - 0***, es como si tuviéramos:

$$(n-5)x^{m-2}y^{n-6} + (0)\,x^{m-4}\,y^{-4} = (0)\,x^{m-2}y^{n-6} + (m-3)\,x^{m-4}\,y^{-4}$$

$$n-5=0,\;\; n=5, \qquad m-3=0,\;\; m=3$$

• Por lo tanto, el factor integrante es: $x^3 y^5$

• Si multiplicamos la ecuación diferencial por este factor integral, se vuelve exacta.

$$x^3y^5(x^{-2}\,y^{-5}\,dx + x^{-3}\,y^{-4}\,dy) = x^3y^5(0)$$

Ahí está: $xdx + ydy = 0xdx + ydy = 0$

Ahora las derivadas parciales son iguales: $My(x,y) = 0 \qquad Nx(x,y) = 0$

Por lo que resolvemos la ecuación diferencial, como ya sabemos, con la fórmula:

$$U(x,y) = \int M dx + \int [N - \frac{\partial}{\partial y}\int M dx]\;dy = c$$

• Integramos:

$$\int M dx = \int x dx = \frac{1}{2}x^2$$

• Derivamos parcialmente:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M dx = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}x^2\right] = 0$$

• A ***N (x, y)*** le restamos la derivada parcial anterior:

$$N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M dx$$

$$y - 0 = y$$

• Integramos:

$$\int [N - \frac{\partial}{\partial y}\int \boldsymbol{M dx}]\ dy$$

$$\int \boldsymbol{y}\ dy = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{2}}$$

Finalmente, la solución es:

$$U(x,y) = \int \boldsymbol{M dx} + \int [N - \frac{\partial}{\partial y}\int \boldsymbol{M dx}]\ dy = c$$

Ejemplo 2

$$(y + 2x\ cos^2 x\ sen\ y)dx + (sen\ x\cos x + x^2\ cos^2 x\cos y)dy = 0$$

Método Corona

• Sea:

$$M(x,y) = \ y + 2x\ cos^2 x\ sen\ y$$

$$N(x,y) = \ sen\ x\cos x + x^2\ cos^2 x\ cos\ y$$

• Derivamos parcialmente:

$$My(x,y) = \ 1 + 2x\ cos^2 x\ cos\ y,$$

$$Nx(x,y) = \ -sen\ x\ sen\ x + \cos x\cos x + [x^2 2cos\ x(-sen\ x) + 2x\ cos^2 x]cos\ y$$

• Calculamos:

$$\frac{My - Nx}{N}$$

$$\frac{1 + 2x\ cos^2 x\ cos\ y - [-sen\ x\ sen\ x + \cos x\cos x + [x^2 2cos\ x(-sen\ x) + 2x\ cos^2 x]\ cos\ y]}{sen\ x\cos x + x^2\ cos^2\ x\cos y}$$

• Vamos quitando paréntesis:

$$\frac{1 + 2x\,cos^2x\;cos\,y + sen\;x\,sen\;x - \cos x \cos x - [-2x^2\;senx\;cosx + 2x\;cos^2x]\;cos\,y]}{sen\;x\cos x + x^2\;cos^2\;x\cos y}$$

$$\frac{1 + 2x\;cos^2x\;cos\,y + sen^2x\;\; - cos^2x + 2x^2 senx\cos x\;cosy - 2x\;cos^2x\,cos\,y}{sen\;x\cos x + x^2\;cos^2\;x\cos y}$$

• Como $\boldsymbol{sen^2x + cos^2x = 1,}$ entonces: $\boldsymbol{1 - cos^2x = sen^2x}$

$$\frac{1 + 2x\;cos^2x\;cos\,y + sen^2x\;\; - cos^2x + 2x^2 senx\cos x\;cosy - 2x\;cos^2x\,cos\,y}{sen\;x\cos x + x^2\;cos^2\;x\cos y}$$

$$\frac{2x\;cos^2x\;cos\,y + sen^2x\;\; + sen^2x + 2x^2 senx\cos x\;cosy - 2x\;cos^2x\,cos\,y}{sen\;x\cos x + x^2\;cos^2\;x\cos y}$$

$$\frac{2x\;cos^2x\;cos\,y + 2sen^2x\;\; + 2x^2 senx\cos x\;cosy - 2x\;cos^2x\,cos\,y}{sen\;x\cos x + x^2\;cos^2\;x\cos y}$$

• Se eliminan el primer y último término del denominador

:

$$\frac{2x\;cos^2x\;cos\,y + 2sen^2x\;\; + 2x^2 senx\cos x\;cosy - 2x\;cos^2x\,cos\,y}{sen\;x\cos x + x^2\;cos^2\;x\cos y}$$

$$\frac{2sen^2x\;\; + 2x^2 senx\cos x\;cosy}{sen\;x\cos x + x^2\;cos^2\;x\cos y}$$

• Se factoriza el numerador y el denominador.

$$\frac{2\;\mathrm{sen\,x}\,(\mathrm{sen\,x}\;\; + x^2\cos x\;cosy)}{cosx\;\;(sen\;x + x^2\cos x\,\cos y)}$$

• Se eliminan los paréntesis, y por lo tanto:

$$\frac{My - Nx}{N} = \frac{2senx}{cosx} = 2\frac{senx}{cos\;x} = 2tanx$$

• Como esta función es **exclusivamente** dependiente de x, el factor integrante es:

$$I = e^{\int 2tanx\,dx} = e^{-2ln|cosx|} = e^{\ln(cosx)^{-2}} = (cosx)^{-2} = \frac{1}{cos^2x} = sec^2x$$

• Este es el Factor Integrante:

$$\boxed{\boldsymbol{I = sec^2x}}$$

Una vez hallado el factor integrante, éste se multiplica por la ecuación diferencial Inexacta, entonces se hace exacta, una vez que es exacta, se resuelve, se deja el ejercicio para la práctica del lector.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación diferencial.

$$(x^2 + y^2 + 1)dx - (xy + y)dy = 0 \quad ; \quad x + 1 > 0$$

Resolución.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Criterio de exactitud:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$Si\ \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\Rightarrow i) \qquad \begin{gathered} I = e^{\int f(x)dx} \\ donde\ f(x) = \frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] \end{gathered}$$

$$\Rightarrow ii) \qquad \begin{gathered} I = e^{\int f(y)dy} \\ donde\ f(y) = \frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] \end{gathered}$$

Operaciones:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2 + y^2 + 1] = 2y$$

No es exacta

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[-(xy + y)] = -(y)(1) = -y$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{-(xy + y)}[2y - (-y)] = -\frac{1}{y(x+1)}[3y]$$

$$= -\frac{3}{x+1} \quad \leftarrow \quad \mathit{función\ exclusiva\ de\ x.}$$

$$\therefore I = e^{\int -\frac{3}{x+1}dx}$$

$$= e^{-3\int \frac{dx}{x+1}} = e^{-3\ln(x+1)}$$

$$= e^{\ln(x+1)^{-3}}$$

$$= \frac{1}{(x+1)^3}$$

Por consiguiente, la ecuación se transformará en:

$$\frac{1}{(x+1)^3}[(x^2 + y^2 + 1)dx + (-1)(xy + y)dy] = 0$$

$$\frac{x^2 + y^2 + 1}{(x+1)^3}dx + \frac{(-1)(y)(x+1)}{(x+1)^3}dy = 0$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[(x+1)^{-3}(x^2 + y^2 + 1)]$$

$$= (x+1)^{-3}(2y) = 2y(x+1)^{-3}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[(x+1)^{-2}(-y)] = (-y)(-2)(x+1)^{-3}(1)$$

$$= 2y(x+1)^{-3}$$

Se hace exacta.

Una vez, que la ecuación diferencial es exacta, se resuelve. La solución es:

$$\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{y^2+2}{2(x+1)^2} = c$$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación,

$$(x^2+y^2+x)dx + xy\,dy = 0$$

Siguiendo la rutina:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2+y^2+x] = 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[xy] = y$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]$$

$$\frac{1}{xy}[2y-y] = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \ \rightarrow\ \mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx}$$

$$\therefore\ \mu(x) = e^{\ln x} = x$$

$$\therefore\ x\{[x^2+y^2+x]dx + xy\,dy\} = 0$$

$$(x^3+xy^2+x^2)dx + x^2y\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^3 + xy^2 + x^2] = 2\,xy$$

Es exacta

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2 y] = 2\,xy$$

La solución de la ecuación diferencial exacta es:

$$3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = c$$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación

$$(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$$

Resolución.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[2xy^4e^y + 2xy^3 + y]$$

$$= 2x(y^4e^y + e^y(4)y^3) + 2x(3)y^2 + 1$$

$$= 2xy^4e^y + 8xy^3e^y + 6xy^2 + 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x]$$

$\neq$, La ecuación, no es exacta.

$$= y^4e^y(2x) - y^2(2x) - 3$$

$$= 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x}[2xy^4e^y + 8xy^3e^y + 6xy^2 + 1 - (2xy^4e^y - 2xy^2 - 3)]$$

$$f(x) \neq \frac{4(2xy^3 + 2xy^2 + 1)}{y(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)} \quad \rightarrow \quad \text{Este coeficiente es una función de x y y.}$$

Intentamos con ***f (y)***

$$f(y) = \frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right]$$

$$= \frac{1}{2xy^4e^y + 2xy^3 + y}[2xy^4e^y - 2xy^2 - 3 - (2xy^4e^y + 8xy^3e^y + 6xy^2 + 1)]$$

$$f(y) = \frac{-(8xy^3e^y + 8xy^2 + 4)}{y(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)} = \frac{-4(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}{y(2xy^3e^y + 2xy^2 + 1)}$$

$$\therefore f(y) = -\frac{4}{y} \quad \Rightarrow \quad I = e^{\int\left(-\frac{4}{y}\right)dy}$$

$$= e^{-4\int\frac{dy}{y}}$$

$$= e^{-4\ln y} = e^{ln y^{-4}}$$

$$\therefore I = y^{-4} = \frac{1}{y^4}$$

Mostrar que la función $\frac{1}{y^4}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial.

La solución de la ecuación diferencial exacta es:

$$x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = c$$

Ejemplo 6

(Factor integrante de la forma $x^m y^n$ Exclusivo para los polinomios)

$$(2y^2 - 6xy)dx + (3xy - 4x^2)dy = 0$$

Resolución.

Determinamos si es exacta la ecuación.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[2y^2 - 6xy] = 4y - 6x$$

No es EXACTA

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[3xy - 4x^2] = 3y - 8x$$

Se propone un factor integrante de la forma $x^m y^n$

$$\therefore x^m y^n\{[2y^2 - 6xy)dx + (3xy - 4x^2)dy\} = 0$$

$$(2x^m y^{n+2} - 6x^{m+1}y^{n+1})dx + (3x^{m+1}y^{n+1} - 4x^{m+2}y^n)dy = 0$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[2x^m(n+2)y^{n+1} - 6x^{m+1}(n+1)y^n]$$

$$= 2(n+2)x^m y^{n+1} - 6(n+1)x^{m+1}y^n$$

Se igualan

$$y\ \boldsymbol{y}\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[3x^{m+1}y^{n+1} - 4x^{m+2}y^n]$$

$$= 3(m+1)x^m y^{n+1} - 4(m+2)x^{m+1}y^n$$

$$2(n+2)x^m y^{n+1} - 6(n+1)x^{m+1}y^n = 3(m+1)x^m y^{n+1} - 4(m+2)x^{m+1}y^n$$

Se igualan los coeficientes de los términos iguales.

$$2(n+2) = 3(m+1) \rightarrow (1)$$

$$-6(n+1) = -4(m+2) \rightarrow (2)$$

$$2n + 4 = 3m + 3 \rightarrow (1)$$

$$-6n - 6 = -4m - 8 \rightarrow (2)$$

Multiplicando por 3 la primera ecuación y sumando a la segunda.

$$\begin{array}{r} 6n + 12 = 9m + 9 \\ -6n - 6 = 4m - 8 \\ \hline 0 + 6 = 5m + 1 \end{array}$$

$$5 = 5m$$

$$m = 1$$

Sustituir m en (1), obtenemos:

$$2n + 4 = 3(1) + 3$$

$$2n = 3 + 3 - 4$$

$$2n = 2$$

$$n = 1$$

$$\therefore I(x, y) = x^m y^n = xy$$

$$\therefore xy\{[2y^2 - 6xy]dx + (3xy - 4x^2)dy\} = 0$$

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[2xy^3 - 6x^2y^2] = (2x)3y^2 - (6x^2)(2y)$$

$$= 6xy^2 - 12x^2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[3x^2y^2 - 4x^3y] = 3(2x)y^2 - 4(3x^2)y$$

$$= 6xy^2 - 12x^2y$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad El\ factor\ integrante\text{: } \boldsymbol{xy}\ es\ el\ correcto.$$

En virtud de que la ecuación es exacta, esta se resuelve por el método ya estudiado.

Ejemplo 7

Determinar el factor integrante de la forma $\boldsymbol{x^m y^n}$ para la ecuación diferencial:

$$x(4y\,dx + 2x\,dy) + y^3(3y\,dx + 5x\,dy) = 0$$

Resolución:

$$4xy\,dx + 2x^2\,dy + 3y^4dx + 5xy^3\,dy = 0$$

$$(4xy + 3y^4)dx + (2x^2 + 5xy^3)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[4xy + 3y^4] = 4x + 12y^3$$

No es EXACTA.

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[2x^2 + 5xy^3] = 4x + 5y^3$$

Entonces multiplicamos la ecuación por $\boldsymbol{x^m y^n}$ para hallar un factor integrante.

$$x^my^n[(4xy + 3y^4)dx + (2x^2 + 5xy^3)dy] = x^my^n(0)$$

$$(4x^{m+1}y^{n+1} + 3x^my^{n+4})dx + (2x^{m+2}y^n + 5x^{m+1}y^{n+3})dy = 0$$

$$\boldsymbol{M} = 4x^{m+1}y^{n+1} + 3x^{m}y^{n+4}$$

$$\boldsymbol{N} = 2x^{m+2}y^{n} + 5x^{m+1}y^{n+3}$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4x^{m+1}y^{n+1} + 3x^{m}y^{n+4})$$

$$= 4(n+1)x^{m+1}y^{n} + 3(n+4)x^{m}y^{n+3}$$

Se igualan

$$y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[2x^{m+2}y^{n} + 5x^{m+1}y^{n+3}]$$

$$= 2(m+2)x^{m+1}y^{n} + 5(m+2)x^{m+1}y^{n+3}$$

$$4(n+1)x^{m+1}y^{n} + 3(n+4)x^{m}y^{n+3} = 2(m+2)x^{m+1}y^{n} + 5(m+1)x^{m}y^{n+3}$$

Igualando los coeficientes correspondientes:

$$4(n+1) = 2(m+2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$3(n+4) = 5(m+1) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Resolviendo el sistema, encontramos que $\boldsymbol{m=2}$, $\boldsymbol{n=1}$.

Por lo que el factor integrante, I es:

$$\boldsymbol{I = x^{2}y}$$

Por lo que, si multiplicamos la ecuación diferencial original por el factor integrante, $\boldsymbol{I}$. la nueva ecuación diferencial queda:

$$(4x^{3}y^{2} + 3x^{2}y^{5})dx + (2x^{4}y + 5x^{3}y^{4})dy = 0$$

Es evidente que esta ecuación diferencial es exacta.

Se deja al lector como ejercicio la resolución de este problema.

5. 4 Problemas Propuestos

1 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, usando un factor integrante apropiado.

1.1 $x^2\, sen\, x\, dx + xy\, dy = 0$

1.2 $(xy + y + y^2)dx + (x + 2y)dy = 0$

1.3 $(2xy + y^4)dx + (3x^2 + 6xy^3)dy = 0$

1.4 $(6xy - 4y)dx - 2xydy = 0$

1.5 $(4y^2 - 5xy)dx + (6xy - 5x^2)dy = 0$

1.6 $x^{-2}\, y^{-5}\, dx + x^{-3}\, y^{-4}\, dy = 0$

1.7 $(6y - 24xy^5)dx + (9x - 56x^2y^4)dy = 0$

1.8 $(3y - 8x)dx + x\, dy = 0$

1.9 $(y + 2x\, cos^2\, x\, sen\, y)dx + (sen\, x \cos x + x^2\, cos^2\, x \cos y)dy = 0$

1.10 $2ydx + x\, dy = 0$

1.11 $(y^3 - 3x^2y)dx + (4xy^2 - 2x^3)dy = 0$

1.12 $(xy + 1)dx + (x^2 + 4xy - 2x)dy = 0$

1.13 $(2y^2 + 3xy - 2y + 6x)dx + (x^2 + 2xy - x)dy = 0$

1.14 $y(y^2 - 2x^2)dx + x(2y^2 - x^2)dy = 0$

1.15 $(3x^2y^2)dx + 4(x^3y - 3)dy = 0$

1.16 $y^2\, dy + ydx - xdy = 0$

1.17 $(3y^3 - xy)dx - (x^2 + 6xy^2)dy = 0$

Capítulo 6

Ecuaciones Diferenciales Lineales

6.1 Definición de una ecuación diferencial Lineal.

Una ecuación diferencial lineal ordinaria de primer orden, se puede escribir en la forma *diferencial*, a saber,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

…o en la forma *derivada*,

$$f'(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

En el caso de los cuatro tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden estudiadas anteriormente, usamos la notación diferencial. Las ecuaciones diferenciales **lineales** que a continuación veremos, se acercan más a la forma derivada y tienen la siguiente forma general:

$$\boxed{\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)}}$$

Donde:

y, es la derivada de *y* respecto a $\boldsymbol{x}$, $y' = \frac{dy}{dx}$

$\boldsymbol{y}$ **,** es la variable dependiente, y de la cual queremos obtener la función solución, $y = f(x)$.

p (x) es una función exclusiva de $\boldsymbol{x}$, o puede ser una constante.

q (x) es otra función exclusiva de $\boldsymbol{x}$, o, también, puede ser una constante.

Ahora vamos a realizar una serie de operaciones para obtener una fórmula que nos permita resolver cualquier ecuación diferencial ordinaria de primer orden lineal. Para esto, realizamos el siguiente procedimiento:

•Arreglamos nuestra ecuación diferencial lineal a la forma *diferencial*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y - q(x) = 0$$

$$dy + [p(x)y - q(x)]dx = 0$$

$$[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0$$

Como podemos observar, la ecuación diferencial ya la tenemos en la forma diferencial, donde:

$$M(x,y) = p(x)y - q(x), \text{ y } N(x,y) = 1$$

• Ahora analizamos si esta ecuación diferencial, además de ser lineal, también es exacta, para esto obtenemos las derivadas parciales, ***My*** y ***Nx***.

$$My = p(x)$$

$$Nx = 0$$

Como ***My ≠ Nx***, la ecuación diferencial no es exacta.

• Buscaremos el factor integrante de acuerdo a como lo vimos en el tema de las ecuaciones diferenciales inexactas, con el método *Corona* (ver el método en las páginas anteriores, si no lo tenemos claro).

