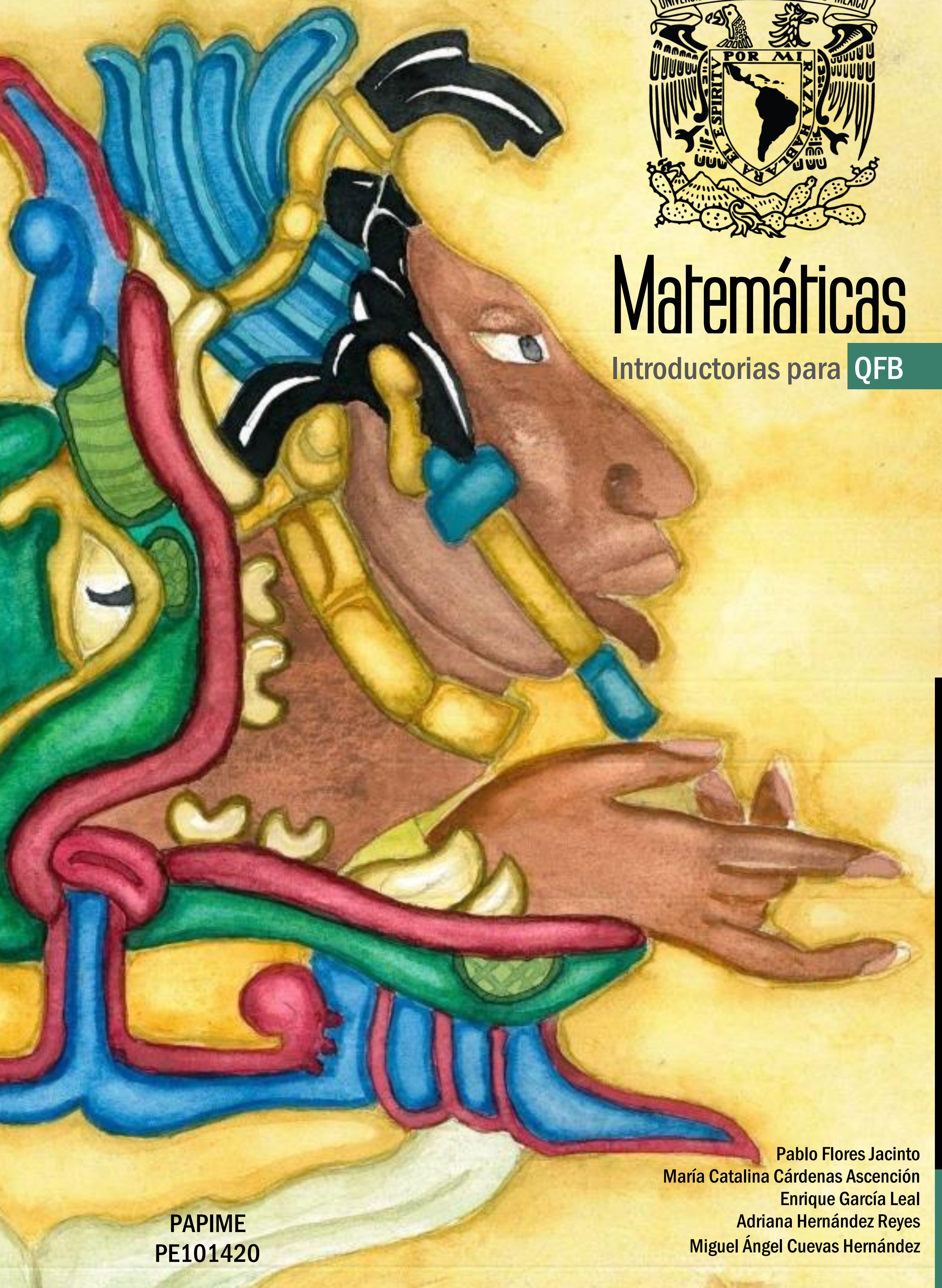


Matemáticas

Introductorias para QFB

Pablo Flores Jacinto
María Catalina Cárdenas Ascención
Enrique García Leal
Adriana Hernández Reyes
Miguel Ángel Cuevas Hernández

PAPIME
PE101420

La portada de éste libro está inspirada en el Dios Kukulkán (K´u uk´ulkan); la serpiente emplumada, considerado por la cultura maya como el creador del universo y antecesor de Quetzalcóatl; cuyas características principales son la renovación y el renacimiento; trasformación esperada en los alumnos de nuevo ingreso.

MATEMÁTICAS
Introductorias para QFB

P r i m e r a   e d i c i ó n

Pablo Flores Jacinto
María Catalina Cárdenas Ascención
Enrique García Leal
Adriana Hernández Reyes
Miguel Ángel Cuevas Hernández

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza

Datos para catalogación bibliográfica

Autores: Pablo Flores Jacinto, María Catalina Cárdenas Ascención, Enrique García Leal,

Adriana Hernández Reyes, Miguel Ángel Cuevas Hernández

Matemáticas introductorias para QFB

UNAM, FES Zaragoza, 02 de Noviembre de 2020.
Primera Edición. pp. 423
PDF: 20.4 Megabyte

ISBN formato impreso: 978-607-30-3663-4
ISBN formato digital: 978-607-30-3695-5

Maquetación y diseño de portada: Pablo Flores Jacinto.
Técnica acuarela en papel.

Proyecto Papime PE101420

Matemáticas introductorias para QFB

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Campus II
Batalla 5 de mayo s/n esquina Fuerte de Loreto, Col. Ejército de Oriente
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09230, Ciudad de México.

Prólogo

En esta obra, usted encontrará matemáticas para alumnos de nuevo ingreso a la carrera de Química Farmacéutico Biológica de la Facultad de Estudios Zaragoza de la UNAM.

En todas las unidades encontrará el desarrollo exhaustivo de los ejercicios y ejercicios de refuerzo, que lo ayudarán a entrar al mundo maravilloso de las matemáticas en la química.

Por último pero no menos importante, usted encontrará en cada capítulo la sección de "Quimática", en donde especialistas de las diversas áreas de ciencias de la salud nos regalan un artículo que vincula las matemáticas con nuestro gran quehacer en la química.

El desarrollo del libro se presenta en cada capítulo así: caricatura, teoría, ejercicios, ejercicios de refuerzo, sección quimática y solución de los ejercicios impares.

La idea de los autores es compartir sus conocimientos de matemáticas en las que fueron formados en la Universidad pero visto desde la perspectiva de un químico, para que usted por medio del texto logre lo que a muchos les ha costado tanto: entender las matemáticas, acreditar el curso de matemáticas y tener éxito en la carrera.

Podemos decir que es un libro de matemáticas para químicos, escrito por profesionales de la química, enriquecido con artículos desarrollados por expertos en ciencias de la salud.

Esperamos que este libro le agrade y que sus ejercicios pronto lo conviertan en un alumno que ame la química soportada en las matemáticas.

Atentamente los autores.

Quimática

Propuesta pedagógica para la enseñanza de las matemáticas en la carrera de QFB

Adriana Hernández Reyes

Resumen

La matemática resulta intangible para la mayoría de los estudiantes, no la reconocen en las actividades cotidianas, ni en el entorno que los rodea, así mismo no identifican sus enormes aportaciones para comprender y explicar los fenómenos que nos rodean y su relación y aporte a otras disciplinas, únicamente la perciben cómo serie de operaciones, ecuaciones, números, cálculos y fórmulas, lo anterior puede ser una de las principales causas del inadecuado aprendizaje de esta ciencia.

Por lo que quimática como propuesta pedagógica aporta respuestas a una de las principales dificultades en la enseñanza de las matemáticas, responder a las dudas de los estudiantes que surgen antes y durante el desarrollo de la clase: ¿para qué estudiar matemáticas?, ¿para qué nos va a servir?, ¿de verdad lo vamos a utilizar? Estas preguntas reflejan lo difícil que es para los estudiantes encontrar el sentido de las matemáticas en su trayectoria escolar, vida cotidiana, pero sobre todo desarrollo profesional. Además de que la mayoría de los docentes, aunque tratan de explicar que algunos temas se utilizarán en el campo laboral no se establece cómo o cuándo, por tanto, para los alumnos es una asignatura más a cubrir que además presenta gran dificultad.

Por lo que es muy importante aplicar nuevas propuestas para la enseñanza de las matemáticas, debido a que el docente durante su práctica debe establecer su importancia y relación con las asignaturas del programa de estudios de la carrera se QFB, las actividades que se han desarrollado para los estudiantes tienen como objetivo evidenciar que las matemáticas no son simplemente ecuaciones y números, mostrar que sus aportaciones han permitido el desarrollo científico y tecnológico y la explicación de los fenómenos de la naturaleza, y la conexión, relación o contextualización de los conceptos que se estudian en los diferentes cursos de química de la carrera de QFB.

Quimática como propuesta pedagógica se basa en las propuestas teóricas del aprendizaje significativo, constructivismo y matemática en el contexto de las ciencias (MCC) (Figura 1).

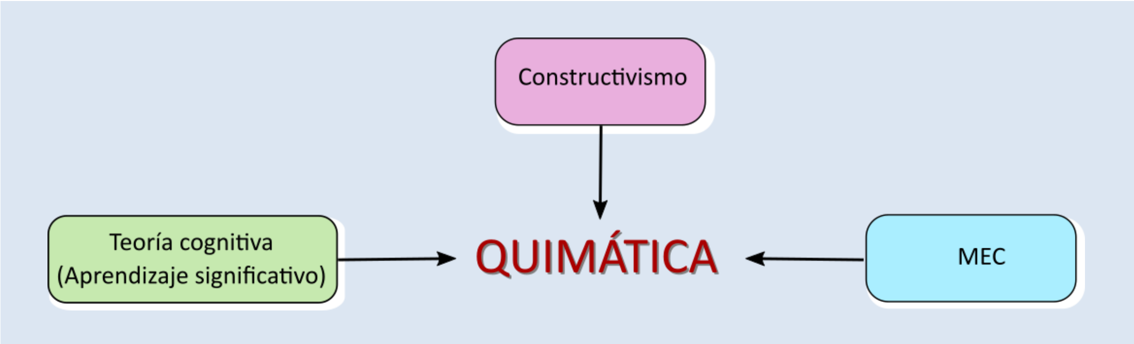


Figura 1. Principios de la teoría cognitiva, el constructivismo y la matemática en el contexto de las ciencias

Fuente: Elaboración propia, (2020)

Teoría cognitiva

Se centra en los procesos cognitivos: el pensamiento, la solución de problemas, el lenguaje, la formación de conceptos y el procesamiento de la información sus principios son:

- Énfasis en el aprendizaje significativo: El conocimiento nuevo se vincula intencionada y sustancialmente con los conceptos y proposiciones existentes en la estructura cognoscitiva (Ausbel, P D, Novak J. D & Hanesian H., 1983, pág 67).
- Participación del estudiante de forma activa en el proceso de aprendizaje.
- Creación de ambientes de aprendizaje que permitan a los estudiantes a hacer conexiones con el material previamente aprendido.
- La estructuración, organización y secuencia de la información para facilitar su óptimo procesamiento.