1 Calculamos: $\frac{My-Nx}{N}$:

$$\frac{My - Nx}{N} = \frac{p(x) - 0}{1} = p(x)$$

2 Dado que, por definición, ***p (x)*** es una función exclusiva de ***x***, entonces el factor integrante es:

$$I = e^{\int p(x)dx}$$

• Ahora, en vez de seguir el procedimiento convencional para volver la ecuación diferencial inexacta en exacta, lo que haremos será multiplicar la ecuación diferencial original, por nuestro factor integrante, y después despejar ***y***.

$$e^{\int p(x)dx}\,[\,y' + p(x)y] = q(x)$$

$$e^{\int p(x)dx}\,y' + y\ e^{\int p(x)dx}\,p(x) = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

- La parte izquierda de esta expresión, es la derivada del producto: $e^{\int p(x)dx}\, y$, por lo que:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)dx}\, y\right) = e^{\int p(x)dx} q(x)$$

- Ahora, pasamos a dx multiplicando del otro lado.

$$d\left(e^{\int p(x)dx}\, y\right) = \left[e^{\int p(x)dx} q(x)\right] dx$$

- Integramos,

$$\int d\left(e^{\int p(x)dx}\, y\right) = \int \left[e^{\int p(x)dx} q(x)\right] dx$$

$$e^{\int p(x)dx}\, y = \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx$$

- Finalmente:

$$\boxed{\boldsymbol{y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c\right]}}$$

Donde c es una constante de integración. La ecuación anterior, es la fórmula solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden, de la forma:

$$y' + p(x)y = q(x).$$

6.2 Problemas Resueltos

Ejemplo 1

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$y' - \frac{4}{x}y = x^5e^x$$

Resolución

De acuerdo a la forma general de una ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$p(x) = -\frac{4}{x}, p(x) = -\frac{4}{x}, \qquad q(x) = x^5e^x q(x) = x^5e^x,$$

Tomamos la fórmula solución y sustituimos ***p (x)*** y ***q (x)***, y resolvemos las integrales:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)dx + c\right]$$

$$y = e^{-\int -\frac{4}{x}dx} \left[\int e^{\int -\frac{4}{x}dx}\, x^5e^x\, dx + c\right]$$

$$y = e^{\int \frac{4}{x}dx} \left[\int e^{-\int \frac{4}{x}dx}\, x^5e^x\, dx + c\right]$$

$$y = e^{4lnx} \left[\int e^{-4lnx}\, x^5e^x dx \ + c\right]$$

$$y = e^{lnx^4} \left[\int e^{lnx^{-4}}\, x^5e^x dx \ + c\right]$$

$$y = x^4 \left[\int x^{-4}\, x^5e^x dx \ + c\right]$$

$$y = x^4 \left[\int xe^x dx \ + c\right]$$

$$y = x^4 \ [xe^x - e^x \ + c]$$

Solución general:

$$\boxed{\boldsymbol{y = x^5\, e^x - x^4 e^x + cx^4}}$$

Comprobación:

Calculamos la derivada de la solución:

$$y' = x^5\, e^x + 5x^4\, e^x - x^4 e^x - 4x^3 e^x + 4cx^3$$

Sustituimos $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{y}$' en la ecuación original.

$$y' - \frac{4}{x} y = x^5 e^x$$

$$x^5\, e^x + 5x^4\, e^x - x^4 e^x - 4x^3 e^x + 4cx^3 - \frac{4}{x}(x^5\, e^x - x^4 e^x + cx^4) = x^5 e^x$$

$$x^5\, e^x + 5x^4\, e^x - x^4 e^x - 4x^3 e^x + 4cx^3 - 4x^4\, e^x + 4x^3 e^x - 4cx^3 = x^5 e^x$$

Sumamos términos semejantes y:

$$x^5\, e^x = x^5 e^x$$

Ejemplo 2

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal:

$$y' + 3x^2 y = x^2$$

Resolución

De acuerdo a la forma general de una ecuación diferencial lineal de primer orden,

$$p(x) = 3x^2, p(x) = 3x^2, \qquad q(x) = x^2 q(x) = x^2$$

Tomamos la fórmula solución y sustituimos ***p (x)*** y ***q (x)***, y resolvemos las integrales:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c\right]$$

$$y = e^{-\int 3x^2dx} \left[\int e^{\int 3x^2dx}\, x^2\, dx + c\right]$$

$$y = e^{-3\int x^2dx} \left[\int e^{3\int x^2dx}\, x^2\, dx + c\right]$$

$$y = e^{-x^3} \left[\int e^{x^3}\, x^2dx \; + c\right]$$

$$y = e^{-x^3} \left[\frac{1}{3}e^{x^3} + c\right]$$

Solución general:

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}}}$$

Comprobación:

Calculamos la derivada de la solución:

$$y' = -3cx^2e^{-x^3}$$

Sustituimos ***y*** y ***y***' en la ecuación original.

$$y' + 3x^2y = x^2$$

$$-3cx^2e^{-x^3} + 3x^2\left(\frac{1}{3} + ce^{-x^3}\right) = x^2$$

$$-3cx^2e^{-x^3} + x^2 + 3cx^2e^{-x^3} = x^2$$

$$x^2 = x^2$$

Ejemplo 3

Resolver la siguiente ecuación diferencial lineal.

$$xy' + y = 3x^2 ; \qquad \text{con } y(1) = 1$$

Resolvemos…

Dividimos entre x para tener la ec. dif. en la forma Lineal: $\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)}$

$$\frac{xy' + y}{x} = \frac{3x^2}{x}$$

$$y' + \left(\frac{1}{x}\right) y = 3x$$

$$p(x) = 1/xp(x) = 1/x, \qquad q(x) = 3xq(x) = 3x$$

• Tomamos la fórmula solución de una ecuación diferencial lineal:

$$y = e^{-\int p(x)\,dx} \left[\int e^{\int p(x)\,dx} q(x)dx + c\right]$$

Sustituimos ***p (x)*** y ***q (x)*** de nuestra ec. dif. en la fórmula solución:

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int e^{\int \frac{1}{x}\,dx} \ 3xdx + c\right]$$

$$y = e^{-\ln(x)} \left[3\int e^{\ln(x)}\ x\ \ dx + c\right]$$

$$y = e^{\ln(x^{-1})} \left[3\int e^{\ln(x)}\ x\ \ dx + c\right]$$

$$y = x^{-1} \left[3\int x\ x\ \ dx + c\right]$$

$$y = x^{-1} \left[3\int\ x^2\ \ dx + c\right]$$

$$y = x^{-1} \quad [x^3 + c]$$

• La solución general es:

$$\boxed{y = \; x^2 + \frac{c}{x}}$$

• Ahora, la solución particular la encontramos al sustituir el valor inicial dado:

$$y(1) = 1$$

$$1 = \; (1)^2 + \frac{c}{1}$$

$$c = 0$$

• Por lo tanto, la solución particular es: $y - x^2$

6. 3 Problemas Propuestos

1 Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

1.1 $y' + y = 5$

1.2 $xy' + y = sen\ x + e^{-x}$

1.3 $y' + y \cot x = csc^2\ x$

1.4 $y' + x^{-1} y = e^x$

1.5 $(cos^2 x)y' + y = \tan x$

1.6 $dx/dt + 4tx = t^3$

1.7 $xy' + y = 3x^2$; $con\ y(1) = 1$

1.8 $(sen\ x)y' + (cosx)y = cos\ 2x; \quad y(\pi/2) = 1/2$

1.9 $y' + \; y \; = \; e^{3x}$

1.10 $x\ dy \; = \; (x\ senx - y\ )\ dx$

1.11 $x^2 y' + xy = 1$

1.12 $x^2 y' \; + \; x(x+2)y \; = \; e^x$

Capítulo 7

Ecuaciones Diferenciales de Bernoulli

7.1 Definición de una ecuación diferencial de Bernoulli.

La ecuación diferencial de Bernoulli no es lineal, pero es muy semejante a las lineales. Como vimos en el tema anterior, una ecuación de lineal tiene la forma general:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Y su fórmula solución es:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + c\right]$$

Pues bien, la ecuación diferencial de Bernoulli, se define como:

$$\boxed{\boldsymbol{y' + p(x)y = q(x)\, y^n} \quad \ldots..(1)}$$

Podemos observar la similitud que hay entre una ecuación diferencial lineal y una ecuación diferencial de Bernoulli. Lo que las distingue es la potencia $\boldsymbol{y^n}$ que tiene la Bernoulli, donde el exponente $\boldsymbol{n \in R - (0,1)}$ ($\boldsymbol{n}$ es cualquier número real, excepto 0 y 1).

Lo que ahora vamos a realizar es un proceso similar como el que hicimos con la ecuación diferencial lineal, para hallar una fórmula que nos proporcione la solución de la ecuación diferencial de Bernoulli.

- Dividimos la ecuación de Bernoulli entre $\boldsymbol{y^n}$:

$$\frac{y' + p(x)y}{y^n} = \frac{q(x)y^n}{y^n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{y' + p(x)y}{y^n} = q(x)$$

• Realizamos operaciones:

$$y^{-n}y' + p(x)\ y\,y^{-n} = q(x) \dots \dots \dots \dots (3)$$

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

• Ahora hacemos un cambio de variable

Sea $\quad W = y^{1-n} \dots \dots \dots \dots (4)$

Derivamos: $\quad W' = (1-n)y^{-n}\,y' \dots \dots \dots (5)$

Dividimos entre 1-n: $\quad \frac{W'}{1-n} = y^{-n}\,y' \dots \dots \dots \dots \dots \dots (6)$

Sustituimos las ecuaciones (4) y (6) en la ecuación diferencial (3):

$$\frac{W'}{1-n} + p(x)W = q(x)$$

• Ahora multiplicamos por 1-n:

$$W' + (1-n)p(x)W = (1-n)q(x) \dots \dots \dots \dots \dots \dots (7)$$

La ecuación diferencial (7) es **una ecuación diferencial lineal de primer orden en la variable W** que contiene una constante agregada ***1-n***, por lo que, de manera similar a la lineal conocida, la solución de esta ecuación diferencial en términos de W, sería:

$$\boldsymbol{W = e^{-\int (1-n)p(x)dx}\left[\int e^{\int (1-n)p(x)dx}\,(1-n)q(x)dx + c\right]} \dots \dots (8)$$

Sin olvidar que hicimos un cambio de variable, $\boldsymbol{W = y^{1-n}}$

Ahora pasemos a resolver algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales de Bernoulli.

7.2 Problemas Resueltos

Ejemplo 1

Hallar la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = y(xy^3 - 1)$$

Resolución

Es importante tomar en cuenta que las ecuaciones diferenciales no siempre están escritas como las vemos teóricamente, a veces están, valga la expresión, *camufladas*, por lo que, lo primero que tenemos que hacer, en este caso, es expresarla en la forma *patrón* de Bernoulli, a saber: $y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n$.

Hacemos el proceso con esta ecuación diferencial.

$$y' = y(xy^3 - 1)$$

$$y' = xy^4 - y$$

$$y' + y = xy^4$$

Es evidente que esta última expresión tiene la forma conocida de la ecuación diferencial de Bernoulli, donde: $p(x) - 1,\ q(x) - x$ y $n - 4.$

Retomamos la fórmula solución de Bernoulli (ecuación (8)):

$$W = e^{-\int (1-n)p(x)dx} \left[\int e^{\int (1-n)p(x)dx} (1-n)q(x)dx + c \right]$$

…y sustituimos $p(x) = 1p(x) = 1$, $q(x) = xq(x) = x$ y $n = 4.n = 4.$

$$W = e^{-\int (1-4)(1)dx} \left[\int e^{\int (1-4)(1)dx} (1-4)xdx + c \right]$$

Simplificamos y resolvemos las integrales:

$$W = e^{3\int dx}\left[\int e^{-3\int dx}(-3)xdx + c\right]$$

$$W = e^{3x}\left[-3\int e^{-3x}\,xdx + c\right]$$

$$W = e^{3x}\left[-3\int e^{-3x}\,xdx + c\right]$$

Esta última integral, la resolvemos por partes:

$$W = e^{3x}\left[-3\left(-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}\right) + c\right]$$

Simplificamos:

$$W = e^{3x}\left[-3\left(-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}\right) + c\right]$$

$$W = e^{3x}\left[xe^{-3x} + \frac{1}{3}e^{-3x} + c\right]$$

$$W = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}$$

Esta expresión es la solución de la ecuación diferencial de Bernoulli en términos de W, pero debemos ponerla en términos de y que es la variable dependiente original de nuestra ecuación diferencial. Como sabemos que $W = y^{1-n}$, entonces, sustituimos W y despejamos y.

$$y^{1-n} = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}$$

$$y^{1-4} = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}y^{1-4} = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}$$

$$y^{-3} = x + \frac{1}{3} + ce^{3x}$$

$$(y^{-3})^{-\frac{1}{3}} = \left(x + \frac{1}{3} + ce^{3x}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$y = \left(x + \frac{1}{3} + ce^{3x}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$y = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{3} + ce^{3x}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Por lo tanto, la solución queda:

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{1}{\sqrt[3]{x + \frac{1}{3} + ce^{3x}}}}}$$

Ejemplo 2

Resolver, $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$

Resolución. Primero acomodamos esta ecuación diferencial de Bernoulli para identificar lo que es ***p (x), q (x), n***

$$x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{xy^2}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}y^{-2}$$

Por lo que: ***p (x) = 1 / x, q (x) = 1/x, n = -2.***

Sustituyendo en la fórmula solución de una ecuación diferencial de Bernoulli (ecuación (8)).

$$W = e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left[\int e^{\int(1-n)p(x)dx}\,(1-n)q(x)dx + c\right]$$

$$W = e^{-\int\frac{(1-(-2))}{x}dx}\left[\int \frac{e^{\int\frac{(1-(-2))}{x}dx}\,\big(1-(-2)\big)}{x}dx + c\right]$$

$$W = e^{-\int\frac{(1+2)}{x}dx}\left[\int \frac{e^{\int\frac{(1+2)}{x}dx}\,(1+2)}{x}dx + c\right]$$

$$W = e^{-3\int\frac{1}{x}dx}\left[3\int \frac{e^{3\int\frac{1}{x}dx}}{x}dx + c\right]$$

Integramos:

$$W = e^{-3lnx}\left[3\int \frac{e^{3lnx}}{x}dx + c\right]$$

$$W = e^{lnx^{-3}}\left[3\int \frac{e^{lnx^{3}}}{x}dx + c\right]$$

$$W = x^{-3}\left[3\int \frac{x^{3}}{x}dx + c\right]$$

$$W = x^{-3}\left[3\int x^{2}dx + c\right]$$

$$W = x^{-3}\left[3\ \frac{x^3}{3} + +c\right]$$

$$W = 1 + \frac{c}{x^3}$$

Esta es la solución en términos de W, ahora sustituimos $W = y^{1-n} = y^{1-(-2)}$:

$$y^3 = 1 + \frac{c}{x^3}$$

Por lo que la solución final queda:

$$\boxed{\boldsymbol{y = \sqrt[3]{1 + \frac{c}{x^3}}}}$$

Comprobación:

Acomodamos la solución en forma potencial: $y = (1 + cx^{-3})^{\frac{1}{3}}$

Derivamos: $y' = \frac{1}{3}(1 + cx^{-3})^{-\frac{2}{3}}(-3cx^{-4})$

Simplificamos: $y' = -cx^{-4}(1 + cx^{-3})^{-\frac{2}{3}}$

Sustituimos en nuestra ecuación diferencial:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}y^{-2}$$

$$-cx^{-4}(1 + cx^{-3})^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x}(1 + cx^{-3})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{x}(\ (1 + cx^{-3})^{\frac{1}{3}}\ )^{-2}$$

$$-\frac{c}{x^4}(1 + cx^{-3})^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x}(1 + \frac{c}{x^3})^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{x}\ (1 + c/x^3)^{-\frac{2}{3}}$$

Factorizamos:

$$\frac{1}{x}(1+cx^{-3})^{-\frac{2}{3}}\left[-\frac{c}{x^3}+(1+\frac{c}{x^3})^1\right]=\frac{1}{x}\ (1+c/x^3\ )^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{x}(1+cx^{-3})^{-\frac{2}{3}}\left[-\frac{c}{x^3}+1+\frac{c}{x^3}\right]=\frac{1}{x}\ (1+c/x^3\ )^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{x}(1+cx^{-3})^{-\frac{2}{3}}[1]=\frac{1}{x}\ (1+cx^{-3})^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{x}(1+cx^{-3})^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{x}\ (1+cx^{-3})^{-\frac{2}{3}}$$

Lo que queda demostrado

Ejemplo 3

Resolver: $\frac{dy}{dx}-ay=\frac{b}{y}$

La ecuación diferencial de Bernoulli, tiene la forma general:

$y'+p(x)y=q(x)y^n$ ó bien:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$$

Donde:

p(x) y ***q(x)*** son funciones de ***x*** ó son constantes, en este caso, a y b son constantes.

n es un exponente real distinto de 1 o de 0, en este caso n=-1.

Usando la fórmula solución:

$$\boldsymbol{W=e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left[\int e^{\int(1-n)p(x)dx}\,(1-n)q(x)dx+c\right]}$$

Sin olvidar que:

$$W = y^{1-n}$$

Sustituimos los datos:

$$W = e^{-\int (1-(-1))a dx}\left[\int e^{\int (1-(-1))a dx}\,(1-(-1))b\,dx + c\right]$$

$$W = e^{-\int (2)a dx}\left[\int e^{\int (2)a dx}\,(2)b\,dx + c\right]$$

$$W = e^{-2a\int dx}\left[2b\int e^{2a\int dx}\;dx + c\right]$$

$$W = e^{-2ax}\left[2b\int e^{2ax}\;dx + c\right]$$

$$W = e^{-2ax}\left[\frac{2b}{2a}e^{2ax} + c\right]$$

$$W = e^{-2ax}\left[\frac{b}{a}e^{2ax} + c\right]$$

$$W = \frac{b}{a} + ce^{-2ax}$$

Como:

$$W = y^{1-n}\; y^{1-(-1)}$$

$$W = y^2$$

$$y^2 = \frac{b}{a} + ce^{-2ax}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = \sqrt{\frac{b}{a} + ce^{-2ax}}}}$$

7. 3 Problemas Propuestos

1 Encontrar la solución de las siguientes ecuaciones de *Bernoulli.*

1.1 $y' + 2y = xy^2$

1.2 $y' + 2x^{-1}y = xy^2$

1.3 $dy/dx - ay = b/y$

1.4 $x^2dy/dx - 2xy = 3y^4$; $x = 1,\ y = 1/2$

1.5 $dy/dx = y(xy^3 - 1)$

1.6 $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$

1.7 $x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = xy$

Capítulo 8

Trayectorias Ortogonales

8.1 Definición de una *familia* de Trayectorias Ortogonales.

Se llaman trayectorias ortogonales al conjunto de curvas que se intersectan a otra función (otro conjunto de curvas) formando ángulos rectos (ortogonalidad o perpendicularidad); por lo que las pendientes de las rectas tangentes, de ambas curvas cumple la con la ecuación:

$$m_f \, m_o = -1$$

Donde:

m_f es la pendiente de la función original. $\boldsymbol{y_0 = Cx}$

m_o es la pendiente de las curvas ortogonales.

Para obtener las trayectorias ortogonales de una función $f(x)$ determinada, se sigue el siguiente procedimiento:

1 Se deriva la función (al derivar, estamos hallando todas las pendientes de las rectas tangentes de la función, en cualquier valor de x)

2 Si aparecen constantes, sustituimos lo que valen, en función de x y y.

3 Aplicamos la propiedad de ortogonalidad, es decir: $m_0 = -\frac{1}{m_f}$. $m_f m_o = -1)$. Recordemos aquí, que la pendiente de la tangente es, por definición, la derivada, por lo que: $f(x)'_0 = -\frac{1}{f(x)'_f}$. $(f(x)'_0 \, f(x)'_f = -1)$

4 Resolvemos la ecuación diferencial. La función solución es la curva (o familia) de las trayectorias ortogonales.

8.2 Problemas Resueltos

Ejemplo 1

Tenemos la ecuación de una circunferencia de radio r r con centro en el origen.

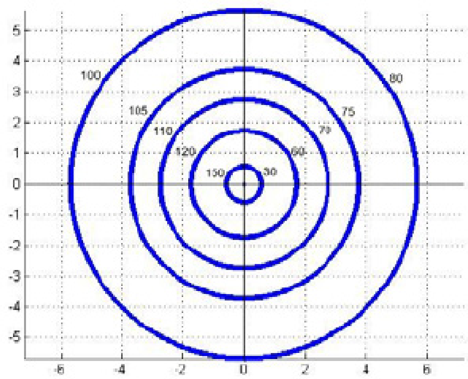
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Hallar sus trayectorias ortogonales (es decir, una función cuyas pendientes son ortogonales, o perpendiculares a la función original).

Resolución

Antes de pasar al procedimiento para hallar las trayectorias ortogonales, vamos a ver la gráfica de esta relación (circunferencia con radio r). Ver gráfica 1.

Gráfica 1. Circunferencias de radio r, con centro en el origen.



Bien, ahora pasamos al cálculo de las trayectorias ortogonales de: $x^2 + y^2 = r^2$

1 Derivamos la función[1]:

$$2x + 2yy' = 0, \qquad \boldsymbol{y' = -\frac{x}{y}}$$

2 No hay constantes qué sustituir

3 Aplicamos la propiedad de ortogonalidad, es decir: $m_0 = -\frac{1}{m_f}\,(m_f m_o = -1)$.

Que en términos de las derivadas sería:

$$y'_0 = -\frac{1}{y'_f}$$

$$y'_0 = -\frac{1}{-\frac{x}{y}} y'_0 = -\frac{1}{-\frac{x}{y}}$$

$$\boldsymbol{y'_0 = \frac{y}{x}}$$

1 Aquí estamos derivando implícitamente, pero podemos despejar primero a y y luego derivar, el resultado es el mismo.

Donde: y'_0 es la derivada de las trayectorias ortogonales. Por lo que nos queda una ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales

4 Resolvemos la ecuación diferencial. La función solución son las trayectorias ortogonales. Es una ecuación diferencial de variables separable.

$$y'_0 = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy_0}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy_0}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\int \frac{dy_0}{y} - \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$lny_0 - lnx = c$$

A la constante c, la podemos escribir como la pendiente de otra constante C:

$$lny_0 - lnx = lnC$$

Simplificamos:

$$ln\left(\frac{y_0}{x}\right) = lnC$$

$$e^{ln\left(\frac{y_0}{x}\right)} = e^{lnC}$$

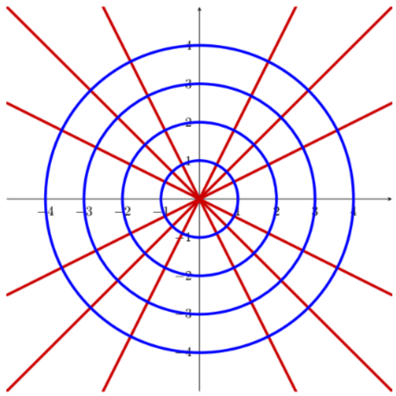
$$\frac{y_0}{x} = C$$

Por lo tanto, las trayectorias ortogonales están dadas por:

$$\boxed{\boldsymbol{y_0 = Cx}}$$

Esta es una ecuación lineal de pendiente C y ordenada al origen 0, la familia de rectas (ortogonales a las circunferencias) está representada en la gráfica 2, líneas rojas.

Gráfica 2. Circunferencias de radio r, con centro en el origen.



Ejemplo 2

Hallar las trayectorias ortogonales de las parábolas: $y - kx^2$, k: es constante.

Resolución

1 Se deriva la función: $y' = 2kx$

2 Sustituimos lo que vale k: como $k = \frac{y}{x^2}$ entonces: $y' = 2\,\frac{y}{x^2}\,x$

$$y' = \frac{2y}{x}$$

3 Aplicamos la propiedad de ortogonalidad, es decir: $y'_0 = -\frac{1}{y'}$

$$y'_0 = -\frac{1}{\frac{2y}{x}}$$

4 Resolvemos la ecuación diferencial. La función solución son las trayectorias ortogonales.

$$y'_0 = -\frac{1}{\frac{2y}{x}}$$

$$y'_0 = -\frac{x}{2y}$$

$$\frac{dy_0}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

$$2ydy_0 = -xdx$$

$$\int 2ydy_0 = \int -xdx$$

$$y_0^2 = -\frac{x^2}{2} + c$$

Solución:

$$\boxed{\frac{x^2}{2} + y_0^2 = c}$$

La función original es una familia de parábolas y las curvas ortogonales es una familia de elipses.

8. 3 Problemas Propuestos

1 Obtener las trayectorias ortogonales de las siguientes familias de curvas.

1.1 $y = kx^2$

1.2 $y = (x-k)^2$

1.3 $x^2 - y^2 = k$

1.4 $y^2 = kx^3$

1.5 $x^2 + y^2 = kx$

1.6 $x\ y\ =\ c$

1.7 $y = \frac{c\,x}{1+x}$

1.8 $y = \frac{c}{1+x^2}$

Capítulo 9

Problemas Resueltos de Aplicación en Ingeniería Química y QFB

Problema 9.1

En una reacción química se han producido 2 gramos de un compuesto químico, una hora después hay 3 g del mismo compuesto. Si la tasa de incremento del compuesto es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo que ha estado en la solución. ¿Cuántos gramos habrá del compuesto después de 4 horas?

Resolución.

Sea m la masa del compuesto químico después de t minutos de reacción. Ahora en una tabla organizamos los datos:

t, **tiempo, en minutos**	m, **en gramos**
0	$mo = 2$
1	3

La Ecuación Diferencial o el modelo matemático de "la tasa de incremento del compuesto es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo", es

$$\frac{dm}{dt} \alpha \sqrt{t}$$

$$\boldsymbol{\frac{dm}{dt} = k\sqrt{t}}$$

Pasamos a resolverla, separamos variables:

$$dm = k\sqrt{t}\, dt$$

Integramos:

$$\int dm = k \int \sqrt{t}\ dt$$

$$m = \frac{2}{3}k\sqrt{t^3} + c$$

Sustituimos las condiciones dadas en la tabla, para encontrar la constante de integración, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{k}$.

$$2 = \frac{2}{3}k\sqrt{(0)^3} + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$3 = \frac{2}{3}k\sqrt{(1)^3} + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

De la ecuación (1): $c = 2$

De la ecuación (2) y con $c = 2$ $k = \frac{3}{2}$

Por lo que la solución es:

$$\boxed{\boldsymbol{m = \sqrt{t^3} + 2}}$$

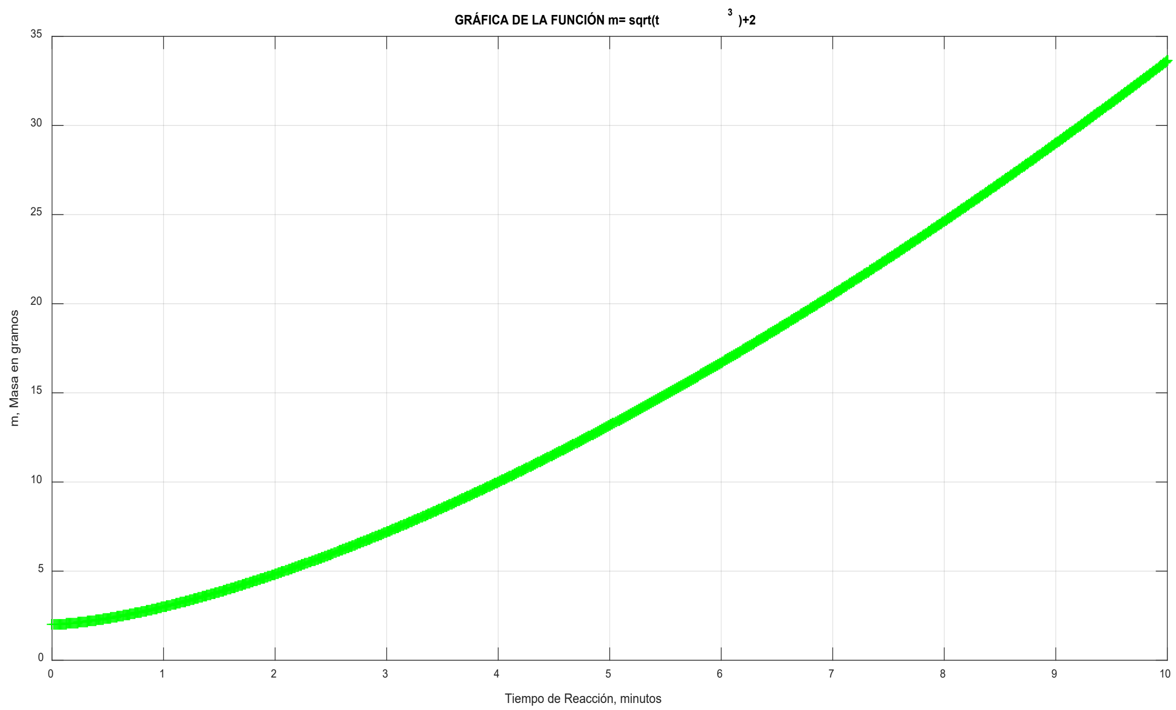
Respondemos la pregunta: "¿Cuántos gramos habrá del compuesto después de 4 horas?"

$$\boldsymbol{m(t = 4) = \sqrt{4^3} + 2 = 10\ gramos}$$

Representación tabular y gráfica de la función solución: $\boldsymbol{m = \sqrt{t^3} + 2}$

$\boldsymbol{Tiempo, t}$ $\boldsymbol{en\ minutos}$	$\boldsymbol{Masa, m,}$ $\boldsymbol{en\ gramos}$
0	$mo = 2$
1	3
2	**4.83**
3	**7.19**
4	**10**
5	**13.18**

Gráfica 3. Problema de aplicación 1.



Ref. Elaboración propia, con MATLAB.

Problema 9.2

La aceleración, $\boldsymbol{a}$ de un punto que se mueve sobre una recta coordenada se expresa por $sen^2 t\ cost, (en\ \frac{m}{seg^2})$ En $\boldsymbol{t = 0\ seg.}$ el punto se encuentra en el origen y su velocidad es $10\ m/seg$. Calcular su posición, $\boldsymbol{x}$ al tiempo t.

Resolución

Hacemos una pequeña tabla con la información (condiciones iniciales):

Tiempo, $t\ (seg)$	*Distancia,* $x\ (metros)$	*Velocidad,* $v\ (m/seg)$	*Aceleración* $a\ (m/seg^2)$
0	0	10	

Ahora partimos de la definición de la velocidad y la aceleración.

Velocidad: $\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt}}$

Aceleración: $\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$

Sustituimos la función aceleración en nuestra definición como la derivada (de la velocidad respecto al tiempo):

$$\boxed{\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt} = sen^2t\, cost}}$$

Resolvemos la ecuación diferencial separando variables:

$$\frac{dv}{dt} = sen^2t\, cost$$

$$dv = sen^2t\, cost\, dt$$

Integramos:

$$\int dv = \int sen^2t\, cost\, dt$$

$$v = \int sen^2t\, cost\, dt$$

$$\boxed{\boldsymbol{v = \frac{1}{3}sen^3t + c}}$$

Sustituimos las condiciones iniciales para hallar la constante de integración, $\boldsymbol{c}$:

$$10 = \frac{1}{3}sen^3(0) + c$$

$$c = 10$$

Por lo que la solución para la velocidad, queda:

$$\boxed{\boldsymbol{v = \frac{1}{3} sen^3 t + 10}}$$

Ahora, como nos piden la posición, x en cualquier tiempo, hacemos uso de la definición de la velocidad como una derivada (de la distancia con respecto al tiempo):

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} sen^3 t + 10}$$

Resolvemos la ecuación diferencial, separando variables:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} sen^3 t + 10$$

$$dx = \left[\frac{1}{3} sen^3 t + 10\right] dt$$

$$\int dx = \int \left[\frac{1}{3} sen^3 t + 10\right] dt$$

Integramos:

$$x = \frac{1}{3} \int sen^3 t \ dt + \int 10dt$$

$$x = \frac{1}{3} \int sen^2 t \ sent \ dt + 10t$$

$$x = \frac{1}{3} \int (1 - cos^2 t \ ) sent \ dt + 10t$$

$$x = \frac{1}{3} \int (sent - cos^2 t \ sent) \ dt + 10t$$

$$x = \frac{1}{3} \left[-cost + \frac{1}{3} cos^3 t\right] + 10t + c$$

Ahora sustituimos las condiciones iniciales para encontrar cc (ver la tabla con los datos):

$$0 = \frac{1}{3}\left[-\cos(0) + \frac{1}{3}cos^3(0)\right] + 10(0) + c$$

$$0 = \frac{1}{3}\left[-1 + \frac{1}{3}(1)\right] + 0 + c$$

$$0 = \frac{1}{3}\left[-\frac{2}{3}\right] + c$$

$$0 = -\frac{2}{9} + c$$

$$c = \frac{2}{9}$$

Por lo tanto, la solución queda:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{1}{3}\left[-cost + \frac{1}{3}cos^3 t\right] + 10t + \frac{2}{9}}}$$

Esta ecuación nos da la posición, $\boldsymbol{x}$, en cualquier tiempo, $\boldsymbol{t}$. Es la pregunta que nos pidieron, pero ahora vamos a realizar una tabla con cálculos y una gráfica con las tres funciones que aparecen en este problema, a saber: la posición, $\boldsymbol{x}$ la velocidad, $\boldsymbol{v}$ y la aceleración, $\boldsymbol{a}$, respectivamente.

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{3}\left[-cost + \frac{1}{3}cos^3 t\right] + 10t + \frac{2}{9}}$$

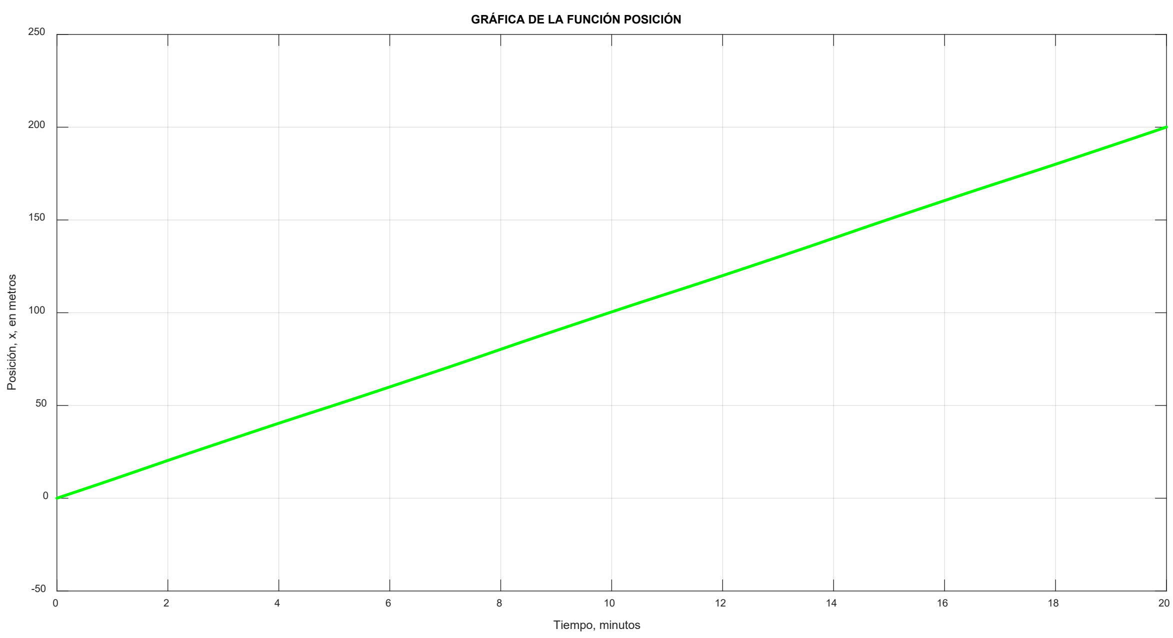
$$\boldsymbol{v = \frac{1}{3}sen^3 t + 10}$$

$$\boldsymbol{a = sen^2 t\ cost}$$

Tanto la tabla de cálculos como las gráficas de las funciones la realizamos con el software MATLAB.

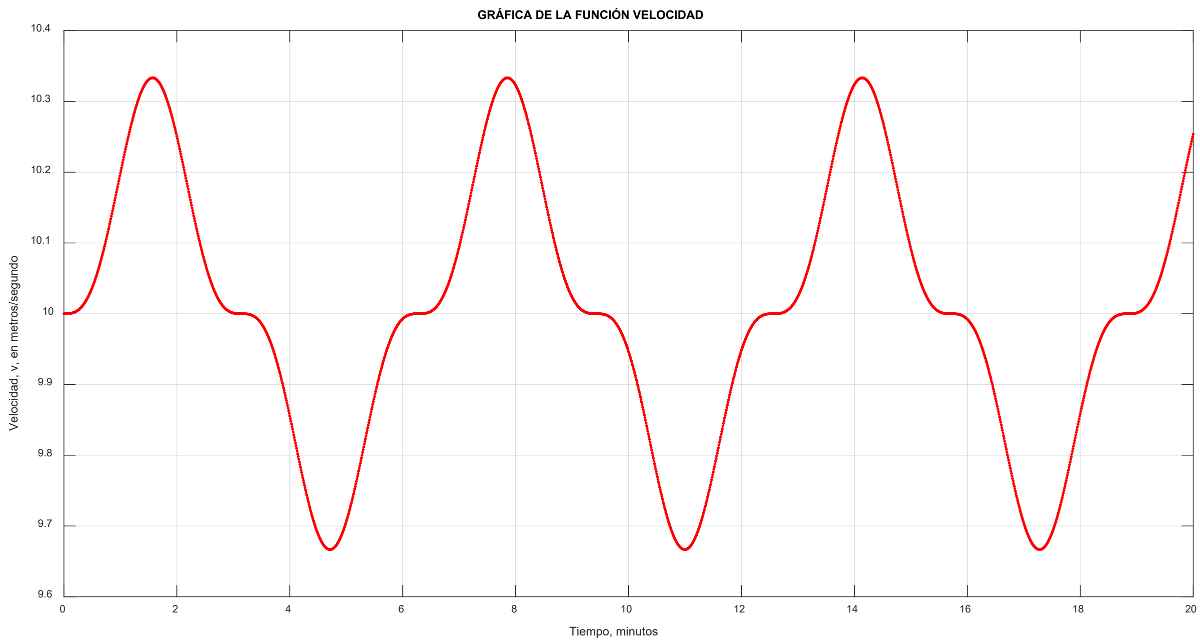
$Tiempo,$ $t\ (seg)$	$Distancia,$ $x\ (metros)$	$Velocidad,$ $v\ (m/seg)$	$Aceleración$ $a\ \left(\frac{m}{seg^2}\right)$
0	0	10.0000	0
10	100.4363	9.9463	-0.2483
20	200.0937	10.2536	0.3401
30	300.1712	9.6785	0.1506
40	400.4116	10.1379	-0.3703

Gráfica 4. Función Posición xx, respecto al tiempo.