Son relevantes las aportaciones del cognoscitivismo a quimática como propuesta pedagógica debido a que considera fundamental la vinculación de los conocimientos previos de los alumnos respecto a las matemáticas su importancia y relación con otras ciencias, pero también propone actividades que les permiten entender la relación con asignaturas subsecuentes de la carrera de QFB y la práctica profesional.

Constructivismo

El constructivismo es una perspectiva psicológica, filosófica y sociocultural que sostiene que las personas forman o construyen gran parte de lo que aprenden o comprenden, no es una teoría si no una aplicación epistemológica de la naturaleza del aprendizaje, tiene sus principios en las aportaciones de muchos investigadores y escuelas del pensamiento como Dewey, Piaget, Brunner, Vygotsky, Gagné, Ausubel y Novak, que explican la adquisición del conocimiento como proceso gradual que tiene lugar en el propio sujeto, e incluyen a la interacción social como determinante en el proceso cognitivo.

Mario Carretero (1997, p. 21):

> Básicamente puede decirse que es la idea que mantiene que el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día con día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posesión del constructivismo, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción?, fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con la que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea.

a) Principios:

- El alumno construye su propio conocimiento de un modo activo, como resultado de la interacción de sus capacidades innatas y la exploración ambiental que lleva a cabo mediante propuestas o estímulos que recibe de su entorno.
- La inteligencia se forma de esquemas de conocimiento, las que en diversas situaciones producen conductas específicas, consta de procesos cognitivos y es evolutiva.
- El modelo pedagógico debe estar centrado en el aprendizaje.
- El aprendizaje escolar puede darse por recepción o por descubrimiento, pero ha de ser significativo.
- Los nuevos conocimientos para ser significativos deben incorporarse en forma sustantiva en la estructura cognitiva del alumno.

b) Enseñanza constructivista

La enseñanza constructivista considera que el aprendizaje humano, es siempre una construcción interior, aún en el caso de que el educador acuda a una exposición magistral, no puede ser significativa si sus conceptos no encajan ni se insertan en los conceptos previos de los alumnos, por lo que propósito facilitar y potenciar al máximo ese procesamiento interior del alumno con miras a su desarrollo.

Las características esenciales de la acción constructivista son;

1. Considera la estructura conceptual de cada estudiante: parte de las ideas y preconceptos de que el estudiante trae sobre el tema de la clase.
2. Anticipa el cambio conceptual que se espera de la construcción activa del nuevo concepto y su repercusión en la estructura mental.

3. Confronta las ideas y preconceptos afines del tema de la enseñanza, con el nuevo concepto científico que enseña.

4. Aplica el nuevo concepto a situaciones concretas y lo relaciona con otros conceptos de la estructura cognitiva con el fin de ampliar su transferencia.

Por tanto, requiere para potenciar la enseñanza de:

- Generar insatisfacciones con los prejuicios y preconceptos, facilitando que los estudiantes caigan en cuenta de sus incorrecciones.
- Que el nuevo concepto empiece a ser claro y distinto al anterior, muestre su aplicabilidad a situaciones reales y genere nuevas preguntas y expectativas.
- Que el estudiante observe, y comprenda las causas que originaron sus prejuicios y nociones erróneas.
- Crear un clima para la libre expresión del estudiante, sin coacciones ni temor a equivocarse.
- Propiciar las condiciones para que el estudiante sea partícipe del proceso de enseñanza-aprendizaje, desde la planeación de esta, desde la selección de las actividades.

Papel del docente

Dentro del constructivismo se considera al docente como aquel profesional reflexivo, que realiza una labor de mediación entre el conocimiento y el aprendizaje de sus alumnos, al compartir experiencias y saberes en un proceso de negociación o construcción conjunta del conocimiento con apoyo pedagógico acorde a la diversidad de necesidades, intereses y situaciones en que se involucran sus alumnos; es decir, la función central del docente es esencialmente orientar y guiar la actividad mental constructiva de sus alumnos, a quienes proporcionará ayuda pedagógica ajustada a su competencia. Es importante señalar que el docente debe de estructurar experiencias interesantes y significativas que promuevan el desarrollo cognoscitivo del alumno de acuerdo con sus necesidades y condiciones de este. De acuerdo con Díaz-Barriga F. (2002), un profesor constructivista debe reunir las siguientes características:

- Mediador entre el conocimiento y el aprendizaje de sus alumnos.
- Profesional reflexivo que piensa críticamente en su práctica- toma decisiones y soluciona problemas pertinentes al contexto de su clase.
- Promueve aprendizajes significativos, que tengan sentido y sean funcionales para los alumnos.

- Presta una ayuda pedagógica ajustada a la diversidad de necesidades o intereses y situaciones en que se involucran los alumnos.

- Respeta a sus alumnos, sus opiniones, aunque no las comparta.

- Establece una buena relación interpersonal con los alumnos basada en los valores que intenta enseñar como: respeto, tolerancia, empatía, convivencia.

- Evita apoderarse de la palabra y convertirse en un simple transmisor de información, es decir, no caer en la enseñanza verbalista o unidireccional.

Papel del alumno

Con lo que respecta al papel del alumno, trata de subrayar la importancia de la actividad constructivista o reconstructivista del educando en su aprendizaje, mediante actividades de asimilación y acomodación de nuevos conocimientos a esquemas precedentes, los cuales a su vez se van construyendo a partir de los nuevos datos. El alumno que aprende no es meramente pasivo ante el enseñante o el entorno. El conocimiento no es un mero producto del ambiente, ni un simple resultado de las actividades internas del aprendiz, sino una construcción por interacción, que se va produciendo y enriqueciendo cada día como resultado entre el aprendiz y los estímulos externos. Tal actividad se propicia mediante el ejercicio de la investigación, el fomento de la autonomía intelectual y moral, el aprendizaje significativo o la memorización comprensiva, la aplicación de lo aprendido y los procesos de individualización y socialización, el estudiante es el responsable de su proceso de aprendizaje (Limas, V. ,2000).

Quimática se fundamenta en dos de las aportaciones teóricas principales al constructivismo las de Piaget, que propone que el conocimiento se logra a través de las experiencias individuales de los sujetos, las cuales influyen en el pensamiento, en el ámbito educativo el constructivismo recomienda tener en cuenta que si los alumnos tienen procesos individuales y esquemas de pensamiento previos, los maestros deben promover ambientes de aprendizaje donde las actividades de exploración, reto y descubrimiento para el alumno, sean más importantes que la enseñanza en sí. De esta manera, el estudiante se convierte en el protagonista del aprendizaje y no el maestro. Desde esta postura, el maestro requiere de una gran capacidad para observar y explorar las reacciones que van teniendo los alumnos en sus experiencias de aprendizaje para mediar el proceso de construcción individual.

Así también y de manera preponderante en el enfoque sociocultural de Vygotsky, que propone que el conocimiento se construye dentro de un proceso biunívoco en el que la experiencia individual siempre está mediada por las interacciones sociales presentes y precedentes. Esto implica que lo que un alumno aprende, está filtrado por la cultura, la relación con los otros, el asesoramiento continuo y los conocimientos previos, donde el docente es una figura importante en el desarrollo progresivo de la inteligencia de un alumno, dado que la interacción social es estimulante y estructurante de las funciones psicológicas superiores que posteriormente serán interiorizadas por el sujeto que aprende.

Principales aportaciones de la teoría sociocultural, Vygotsky

- Las interacciones sociales son fundamentales; el conocimiento se construye entre dos o más personas.
- Autorregulación que se desarrolla mediante internalización (representación interna) de las acciones y operaciones mentales que ocurren en las interacciones sociales.
- El desarrollo humano ocurre por transmisión cultural.
- El lenguaje es la herramienta más importante, su desarrollo va desde el discurso privado al discurso social.
- La zona de desarrollo próximo (ZDP) la diferencia entre lo que los estudiantes pueden hacer por sí mismos o pueden hacer con el apoyo de otros.

Teniendo los alumnos en sus experiencias de aprendizaje para mediar el proceso de construcción individual.

También y de manera preponderante el enfoque sociocultural de Vygotsky propone que el conocimiento se construye dentro de un proceso en el que la experiencia individual siempre está mediada por las interacciones sociales presentes y precedentes. Esto implica que lo que un alumno aprende, de la relación con los otros, el asesoramiento continuo y los conocimientos previos, donde el docente es una figura importante en el desarrollo progresivo de la inteligencia de un alumno, dado que la interacción social es fundamental para el aprendizaje, quimática integra los principios del constructivismo y la teoría sociocultural como principales fundamentos teóricos que permitirán fomentar en el alumno un aprendizaje significativo mediante la realización de actividades que fomenten el autoaprendizaje y la colaboración.

Así mismo, quimática incluye las aportaciones de la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias (MCC) que surge en las ingenierías en el nivel superior y se extiende a otras profesiones de áreas químico biológicas y económico administrativas.

Matemática en el contexto de las ciencias

La matemática en el contexto de las ciencias es el vínculo entre la matemática y otras ciencias, así como situaciones profesionales y actividades de la vida cotidiana, por lo cual se enfoca a desarrollar en los estudiantes matemáticas para la vida, que les permita actuar de una manera lógica, razonada y analítica, considerando los problemas y situaciones que enfrentarán en su formación profesional y actividad laboral, mediante la reflexión acerca del vínculo entre la matemática y otras ciencias que desarrollen habilidades del pensamiento (Camarena. G, 2003).

Una de las grandes aportaciones de la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias es la metodología Dipcing única en el mundo toma en cuenta las características (enfoque, función, vinculación, significancia) elementos y herramientas que estudiaran en materias específicas de cada profesión.

También la teoría de las matemáticas en el contexto de la ciencia se fundamenta en los siguientes tres paradigmas (Camarena, 1984, 1995, 1999).

- Las matemáticas son una herramienta de apoyo a la disciplina.
- La matemática tiene una función específica en el nivel universitario.
- Los conocimientos nacen integrados.

El supuesto filosófico educativo de esta teoría es que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de las matemáticas a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se vean favorecidas, así como la formación integral del estudiante.

Toma en cuenta el proceso de enseñanza como un sistema donde intervienen cinco fases que se relacionan entre sí cada una con paradigmas teóricos que proporcionan el contexto al diseño didáctico de la matemática, se explica el fundamento cognitivo de la interdisciplinariedad en los alumnos y se proporcionan elementos para los conocimientos de matemáticas vinculados al desarrollo profesional (Figura 2).