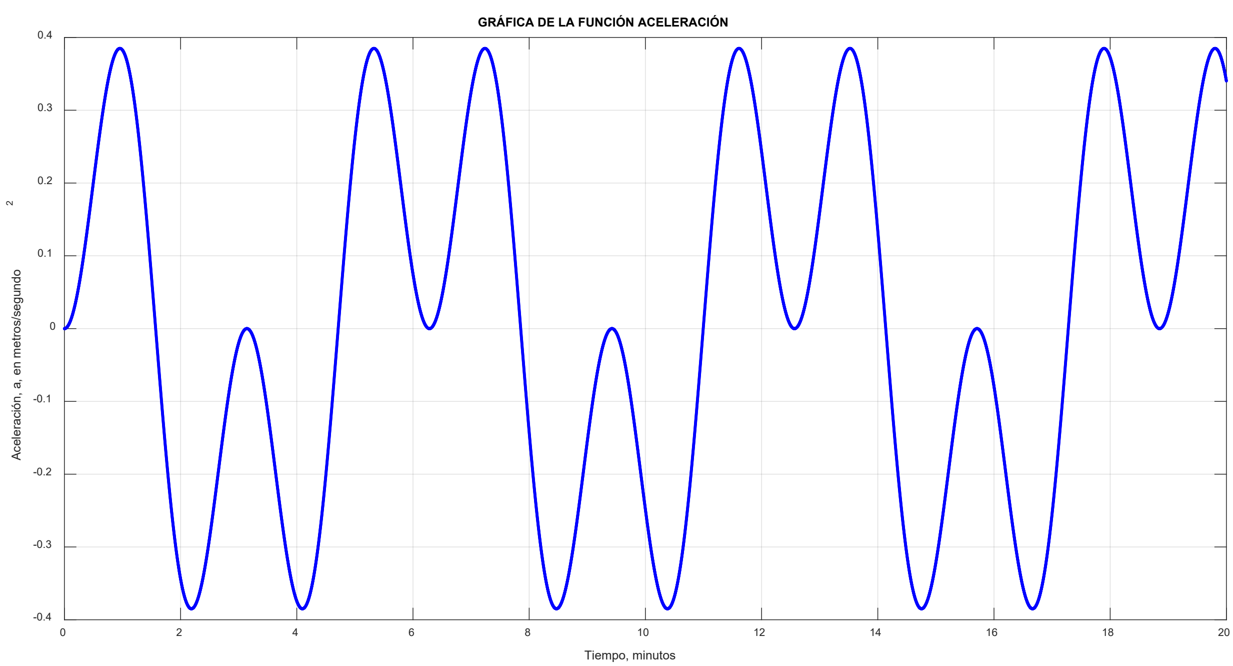
Ref. Elaboración propia, con MATLAB.

Gráfica 5. Función Velocidad, v respecto al tiempo.



Ref. Elaboración propia, con MATLAB.

Gráfica 6. Función Aceleración, a respecto al tiempo.



Ref. Elaboración propia, con MATLAB.

Problema 9.3

Una placa de metal se enfría de 80 °C a 65 °C en 20 minutos al estar rodeada de aire a una temperatura de 15°C. Usar la Ley de Enfriamiento de Newton para estimar la temperatura al cabo de una hora de enfriamiento. ¿Cuándo llegará la temperatura a 40°C?

Resolución

Según la Ley de enfriamiento de Newton, la rapidez con la que un cuerpo se enfría (al estar en contacto en un medio de menor temperatura), es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas, la del cuerpo menos la del medio, es decir:

$$\frac{dT}{dt}\alpha(T-Ta)$$

O bien:

$$\frac{dT}{dt}=k(T-Ta)$$

Donde:

T es la temperatura del cuerpo, en centígrados

t es el tiempo, en minutos

k es una constante de proporcionalidad, y

Ta es la temperatura del medio=$15\,^{\circ}C$ (en este caso)

Para resolver el problema, primero observamos la ecuación diferencial y nos damos cuenta que es de variables separables, pero también es lineal si la acomodamos, como sigue:

$$\frac{dT}{dt}=k(T-Ta)$$

$$T'=kT-kTa$$

$$T'-kT=-kTa$$

Que es similar a la forma general de nuestra ecuación diferencial lineal que vimos en el tema correspondiente, a saber:

$$y'+p(x)y=q(x)$$

Si adaptamos la fórmula solución de una ecuación diferencial lineal, de acuerdo a nuestras variables y parámetros de la ley de enfriamiento de Newton, nuestra fórmula solución quedaría:

$$\boldsymbol{T = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt}\, q(t)dt + c\right]}$$

En nuestro caso,

$$p(t) = -k \text{ y } q(t) = -kTa = -k(15) = -15k$$

Así que sustituimos nuestros parámetros y resolvemos la ecuación diferencial lineal:

$$T = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt}\, q(t)dt + c\right]$$

$$T = e^{-\int -k\, dt}\left[\int e^{\int -kdt}\, (-15k)dt + c\right]$$

$$T = e^{k\int dt}\left[-15k\int e^{-k\int dt}\, dt + c\right]$$

$$T = e^{kt}\left[-15k\int e^{-kt}\, dt + c\right]$$

$$T = e^{kt}\left[-\frac{15k}{-k}e^{-kt} + c\right]$$

$$T = e^{kt}\left[15e^{-kt} + c\right]$$

$$T = 15 + ce^{kt}$$

Ahora, con los datos iniciales, pasamos a calcular las constantes de proporcionalidad, $\boldsymbol{k}$ y de integración,$\boldsymbol{c}$.

$$T(t = 0\ min) = 80\ C$$

$$T(t = 20\ min) = 65\ C$$

$$\boldsymbol{T = 15 + ce^{kt}}$$

$$80 = 15 + ce^{k(0)}\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

De la ecuación (1):

$$\boldsymbol{c = 65}$$

De la ecuación (2) y con $c = 65$.

$$65 = 15 + ce^{k(20)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$65 = 15 + 65e^{k(20)}$$

$$50 = 65e^{k(20)}$$

$$\frac{50}{65} = e^{k(20)}$$

$$\frac{10}{13} = e^{k(20)}$$

$$20k = \ln\left(\frac{10}{13}\right)$$

$$k = \frac{1}{20}\ln\left(\frac{10}{13}\right)$$

$$k = ln\left(\frac{10}{13}\right)^{\frac{1}{20}}$$

Por lo tanto, la solución de nuestra ecuación diferencial queda:

$$T = 15 + ce^{kt}$$

$$T = 15 + 65\, e^{\left[t\, ln\left(\frac{10}{13}\right)^{\frac{1}{20}}\right]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T = 15 + 65\left(\frac{10}{13}\right)^{\frac{t}{20}}}}$$

Pasamos a contestar la pregunta: "¿cuándo llegará la temperatura a $40°C$?

Sustituimos la ***T* - *40º C*** y despejamos ***t***:

$$40 = 15 + 65\left(\frac{10}{13}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$25 = 65\left(\frac{10}{13}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$\frac{25}{65} = \left(\frac{10}{13}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$\frac{5}{13} = \left(\frac{10}{13}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$\ln\left[\frac{5}{13}\right] = \ln\left[\left(\frac{10}{13}\right)^{\frac{t}{20}}\right]$$

$$\ln\left[\frac{5}{13}\right] = \frac{t}{20}\ln\left[\frac{10}{13}\right]$$

$$\frac{t}{20} = \frac{\ln\left[\frac{5}{13}\right]}{\ln\left[\frac{10}{13}\right]}$$

$$t = 20\frac{\ln\left[\frac{5}{13}\right]}{\ln\left[\frac{10}{13}\right]}$$

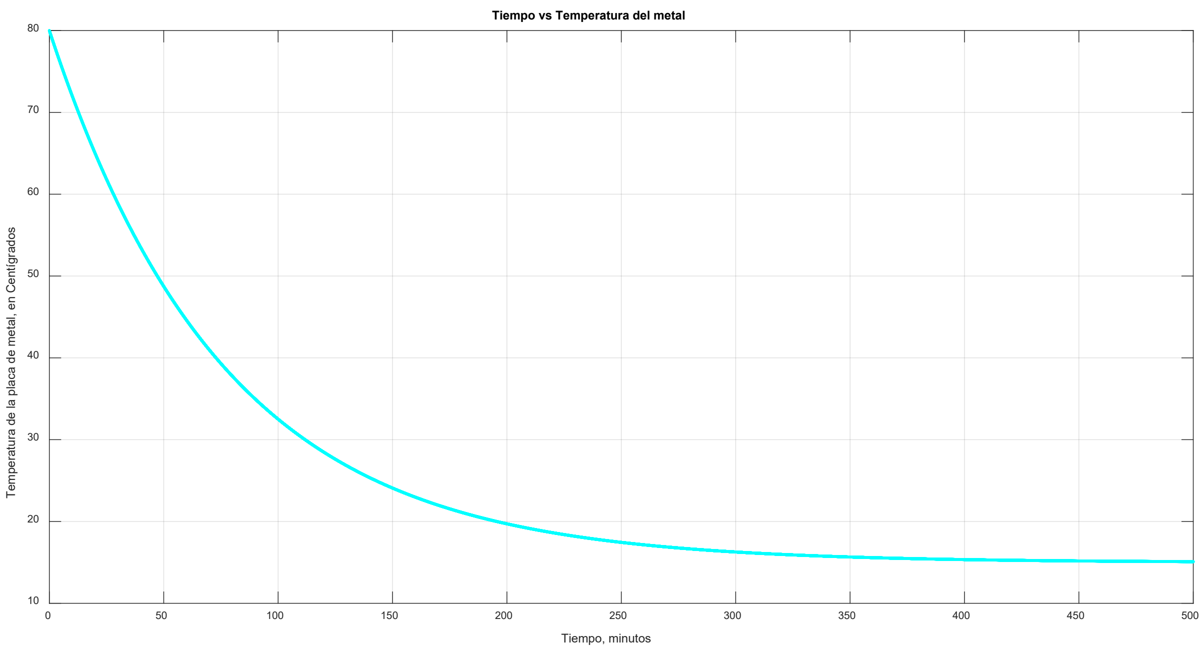
$$\boxed{\boldsymbol{t = 72.8385\, minutos}}$$

Aunque no se pide, vamos a realizar la gráfica de la función solución de nuestra ecuación diferencial, para ayudar a comprender el fenómeno físico que ocurre según la ley de enfriamiento de Newton. En la gráfica 5, podemos observar que la función (en este caso la temperatura de la placa de metal) se hace asíntota en $15\ ^\circ C 15\ ^\circ C$, que es la temperatura del medio.

Función:

$$\boxed{T = 15 + 65\left(\frac{10}{13}\right)^{\frac{t}{20}}}$$

Gráfica 7. Variación de la temperatura de la placa de metal.



Ref. Elaboración propia, con MATLAB.

Problema 9.4

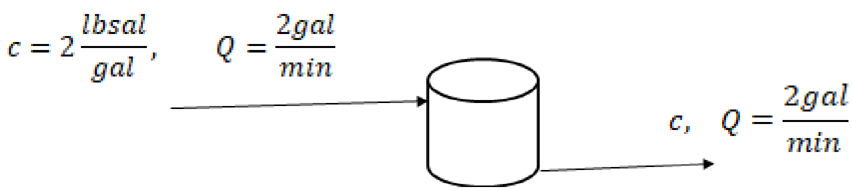
Un tanque contiene 80 galones de agua pura. Una solución que contiene 2 libras de sal por galón entra al tanque a razón de 2 galones por minuto, y la solución perfectamente mezclada sale del tanque a la misma velocidad. Determinar:

a) La cantidad de sal que existe en el tanque en cualquier momento

b) ¿En qué momento la solución que sale del tanque contendrá 1 libra de sal por galón?

Resolución

Primero hacemos un dibujo, que contenga la información.



$$V_t = 80 \ galones$$

Ahora, definimos las variables:

Sea: t el tiempo, en minutos

$\boldsymbol{x}$ las libras de sal que hay en el tanque en el tiempo, $\boldsymbol{t}$.

$\boldsymbol{c}$, es la concentración (lb sal/minuto)

$\boldsymbol{Q}$ es el flujo volumétrico (gal/minuto)

$\boldsymbol{V_t}$ es el volumen del tanque

Condiciones iniciales:

$$x(t = 0 \ minutos) = 0 \ libras \ de \ sal \ en \ el \ tanque$$

Planteamiento de la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = Variación \ de \ las \ libras \ de \ sal \ en \ el \ tanque \ por \ unidad \ de \ tiempo, \frac{lb}{min}$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{libras \ de \ sal}{min} \ que \ entran \ al \ tanque\right) - \left(\frac{libras \ de \ sal}{min} que \ salen \ del \ tanque\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = (c\ Q) a\ la\ entrada\ \ -(c\ Q) a\ la\ salida$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2\ libras\ de\ sal}{galones}\right)\left(\frac{2\ galones}{min}\right) - \left(\frac{x\ libras\ de\ sal}{VT}\right)\left(\frac{2\ galones}{min}\right)$$

Importante. Aquí $\boldsymbol{VT}$ es el volumen de la solución en el tanque:

$$VT = V_t + Ventra - Vsale$$

$$VT = V_t + Ventra - Vsale$$

$$VT = V_t + (Qentra - Qsale)t$$

$$VT = 80gal + \left(2\frac{gal}{min} - 2\ \frac{gal}{min}\right)t$$

$$VT = 80gal + (0)t$$

$VT = 80galVT = 80gal$. En otro ejemplo, más adelante, pondremos un problema donde:

$$VT \neq V_t\ VT \neq V_t$$

Pero por ahora: $VT = V_t\ = 80\ gal$

Por lo tanto:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2\ libras\ de\ sal}{galones}\right)\left(\frac{2\ galones}{min}\right) - \left(\frac{x\ libras\ de\ sal}{80\ gal}\right)\left(\frac{2\ galones}{min}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4\ libras\ de\ sal}{minutos}\ - \frac{2\ x\ libras\ de\ sal}{80\ minutos}$$

La ecuación diferencial queda:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = 4 - \ \frac{x}{40}}}$$

Pasamos a resolverla:

Esta es una ecuación diferencial de variables separables, y también es lineal, veamos:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{40} = 4$$

$$x' + \frac{1}{40}x = 4$$

Vamos a resolverla de acuerdo a una ecuación diferencial lineal, la fórmula solución es:

$$x = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt} q(t)dt + c\right]$$

En nuestro caso, $p(t) = \frac{1}{40}$ y $q(t) = 4$

$$x = e^{-\int \frac{1}{40}dt}\left[\int e^{\int \frac{1}{40}dt}\, 4\, dt + c\right]$$

$$x = e^{-\frac{1}{40}\int dt}\left[4\int e^{\frac{1}{40}\int dt}\; dt + c\right]$$

$$x = e^{-\frac{1}{40}t}\left[4\int e^{\frac{1}{40}t}\; dt + c\right]$$

$$x = e^{-\frac{1}{40}t}\left[4(40)e^{\frac{1}{40}t} + c\right]$$

$$x = e^{-\frac{1}{40}t}\left[4(40)e^{\frac{1}{40}t} + c\right]$$

$$\boxed{x = 160 + ce^{-\frac{1}{40}t}}$$

Para hallar c, sustituimos las condiciones iniciales:

$$0 = 160 + ce^{-\frac{1}{40}(0)}$$

$$0 = 160 + c$$

$$c = -160$$

$$x = 160 - 160e^{-\frac{1}{40}t}$$

Por lo tanto, la cantidad $\boldsymbol{x}$ de sal que existe en el tanque en el tiempo, $\boldsymbol{t}$ es:

$$\boxed{\boldsymbol{x = 160(1 - e^{-\frac{1}{40}t})}}$$

Ahora pasamos a hallar el tiempo en el que el tanque tenga una concentración de 1 libra de sal/galón.

La concentración es, $c = 1\dfrac{lb\ de\ sal}{gal}$, $\quad c = \dfrac{x\ libras\ de\ sal}{80\ gal\ del\ tanque}$, por lo que: $x = 80\ libras$.

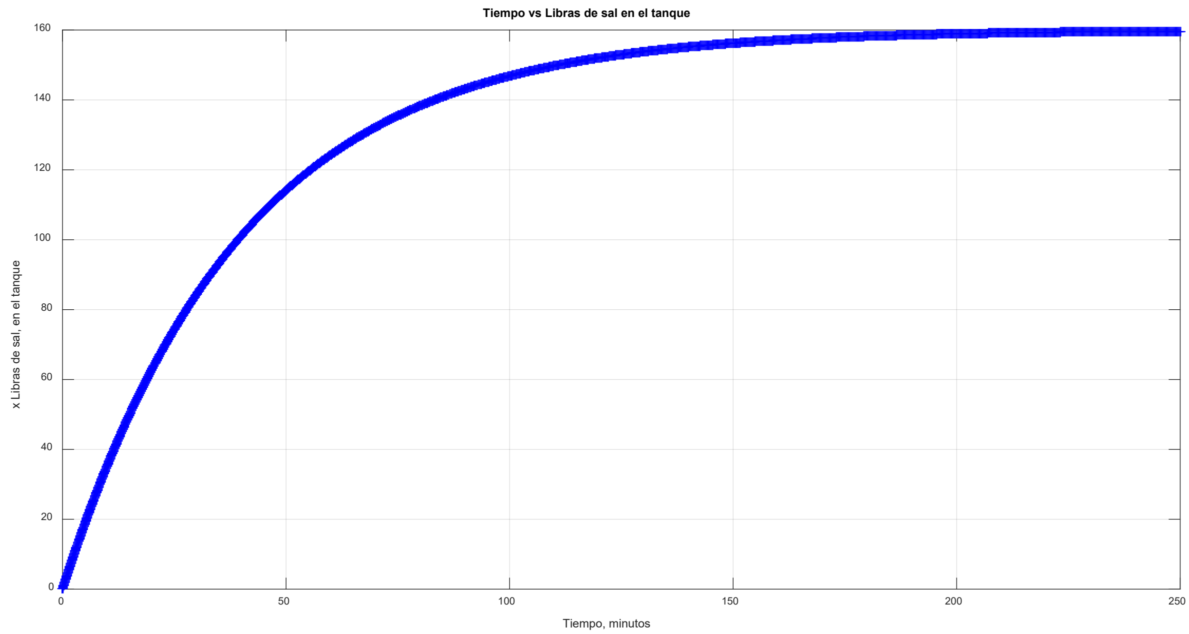
$$\boldsymbol{x = 160(1 - e^{-\frac{1}{40}t})}$$

$$80 = 160(1 - e^{-\frac{t}{40}})$$

Despejando t: $\quad t = -40\ln\left(\frac{1}{2}\right)t = -40\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\boxed{\boldsymbol{t = 27.72\ minutos}}$$

Gráfica 8. Variación de las libras de sal con respecto al tiempo.



Ref. Elaboración propia, con MATLAB.

Problema 9.5

Hallar el trabajo producido por un gas tipo Van der Waals, que se expande a Temperatura constante de 400 K, expandiéndose de un volumen de 5 a 12 litros. Las constantes de Van der Waals son: b=2 litros/gmol, a=0.5 atm litros^2/gmol^2, n=3 gmol.

Resolución

La ecuación de estado d Van der Waals de define como:

$$P = \frac{RT}{Vm - b} - \frac{a}{Vm^2}$$

Donde:

P es la presión,

T es la temperatura

Vm es Volumen molar

a, b son constantes de Van der Waals

R es la constante universal de los gases.

En termodinámica, el trabajo $\boldsymbol{\Delta W}$ por unidad de gmol, es:

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} PdVm$$

Para hallar el trabajo, sustituimos la presión de la ecuación de Van der Waals, en el *integrando*:

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} \left[\frac{RT}{Vm - b} - \frac{a}{Vm^2}\right] dVm$$

Ahora integramos respecto a la variable $\boldsymbol{VM}$:

$$\Delta W = RT\, ln|Vm - b| + \frac{a}{Vm}$$

Sustituimos los datos y evaluamos la variable, del límite superior menos el límite inferior de la integral:

$$\Delta W = (0.082)(400)[\, ln|12 - 2| - ln|5 - 2|] + 0.5\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5}\right)$$

$$\Delta W = 32.8 \ln\frac{10}{3} + 0.5\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5}\right)$$

$$\Delta W = 32.8 \ln\frac{10}{3} + 0.5\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5}\right)$$

$$\Delta W = 39.432 atm\ litro/gmol$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta W = 39.432\ atm\ litro/gmol}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta W = 3.9945\ kjoules/gmol}}$$

Problema 9.6

Dos sustancias A y B se combinan para formar una sustancia C, la rapidez o velocidad de la reacción es proporcional al producto de las cantidades iniciales de A y B que no se han convertido en la sustancia química C. Inicialmente hay 40 g de A y 50 g de B y por cada gramo de B se usan dos gramos de A y se produce un gramo de C. Se sabe que se forman 10 g de C en 5 minutos. Calcular:

a) Lo que se forma de C, en 20 minutos.

b) La cantidad límite de C.

c) ¿Cuánto queda de las sustancias A y B en el equilibrio (en un tiempo infinito)?

Resolución

Reacción:	A	+	B	$\longrightarrow$	C
	40 g		50 g		
	2g		1g		3g

Sean las cantidades iniciales:

$$A_0 = 40\ g$$

$$B_0 = 50\ g$$

$$C_0 = 0\ g$$

Sea x la cantidad de las sustancias en el tiempo, t; x está en gramos y t está en minutos. Por lo tanto, el modelo matemático (la velocidad de reacción) es:

$$\frac{dx}{dt} \propto (Cantidad\ de\ A\ que\ no\ ha\ reaccionado)(Cantidad\ de\ B\ que\ no\ ha\ reaccionado)$$

A	+	B	$\longrightarrow$	C
$\frac{2}{3}x$		$\frac{1}{3}x$		x

Quedando la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = k(40 - \frac{2}{3}x)(50 - \frac{1}{3}x)$$

$$\frac{dx}{dt} = k(\frac{120 - 2x}{3}x)(\frac{150 - x}{3}x)$$

$$\frac{dx}{dt} = k(\frac{120 - 2x}{3})(\frac{150 - x}{3})$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{9}(120 - 2x)(150 - x)$$

Separamos variables:

$$\frac{dx}{(120 - 2x)(150 - x)} = \frac{k}{9}dt$$

Integramos:

$$\int \frac{dx}{(120 - 2x)(150 - x)} = \frac{k}{9}\int dt$$

La primera integral es por fracciones parciales, la segunda es directa.

$$\int \frac{dx}{(120 - 2x)(150 - x)} = \frac{k}{9}t + c$$

Resolvemos la primera integral:

$$\int \frac{dx}{(120 - 2x)(150 - x)}$$

• Igualamos la fracción a una suma de fracciones parciales:

$$\frac{1}{(120 - 2x)(150 - x)} = \frac{a}{120 - 2x} + \frac{b}{150 - x}$$

• Multiplicamos por el denominador:

$$1 = a(150 - x) + b(120 - 2x)$$

• Sustituimos las raíces para encontrar los coeficientes $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Si $x = 60 \quad 1 = a(150 - 60)$, $\quad a = \frac{1}{90}$

Si $x = 150 \quad 1 = b(120 - 300)$, $\quad b = -\frac{1}{180}$

Por lo tanto, la integral queda como:

$$\int \frac{dx}{(120 - 2x)(150 - x)} = \int \frac{a}{120 - 2x} dx + \int \frac{b}{150 - x} dx$$

$$\int \frac{dx}{(120 - 2x)(150 - x)} = \int \frac{\frac{1}{90}}{120 - 2x} dx + \int \frac{-\frac{1}{180}}{150 - x} dx$$

$$\int \frac{dx}{(120 - 2x)(150 - x)} = -\frac{1}{180} ln|120 - 2x| + \frac{1}{180} ln|150 - x|$$

$$\int \frac{dx}{(120 - 2x)(150 - x)} = -\frac{1}{180} ln|120 - 2x| + \frac{1}{180} ln|150 - x|$$

$$\int \frac{dx}{(120 - 2x)(150 - x)} = \frac{1}{180} (ln|150 - x| - ln|120 - 2x|)$$

$$\int \frac{dx}{(120 - 2x)(150 - x)} = \frac{1}{180} \ln\left[\frac{150 - x}{120 - 2x}\right]$$

Regresamos a nuestras integrales solución, de nuestra ecuación diferencial:

$$\int \frac{dx}{(120-2x)(150-x)} = \frac{k}{9}t + c$$

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{150-x}{120-2x}\right] = \frac{k}{9}t + c$$

Cálculo de la constante de integración, c. Al tiempo $t = 0, x = 0$.

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{150-0}{120-2(0)}\right] = \frac{k}{9}(0) + c$$

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{150}{120}\right] = c$$

$$c = \frac{1}{180}\ln\left[\frac{15}{12}\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{c = \frac{1}{180}\ln\left[\frac{5}{4}\right]}}$$

Cálculo de la constante k, con el dato de: “se forman 10 g de C en 5 minutos”.

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{150-x}{120-2x}\right] = \frac{k}{9}t + c$$

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{150-x}{120-2x}\right] = \frac{k}{9}t + \frac{1}{180}\ln\left[\frac{5}{4}\right]$$

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{150-x}{120-2x}\right] - \frac{1}{180}\ln\left[\frac{5}{4}\right] = \frac{k}{9}t$$

$$\frac{1}{180}\left(\ln\left[\frac{150-x}{120-2x}\right] - \ln\left[\frac{5}{4}\right]\right) = \frac{k}{9}t$$

$$\frac{1}{180}\left(\ln\left[\frac{4(150-x)}{5(120-2x)}\right]\right)=\frac{k}{9}t$$

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{4(150-x)}{5(120-2x)}\right]=\frac{k}{9}t$$

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{4(150-10)}{5(120-2(10))}\right]=\frac{k}{9}(5)$$

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{4(14)}{5(10)}\right]=\frac{k}{9}(5)$$

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{56}{50}\right]=\frac{k}{9}(5)$$

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{28}{25}\right]=\frac{k}{9}(5)$$

$$k=\frac{9}{(5)180}\ln\left[\frac{28}{25}\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{k=\frac{1}{100}\ln\left[\frac{28}{25}\right]}}$$

Por lo que la ecuación solución queda:

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{150-x}{120-2x}\right]=\frac{k}{9}t+c$$

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{150-x}{120-2x}\right]=\frac{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}\mathbf{ln}\left[\frac{\mathbf{28}}{\mathbf{25}}\right]}{9}t+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{180}}\mathbf{ln}\left[\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right]$$

$$\frac{1}{180}\ln\left[\frac{150-x}{120-2x}\right]=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{900}}\mathbf{ln}\left[\frac{\mathbf{28}}{\mathbf{25}}\right]t+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{180}}\mathbf{ln}\left[\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right]$$

Multiplicando por 180:

$$\ln\left[\frac{150-x}{120-2x}\right] = \frac{1}{5}\ln\left[\frac{28}{25}\right]t + \ln\left[\frac{5}{4}\right]$$

$$\ln\left[\frac{150-x}{120-2x}\right] = \frac{t}{5}\ln\left[\frac{28}{25}\right] + \ln\left[\frac{5}{4}\right]$$

$$\ln\left[\frac{150-x}{120-2x}\right] = \ln\left[\frac{28}{25}\right]^{\frac{t}{5}} + \ln\left[\frac{5}{4}\right]$$

$$\ln\left[\frac{150-x}{120-2x}\right] = \ln\left(\frac{5}{4}\right)\left[\frac{28}{25}\right]^{\frac{t}{5}}$$

$$\left[\frac{150-x}{120-2x}\right] = \left(\frac{5}{4}\right)\left[\frac{28}{25}\right]^{\frac{t}{5}}$$

$$150 - x = (120-2x)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{t}{5}}$$

$$150 - x = (120)\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{t}{5}} - 2x\left(\frac{5}{4}\right)\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{t}{5}}$$

$$150 - x = 150\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{t}{5}} - x\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{t}{5}}$$

$$x\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{t}{5}} - x = 150\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{t}{5}} - 150$$

$$x\left[\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{t}{5}}-1\right]=150\left[\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{t}{5}}-1\right]$$

$$\boxed{\boldsymbol{x=\frac{150\left[\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{t}{5}}-1\right]}{\left[\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{t}{5}}-1\right]}}}$$

Ahora, respondemos las preguntas:

a) Cantidad de $\boldsymbol{C}$ a los 20 minutos

$$x(t=20)=\frac{150\left[\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{20}{5}}-1\right]}{2.5\left(\frac{28}{25}\right)^{\frac{20}{5}}-1}$$

$$\boldsymbol{x(t=20)=29.32\ gramos}$$

b) Cantidad límite de $\boldsymbol{C}$

$$\boldsymbol{x(t=\infty)=60\ gramos}$$

$\boldsymbol{A}$ es el reactivo limitante,

$\boldsymbol{B}$ es el reactivo en exceso.

$\boldsymbol{C}$ Cuánto queda de masa en el equilibrio:

De $\boldsymbol{A}$: 0 gramos.

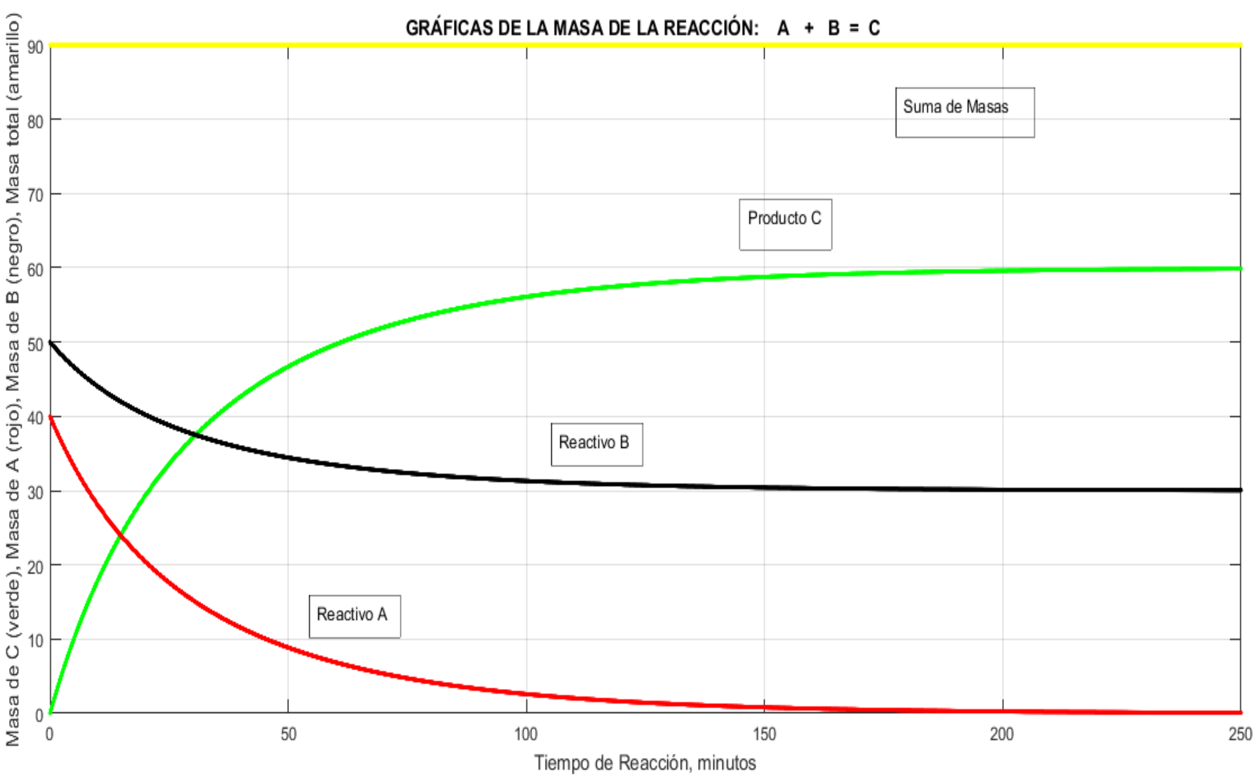
De $\boldsymbol{B}$ 30 gramos

De $\boldsymbol{C}$, se producen 60 gramos.

Ahora pasamos a realizar una tabla y una gráfica donde se represente la variación de la m asa de las tres sustancias, con respecto al tiempo.

T, tiempo minutos	Masa del reactivo A, gr.	Masa del reactivo B, gr.	Masa del producto C, gr.
0	40.0000	50.0000	0
25	17.6167	38.8084	33.5749
50	8.8697	34.4348	46.6955
75	4.7304	32.3652	52.9044
100	2.5956	31.2978	56.1065
125	1.4458	30.7229	57.8313
150	0.8119	30.4060	58.7821
175	0.4580	30.2290	59.3130
200	0.2590	30.1295	59.6114
225	0.1467	30.0734	59.7799
250	0.0832	30.0416	59.8753

Gráfica 9. Variación de la masa de las sustancias A, B y C en relación al tiempo.



Ref. Elaboración propia, con MATLAB.

Problema 9.7

La Estatua de Zeus del Olimpo de Grecia es una de las 7 maravillas del Mundo. Está hecha de Oro y de Marfil. Se encontró que el Marfil había perdido el 40% de carbono 14. Sabiendo que el carbono 14 tiene un periodo de semidestrucción (o vida media) de 5750 años, determinar la edad de la estatua.

La estatua de Zeus en Olimpia,
Zeus Palacio de Versalles

Resolución

Este problema es un ejemplo clásico de isótopos. Un isótopo es un átomo que pertenece al mismo elemento químico que otro, tiene su mismo número atómico, pero distinta masa atómica. El tiempo de *semidestrucción* o *tiempo de vida media* de un isótopo, es el tiempo en el cual permanece la mitad de masa que había originalmente.

Particularmente, el carbono catorce, C^{14}, es un isótopo radiactivo del carbono que se usa como trazador en la investigación bioquímica y en la técnica de la datación, que permite estimar la edad de los fósiles y otras materias orgánicas. Tal es el caso del marfil utilizado hace miles de años para la elaboración de la estatua de Zeus.

Para resolver el problema, primero elaboramos una tabla donde pondremos las variables que intervienen (tiempo y masa de C^{14}) y sus correspondientes parejas ordenadas: al inicio, digamos, que la estatua contenía una cantidad Mo, y 5750 años después, contendrá la mitad ($\frac{1}{2}M_0$) ; y si ya perdió el 40 % (es decir, contiene el 60% de la cantidad original), hallaremos la edad de la estatua.

Tiempo, t, t (en años)	**Masa del $C^{14}C^{14}$**
0	M_0
Edad=?	$0.6\,M_0$
5750	$\frac{1}{2}M_0$

La relación de variables que describe este fenómeno químico es el siguiente:

$$\frac{dM}{dt}\alpha M$$

Qué se lee: “La velocidad con la que se desintegra el isótopo es proporcional a la masa del mismo que hay en un momento determinado”

La ecuación diferencial es:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{dM}{dt} = kM}}$$

Donde k es la constante de proporcionalidad.

Pasamos a resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dM}{dt} = kM$$

$$\frac{dM}{M} = kd\boldsymbol{t}$$

$$\int \frac{dM}{M} = k\int dt$$

Integramos:

$$\boldsymbol{ln|M| = kt + c}$$

Sustituimos las condiciones dadas en la tabla para calcular, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{k}$.

$$ln|M_0| = k(0) + c \dots\dots..(1)$$

$$ln\left|\frac{1}{2}M_0\right| = k(5750) + c \dots\dots\dots(2)$$

De la ecuación (1): $c = ln|M_0|$

De la ecuación (2) y con $c = ln|M_0|$ calculamos $\boldsymbol{k}$:

$$ln\left|\frac{1}{2}M_0\right| = k(5750) + c$$

$$ln\left|\frac{1}{2}M_0\right| = k(5750) + ln|M_0|$$

$$k(5750) = ln\left|\frac{1}{2}M_0\right| - ln|M_0|$$

$$k = \frac{ln\left|\frac{\frac{1}{2}M_0}{M_0}\right|}{5750}$$

$$k = \frac{ln\left|\frac{1}{2}\right|}{5750}$$

Por lo tanto, la ecuación solución queda:

$$\boldsymbol{ln|M| = kt + c}$$

$$\boldsymbol{ln|M|} = \frac{ln\left|\frac{1}{2}\right|}{5750}\boldsymbol{t} + ln|M_0|$$

$$ln|M| = \frac{t}{5750}\, ln\left|\frac{1}{2}\right| + ln|M_0|$$

$$ln|M| = \ln[(M_0)\left|\frac{1}{2}\right|^{\frac{t}{5750}}]$$

$$\boxed{\boldsymbol{M = M_0\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{t}{5750}}}}$$

Finalmente, pasamos a responder la pregunta: ¿qué edad tiene la estatua si ya perdió el 40 % del carbono 14 original? Sustituimos en $M = 0.6Mo$

$$0.6Mo = \boldsymbol{M_0}\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{t}{5750}}$$

Despejando el tiempo, nos da:

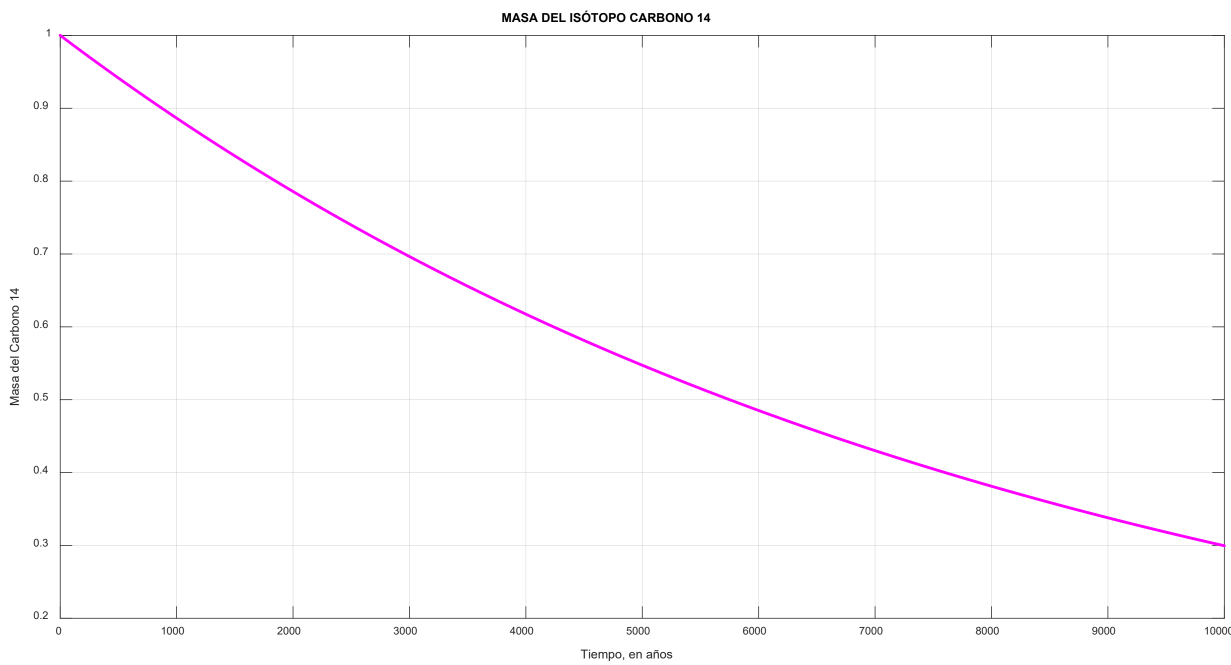
$$t = 5750\frac{ln|0.6|}{ln|1/2|}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t = 4237.5\ años\ de\ edad}}$$

A continuación realizamos la gráfica del comportamiento o la relación del tiempo y el decaimiento del Carbono 14, tomando como base 1 kg de isótopo original:

$$Mo = 1Mo = 1, \quad \boldsymbol{M} = \left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{t}{5750}}$$

Gráfica 10. Variación de la masa del C^{14} con el tiempo.