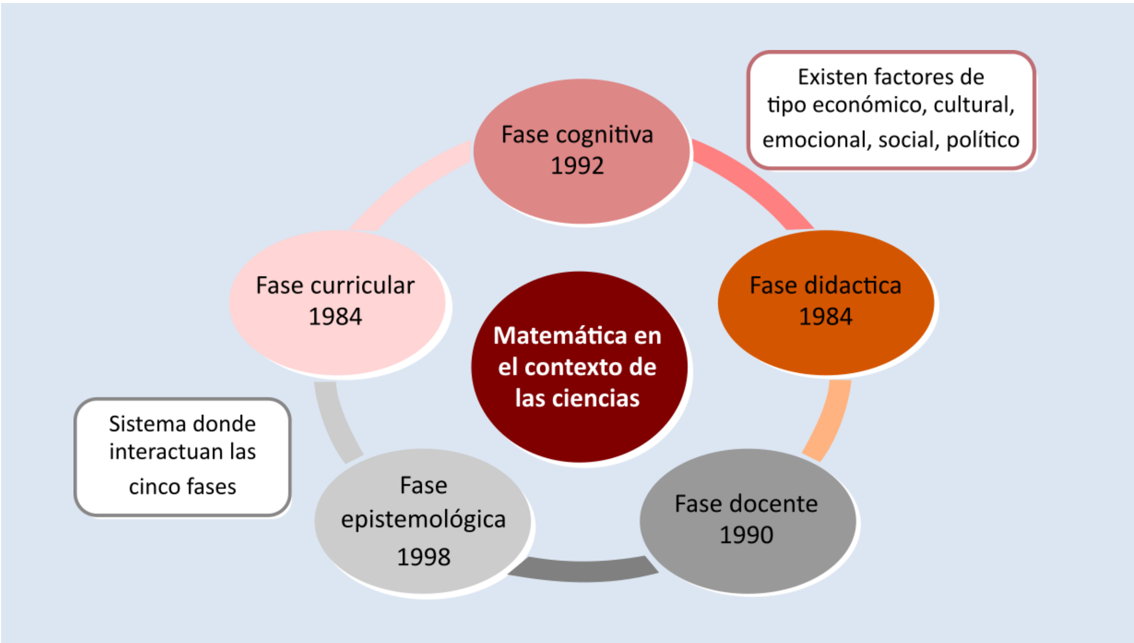


Figura 2. Elementos para el diseño didáctico de las Matemáticas
Fuente: Tomado de Camarena Gallardo, P. (2013)

Las etapas anteriores desarrolladas a lo largo de la evolución de esta teoría constituyen el referente metodológico considerado en quimática para la integración de los temas, ejercicios y ejemplos presentados en éste libro, para que los alumnos durante su formación académica integren a las matemáticas como la ciencia que realiza valiosas aportaciones a la consolidación de su desarrollo profesional.

Referencias

Ausbel, P D, Novak J. D & Hanesian H. (1983). Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. 2 ed. Trillas.

Carretero, M. (2009). *Constructivismo y Educación.* Paidos

Bello Pauli, L. A. (2000). La enseñanza de la Química General y su vínculo con la vida. Educación química, 11(4), 374-380.

Camarena Gallardo, P. (2013). A treinta años de la teoría educativa" Matemática en el Contexto de las Ciencias". Innovación educativa (México, DF), 13(62), 17-44.

Limas, V. S. (2000). La didáctica, el constructivismo y su aplicación en el aula. http://www.deposoft.com.ar/repo/publicaciones/CONTRUCTIVISMO.pdf

Díaz- Barriga F y Hernández- Rojas G (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.* Mc Graw Hill.

López, V. L. U., Acosta, A. M., & Pineda, C. E. G. (2012). La matemática más allá de simples números y ecuaciones. Scientia et technica, 2(50), 112-117.

Martínez, V. (2001). Enseñanza de matemáticas en carreras químicas desde un enfoque aplicado y motivador. Números. Revista de didáctica de las matemáticas, 45, 43-52.

Presentación del modelo

Matemáticas introductorias para QFB

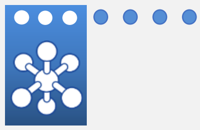
Es una nueva propuesta que responde al programa de estudio de matemáticas para los alumnos de nuevo ingreso a la carrera de QFB. Este libro permitirá subsanar y potenciar las capacidades algebraicas que serán sustento para el cálculo diferencial e integral, sin olvidar el perfil de aprendizaje: la química.

¿Qué hay en el libro de Matemáticas introductorias para QFB?

Existen iconos que indicaran los diferentes componentes del libro:

Indica la temática de cada capítulo, haciendo referencia a lo que aprenderás.

Se desarrolla un ejemplo.



Se presenta una definición teórica antes de abordar un tópico.

Quimática. Es la conexión que existe entre las matemáticas y la química.

Se presentan al final de cada tópico ejercicios para desarrollar destreza y comprensión de los contenidos, identificados:

Ejercicios de refuerzo No.

Al concluir cada capítulo se presenta la solución de los problemas impares de los ejercicios de refuerzo para corroborar lo realizado.

Autores

Pablo Flores Jacinto
Estudió en la Facultad de Química de la UNAM.

Catalina Cárdenas Ascención

Estudió en la Facultad de Química de la UNAM.

Enrique García Leal

Estudió en la Facultad de Química de la UNAM.

Adriana Hernández Reyes

Estudió en la FES Zaragoza de la UNAM.

Miguel Ángel Cuevas Hernández

Estudió en la UAM Azcapotzalco.

Revisores

Los autores desean expresar su agradecimiento a los revisores por su tiempo y dedicación en el enriquecimiento de ésta obra.

I.Q. Neftalí Cabrera Cruz.

Biol. Ariel Ivaan López García.

M. en D.I.I.E. Isabel Garduño Pozadas.

QFB Víctor Hugo Becerra López.

M. en C. Martha Erika Cejudo Torres Orozco.

Dr. René Osvaldo Vargas Aguilar.

M. en T. E. Catalina Armendáriz Beltrán.

Colaboradores

También se agradece a los colegas que gustosos se incorporaron a éste proyecto, agregando su experiencia en la sección de Quimática.

Dr. Javier Oswaldo Rodríguez Velásquez.

M. en C. Benjamín García Ramírez.

Dr. Isaac Senado Lara.

Dra. Leticia Cruz Antonio.

Dra. Silvia Armenta Jaime.

QFB. Mireya García Casas.

M. en F. Leticia Huerta Flores

Dr. José Ángel Rojas Zamorano.

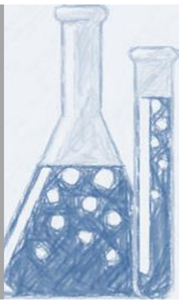
Dra. Eugenia Josefina Aldeco Pérez.

QFB Beatriz Arellano Pimentel.

Lic. José Luis Valdez Ayala.

Contenido

1



Conjunto de Números reales

LO QUE APRENDERÁS. . .

1.1 Sistema decimal de numeración.
1.2 Operaciones aritméticas.
1.3 Signos de agrupación.
  Reducción de términos semejantes.
  Agrupación de términos.
1.4 Operaciones que permiten comparar magnitudes.
1.5 Valor absoluto.
1.6 Reglas para conocer si un número es divisible entre 2, 3, 5, 7, 9 y 11.
1.7 Números primos (Criba de Eratóstenes).
1.8 Factorización de un número entero positivo en números primos.

1.1 Sistema decimal de numeración

Históricamente el hombre ha tenido la necesidad de contar objetos y medirlos (ganado y cultivo principalmente), lo que conllevó a utilizar sistemas finitos de símbolos llamados **números** para representar estas cantidades. Estos símbolos son utilizados en muchos campos de las ciencias y de las artes, tal es el caso de la música (como se ve en la caricatura) en donde Pitágoras desarrolló la escala musical.

El sistema de numeración es una **agrupación de símbolos**, y desde que se conformaron éstos con las distintas concepciones culturales, se tuvo un símbolo para la unidad, pero la cantidad de símbolos utilizados y la forma en que éstos se les asignaba un valor era diferente, esto se puede ver en la siguiente tabla:

Tabla 1.1

Bases que se han utilizado para los sistemas de números	
Base	Etnia
2	Pigmeos nómadas
3 y 4	Tribu sudamericana
5	Campesinos alemanes
10	Egipcios, Chinos, Hindús
12	Diversas culturas
20	Mayas
60	Babilonia

El sistema Egipcio utilizaba para representar a los números "ideogramas" o símbolos que inician desde la unidad hasta millones; este es el primer sistema desarrollado en base de diez dígitos, lo cual se dio tres milenios antes de cristo (Figura 1.1). **El sistema Babilónico** data de 1600 antes de cristo y su desarrollo fue en tablillas de arcillas con un estilo de cuñas, también su base es de diez símbolos, aunque para números grandes (a partir del número 60) la base utilizada es sexagesimal. **El sistema Griego**, está compuesto por de tres sistemas que fueron el Jónico; que usaba 24 letras griegas, una letra griega antigua y dos letras fenicias. Los números Romanos, que aún se utilizan, comprenden siete símbolos, utilizando el principio de adición, excepto cuando se tiene 4, 40, 400,… 9, 90, 900…, etc.

Figura 1.1 Símbolos de la numeración egipcia

Sistema de **numeración indoarábigo**, inició en el siglo III antes de cristo, el cual evoluciono por 900 años difundiéndose a los largo de medio oriente, norte de África y España y más tarde en Europa (Figura 1.2). El sistema de **numeración Maya**, los cuales florecieron entre 250 y 900 antes de cristo, inventaron y usaron el cero (Figura 1.3).

Figura 1.2 Símbolos de la numeración indoarábigo

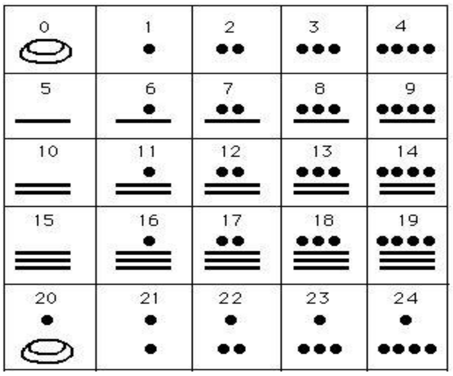


Figura 1.3 Símbolos de la numeración maya

Sistema de numeración posicional

El sistema utilizado en donde el valor de los símbolos (dígito), depende de la posición que guarde respecto al punto decimal. Todo sistema posicional depende del Conjunto de símbolos (dígitos) y de las operaciones básicas que son la adición y la multiplicación.

El sistema de numeración decimal consiste en 10 dígitos:

1, 2 , 3 , 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0

Un ejemplo de las operaciones del sistema decimal, se puede ver en las operaciones que realizaban en el tablero de cálculo en China en 480 a.c., utilizando palillos rectos del mismo tamaño que se colocaban sobre una superficie plana en donde los dígitos eran de dos tipos (Gallardo & Basurto, 2010), según se ilustra en la siguiente Figura 1.4.

Figura 1.4 Tablero de cálculo utilizado en China en 480 a.c.

Expresan	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Unidades, centenas y decenas de millar	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
Decenas y unidades de millar	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

La posición del punto decimal y los múltiplos de diez se pueden ver en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2

Sistema de numeración decimal

Orden	Unidades			Miles			Millones	
Posición	Unidades	Decenas	Centenas	Unidades de mil	Decenas de mil	Centenas de mil	Unidades de millón	Decenas de millón
Valor	1	10	100	1,000	10,000	100,000	1,000,000	10,000,000
Notación exponencial	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^6	10^7	10^8

Para establecer los nombres de los números que son muy grandes o muy pequeños se utilizan, los prefijos con sus respectivos símbolos (Tabla 1.3).