Ref. Elaboración propia, con MATLAB.

Problema 9.8

Para la siguiente reacción química Irreversible:

$$A \xrightarrow{k} B$$

Donde: k es la constante de velocidad de A a B = 0.1,

Con condiciones iníciales: C_a (t=0) = 5 gmol, C_b (t=0) = 0 gmo

Plantear las ecuaciones diferenciales de la velocidad de reacción de cada sustancia (A, B) y resolver el sistema de ecuaciones.

Resolución

Sean, $\boldsymbol{C_a}$ y $\boldsymbol{C_b}$ las cantidades del reactivo $\boldsymbol{A}$, y del producto $\boldsymbol{B}$, respectivamente, que varían durante el tiempo de reacción $\boldsymbol{t}$.

Las ecuaciones diferenciales para cada sustancia son:

$$\frac{dCa}{dt} = -kCa \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$\frac{dCb}{dt} = kCa \ldots \ldots \ldots \ldots . (2)$$

Tomamos la primera ecuación diferencial y la resolvemos separando variables:

$$\frac{dCa}{dt} = -kCa$$

$$\frac{dCa}{Ca} = -kdt$$

$$\int \frac{dCa}{Ca} = -k \int dt$$

$$\ln(Ca) = -kt + c$$

$$\ln(Ca) = -0.1t + c$$

Tomamos las condiciones iniciales:

$$\ln(5) = -0.01(0) + c$$

$$c = ln\, 5$$

Por lo tanto:

$$\ln(Ca) = -0.1t + ln5$$

$$e^{\ln(Ca)} = e^{-0.01t + ln5}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Ca = 5e^{-0.1t}}}$$

Sustituimos $\boldsymbol{Ca}$ en la ecuación diferencial (2)

$$\frac{dCb}{dt} = -kCa$$

$$\frac{dCb}{dt} = -k\mathbf{5}\boldsymbol{e}^{-\mathbf{0.1}t}$$

La resolvemos:

$$dCb = -k5e^{-0.1t}dt$$

$$\int dCb = \int -k5e^{-0.1t}dt$$

$$Cb = -\frac{5k}{-0.01}e^{-0.1t} + c$$

$$Cb = \frac{5(0{,}01)}{0.01}e^{-0.1t} + c$$

$$Cb = 5e^{-0.1t} + c$$

Sustituimos las condiciones iniciales:

$$0 = 5e^{-0.1(0)} + c$$

$$c = -5$$

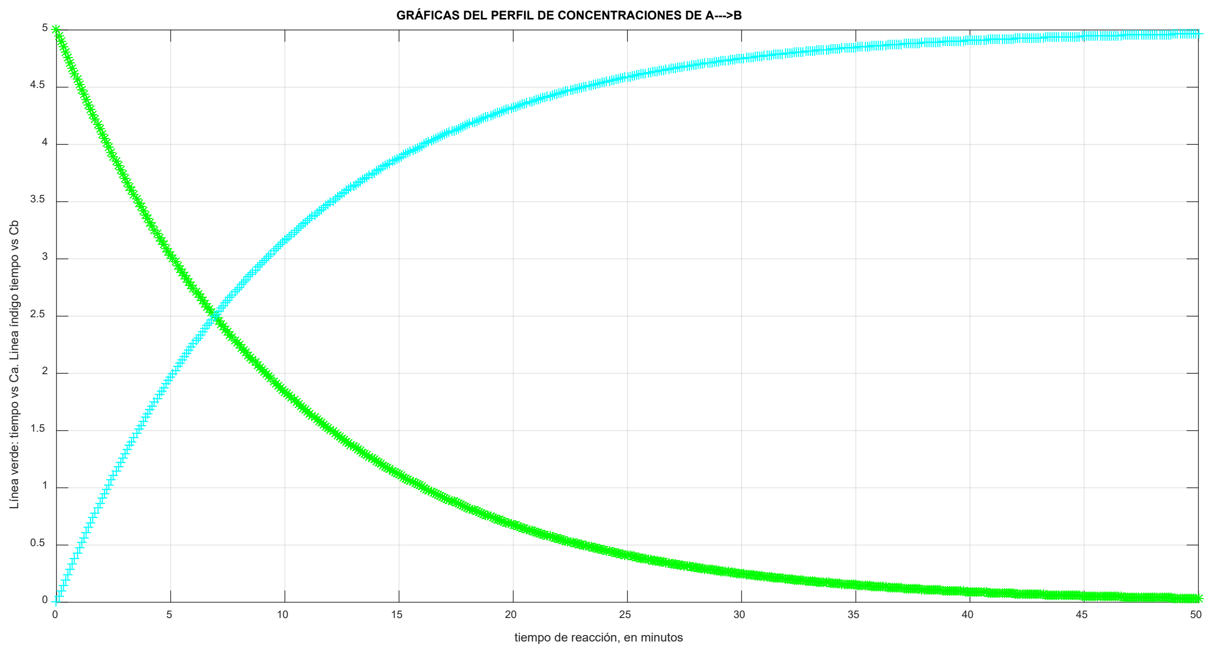
Por lo tanto la solución para la segunda ecuación diferencial es:

$$Cb = 5e^{-0.1t} - 5$$

$$\boxed{\boldsymbol{Cb = 5(e^{0.1t} - 1)}}$$

En seguida se muestra gráficamente la variación del número de moles de las sustancias A y B, con respecto al tiempo.

Gráfica 11. Variación de los moles de A y B con respecto al tiempo. Problema 9.8.



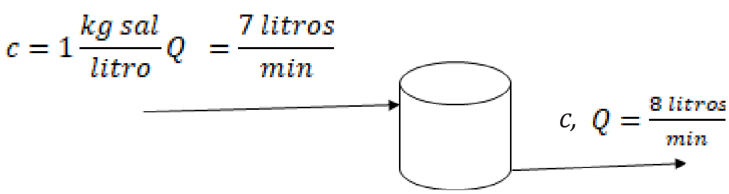
Ref. Elaboración propia, con MATLAB.

Problema 9.9

Un tanque está lleno de 100 litros de agua en los que se ha disuelto 20 kilogramos de sal. Otra mezcla que contiene 1 kilogramo de sal por litro es bombeada al tanque a razón de 7 litros por minuto. La solución mezclada es bombeada hacia el exterior a razón de 8 litros por minuto. Determinar la función que da la cantidad de sal en cada instante. ¿Se vaciará totalmente el tanque?

Resolución

Realizamos un esquema, que contenga la información.



$$V_t = 100\ galones, x_0 = 20\ kg$$

Ahora, definimos las variables:

Sea: t el tiempo, en minutos (variable independiente)

x los kg de sal (variable dependiente) que hay en el tanque.

c es la concentración (kg sal/minuto)

Q es el flujo volumétrico (litros/minuto)

V_t es el volumen del tanque

Condiciones iniciales:

$$x(t = 0\ minutos) = 20\ kg\ de\ sal\ en\ el\ tanque$$

Planteamiento de la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = Variación\ de\ los\ kg\ de\ sal\ en\ el\ tanque\ por\ unidad\ de\ tiempo, \frac{kg\ sal}{min}$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{kg\ de\ sal}{min}\ que\ entran\ al\ tanque\right) - \left(\frac{kg\ de\ sal}{min} que\ salen\ del\ tanque\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = (c\ Q) a\ la\ entrada\ - (c\ Q) a\ la\ salida$$

$$\boldsymbol{\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1\ kg\ de\ sal}{litro}\right)\left(\frac{7\ litros}{min}\right) - \left(\frac{x\ kg\ de\ sal}{VT}\right)\left(\frac{8\ litros}{min}\right)}$$

Importante. Aquí VT es el volumen de la solución en el tanque:

$$VT = V_t + Ventra - Vsale$$

$$VT = V_t + Ventra - Vsale$$

$$VT = V_t + (Qentra - Qsale)t$$

$$VT = 100\ litros + \left(7 \frac{litros}{min} - 8 \frac{litros}{min}\right) t(\mathrm{min})$$

$$\boxed{\boldsymbol{VT = (100 - t) litros}}$$

Por lo tanto:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1\ kg\ de\ sal}{litro}\right)\left(\frac{7\ litros}{min}\right) - \left(\frac{x\ kg\ de\ sal}{100-t}\right)\left(\frac{8\ litros}{min}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{7\ kg\ de\ sal}{min} - \frac{8\ x\ kg\ de\ sal}{(100-t)\,min}$$

La ecuación diferencial queda:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = 7 - \frac{8\ x}{100-t}}$$

Pasamos a resolverla:

Esta es una ecuación diferencial de variables separables, y también es lineal, veamos:

$$\frac{dx}{dt} = 7 - \frac{8\ x}{100-t}$$

$$x' + \frac{8}{100-t}x = 7$$

Vamos a resolverla de acuerdo a una ecuación diferencial lineal, la fórmula solución es:

$$x = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt}\, q(t)dt + c\right]$$

En nuestro caso, $p(t) = \frac{8}{100-t}p(t) = \frac{8}{100-t}$ y $q(t) = 7q(t) = 7$

$$x = e^{-\int \frac{8}{100-t}dt}\left[\int e^{\int \frac{8}{100-t}dt}\ 7\ dt + c\right]$$

$$x = e^{8\ln(100-t)}\left[7\int e^{-8\ln(100-t)}\ dt + c\right]$$

$$x = e^{\ln(100-7)^8}\left[7\int e^{\ln(100-t)^{-8}}\ dt + c\right]$$

$$x = (100-t)^8\left[7\int (100-t)^{-8}\ \ dt + c\right]$$

$$x = (100-t)^8[(100-t)^{-7} + c]$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$\boxed{\boldsymbol{x = (100-t) + c(100-t)^8}}$$

Para determinar c, sustituimos las condiciones iniciales:

$$20 = [100-(0)] + c[100-(0)]^8$$

$$20 = 100 + c[100]^8$$

$$c = -\frac{80}{100^8}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$x = (100-t) + c(100-t)^8$$

$$x = (100-t) - \frac{80}{100^8}(100-t)^8$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = (100-t) - 80(1-\frac{t}{100})^8}}$$

Esta es la función que da **la cantidad de sal en cada instante.**

Ahora, ¿se vaciará totalmente el tanque? Esto es equivalente a determinar si existe algún tiempo t, en el que $x = 0$.

Intuitivamente encontramos que ese valor se da en t = 100 minutos, de acuerdo a la operación.

$$0 = (100 - 100) - 80(1 - \frac{100}{100})^8$$

$$0 = 0.$$

Analíticamente, sería de la siguiente manera.

Tomamos la ecuación en la forma:

$$x = (100 - t) - \frac{80}{100^8}(100 - t)^8$$

$$0 = (100 - t) - \frac{80}{100^8}(100 - t)^8$$

Factorizamos: $(100 - t)[1 - \frac{80}{100^8}(100 - t)^7] = 0$

Por lo tanto, la ecuación acepta dos soluciones, a saber:

$$100 - t = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$1 - \frac{80}{100^8}(100 - t)^7 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

De la primera ecuación: $t = 100\ minutost = 100\ minutos$

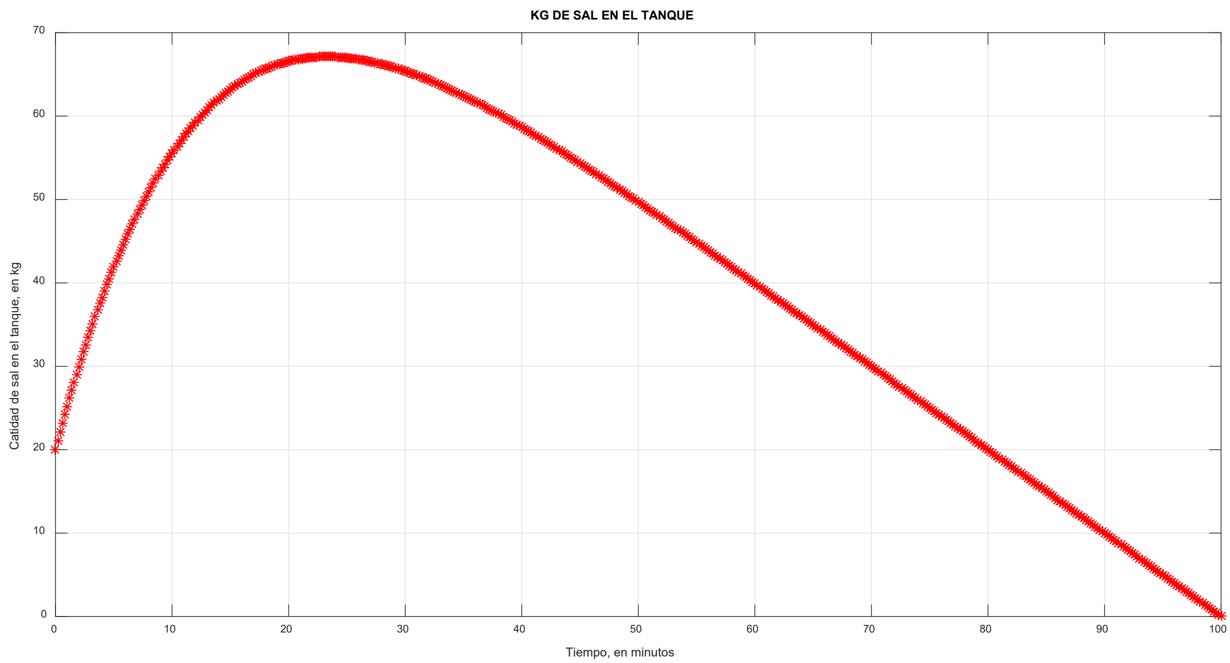
De la segunda ecuación: $t = -3.2\ minutost = -3.2\ minutos$

Se descarta el tiempo negativo por obvias razones, por lo tanto, en 100 minutos se vacía el tanque.

Para finalizar el problema, vamos a realizar una gráfica de la función que da la cantidad de sal en cada instante:

$$\boxed{\boldsymbol{x = (100 - t) - 80(1 - \frac{t}{100})^8}}$$

Gráfica 12. Variación de los kg de sal en el tanque con respecto al tiempo.



Ref. Elaboración propia, con MATLAB

Problema 9.10

La rapidez con que cierto medicamento se disemina en el flujo sanguíneo se rige por la ecuación diferencial:

$$\frac{dX}{dt} = A - BX, \quad X(0) = 0$$

Donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son constantes positivas. La función $\boldsymbol{X\,(t)}$ describe la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo en un instante cualquiera $\boldsymbol{t}$, hallar dicha función.

Encontrar el valor límite de $\boldsymbol{X}$ cuando $t \rightarrow \infty$. ¿Cuánto tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite?

Resolución

La ecuación diferencial: $\frac{dX}{dt} = A - BX$, es de variables separables. La resolveremos como es el proceso normal.

Separamos variables e integramos:

$$\int \frac{dX}{A - BX} = \int dt$$

La solución general es:

$$-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BX}| = \boldsymbol{t} + \boldsymbol{c}$$

Sustituimos las condiciones iniciales para determinar $\boldsymbol{c}$.

$$-\frac{1}{B}ln|A - B(0)| = (0) + c$$

$$c = -\frac{1}{B}ln|A|$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$\boxed{-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BX}| = \boldsymbol{t} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{ln}|\boldsymbol{A}|}$$

Ahora pasamos a despejar la concentración del medicamento, $\boldsymbol{X}$, es decir, poner a $\boldsymbol{X}$ en función del tiempo, $\boldsymbol{r}$.

$$-\frac{1}{B}ln|A - BX| = t - \frac{1}{B}ln|A|$$

$$-\frac{1}{B}ln|A - BX| + \frac{1}{B}ln|A| = t$$

$$-ln|A - BX| + ln|A| = Bt$$

$$ln\left|\frac{A}{A - BX}\right| = Bt$$

$$-ln\left|\frac{A}{A - BX}\right| = -Bt$$

$$ln\left|\frac{A - BX}{A}\right| = -Bt$$

$$\left|\frac{A - BX}{A}\right| = -Bt$$

$$\frac{A - BX}{A} = e^{-Bt}$$

$$A - BX = Ae^{-Bt}$$

Por lo tanto, La función ***X (t)*** que describe la concentración del medicamento en el flujo sanguíneo en un instante cualquiera ***t***, es:

$$\boxed{\boldsymbol{X = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})}}$$

Ahora pasamos a encontrar el valor límite de X X cuando $t \rightarrow \infty$.

$$X = \lim_{t\to\infty} \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt}) = \frac{A}{B}$$

Por último, ¿cuánto tarda la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite?

Si

$$X = \frac{A}{2B}$$

Entonces:

$$X = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$$

$$\frac{A}{2B} = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$$

$$\frac{1}{2} = (1 - e^{-Bt})$$

$$\frac{1}{2} - 1 = -e^{-Bt}$$

$$-\frac{1}{2} = -e^{-Bt}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-Bt}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{-Bt}\right)$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -B\,t$$

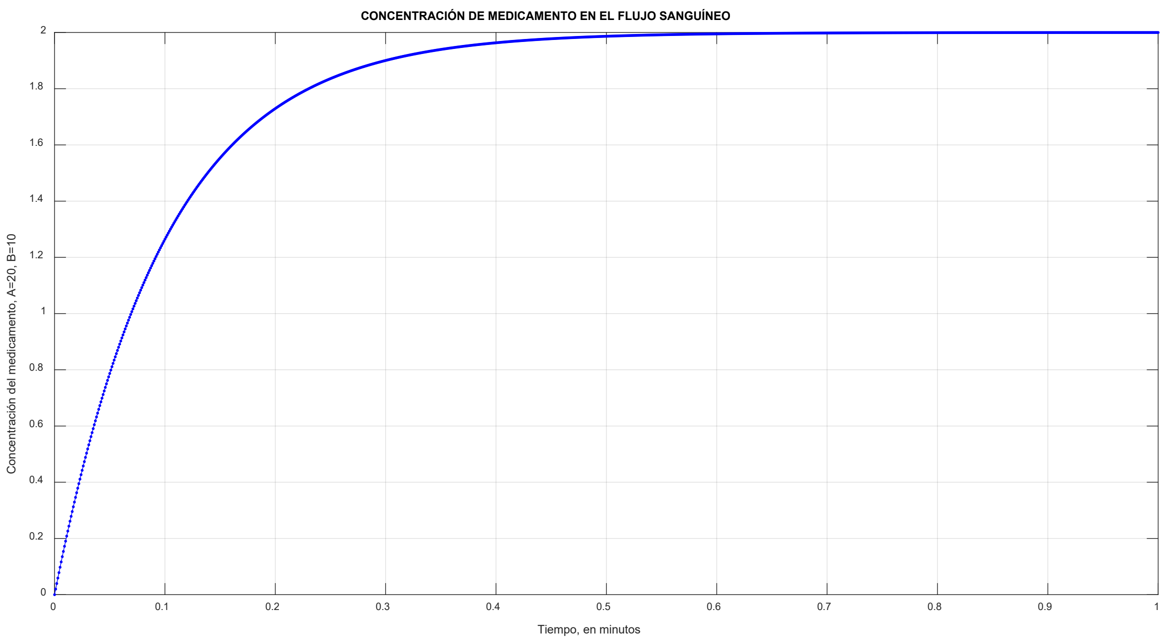
$$t = \frac{\ln(1/2)}{-B}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t = \frac{\ln 2}{B}}}$$

Como colofón del problema, vamos a realizar una gráfica de la función solución de la ecuación diferencial, $X = \frac{A}{B}(1 - e^{-Bt})$. Para esto, supondremos de manera arbitraria, que $A = 20$ y $B = 10$, por lo que la función queda:

$$X = 2(1 - e^{-10t})$$

Gráfica 13. Concentración de medicamento en el flujo sanguíneo en relación al tiempo.

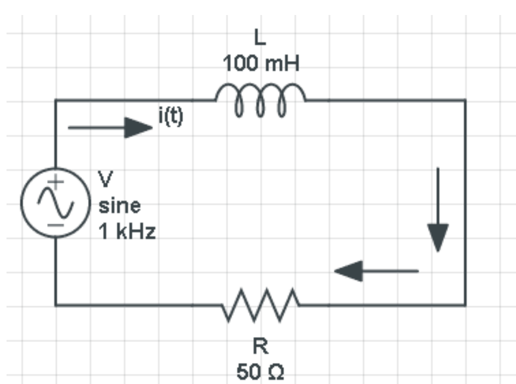


Ref. Elaboración propia, con MATLAB

Problema 9.11

Se aplica una fuerza electromotriz de $\boldsymbol{30V}$ a un circuito en serie $\boldsymbol{LR}$ con $0.1\ henrys0.1\ henrys$ de inductancia (L) y $50\ ohms50\ ohms$ de resistencia (R). Plantear la ecuación diferencial que describe este fenómeno y determine la corriente eléctrica como una función de tiempo., si $i(t=0)=0$. Determinar la corriente conforme el circuito descrito en la siguiente figura:

Figura X. Circuito tipo LR conectado en serie



Ref. https://ecuaciondiferencialejerciciosresueltos.com/ecuaciones-diferenciales-aplicadas-circuitos-electricos

Resolución

Lo primero que hacemos es obtener los modelos para el circuito representado en la figura anterior. Dicho modelo matemático proviene de las leyes de Kirchoff, a saber:

1 La suma de las corrientes hacia (o desde) cualquier punto es cero. Ley de nodos.

2 Alrededor de cualquier trayectoria cerrada la suma de las caídas de voltaje instantáneas en una dirección específica, es cero. Ley de mallas.

En este caso, como queremos encontrar un valor (la corriente i(t)) en u circuito cerrado o malla, utilizaremos para modelar el circuito la Ley de mallas. Para esto recordamos cómo representamos matemáticamente, en circuitos eléctricos, a los Inductores y las Resistencias, así como las definiciones de caídas de voltaje para cada elemento. En la siguiente e plantea la representación matemática de las caídas de voltaje para cada elemento del circuito descrito en la figura X, expresadas en función de la corriente $\boldsymbol{i\ (t)}$ y en función de la carga $\boldsymbol{q\ (t)}$.

Elementos del circuito	**Caídas de voltaje en función de $\boldsymbol{i(t)i(t)}$**	**Caídas de voltaje en función de $\boldsymbol{q(t)q(t)}$**
Inductor	$L\frac{di}{dt}$	$L\frac{d^2i}{dt^2}$
Resistor	iR	$R\frac{dq}{dt}$
Capacitor	$\frac{1}{C}q$	-

Por lo tanto, aplicando la ley de mallas de *Kirchoff* al circuito, para las caídas de voltaje en función de la corriente $\boldsymbol{i\ (t)}$, tenemos:

$$L\frac{di}{dt}+iR=E(t),L\frac{di}{dt}+iR=E(t),$$

…o bien:

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{di}{dt}+\frac{iR}{L}=\frac{E(t)}{L}}}$$

Donde $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{R}$ son constantes, conocidas como la inductancia y la resistencia, respectivamente. La corriente $t\,(\,t\,)$ se llama también respuesta del sistema. La ecuación diferencial (1) es lineal del tipo: $y' + p(x)y = q(x)$ cuya fórmula solución es (adaptándola a nuestras variables).

$$i = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt} q(t)dt + c\right]$$

En este caso, $p(t) = \frac{R}{L} = \frac{50}{0.1} = 500,$ $q(t) = \frac{E(t)}{L} = \frac{30}{0.1} = 300$

Sustituyendo en la fórmula:

$$i = e^{-\int 500\,dt}\left[\int e^{\int 500dt} 300dt + c\right]$$

$$i = e^{-500t}\left[300\int e^{500t}\,dt + c\right]$$

$$i = e^{-500t}\left[\frac{300}{500}e^{500t} + c\right]$$

$$i = e^{-500t}\left[\frac{3}{5}e^{500t} + c\right]$$

$$i = \frac{3}{5} + ce^{-500t}$$

Esta es nuestra solución general, ahora pasamos a obtener el valor de la constante de integración con la condición inicial: ***i (t = 0) = 0***

$$0 = \frac{3}{5} + ce^{-500(0)}$$

$$c = -\frac{3}{5}$$

Por lo que la solución (particular) de la ecuación diferencial, es:

$$i = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-500t}$$

O mejor:

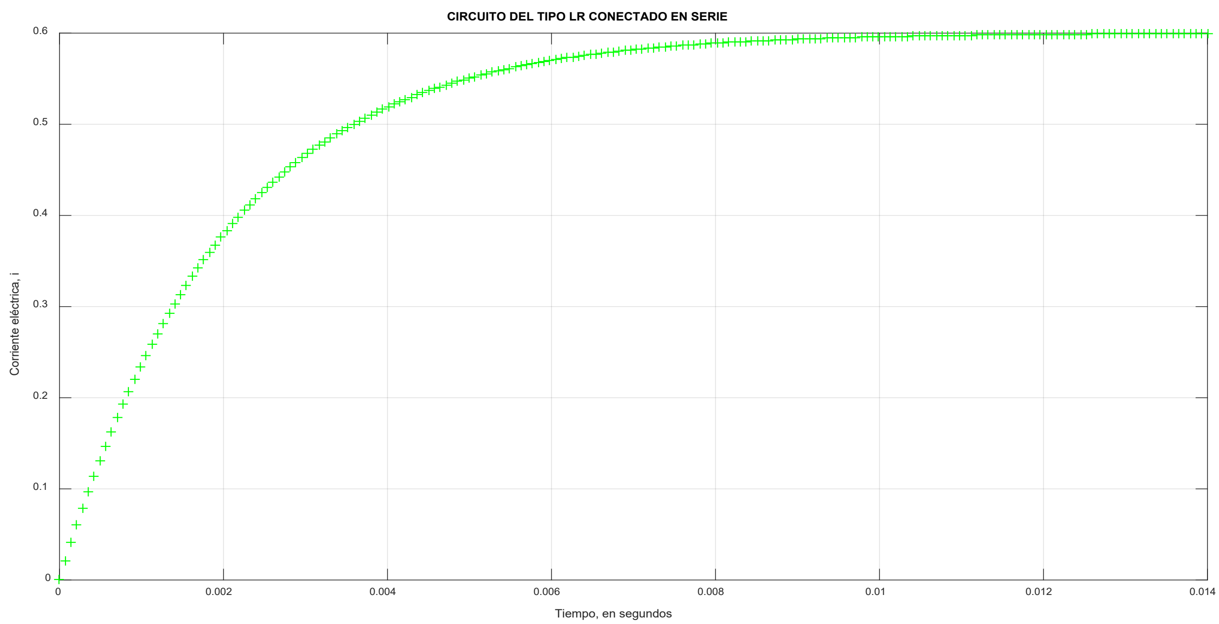
$$\boxed{\boldsymbol{i = \frac{3}{5}\left(1 - e^{-500t}\right)}}$$

Observando la ecuación anterior, cuando el tiempo tiende a infinito:

$$i = \lim_{t \to \infty} \frac{3}{5}\left(1 - e^{-500t}\right) = \frac{3}{5}$$

Esto es evidente cuando graficamos la ecuación solución: $\boldsymbol{i = \frac{3}{5}\left(1 - e^{-500t}\right)}$

Gráfica 14. Corriente eléctrica ii, en función del tiempo.



Ref. Elaboración propia con MATLAB

Problema 9.12

Un biólogo determina que la razón de crecimiento de un árbol está dado por:

$0.1t^2 + t$, donde t está expresado en años y l en metros ¿cuánto medirá el árbol a los 10 años?

Resolución

Planteamos la ecuación diferencial: $\frac{dl}{dt} = 0.1t^2 + t$

$\boldsymbol{I}$ es la longitud del árbol. Resolvemos la ecuación diferencial:

$$dl = (0.1t^2 + t)dt$$

$$\int dl = \int (0.1t^2 + t)\,dt$$

$$l = \frac{0.1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + c$$

Para obtener $\boldsymbol{c}$, sustituimos $l(t = 0) = 0$

$$0 = \frac{0.1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2 + c$$

$$c = 0$$

Por lo que:

$$\boxed{\boldsymbol{l = \frac{0.1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2}}$$

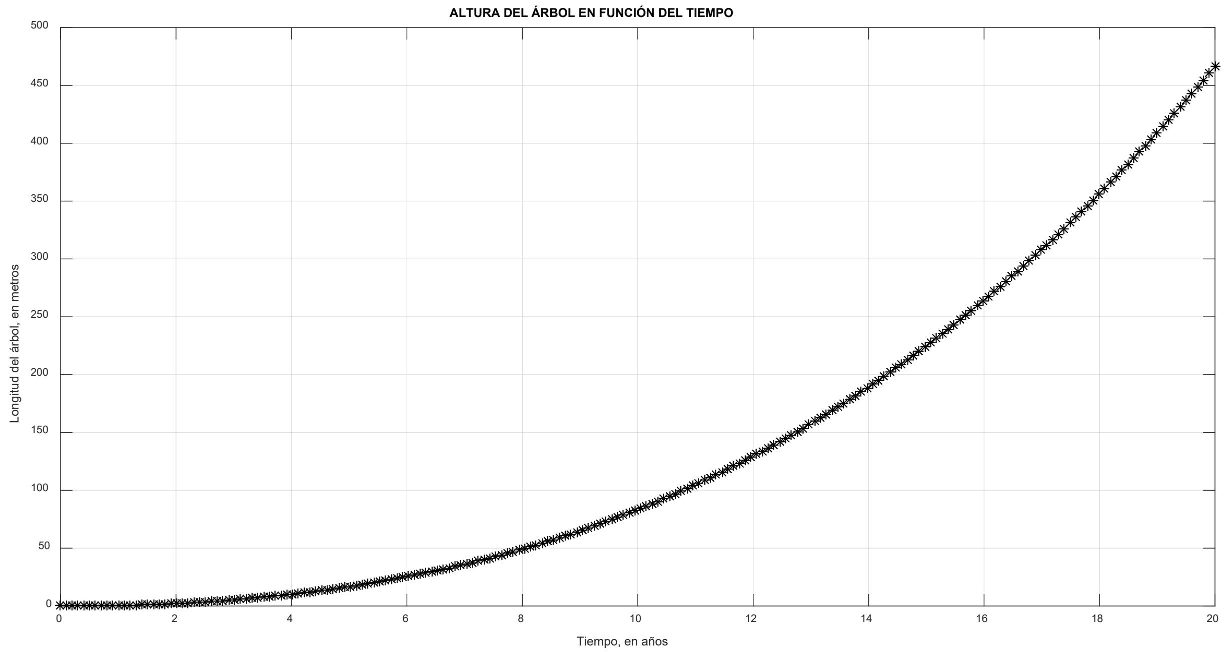
Cuando $\boldsymbol{t}$ = 10 años:

$$l = \frac{0.1}{3}(10)^3 + \frac{1}{2}(10)^2$$

$$\boldsymbol{l = 83.33\ m}$$

Su gráfica:

Gráfica 15. Crecimiento del árbol como una función del tiempo.



Ref. Elaboración propia, con MATLAB.

Problema 9.13

La carne puesta en un congelador se enfría con una rapidez proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la del congelador. Si un asado que se encuentra a la temperatura ambiente de 68 °F se introduce en un congelador de 20 °F y si la temperatura del asado después de 2 horas es de 40 °F, ¿Cuál es la temperatura de la carne después de 5 horas?

Resolución

Datos:

$Tiempo, t$ $en\ horas$	$Temperatura,$ $T\ en\ {}^{0}F$
0	68
2	40
5	T=?

$$Ta = 20\ {}^{0}F$$

Según la Ley de enfriamiento de Newton, la rapidez con la que un cuerpo se enfría (al estar en contacto en un medio de menor temperatura), es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas, la del cuerpo menos la del medio, es decir:

$$\frac{dT}{dt}\alpha(T-Ta)$$

O bien:

$$\frac{dT}{dt}=k(T-Ta)$$

Donde:

T es la temperatura del cuerpo, en centígrados

t es el tiempo, en minutos

k es una constante de proporcionalidad, y

Ta es la temperatura del medio= $20º\,F$ (en este caso)

Para resolver el problema, primero observamos la ecuación diferencial y nos damos cuenta que es de variables separables, pero también es lineal si la acomodamos, como sigue:

$$\frac{dT}{dt}=k(T-Ta)$$

$$T'=kT-kTa$$

$$T'-kT=-k20$$

Que es similar a la forma general de nuestra ecuación diferencial lineal que vimos en el tema correspondiente, a saber:

$$y'+p(x)y=q(x)$$

Si adaptamos la fórmula solución de una ecuación diferencial lineal, de acuerdo a nuestras variables y parámetros de la ley de enfriamiento de Newton, nuestra fórmula solución quedaría:

$$T=e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt}q(t)dt+c\right]$$

En nuestro caso, $p(t) = -k$ y $q(t) = -kTa = -k(20) = -20k$

Así que sustituimos nuestros parámetros y resolvemos la ecuación diferencial lineal:

$$T = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt}\, q(t)dt + c\right]$$

$$T = e^{-\int -k\,dt}\left[\int e^{\int -kdt}\,(-20k)dt + c\right]$$

$$T = e^{k\int dt}\left[-20k\int e^{-k\int dt}\,dt + c\right]$$

$$T = e^{kt}\left[-20k\int e^{-kt}\,dt + c\right]$$

$$T = e^{kt}\left[-\frac{20k}{-k}e^{-kt} + c\right]$$

$$T = e^{kt}\left[20e^{-kt} + c\right]$$

$$T = 20 + ce^{kt}$$

Ahora, con los datos iniciales, pasamos a calcular las constantes de proporcionalidad, $\boldsymbol{k}$ y de integración $\boldsymbol{c}$.

$$T(t = 0\ hr) = \ 68\ F$$

$$T(t = 2\ horas) = \ 40\ F$$

$$\boldsymbol{T = 20 + ce^{kt}}$$

$$68 = 20 + ce^{k(0)}\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

De la ecuación (1):

$$\boldsymbol{c = 48}$$

De la ecuación (2) y con $c = 48.c = 48$.

$$T = 20 + ce^{kt} \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

$$40 = 20 + 48e^{k(2)}$$

$$20 = 48e^{k(2)}$$

$$\frac{20}{48} = e^{k(2)}$$

$$\frac{5}{12} = e^{k(2)}$$

$$2k = \ln\left(\frac{5}{12}\right)$$

$$k = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{12}\right)$$

$$k = ln\left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto, la solución de nuestra ecuación diferencial queda:

$$T = 20 + ce^{kt}$$

$$T = 20 + 48\, e^{\left[t\, ln\left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T = 20 + 48\left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{t}{2}}}}$$

Pasamos a contestar la pregunta: "¿Cuál es la temperatura de la carne después de 5 horas?"

Sustituimos la $t = 5\ horas$ $.t = 5\ horas$.

$$T = 20 + 48\left(\frac{5}{12}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$\boxed{T = 25.3791\ {}^{0}F}$$

Problema 9.14

La rapidez con la que la sal se disuelve en agua es proporcional a la cantidad sin disolverse. Si 10 Kg de sal se vierten en un recipiente con agua a la 1:00 pm, se encuentra que a las 4:00 pm ya se ha disuelto la mitad.

a) ¿Cuánto tardará en disolverse 2 Kg más?

b) ¿Cuántos de los 10 Kg se habrán disuelto a las 8:00 pm?

Resolución

La expresión: "La rapidez con la que la sal se disuelve en agua es proporcional a la cantidad sin disolverse", se traduce en los siguientes símbolos:

$$\frac{dx}{dt}\alpha x$$

$\boldsymbol{dx/dt}$ es la rapidez,

$\boldsymbol{x}$ es la sal no disuelta

$\boldsymbol{t}$ es el tiempo

o90$\boldsymbol{k}$ es la constante de proporcionalidad.

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

Se resuelve la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

$$\int \frac{dx}{x} = k\int dt$$

Solución general:

$\ln(x) = kt + c$

Condiciones:

$t, tiempo\ (hr)$	$x, azúcar\ (kg)$
0	$x_0 = 10$
3	5

Condición inicial:

$$\ln(10) = k(0) + c$$

$$c = \ln(10)$$

$$\ln(x) = kt + \ln(10)$$

Condición a las 4:00 pm

$$\ln(5) = k(3) + \ln(10)$$

$$k = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$k = ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\ln(x) = ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} t + ln(10)$$

$$\ln(x) = ln[10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}]$$

Solución Particular simplificada:

$$\boxed{\boldsymbol{x = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}}}$$

Respuestas a las preguntas:

a) ¿Cuánto tardará en disolverse 2 Kg más?

$$3 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$$

$$t = 3\frac{\ln\left(\frac{3}{10}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{t = 5.2109\ hr}$$ **(a las 18 hrs 13 min)**

b) ¿Cuántos de los 10 Kg se habrán disuelto a las 8:00 pm?

$$x = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{3}}$$

$$x = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{3}}$$

$$x = 1.9843\ kg\ quedan\,\text{sin}\ disolver$$

$$\boldsymbol{10 - x = 8.0157\ kg\ se\ han\ disuelto}$$

Problema 9.15

Un problema importante en la Economía, es el comportamiento del precio P, de un bien en un tiempo t. Este problema depende de muchos factores entre los cuales, está la oferta y la demanda. El término "bienes" es utilizado para nombrar cosas, objetos, artículos, etc. que son útiles a quienes los usan o los poseen. A nivel del mercado, los bienes son cosas y mercancías que se intercambian y que tienen alguna demanda por parte de personas u organizaciones que consideran que reciben un beneficio al obtenerlos.

Supongamos que tenemos las siguientes ecuaciones diferenciales, de Demanda, D y Oferta, S respectivamente:

$$D = 48 - 2P(t) + 3P'(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$S = 30 + P(t) + 4P'(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La demanda y la oferta están dadas en miles de unidades. Supongamos por otra parte, que tenemos la condición inicial: P(0)=10; es decir, al tiempo t=0, el precio de nuestro bien es P=10. Se pide hallar el precio, P del bien como una función del tiempo t.

Resolución

En el equilibrio, la demanda y la oferta son iguales, por lo tanto, igualamos las ecuaciones (1) y (2),

$$48 - 2P(t) + 3P'(t) = 30 + P(t) + 4P'(t)$$

Simplificando obtenemos: $\boldsymbol{P'(t) + 3P(t) = 18}$

Esta es una ecuación lineal de la forma: $\boldsymbol{y' + p(x)\,y = q(t)}$

En este caso: y=P, x=t; cuya solución está dada por la ecuación:

$$P = e^{-\int p(t)dt} \left[\int e^{\int p(t)dt} q(t)dt + c\right]$$

No confundir P con p. P es el precio y p(t)=3; q(t) = 18.