Tabla 1.3

Prefijos utilizados para el sistema de numeración decimal

	Prefijo	Símbolo	Notación exponencial	Equivalencia
Múltiplos	Yotta	Y	10^{24}	1,000,000,000,000,000,000, 000, 000
	Zetta	Z	10^{21}	1,000,000,000,000,000,000, 000
	Exa	E	10^{18}	1,000,000,000,000,000,000
	Peta	P	10^{15}	1,000,000,000,000,000
	Tera	T	10^{12}	1,000,000,000,000
	Giga	G	10^9	1,000,000,000
	Mega	M	10^6	1,000,000
	Kilo	k	10^3	1,000
	Hecto	h	10^2	100
	Deca	da	10^1	10
	Unidad		10^0	1
Submúltiplos	Deci	d	10^{-1}	0.1
	Centi	c	10^{-2}	0.01
	Mili	m	10^{-3}	0.001
	Micro	μ	10^{-6}	0.000 00 1
	Nano	η	10^{-9}	0.000 000 001
	Pico	p	10^{-12}	0.000 000 000 001
	Femto	f	10^{-15}	0.000 000 000 000 001
	Atto	a	10^{-18}	0.000 000 000 000 000 001
	Zepto	z	10^{-21}	0.000 000 000 000 000 000 001
	Docto	y	10^{-24}	0.000 000 000 000 000 000 000 001

Cuando se tiene un valor cuyas cifras corresponde a un número muy grande o muy pequeño se procura escribir éste con el menor número posible, por lo que se recurre al uso de los prefijos.

Por ejemplo un volumen de **0.000035 L**, es mejor expresarlo como **35 μL** y se lee como treinta y cinco microlitros, siendo la equivalencia exacta del primer volumen.

Ejemplo 1

Exprese los siguientes números, con los prefijos que le corresponda e indique como se lee.

a) 60 230 000 000 000 000 000 000 gramos.
b) 0.000 000 000 13 litros.
c) 0.012 mol de Cloro.
d) 0.000 054 metros.

Solución

a) 60 230 000 000 000 000 000 000 gramos, se expresa como **60.23 Z gr** y se lee como **60.23 zetagramos** (número conocido como el de Avogadro).

b) 0.000 000 000 13 litros, se expresan como 130 pL, que se lee como **130 picolitros**.

c) 0.000 12 mol de Cloro, se expresan como 12 mmol, que se lee como **12 milimol de cloro**.

d) 0.000 054 metros, se expresan como 54 μm, que se lee como **54 micrómetros**.

Ejercicios de refuerzo 1.1

Exprese las siguientes cifras utilizando los prefijos que apliquen.

1. $345\,000\,000\,000\,000\ gramos$
2. $0.000\,12\ mol\ de\ I_2$
3. $0.000\,001\,5\ Litros\ de\ agua$
4. $18\,000\ mol\ de\ H_2S0_4$
5. $56\,100\,000\,000\ metros$
6. $0.00000000145\ \ gramos$
7. $5\,090\,000\,000\,000\ iones\ de\ cloro$
8. $0.000\,013\ lb\ de\ Hg$
9. $0.000\,000\,002\,9\ g\ de\ CuSO_4$
10. $827\,000\,000\,000\ átomos\ de\ H_2$

1.2 Operaciones aritméticas

Las operaciones aritméticas son las conocidas como básicas en los números, en éstas se encuentran la suma, resta, producto y división.

Recordemos que para la **suma y resta** en los fraccionarios, se debe homologar el denominador (Mínimo Común Denominador) y realizar la suma de los numeradores.

Para el producto recuerde que se multiplican los numeradores y los denominadores y finalmente para los **cocientes** se realiza producto cruzado.

Ejemplo 2

Realice las operaciones que se indican de las siguientes cantidades:

$a)\ \frac{9}{5}+\frac{3}{2}$ $\qquad b)\ 3\frac{1}{3}+\frac{3}{4}$ $\qquad c)\ \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{9}{2}\right)$ $\qquad d)\ 2\frac{1}{5}\div\frac{6}{7}$

Solución

a) Para estas fracciones el mínimo común denominador es 10.

$$\frac{9}{5}+\frac{3}{2}=\frac{18+15}{10}=\frac{33}{10}=\mathbf{3\frac{3}{10}}$$

b) Para este inciso el mínimo común denominador es 12.

$$3\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{40+9}{12}=\frac{49}{12}=\mathbf{4\frac{1}{12}}$$

c) Se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador.

$$\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{45}{12}=\frac{15\cdot 3}{4\cdot 3}=\mathbf{\frac{15}{4}}$$

d) Para este caso se realiza producto cruzado.

$$2\frac{1}{5}\div\frac{6}{7}=\frac{11}{5}\div\frac{6}{7}=\frac{11\cdot 7}{6\cdot 5}=\mathbf{\frac{77}{30}}$$

Ejercicios de refuerzo 1.2

Realice las operaciones indicadas en cada ejercicio.

11. $\frac{12}{5}+\frac{7}{3}$
12. $5\frac{4}{3}-\frac{1}{4}$
13. $\left(\frac{1}{7}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$
14. $\frac{2}{9}\div\frac{11}{3}$
15. $\frac{17}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$
16. $\frac{6}{7}-1\left(\frac{3}{2}\right)$
17. $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$
18. $1\frac{2}{7}+3\frac{6}{5}-2\frac{1}{3}$
19. $4\frac{7}{3}\div 2\frac{1}{4}$
20. $-3\frac{2}{3}-1\frac{4}{3}-2\frac{1}{2}$

1.3 Signos de agrupación

Los signos de agrupación utilizados en operaciones aritméticas son:

Paréntesis ( )

Corchetes [ ]

Llaves { }

Entendiendo que la operación contenida entre alguno de estos signos debe resolverse de acuerdo con el siguiente orden: primero lo contenido entre paréntesis, seguido del corchete y por último, lo que está entre las llaves. Esto es considerando la regla de los signos; es decir, si precede un signo positivo a un signo de agrupación, los signos dentro de éste se mantienen; mientras que si el signo que precede al signo de agrupación es negativo, los signos de cada miembro dentro de la agrupación, cambian.

Por ejemplo si tenemos $a+3b+(a-b-c)$, se aplica la regla de los signos para descartar el paréntesis, es decir:

$$a+3b+a-b-c=\boldsymbol{2a+2b-c}$$

Pero si tenemos un signo negativo que precede a un paréntesis entonces será:

$$a+3b-(a-b-c)$$

Lo cual se resuelve como:

$$a+3b-a+b+c=\boldsymbol{4b+c}$$

Para realizar operaciones con **varios signos de agrupación**, debemos empezar por los paréntesis, seguidos de los corchetes y finalmente las llaves, por ejemplo tenemos:

$$2a-3b-\{4a+[5a-3b-(2c+3b)]\}$$

Primero se comienza por el paréntesis, se cambian los signos para tener:

$$2a - 3b - \{4a + [5a - 3b - 2c - 3b]\}$$

Ahora los corchetes, como es positivo se quedan igual:

$$2a - 3b - \{4a + 5a - 3b - 2c - 3b\}$$

Finalmente las llaves:

$$2a - 3b - 4a - 5a + 3b + 2c + 3b = \boldsymbol{-7a + 3b + 2c}$$

Ahora un ejercicio en el que se tiene que operar un signo acompañado de un valor numérico en los signos de agrupación, con el uso de fracciones:

Ejemplo 3

Realiza las operaciones que se indican de las siguientes cantidades:

$$4a - 2b - \frac{1}{3}\left\{a + \frac{1}{2}\left[3a - 4b - \frac{1}{4}(c + 2b)\right]\right\}$$

Solución

Primero se multiplica un -1/4 por lo que está dentro del paréntesis:

$$4a - 2b - \frac{1}{3}\left\{a + \frac{1}{2}\left[3a - 4b - \frac{1}{4}c - \frac{2}{4}b\right]\right\}$$

Se realiza la operación dentro de los corchetes:

$$4a - 2b - \frac{1}{3}\left\{a + \frac{1}{2}\left[3a - \frac{9}{2}b - \frac{1}{4}c\right]\right\}$$

Ahora se multiplica 1/2 por el resultado encontrado para quitar los corchetes:

$$4a - 2b - \frac{1}{3}\left\{a + \frac{3}{2}a - \frac{9}{4}b - \frac{1}{8}c\right\}$$

Se realiza la suma de los factores comunes:

$$4a - 2b - \frac{1}{3}\left\{\frac{5}{2}a - \frac{9}{4}b - \frac{1}{8}c\right\}$$

De la misma forma se multiplica 1/3 por lo que está dentro de las llaves.

$$4a - 2b - \frac{5}{6}a + \frac{9}{12}b + \frac{1}{24}c$$

Finalmente se realiza la operación con los términos comunes quedando:

$$4a - 2b - \frac{1}{3}\left\{a + \frac{1}{2}\left[3a - 4b - \frac{1}{4}(c + 2b)\right]\right\} = \boldsymbol{\frac{19}{6}a - \frac{15}{12}b + \frac{1}{24}c}$$

Ejercicios de refuerzo 1.3

Realice las operaciones indicadas en cada ejercicio, respetando los signos de agrupación.

21. $4\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{5}$

22. $3\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right)-2\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)$

23. $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}a-3\right)-\frac{3}{4}\left(2a-\frac{7}{2}\right)$

24. $2b+\left[3a-\frac{1}{2}\left(2a+\frac{3}{4}b\right)\right]$

25. $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{6}\right)\right]-\frac{1}{3}\left[1-6\left(2x-\frac{2}{3}\right)\right]$

26. $\left[2y+\frac{1}{2}\left(3x-\frac{1}{3y}\right)\right]-\left[\frac{3}{5}x-3y\right]$

27. $-\frac{1}{3}\left[\frac{4}{3}a-\frac{5}{2}\left(4a-\frac{2}{7}b\right)\right]+\frac{1}{9}a$

28. $4a-\frac{1}{6}\left[\left(\frac{4}{5}a+1\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{7}{6}a+3\right)\right]$

29. $3\left\{\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}\left[4a-2\left(\frac{3}{4}b-\frac{1}{3}\right)\right]\right\}-\frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}a-6\right]$

30. $\left\{\frac{1}{2}\left[2a-\frac{3}{4}(5-a)\right]\right\}-\frac{1}{2}\left\{6-2\left[4a-\frac{2}{3}(4-3a)\right]\right\}$

1.4 Operaciones que permiten comparar magnitudes

Existe muchas operaciones que se realizan de suma, resta, producto y división con la peculiaridad que estas cantidades tienen un número distinto de dígitos, por ejemplo la suma de 0.000013 con 0.00000016 es más sencillo hacerla con notación científica de base 10.

Definición

Para la **adición y sustracción** de magnitudes distintas, se expresan las cantidades con el mismo exponente de una base 10 y se realiza la operación.

Recuerde que para expresar cifras con la misma potencia se debe tomar en cuenta lo siguiente:

Aumentar la potencia: se recorre el punto decimal hacia la izquierda tantas veces se incremente.

Disminuir la potencia: se recorre el punto decimal hacia la derecha tantas veces se disminuya.

Por ejemplo se tiene el número 6.5×10^{-4} y se necesita expresarlo con una potencia de -3, por lo que recorremos el punto decimal una posición hacía la izquierda, teniendo:

$$6.5 \times 10^{-4} = 0.65 \times 10^{-3}$$

Ahora el número 2.85×10^{3}se requiere escribirlo con una potencia 2, por lo que se traslada el punto decimal, una posición hacia la derecha.

$$2.85 \times 10^{3} = 28.5 \times 10^{2}$$

Ejemplo 4

Realice las operaciones indicadas:

$a)$ $(7.49 \times 10^{4}) + (2.5 \times 10^{3})$

$b)$ $(2.23 \times 10^{-2}) - (4 \times 10^{-3})$

Solución

Para el inciso a) se tiene:

Primero se selecciona la potencia de 4 para expresar ambas cantidades.

$$(7.49 \times 10^{4}) + (0.25 \times 10^{4})$$

Ahora se suman las cantidades:

$$(7.49 + 0.25) \times 10^{4}$$

$$\mathbf{7.74 \times 10^{4}}$$

Para el inciso b) se tiene:

Se expresan las cantidades con la potencia de -2.

$$(2.23 \times 10^{-2}) - (0.4 \times 10^{-2})$$

Ahora se suman las cantidades:

$$(2.23 - 0.4) \times 10^{-2}$$

$$\mathbf{1.83 \times 10^{-2}}$$

En el caso del producto y de la división no es necesario homologar las potencias de base diez, sólo seguirá las leyes de las potencias.

Definición

Para el **producto** de magnitudes distintas los exponentes se suman y en la **división**, los exponentes se restan.

Ejemplo 5

Realice las operaciones indicadas:

$a)$ $(4.6 \times 10^{2})(3.1 \times 10^{3})$

$b)$ $(7.9 \times 10^{-2}) \div (4 \times 10^{-4})$

Solución

Para el inciso a) se tiene:

$$(4.6 \times 10^{2})(3.1 \times 10^{3}) = (4.6)(3.1) \times 10^{2+3}$$

$$14.26 \times 10^{5}$$

Se ajusta el punto decimal.

$$\mathbf{1.426 \times 10^{6}}$$

Para el inciso b) se tiene:

Se expresan las cantidades con la potencia de -2.

$$(7.9 \times 10^{-2}) \div (4 \times 10^{-4}) = (7.9 \div 4) \times 10^{-2-(-4)}$$

$$\mathbf{1.975 \times 10^{2}}$$

Para estimar el **orden de magnitud** tanto de valores muy grandes como de muy pequeños, no es crucial una respuesta exacta sino de un valor “aproximado”. Por ejemplo si se desea conocer el área de una circunferencia de radio 9.5 cm, se puede decir que el radio es 10 y π es 3, por lo tanto:

$$A = \pi r^2$$

$$A \approx 3(10\ cm)^2 = 300\ cm^2$$

En estas estimaciones no se toman en cuenta las cifras significativas. La respuesta no es exacta, pero es una buena aproximación con la que se puede comparar de manera rápida una magnitud. La notación científica de base diez es muy conveniente para hacer operaciones y estimaciones, en lo que se conoce como **orden de magnitud**. Por ejemplo el radio de la tierra es de 6.4×10^6 m, esto es de $\mathbf{10^6}$ **m.**

Definición

El **orden de magnitud** basa sus operaciones en expresar una cantidad de potencia 10 más cercana al valor real.

Por ejemplo en la Tabla 1.4 se presenta el orden de magnitud de algunos cuerpos o distancias.

Tabla 1.4

Ejemplos de orden de magnitud

Sistema	Orden de magnitud (m)
Núcleo del átomo	10^{-15}
Átomo	10^{-10}
Virus	$10^{-8}\ a\ 10^{-7}$
Bacteria	$10^{-6}\ a\ 10^{-5}$
Ácaro	10^{-2}
Altura del Everest	10^{3}
Distancia Tierra-Sol	10^{11}
Distancia Sol-α Centauri	10^{16}

Ejemplo 6

Estime la cantidad de átomos que existen en 1 cm^3 de un sólido. Dato: el diámetro aproximado de un átomo es de $10^{-10}\ m$.

Solución

$$Número\ de\ átomos = \frac{Volumen\ sólido}{Volumen\ de\ un\ átomo}$$

$$Número\ de\ átomos = \frac{1\ cm^3}{3/4\pi\ (10^{-10}\ cm)^3}$$

$$\boldsymbol{Número\ de\ átomos \approx 10^{30}}$$

Las aplicaciones de las órdenes de magnitud son variadas y se aplican en el estudio de las ondas sonoras, almacenamiento digital, ondas electromagnéticas, rango audible etc.

Medidas de almacenamiento digital

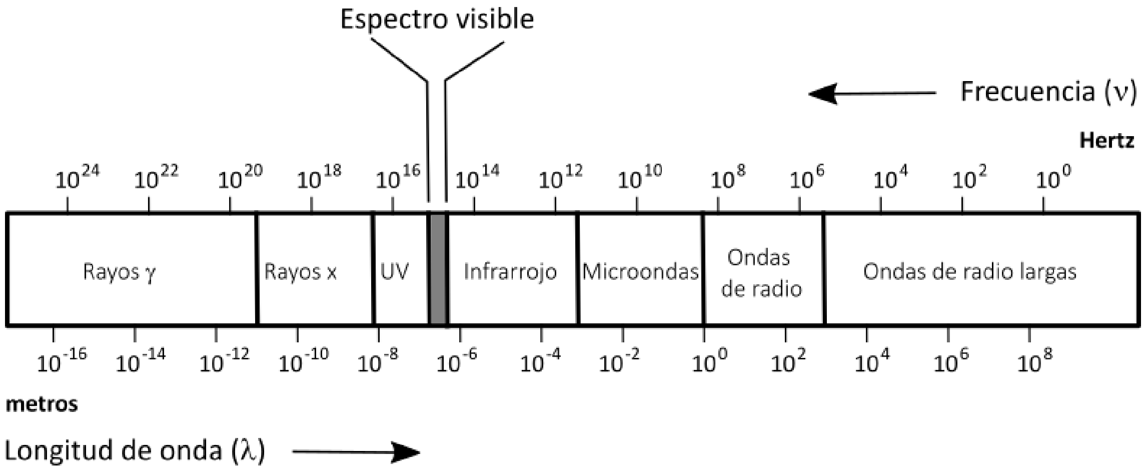
El almacenamiento digital se mide en *bits* (sólo toma dos valores, 0 y 1), para un grupo de 8 bits se constituye un *byte* éste a su vez toma 2^8 valores (es decir 256). Un ejemplo de sucesión se puede ver así:

1 *Megabyte* es 10^6 bytes y almacena hasta $2^{8\,000\,000}$ números diferentes

Medidas de ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas son el soporte de las telecomunicaciones en el planeta, gracias a ellas el desarrollo tecnológico ha llevado a que la comunicación sea inalámbrica. Las ondas electromagnéticas se pueden ordenar mediante un espectro (Figura 1.5), que utiliza para describirlas; la longitud de onda, que van desde muy pequeñas rayos Gamma (γ) hasta muy grandes ondas de radio largas, correspondiendo las longitudes de onda a una orden de magnitud.

Figura 1.5 Espectro electromagnético



Ejemplo 7

Estime la cantidad de Hercios de la frecuencia de la luz visible (λ=570nm). Recuerda que $f = c/\lambda$.

Solución

Se utiliza la definición matemática de frecuencia (donde c es la velocidad de la luz $3 \times 10^8\ m/s$):

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

$$f = \frac{3 \times 10^8\ m/s}{570 \times 10^{-9}\ m} = 5.23 \times 10^{14} s^{-1}$$

Esto se representa como

$$5.23 \times 10^{14} Hz$$

Utilizando los prefijos será:

$$\mathbf{523\ THz}$$

Ejercicios de refuerzo 1.4

Realice las operaciones utilizando una base 10 común a las cantidades.

31. $(3.34 \times 10^3) + (1.20 \times 10^4)$
32. $(4.7 \times 10^5) - (6.6 \times 10^4)$
33. $(9.37 \times 10^7) + (9.9 \times 10^5)$
36. $(6.49 \times 10^3) + (8.01 \times 10^2)$
37. $(5.6 \times 10^9) - (1.3 \times 10^7)$
38. $(3.37 \times 10^{-5}) - (6.61 \times 10^{-3})$

34. $(3.75 \times 10^{-3}) - (8.61 \times 10^{-4})$
35. $(4.23 \times 10^{-5}) + (9.47 \times 10^{-6})$
39. $(4.31 \times 10^{-9}) + (5.58 \times 10^{-11})$
40. $(5.99 \times 10^{13}) + (2.79 \times 10^{14})$

Realice las operaciones de producto o cociente indicadas.

41. $(4.2 \times 10^{3})(3.9 \times 10^{5})$
42. $(6.8 \times 10^{2})(4.23 \times 10^{-1})$
43. $(9.1 \times 10^{-3})(1.2 \times 10^{-2})$
44. $(7.3 \times 10^{2})(8.5 \times 10^{-4})$
45. $(3.2 \times 10^{-4})(1.9 \times 10^{-2})$
46. $(6.3 \times 10^{4}) \div (2.7 \times 10^{5})$
47. $(1.1 \times 10^{-4}) \div (3.5 \times 10^{8})$
48. $(6.3 \times 10^{4}) \div [(2.7 \times 10^{5}) + (4.1 \times 10^{3})]$
49. $(4.7 \times 10^{3})[(2.1 \times 10^{5}) - (3.2 \times 10^{3})]$
50. $\dfrac{(9.2 \times 10^{3}) \div (3.1 \times 10^{4})}{(4.7 \times 10^{3})(5.2 \times 10^{-6})} + (8.01 \times 10^{-2})$

Estime el orden de la magnitud de la operación que se pide.

51. La cantidad de átomos que existen en un gramo de ácido nítrico.
52. La cantidad de iones de un kilogramo de cloruro de sodio.
53. La cantidad de alfileres que se necesitan apilar para cubrir la distancia de la tierra a la luna (la distancia promedio entre la tierra y la luna es de $3.8 \times 10^{5}\ km$).
54. El tiempo que le toma a la luz viajar desde el sol hacia el planeta Júpiter (considere que la velocidad de la luz es 3×10^{8}).
55. ¿Cuál es el orden de magnitud de la estrella más cercana al Sol en metros?

Calcule la cantidad de Hercios para las siguientes radiaciones electromagnéticas.

56. Para los rayos gamma que llegan hasta 10 pm de longitud.
57. Para el infrarrojo cuya longitud de onda es 1mm.
58. Para la radiación de microondas con una longitud de onda de 20 cm.

1.5 Valor absoluto

El valor absoluto es una magnitud, que se le conoce como **módulo**, su valor numérico va más allá de su signo; es decir, su valor numérico está exento del signo, positivo o negativo.

Definición

El valor absoluto se escribe entre dos barras verticales $|A|$ y su valor carece de signo.

Por ejemplo:

$$|x| = 2$$

Puede significar que

$$x = -2 \qquad \text{ó} \qquad x = 2$$

Propiedades de valor absoluto

Las propiedades de valor absoluto poseen una serie de propiedades con respecto a la suma, el producto, el cociente y las conocidas como desigualdad triangular (se le dice así debido a que la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es siempre menor a la longitud del otro lado).