Sustituimos los parámetros correspondientes en la ecuación solución, para hallar el precio P de nuestra variable:

$$P = e^{-\int 3dt} \left[\int e^{\int 3dt} 18\, dt + c\right]$$

Resolviendo las integrales…

$$P = e^{-3t} \quad \left[\int e^{3t} 18\, dt + c\right]$$

$$P = e^{-3t} \quad \left[\frac{18}{3} e^{3t} + c\right]$$

$$P = e^{-3t} \quad [6e^{3t} + c]$$

$$\boldsymbol{P = 6 + ce^{-3t}}$$

Sustituyendo la condición inicial:

$$10 = 6 + ce^{-3(0)}$$

Obtenemos:

$$c = 4$$

Por lo tanto, la solución, el precio P, en términos del tiempo t, queda:

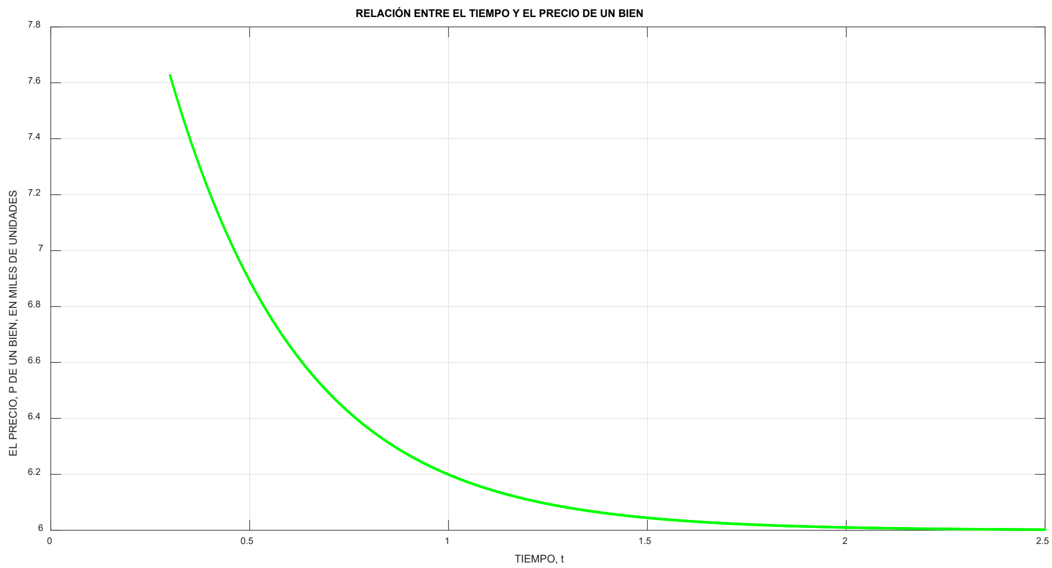
$$\boxed{\boldsymbol{P = 6 + 4e^{-3t}}}$$

De la ecuación vemos que, si el tiempo tiende a infinito, el precio es de 6. Por lo que tenemos estabilidad de precios y el precio de equilibrio es de 6 unidades dinerarias. Este comportamiento lo podemos observar en la gráfica correspondiente a este ejemplo.

Cuando se habla de demanda, se refiere uno a la cantidad de bienes o servicios que se solicitan o se desean en un determinado mercado de una economía a un precio específico. Cuando se habla de oferta se hace referencia a la cantidad de bienes, productos o servicios que se ofrecen en un mercado bajo determinadas condiciones. El precio es una de las condiciones fundamentales que determina el nivel de oferta de un determinado bien en un mercado.

Grafica 9.16 Relación entre el tiempo, t y el precio, P de un artículo.

Problema 9.15



Ref. Elaboración propia, con MATLAB.

Capítulo 10

Problemas Propuestos de Aplicación en Ingeniería Química y QFB.

10.1 Un termómetro se saca al exterior de una habitación donde la temperatura del aire es de 95 ^{o}F, afuera la temperatura es de 15 ^{o}F, después de 2 minutos el termómetro marca 40 ^{o}F, ¿cuánto marcará el termómetro en 4 minutos?, ¿cuánto tardará el termómetro en alcanzar los 20 ^{o}F?

10.2 Un tanque contiene 200 litros de agua en los cuales se disuelven 30 g de sal. Una salmuera que contiene 1 g de sal /galón se bombea hacia adentro del tanque con una rapidez de 4 litro/min. La solución adecuadamente mezclada se bombea hacia afuera con la misma rapidez. Hallar los gramos de sal que hay en el tanque al término de 6 minutos.

10.3 Un cultivo de bacterias crece con una rapidez proporcional a la cantidad presente, si hay 5000 bacterias presentes inicialmente y la cantidad se duplica cada hora. ¿Cuántas bacterias habrá en 4 horas?, ¿en qué tiempo se triplicará la cantidad inicial?

10.4 En una cierta reacción química la rapidez de conversión de una sustancia proporcional a la cantidad de sustancia que aún no se transforma en ese momento. Después de 10 minutos se ha convertido un tercio de la cantidad original de la sustancia y 20 gramos se han convertido después de 15 minutos. ¿Cuál era la cantidad original de la sustancia?

10.5 Se sabe que la variación de la presión atmosférica con respecto a la altura varía directamente proporcional a la presión. Si la presión atmosférica al nivel del mar es de 760 mm Hg y la presión en la Cd. de México es de 586 mm Hg. ¿Qué presión atmosférica tendrá una ciudad que está 4,000 m sobre el nivel del mar?

10.6 Dos sustancias A y B se combinan para formar una sustancia C. La rapidez o velocidad de la reacción a la que se produce C, es proporcional al producto de las cantidades de A y B que no han reaccionado. Inicialmente Hay 40 g de A y 50 g de B. Por cada gramo que se produce de C, se consume 1/3 g de A y 2/3 g de B. Si se forman 10 g de C en 5 min, determinar:

a) La ecuación que determina la cantidad que se forma de C, en cualquier tiempo.

b) La cantidad que se forma de C en 20 minutos.

c) El tiempo en el que se forman 10 g de C

d) Llenar la siguiente tabla:

Tiempo, t (min)	Cantidad de C (x)
0	
30	
60	
∞	

e) ¿Cuál es el reactivo limitante?, ¿Cuál es el reactivo en exceso?

10.7 En un tanque hay 500 litros de salmuera que contienen 25 Kg. de sal disuelta. Entra agua (solo agua), en el tanque a razón de 12 litros por minuto y la mezcla sale en igual cantidad. ¿Qué cantidad de sal queda en el tanque al cabo de una hora?

10.8 El compuesto A se transforma en el compuesto B, la rapidez a la cual B se forma varia directamente proporcional con la cantidad de A presente en cualquier tiempo. Si 10 lb de A están presentes inicialmente y si 3 lb se transforman en B en una hora. ¿Qué cantidad de A se transforma después de 3 horas? ¿En cuánto tiempo se transforma el 60% del compuesto A?

10.9 Un tanque contiene 150 litros de agua pura. Una salmuera que contiene 1 gr de sal por litros se bombea dentro del tanque con una rapidez de 4 litros/min. La solución bien mezclada se bombea hacia fuera con la misma rapidez. Hallar los gramos de sal que hay en el tanque en cualquier tiempo, ¿cuánta sal habrá en el tanque una hora después?

10.10 El número de bacterias en cierto cultivo crece de 5,000 a 15,000 en 10 horas. Suponiendo que la tasa de rapidez de crecimiento es proporcional al número de bacterias, encuentra una ecuación que determine el número de bacterias en el cultivo al tiempo *t*. Calcular el número de bacterias al cabo de 20 horas. ¿Cuándo llegará a 50,000 el número de bacterias?

10.11 El isótopo de Polonio ^{210}Po tiene une semivida de 140 días aproximadamente. Si una muestra pesa inicialmente 20, mg, ¿cuánto queda t días después? Aproximadamente, ¿cuánto quedará después de dos semanas?

10.12 Dos sustancias A y B se combinan para formar una sustancia C. La rapidez o velocidad de la reacción a la que se produce C, es proporcional al producto de las cantidades de A y B que no han reaccionado. Inicialmente Hay 40 g de A y 50 g de B. Por cada gramo que se produce de C, se consume 2/3 g de A y 1/3 g de B. Si se forman 10 g de C en 5 min, determinar:

a) La ecuación que determina la cantidad que se forma de C, en cualquier tiempo.

b) La cantidad que se forma de C en 20 minutos.

c) El tiempo en el que se forman 10 g de C

d) Llenar la siguiente tabla:

Tiempo, t (min)	Cantidad de C (x)
0	
30	
60	
∞	

c) ¿Cuál es el reactivo limitante?, ¿y el reactivo en exceso?

10.13 Cierta sustancia radiactiva tiene una vida media de 5 horas, ¿cuánto tomará a una cantidad desintegrarse hasta que quede solo el 1% de la cantidad inicial?

10.14 Una partícula se mueve a lo largo de una recta una velocidad que es inversamente proporcional al cuadrado del tiempo. Si el tiempo es de 45 segundos, la velocidad de la partícula es de 2375 pies/segundo. ¿Qué distancia recorre la partícula en el intervalo de tiempo [17, 93]?

10.15 El 30% de una sustancia radiactiva desaparece en 15 años. Determinar la vida media de la sustancia.

10.16 En una máquina de vapor, la presión P y el volumen V del vapor satisfacen la ecuación $PV^{1.4}=K$, donde K es una constante. Calcular el trabajo efectuado por la máquina durante un ciclo, cuando el vapor inicia con una presión de 160 lb/plg^2, un volumen de 100 plg^3 y se expande a un volumen de 800 plg^3

10.17 Inicialmente había 110 mg presentes de una sustancia radiactiva. Después de 6 hrs la masa disminuyó en 3%. Si la rapidez de desintegración es, en un instante cualesquiera proporcional a la cantidad de la sustancia presente en dicho instante, calcular:

a) La cantidad que queda al cabo de 24 hrs.

b) La vida media de la sustancia radiactiva.

10.18 Un tanque contiene 80 galones de agua pura; una solución que contiene 2 libras de sal por galón entra al tanque a razón de 1galón/minuto, y la solución perfectamente mezclada sale del tanque a la misma velocidad. Determinar:

a) La cantidad de sal que existe en el tanque en cualquier momento

b) ¿En qué momento la solución que sale del tanque contendrá una concentración de 1 lb de sal /galón?

10.19 La reacción satisface la ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = k(1-2x)^2(1-x)$$

Donde k es la constante de velocidad de reacción, y x es la concentración de O_2 en el tiempo t; las concentraciones iniciales de O_2 y NO son iguales a la unidad. Cuanto t=10, se mide el valor de x, sabiendo que es igual a ¼. Determinar la constante k.

10.20 Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta en un instante cualquiera, con un rapidez proporcional al número de personas presentes en ese instante. Si la población se duplica en cinco años. ¿Cuánto tardará en triplicarse?, ¿cuál será la población al cabo de 12 años?

Bibliografía

LARSON, et al (2006). Cálculo. Editorial Mc Graw Hill. 8va edición. México.

WARNER/R. COSTENOBLE (2002) Cálculo Aplicado. Ed. Thompson, México

STEWART, JAMES (2001). Cálculo de una Variable. Trascendentes tempranas. Ed. Thompson, 4ta edición, México

BLANCHARD/DEVANEY/HALL (1999) Ecuaciones Diferenciales. Ed. Thompson, México

ZILL, D. G. (2002) Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de Modelado. Thompson, México.

WILLIAM TRENCH (2002) Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valores en las Fronteras. Thompson, México

BAJPAI, A. C., et al (1990). Matemáticas para Ingeniería y Ciencias. Ediciones Ciencia y Técnica. S. A. Editorial LIMUSA. México.

BOYCE-DIPRIMA (1974). Introducción a las Ecuaciones Diferenciales. Ed. LIMUSA, México.

ZILL, D. G. (1996). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica, México

SMITH, J. M. (1990) Ingeniería de la Cinética Química. CECSA.

Apéndices

A. IdentidadesTrigonométricas

1 $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

2 $\cos(-x) = \cos x$

3 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

4 $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

5 $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

6 $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

7 $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

8 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

9 $\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$

10 $\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$

11 $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

12 $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

13 $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B)$

14 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\cos(A - B) + \frac{1}{2}\cos(A + B)$

15 $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A - B) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A + B)$

16 $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$

17 $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos\frac{1}{2}(A + B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)$

18 $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$

19 $\cos A - \cos B = -2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(A + B)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}(A - B)$

20 $\mathrm{sen}\,x = \frac{1}{\csc x}$

21 $\cos x = \frac{1}{\sec x}$

22 $\tan x = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$

23 $\tan x = \frac{1}{\cot x}$

24 $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

25 $\cot x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}$

26 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

27 $\csc x = \frac{1}{\mathrm{sen}\,x}$

B. Derivadas

• Algebraicas

1 $\frac{d}{dx}c = 0$

2 $\frac{d}{dx}x = 1$

3 $\frac{d}{dx}cu = c\frac{d}{dx}u$

4 $\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v - \frac{d}{dx}w$

5 $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

6 $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\quad\frac{d}{dx}u$

7 $\frac{d}{dx}uv = u\frac{d}{dx}v + v\frac{d}{dx}u$

- **Exponenciales - Logarítmicas**

1 $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

2 $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{d}{dx} u$

3 $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

4 $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{\frac{d}{dx} u}{u}$

5 $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \, lna}$

6 $\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{\frac{d}{dx} u}{u \;\; lna}$

7 $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \;\; \frac{d}{dx} u$

8 $\frac{d}{dx} u^v = v \, u^{v-1} \frac{d}{dx} u + u^v \ln u \;\; \frac{d}{dx} v$

- **Trigonométricas**

1 $\frac{d}{dx} sen \; u = cosu \;\; \frac{d}{dx} u$

2 $\frac{d}{dx} cosu = -senu \;\; \frac{d}{dx} u$

3 $\frac{d}{dx} tan \; u = sec^2 u \;\; \frac{d}{dx} u$

4 $\frac{d}{dx} cotu = -csc^2 u \;\; \frac{d}{dx} u$

5 $\frac{d}{dx} secu = secu \; tanu \;\; \frac{d}{dx} u$

6 $\frac{d}{dx} cscu = -cscu \; cotu \frac{d}{dx} u$

7 $\frac{d}{dx} arc \; sen \; u = \frac{\frac{d}{dx} u}{\sqrt{1-u^2}}$

8 $\frac{d}{dx} arc \cos u = -\frac{\frac{d}{dx} u}{\sqrt{1-u^2}}$

9 $\frac{d}{dx} arc \tan u = \frac{\frac{d}{dx}u}{1+u^2}$

10 $\frac{d}{dx} arc \cot u = -\frac{\frac{d}{dx}u}{1+u^2}$

11 $\frac{d}{dx} arc\ sec\ u = \frac{\frac{d}{dx}u}{u\sqrt{u^2-1}}$

12 $\frac{d}{dx} arc\ csc\ u = -\frac{\frac{d}{dx}u}{u\sqrt{u^2-1}}$

C. Integrales Básicas

1 $\int o\ du = c$

2 $\int k\ du = ku + c$

3 $\int du = u + c$

4 $\int u^n\ du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, \qquad n \neq -1$

5 $\int e^u\ du = e^u + c,$

6 $\int sen\, u\ du = -\cos u + c$

7 $\int \cos u\ du = sen\, u + c$

8 $\int \tan u\ du = ln|\sec u| + c$

9 $\int \cot u\ du = ln|sen\ u| + c$

10 $\int \sec u\ du = ln|\sec u + \tan u| + c$

11 $\int \csc u\ du = ln|\csc u - cot u| + c$

12 $\int sec^2 u \; du = \tan u + c$

13 $\int csc^2 u \; du = -\cot u + c$

14 $\int \sec u \tan u \; du = \sec u + c$

15 $\int \csc u \cot u \; du = \; -\csc u + c$

16 $\int a^u \; du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$

17 $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$

18 $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = arc\ sen\ u + c, (\text{ó} - arc \cos u + c)$

19 $\int \dfrac{du}{1+u^2} = arc\ tan\ u + c, (\text{ó} - arc \cot u + c)$

20 $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = arc\ sec\ u + c, (\text{ó} - arc \csc u + c)$

21 $\int e^{au} du = \dfrac{1}{a} e^{au} + c$

22 $\int sen\ au\ du = -\dfrac{1}{a} \cos au + c$

23 $\int cos\ au\ du = \dfrac{1}{a} \operatorname{sen} au + c$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden con aplicaciones en Ingeniería Química y Química Farmacéutico Biológica

Genaro Altamirano García

Este libro es el resultado del trabajo y la experiencia de 20 años, al impartir la asignatura de Matemáticas II, en las carreras de Ingeniería Química (I. Q.) y Química Farmacéutico Biológica (Q. F. B), de la Facultad de Estudios Superiores “Zaragoza”, UNAM.

La asignatura de Matemáticas II en general, y las ecuaciones diferenciales en particular, son parte de la formación básica de los ingenieros químicos y de los químicos.

En este libro se describen las generalidades acerca de las ecuaciones diferenciales: qué son, para qué sirven, cuál es la clasificación de las ecuaciones diferenciales, y por qué las estudiamos en las carreras mencionadas. Aborda también las ecuaciones diferenciales de variables separables, analiza las ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos; estudiamos las ecuaciones diferenciales exactas, las ecuaciones diferenciales inexactas, las cuáles requieren la búsqueda de un factor integrante.
También las ecuaciones diferenciales lineales y estudiamos las ecuaciones diferenciales tipo Bernoulli, en todos estos temas como en el de las Trayectorias ortogonales, incluimos tanto problemas resueltos como una serie de problemas propuestos, para que el lector ejercite sus habilidades matemáticas en la resolución de problemas de este tipo de ecuaciones.

Finalmente nos abocamos a la aplicación de las ecuaciones diferenciales en la Ingeniería química y en QFB. y aterrizamos la utilidad que tiene esta esfera de la matemática en nuestras carreras. Explicamos con el mayor detalle la aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias en ámbitos como la Fisicoquímica, problemas de Velocidad de Reacción, Mezclado, Ley de Enfriamiento de Newton y muchas ramas más de la Química y de la Ingeniería Química y proponemos a los lectores la resolución de unas decenas de problemas de aplicación.

A lo largo del libro, se hace uso de herramientas computacionales del paquete de programación MATLAB (Laboratorio de Matrices), realizando gráficas para que las explicaciones y el análisis de los resultados de los ejercicios, resulten sumamente didácticos a los lectores de esta obra.

El objetivo de este trabajo es que los estudiantes de las carreras de I. Q. y Q. F. B. de la FES Zaragoza, cuenten con más y mejores materiales didácticos que coadyuven en la formación académica de nuestros futuros profesionistas. Si este esfuerzo contribuye en esa línea, el autor se da por bien servido.

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza,
Campus I. Av. Guelatao No. 66 Col. Ejército de Oriente,
Campus II. Batalla 5 de Mayo s/n Esq. Fuerte de Loreto.
Col. Ejército de Oriente.
Iztapalapa, C.P. 09230 Ciudad de México.
Campus III. Ex fábrica de San Manuel s/n,
Col. San Manuel entre Corregidora y Camino a Zautla,
San Miguel Contla, Santa Cruz Tlaxcala.

http://www.zaragoza.unam.mx

9 786073 093323