1. $|ab| = |a|\,|b|$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
3. $|a+b| \leq |a| + |b|$
4. $|a-b| \geq |a| - |b|$

Desigualdades con valor absoluto

En muchas ocasiones se necesita indicar algún valor numérico comprendido en un intervalo utilizando el valor absoluto, para tal caso se tienen los siguientes cuestiones:

1. $|A| \leq a$ Significa que A cumple con: $-a \leq A \leq a$
2. $|A| \geq a$ Significa que A cumple con: $A \leq -a$ ó $A \geq a$
3. $|A| < a$ Significa que A cumple con: $-a < A < a$
4. $|A| > a$ Significa que A cumple con: $-a > A$ ó $A > a$

Ejemplo 8

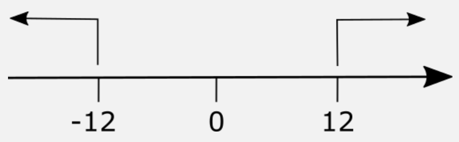
Encuentre el conjunto que da solución para:

$a)\ \ |x| \geq 12$ $\qquad$ $b)\ \ |x| \leq -3$

Solución a)

Observe que aplica el segundo caso, por lo que el intervalo que satisface es:

$$x \leq -12 \qquad \text{ó} \qquad x \geq 12$$



El conjunto solución es:

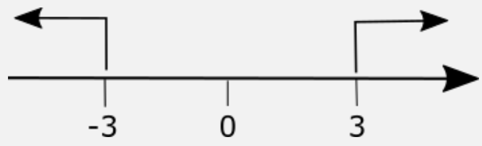
$$(-\infty, \mathbf{-12}] \cup [\mathbf{12}, \infty)$$

Solución b)

Ahora se utiliza el primer caso, por lo que el intervalo que satisface es:

$$-(-3) \leq x \leq -3$$

$$3 \leq x \leq -3$$



El conjunto solución es:

$$(-\infty, \mathbf{-3}] \cup [\mathbf{3}, \infty)$$

Desigualdades con valor absoluto compuesto

Cuando existe una operación algebraica dentro de las barras verticales se tiene un valor absoluto compuesto, la manera de resolver dichas desigualdades se hace primero identificando los casos y después se realizan las operaciones algebraicas necesarias.

Ejemplo 9

Encuentre el conjunto que da solución para $|2x + 8| < 12$

Solución

El caso que aplica es el número tres, por lo que el intervalo que satisface es:

$$-12 < (2x + 8) < 12$$

Se agrupan los términos constantes pasando a la derecha y al izquierda el -8.

$$-12 - 8 < 2x < 12 - 8$$

$$-20 < 2x < 4$$

Ahora se transpone el número dos.

$$\frac{-20}{2} < x < \frac{4}{2}$$

$$-10 < x < 2$$

El conjunto solución es:

$$(\mathbf{-10, 2})$$

Ejemplo 10

Encuentre el conjunto que da solución para $|4 - 2x| < 16$

Solución

Se observa que el valor de la incógnita es negativo por lo que se multiplica por -1 y se invierte el signo de desigualdad.

$$|2x - 4| > -16$$

El caso que aplica es el número cuatro, por lo que el intervalo que satisface es:

$$-(-16) > 2x - 4 \qquad \text{ó} \qquad -16 > 2x - 4$$

$$16 > 2x - 4 \qquad \text{ó} \qquad -16 > 2x - 4$$

Se suma en ambas desigualdades el 4.

$$16 + 4 > 2x \qquad \text{ó} \qquad -16 + 4 > 2x$$

$$20 > 2x \qquad \text{ó} \qquad -12 > 2x$$

Se reordena.

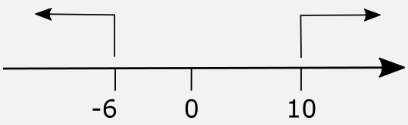
$$-12 > 2x \qquad \text{ó} \qquad 20 > 2x$$

Se transpone el 2.

$$\frac{-12}{2} > x \qquad \text{ó} \qquad \frac{20}{2} > x$$

$$-6 > x \qquad \text{ó} \qquad 10 > x$$

El conjunto solución es:



$$(-\infty, -\mathbf{6}) \cup (\mathbf{10}, \infty)$$

Ejercicios de refuerzo 1.5

Obtenga el conjunto solución para las siguientes desigualdades:

59. $|x| < 3$

60. $|x| > 1$

61 $|y| \leq -2$

62. $|a| \geq \frac{1}{2}$

63. $|x| < -2$

64. $|x| > 4$

65. $|x + 5| > 3$

66. $|x - 2| < 1$

67. $|x + 3| \leq 6$

68. $\left|\frac{2 - x}{3}\right| \geq 5$

69. $\left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{4}$

70. $\left|\frac{\frac{5}{2} - x}{7}\right| \leq \frac{1}{3}$

1.6 Reglas para conocer si un número es divisible entre 2, 3, 5, 7, 9 y 11

Las reglas de divisibilidad son criterios que sirven para dividir un número entre otro y se tenga como resultado un residuo de cero. El uso de los criterios de divisibilidad son para:

a) Encontrar los divisores de un número.
b) Descomponer un número en sus factores primos.
c) Simplificar fracciones.

Criterio del número 2

Todo número es divisible entre 2, si el número termina en 2, 4, 6, 8, 0.

Criterio del número 3

Todo número es divisible entre 3, si la suma de los dígitos del número es 3 o múltiplo de 3.

Criterio del número 5

Todo número es divisible entre 5, si el número termina en 5 ó 0.

Criterio del número 6

Todo número es divisible entre 6, si el número es divisible entre 2 y 3 a la vez.

Criterio del número 7

Todo número es divisible entre 7, si el valor absoluto de la diferencia del doble de la última cifra y la cantidad formados por los dígitos restantes son 0, 7 ó múltiplo de 7.

Criterio del número 8

Todo número es divisible entre 8, si los 3 últimos dígitos del número son múltiplos de 8 ó son cero.

Criterio del número 9

Todo número es divisible entre 9, si la suma de los dígitos del número es 9 o múltiplo de 9.

Criterio del número 10

Todo número es divisible entre 10, si el número termina en 0.

Criterio del número 11

Todo número es divisible entre 11, si el valor absoluto de la diferencia de la suma de los dígitos que ocupan la posición non con la suma de los dígitos que ocupan posición par es 0, 11 o múltiplo de 11.

Ejemplo 11

Utilice los criterios de divisibilidad para el número 792.

Solución

Se dibuja una tabla y en ella se coloca el criterio que aplica y el que no lo hace.

Criterio	Regla	Aplica
2	El número termina en par.	👍
3	La suma de los digito 7+9+2=18, el cual es múltiplo de 3.	👍
4	Los dos últimos números se pueden dividir entre cuatro 92/4=23.	👍
5	El número no termina en 5 ni en cero.	✖
6	Si es divisible entre 2 y 3 al mismo tiempo	👍
7	Se hace la operación $\lvert 2(2) - 79 \rvert = 75$, no es múltiplo de 7.	✖
8	Si es divisible entre 4 y dos al mismo tiempo.	👍
9	Como es divisible entre 3, también entre 9.	👍
10	No termina en cero.	✖
11	Se hace la operación $\lvert (7+2) - 9 \rvert = 0$.	👍

Por lo tanto el 792 es divisible entre 2, 3, 4, 6, 8, 9 y 11.

Ejemplo 12

Simplifique las siguientes fracciones utilizando los criterios de divisibilidad.

$a)\ \dfrac{345}{222} \qquad b)\ \dfrac{879}{433}$

Solución

Para el inciso a) se dibuja una tabla y en ella se coloca el criterio que aplica para el numerador y denominador.

Números	Criterios		Simplificación
	2	3	
345	❌	👍	115
222	👍	👍	74

Se simplifica dividiendo tanto el numerador como el denominador entre 3

$$\frac{345}{222}=\frac{\mathbf{115}}{\mathbf{74}}$$

Ahora para el inciso b)

Números	Criterio	Simp.	Criterio	Simp.	Criterio	Simp.
	2		2		3	
876	👍	438	👍	219	👍	73
432	👍	216	👍	108	👍	36

La fracción simplificada es:

$$\frac{876}{432}=\frac{\mathbf{73}}{\mathbf{36}}$$

Ejercicios de refuerzo 1.6

Obtenga el conjunto solución para las siguientes desigualdades:

71. 5040

72. 692

73. 1215

74. 3614

75. $17\,898$

76. 29678

77. $\frac{45}{120}$

78. $\frac{325}{422}$

79. $\frac{1215}{890}$

80. $\frac{526}{327}$

81. $\frac{276}{1320}$

82. $\frac{8924}{16782}$

1.7 Números primos (Criba de Eratóstenes)

La Criba de Eratóstenes es un método generado en la antigua Grecia, éste consiste en filtrar los números compuestos, para solo quedarse con los que **son divisibles entre ellos mismos y el uno**.

El procedimiento de cribado se enlista a continuación.

a. Se elimina el 1.
b. Es 2 es el primer número primo, ahora se excluyen los múltiplos de 2.
c. El 3 es el segundo número primo, se eliminan los múltiplos de 3.
d. El 5 es el tercer número primo, se eliminan los múltiplos de 5.
e. El siguiente número primo es el 7, se suprimen los múltiplos de 7.
f. Se continúa el procedimiento.

Los números cribados (en color blanco) se pueden observar en la siguiente tabla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Los primos encontrados en una criba de 100 números son: **2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97.**

El único primo par es el 2 y los primos inversos son cuatro parejas:

$$\mathbf{13} \Longrightarrow \mathbf{31}$$

$$\mathbf{17} \Longrightarrow \mathbf{71}$$

$$\mathbf{37} \Longrightarrow \mathbf{73}$$

$$\mathbf{79} \Longrightarrow \mathbf{97}$$

¿PARA QUÉ NOS SIRVEN LOS NÚMEROS PRIMOS?

La seguridad en la comunicación en nuestros días es de suma importancia, la protección de datos considerados como sensibles como pueden ser contraseñas, firma electrónicas, datos personales entre otros, se "encriptan" a tal grado que ni el propio administrador tenga conocimiento y acceso a la información, hoy en día la protección del correo electrónico usa números primos de cientos de cifras.

Una forma convencional para proteger la información es utilizando los números primos, por ejemplo en 2016 en la Facultad de Ingeniería de la UNAM se encontró un número primo de un millón mil 953 dígitos, este titánico número figura dentro de los 200 más grandes conocidos.

La factorización de los números primos gigantes del orden de 10^{100} es tan difícil que se otorgaba hasta 2005 un premio de 100,000 dólares, en la práctica es casi imposible recuperar su factores. Hasta ahora el número primo más grande fue encontrado en 2017 por el profesor Curtis Cooper de la Universidad Central de Missouri, la cifra es $2^{74207281-1}$; es decir, el dos multiplicado por sí mismo 74 207 281 millones de veces menos uno, el resultado es un número que tiene más de 22 millones de dígitos.

En versiones anteriores de equipos de cómputo de Pentium I, II y Pro se ponían a prueba mediante la factorización de números primos, actualmente esto se hace en computadoras cuánticas.

1.8 Factorización de un entero positivo en números primos

El objetivo es escribir o representar cualquier número como la multiplicación de números primos, este procedimiento es importante para la criptografía.

Ejemplo 13

Factorizar 12120 utilizando los números primos.

Solución

Se inicia con el primer número primo, ya que por criterios de divisibilidad se puede hacer la operación y se continúa con los siguientes.

$$12\,120 \div 2 = 6060$$

$$6\,060 \div 2 = 3030$$

$$3\,030 \div 2 = 1515$$

$$1\,515 \div 3 = 505$$

$$505 \div 5 = 101$$

El número se puede representar como:

$$12\,120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 101$$

Ahora se expresan como potencia los números que se repiten.

$$\mathbf{12\,120 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 101}$$

Ejercicios de refuerzo 1.7

Factorice las siguientes cifras, utilizando los números primos:

83. 48	85. 126	87. 1 248	89. 40 4250
84. 1 520	86. 840	88. 5 445	90. 3 3075

Resolviendo enigmas biomédicos con la teoría de conjuntos: de lo molecular a la clínica

Escrito por: Javier Oswaldo Rodríguez Velásquez
Médico y cirujano
Director Grupo Insight, Asociación Colombiana de Neurocirugía Bogotá, Colombia
grupoinsight2025@yahoo.es

Como en todas las ciencias, existen problemas fundamentales en medicina que han sido observados, formulados y resueltos por medio de numerosos abordajes a lo largo de la historia. Sin embargo, así como se han obtenido nuevos avances tecnológicos, epidemiológicos y clínicos en las últimas décadas, también se han ido generando nuevos interrogantes de interés biomédico sin una respuesta clara y definitiva. El abordaje multidimensional de la física teórica y la matemática a los problemas de todas las ciencias ha permitido que algunos de estos problemas puedan ser resueltos bajo una perspectiva acausal, en la que no se busca explicar las relaciones de causa-efecto de los problemas, sino que se diluciden las relaciones entre algunas variables que permitan caracterizar los fenómenos.

Por ejemplo, en la biología molecular, uno de los más grandes interrogantes formulados hasta hoy, se relaciona con la unión de algunas de las proteínas de agentes patógenos como virus y los parásitos por el antígeno leucocitario humano (HLA), una molécula encargada de presentar estas proteínas para que se generen respuestas inmunes en su contra. Por medio de la teoría de conjuntos, se desarrolló una metodología general en la que se definieron 8 reglas basadas en observaciones experimentales y teóricas que se asociaron a 6 conjuntos de péptidos que incorporan algunas de las operaciones de la teoría de conjuntos como la intersección y unión para determinar aquellas secuencias de péptidos que presentan unión y no unión al HLA clase II. La primera aplicación de este método general permitió caracterizar los péptidos de unión y no unión con una precisión del 95.7% y 100% respectivamente (1). De manera similar, esta teoría fue usada para caracterizar los péptidos de alta unión al receptor del glóbulo rojo al estudiar 79 secuencias de la proteína MSP-1 de *P. falciparum*, mediante la definición de 5 reglas (2).

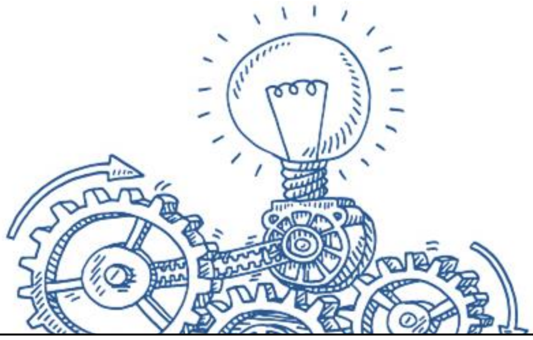
En el contexto de la infección por VIH, se ha observado que conforme avanza la enfermedad, progresivamente disminuyen los linfocitos $CD4^{+}$, fundamentales para el sistema de defensa humano. Sin embargo, la medición de este grupo celular se realiza mediante la citometría de flujo, un examen costoso y especializado que no está disponible en los lugares con mayor carga de la enfermedad. Por esta razón, se desarrolló una metodología por medio de la teoría de conjuntos que permite predecir los recuentos de $CD4^{+}$ con base los recuentos de leucocitos y linfocitos del hemograma, un examen mucho más asequible. Así, se desarrollaron triplas de valores de estas células con las cuales cuatro conjuntos y algunas relaciones matemáticas de conjuntos se establecieron entre ellas en rangos de leucocitos, encontrando que los recuentos menores a 570 $CD4^+/\mu L$ pueden predecirse con una efectividad de hasta el 100% con comprobaciones experimentales hasta con 800 pacientes (3-9).

Finalmente, se ha evidenciado que algunas variables comúnmente evaluadas en la Unidad de Cuidados Intensivos en los gases arteriales, como la presión arterial de dióxido de carbono o la saturación venosa de oxígeno, pueden ser analizadas como conjuntos sobre los cuales se establecen uniones e intersecciones para predecir mortalidad independiente de la enfermedad, con una precisión del 100% en términos de sensibilidad y especificidad (10).

Estas aplicaciones son tan solo algunas de las tantas de esta teoría para resolver los enigmas de las ciencias biomédicas.

Referencias

1. Rodríguez J. Teoría de conjuntos aplicada a la caracterización matemática de unión de péptidos al HLA clase II. Rev. Cienc. Salud.2008;6:9-15
2. Rodríguez J. Diferenciación matemática de péptidos de alta unión de MSP-1 mediante la aplicación de la teoría de conjuntos. Inmunología. 2008;27:63-68.
3. Rodríguez J, Prieto S, Bernal P, Pérez C, Correa C, Vitery S, et al. TEORÍA DE CONJUNTOS APLICADA A POBLACIONES DE LEUCOCITOS, LINFOCITOS Y CD4 DE PACIENTES CON VIH. Predicción de linfocitos T CD4, de aplicación clínica. Revista Med. 2011;19:148-156.
4. Rodríguez J, Prieto S, Bernal P, Pérez C, Correa C, Álvarez L, et al. Predicción de la concentración de linfocitos T CD4 en sangre periférica con base en la teoría de la probabilidad. Aplicación clínica en poblaciones de leucocitos, linfocitos y CD4 de pacientes con VIH. Infectio. 2012;16:15-22.
5. Rodríguez J, Prieto S, Correa C, Forero MF, Pérez C, Soracipa Y, et al. Teoría de conjuntos aplicada al recuento de linfocitos y leucocitos: predicción de linfocitos T CD4 de pacientes con virus de la inmunodeficiencia humana/sida. Inmunología 2013;32:50-56.
6. Rodríguez JO, Prieto SE, Correa C, Pérez CE, Mora JT, Bravo J, et al. Predictions of CD4 lymphocytes' count in HIV patients from complete blood count. BMC Medica Physics. 2013;13:3.
7. Rodríguez J, Prieto S, Melo M, Domínguez D, Correa C, Soracipa Y, et al. Predicción del número de linfocitos T CD4 en sangre periférica a partir de teoría de conjuntos y probabilidad en pacientes con VIH/SIDA. Inmunología. 2014;33:113-120.
8. Rodríguez J, Prieto S, Melo M, Pérez C, Domínguez D, Bravo J, Olarte N, et al. Predicción de la concentración de linfocitos T CD4, con base en la teoría de conjuntos aplicada al seguimiento de pacientes con VIH. Acta méd costarric. 2016;58:56-61.
9. Rodríguez J, Prieto S, Correa C, Melo M, Domínguez D, Olarte N, et al. Prediction of $CD4^+$ Cells Counts in HIV/AIDS Patients based on Sets and Probability Theories. Current HIV Research. 2018;16:416-424.
10. Rodríguez J. Dynamical systems applied to dynamic variables of patients from the intensive care unit (ICU): Physical and mathematical mortality predictions on ICU. Journal of Medicine and Medical Sciences. 2015;6:209-220.



Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 1. Conjunto de números reales

1. $345\,Tg$ **3**. $12\,mg$ **5**. $56.1\,Gm$ **7**. $5.09\,P\ iones\ de\ cloro$ **9**. $2.9\ \ pg\ de\ CUSO_4$

11. $\frac{71}{15}$ **13**. $\frac{2}{35}$ **15**. $\frac{56}{15}$ **17**. $\frac{1}{8}$ **19**. $2\frac{14}{27}$ **21**. $\frac{24}{5}$ **23**. $\frac{9}{8}-\frac{2}{3}a$ **25**. $\frac{5}{2}-12x$

27. $3a-\frac{5}{21}b$ **29**. $\frac{4}{3}+\frac{3}{2}b-3a$ **31**. 1.534×10^{4} **33**. 9.469×10^{7} **35**. 5.177×10^{-5}

37. 5.587×10^{-9} **39**. 4.36×10^{-9} **41**. 1.638×10^{9} **43**. 1.092×10^{-4} **45**. 6.08×10^{-6}

47. 3.14×10^{-13} **49**. 9.8×10^{8} **51**. $3.3\times 10^{22}\,\acute{a}tomos\ de\ HNO_3$ **53**. $10^{9}\ alfileres$

55. 10^{16} **57**. $300\,GHz$ **59**. $(-3,3)$ **61**. $(-\infty,2]\cup[2,\infty)$ **63**. $(-\infty,-6)\cup(6,\infty)$

65. $(-\infty,-8)\cup(-2,\infty)$ **67**. $[-9,3]$ **69**. $\left(-\frac{5}{4},\frac{1}{4}\right)$ **71**. $Divisible\ entre\ 2,3,5,7\ y\ 9$

73. $Divisible\ entre\ 3,5\ y\ 9$ **75**. $Divisible\ entre\ 2,3,6$ **77**. $Daivisible\ entre\ 3\ y\ 5$

79. $Divisible\ entre\ 5$ **81**. $Divisible\ entre\ 2\ y\ 3$ **83**. $2^{4}\times 3$ **85**. $2\times 3^{2}\times 7$ **87**. $2^{5}\times 3\times 13$

89. $2\times 3\times 5^{2}\times 7\times 11$

2

Fracciones

LO QUE APRENDERÁS. . .

2.1 Representación gráfica de fracciones como parte de la unidad.
2.2 Representación de la recta numérica.
2.3 Fracciones equivalentes.
2.4 Comparación de fracciones y simplificación de fracciones.
2.5 Operaciones con fracciones aritméticas y algebraicas.

2.1 Representación gráfica de fracciones como parte de la unidad

El uso de las fracciones se remonta a la época de los babilónicos, pero fueron los hindús los que establecieron las reglas para operarlos. La palabra fracción proviene del latín "*fractio*" que significa "quebrar", por tal motivo a las fracciones se les han conocido como "**quebrados**", existen palabras utilizadas que hacen referencia a las fracciones, tal es el caso de la caricatura presentada.

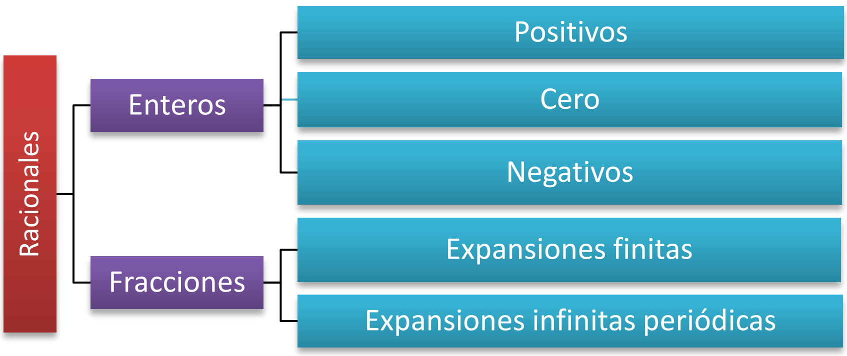
Definición

Las fracciones son de la forma: $\frac{a}{b}$

Donde a y b son números enteros y $b \neq 0$

Hablando de conjuntos, las fracciones pertenecen a los racionales como se ve en la Figura 2.1.

Figura 2.1 Conjunto de los números racionales



Se puede representar una fracción como parte de la unidad, en una recta numérica o con algún material de laboratorio (como una probeta). Todas las fracciones tienen una expansión decimal, las cuales pueden ser finitas o infinitas y periódicas puede ser pura (la periodicidad es en todos los decimales) y mixta (la periodicidad empieza después de algunos decimales). Se pueden establecer las siguientes reglas para las expansiones de las fracciones:

Tabla 2.1
Tipos de expansiones fraccionarias

Expansión	Denominadores	Ejemplo
Decimal finita	2 y 5	$1/2 = 0.5$
Decimal infinita pura	No tengan 2 y 5	$2/3 = 0.666\ldots$
Decimal infinita mixta	2, 5 y otros factores.	$5/6 = 0.8333\ldots$

Observe que para la expansión decimal infinita mixta, el 6 resulta de la multiplicación de 2 por el numero primo 3.

Una fracción puede ser **representada como la parte proporcional de un objeto**. El objeto puede ser cantidad de materia como: masa, volumen (en sus tres estados de agregación), mol; o energía por ejemplo la presión, quantum, longitud de onda, entre otras. Existen dos casos para una fracción:

i. $a < b$ Fracción propia.
ii. $a > b$ Fracción impropia.

Para la **fracción propia**, el cociente da como resultado un valor **menor a 1** y para la **fracción impropia**, el cociente de la fracción arroja un valor **mayor a 1**. Por ejemplo tenemos los siguientes cocientes:

Fracción		Tipo
$\frac{4}{5}$	$4 < 5$	Propia
$\frac{8}{3}$	$8 > 3$	Impropia

Po lo tanto si se representa una **fracción propia** se utiliza **sólo un objeto** como una circunferencia, un cuadrado un triángulo o alguna otra figura geométrica, pero si se representará una **fracción impropia** se necesitará **más de un objeto**.

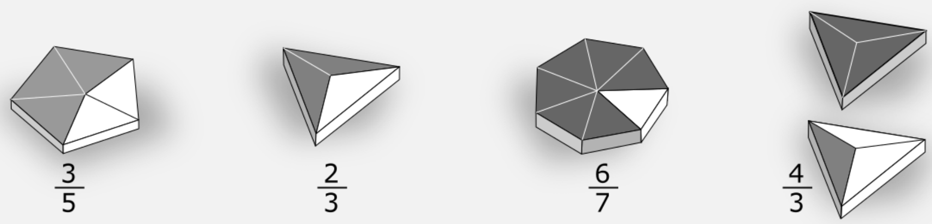
Ejemplo 1

Represente las siguientes fracciones como parte de la unidad:

$a)\frac{3}{5}$ $\quad b)\ \frac{2}{3}$ $\quad c)\ \frac{6}{7}$ $\quad d)\ \frac{4}{3}$

Solución

Se relacionan los numeradores de cada fracción con el poligono correspondiente y sombreamos la cantidad que indica el numerado.



$\frac{3}{5}$ $\quad \frac{2}{3}$ $\quad \frac{6}{7}$ $\quad \frac{4}{3}$

Ejercicios de refuerzo 2.1

Represente las siguientes fracciones como parte de la unidad:

1. $\frac{7}{9}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{9}{4}$ 4. $\frac{7}{3}$ 5. $\frac{2}{11}$ 6. $\frac{3}{8}$

2.2 Representación de la recta numérica

Recuerde que la **recta numérica** está representada por una línea recta en la cual se localiza el conjunto de números reales a los que se les asigna un lugar específico en ella.

Para ubicar una fracción en la recta solo se debe de dividir la unidad en el total de partes que indica el denominador y el numerador indica en que parte se localiza la fracción. Si la fracción es positiva se localiza hacia la derecha y si es negativo hacia la izquierda.

Ejemplo 2

Establezca en una recta numérica las siguientes fracciones:

$a)\ \frac{1}{6}$ $b)\ -\frac{3}{4}$ $c)\ \frac{4}{3}$ $d)\ \frac{5}{3}$

Solución

Primero se establecen las equivalencias de las fracciones con un denominador común a las tres fracciones, el cual es:

MCD (6, 4, 2, 3): 12 Por lo tanto las fracciones equivalentes son:

$$\text{a)}\ \frac{2}{12} \quad \text{b)}\ -\frac{9}{12} \quad c)\ \frac{16}{12} \quad d)\ \frac{20}{12}$$

En la recta numérica quedaría como:

Ejercicios de refuerzo 2.2

Coloque en una recta numérica las siguientes fracciones:

7. $\frac{5}{9}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

8. $\frac{3}{4}, \frac{3}{5}, -\frac{5}{7}$

9. $\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}$

10. $\frac{9}{4}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}$

2.3 Fracciones equivalentes

Ya en el punto anterior se vislumbró a las fracciones equivalentes cuando se localizaron las fracciones en la recta numérica. Por lo tanto se puede definir a una fracción equivalente como aquella que **representa la misma cantidad.**

Definición

Para verificar si las fracciones son equivalentes se realiza el producto cruzado:

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{c}{d}\right) \quad si \quad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = 1$$

Ejemplo 3

Indique cuales de las siguientes fracciones son equivalentes:

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{4}{10}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{45}{85}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{9}{27}, \quad \frac{4}{12}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{3}{9}, \quad \frac{15}{30}$$

Solución

Se realizan las operaciones de producto cruzado, encontrándose que:

$$\left(\mathbf{\frac{1}{3}}\right) = \left(\mathbf{\frac{9}{27}}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{27}{9}\right) = \mathbf{\frac{27}{27}}$$

$$\left(\mathbf{\frac{4}{10}}\right) = \left(\mathbf{\frac{2}{5}}\right) \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \mathbf{\frac{20}{20}}$$

$$\left(\mathbf{\frac{1}{3}}\right) = \left(\mathbf{\frac{4}{12}}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{12}{4}\right) = \mathbf{\frac{12}{12}}$$

$$\left(\mathbf{\frac{45}{90}}\right) = \left(\mathbf{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow \left(\frac{45}{90}\right)\left(\frac{2}{1}\right) = \mathbf{\frac{90}{90}}$$

$$\left(\mathbf{\frac{1}{3}}\right) = \left(\mathbf{\frac{3}{9}}\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{3}\right) = \mathbf{\frac{9}{9}}$$

Ejercicios de refuerzo 2.3

Coloque en una recta numérica las siguientes fracciones:

11. $\frac{4}{3}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{2}{11}, \quad \frac{15}{21}$

12. $\frac{4}{17}, \quad \frac{13}{255}, \quad \frac{32}{136}, \quad \frac{6}{5}$

13. $\frac{1}{2}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{8}{10}$

14. $\frac{8}{7}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{104}{91}, \quad \frac{64}{49}$

15. $\frac{24}{32}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{3}$

16. $\frac{3}{5}, \quad \frac{35}{60}, \quad \frac{9}{20}, \quad \frac{72}{120}$

17. $\frac{11}{8}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{16}{25}, \quad \frac{32}{40}$

18. $\frac{5}{8}, \quad \frac{35}{72}, \quad \frac{60}{96}, \quad \frac{80}{128}$

19. $\frac{18}{27}, \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{36}{54}, \quad \frac{2}{3}$

20. $\frac{21}{35}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{105}, \quad \frac{63}{105}$

2.4 Comparación de fracciones y simplificación de fracciones

Para comparar fracciones existen tres posibilidades: que los denominadores sean iguales, los numeradores lo sean o que sean totalmente distintos, observe las reglas para los dos primeros casos:

Definición

Para comparar fracciones con mismo denominador se cumple:

$$\left(\frac{a}{b}\right) < \left(\frac{c}{b}\right) \quad si \quad a < c$$

Para comparar fracciones con el mismo numerador se cumple:

$$\left(\frac{a}{b}\right) < \left(\frac{a}{d}\right) \quad si \quad b > d$$

Ejemplo 4

Compare las siguientes fracciones e indique cuál es mayor:

$$a)\ \left(\frac{5}{6}\right),\quad \left(\frac{7}{6}\right),\quad \left(\frac{4}{6}\right) \qquad\qquad b)\ \left(\frac{4}{3}\right),\quad \left(\frac{4}{9}\right),\quad \left(\frac{4}{5}\right)$$

Solución

a) Como es el mismo denominador, basta con ordenar los numeradores de menor a mayor quedando:

$$\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{6}}\right) < \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\right) < \left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}\right)$$

b) Como es el mismo numerador, ahora se ordenan los denominadores de mayor a menor quedando:

$$\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}\right) < \left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right) < \left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)$$

En el caso en que las fracciones que se requieren comparar no presentan ninguna igualdad en los numeradores ni en los denominadores, el procedimiento es establecer equivalencia entre ellas mediante un **denominador común** para lograr realizar la comparación.

Ejemplo 5

Compare las siguientes fracciones e indique cual es mayor:

$$\left(\frac{7}{12}\right),\quad \left(\frac{2}{15}\right),\quad \left(\frac{9}{5}\right),\quad \left(\frac{5}{4}\right)$$

Solución

Primero se expresan las fracciones con un denominador común; $mcd(12, 15, 5, 4): 60$

Ahora las fracciones equivalentes son:

$$\left(\frac{35}{60}\right),\quad \left(\frac{8}{60}\right),\quad \left(\frac{108}{60}\right),\quad \left(\frac{75}{60}\right)$$

Las cuales ya se pueden ordenar debido a que los denominadores son iguales; por lo que sólo se acomodan los numeradores:

$$\left(\frac{8}{60}\right) < \left(\frac{35}{60}\right) < \left(\frac{75}{60}\right) < \left(\frac{108}{60}\right) \text{ Es decir: } \left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{15}}\right) < \left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}\right) < \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right) < \left(\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{5}}\right)$$

La simplificación de fracciones se realiza encontrando una expresión de la fracción equivalente con números más pequeños, hasta llegar a una **fracción irreducible**.

Ejercicios de refuerzo 2.3

Compare las siguientes fracciones e indique ¿Cuál es mayor?

21. $\left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{5}\right), \left(\frac{7}{3}\right), \left(\frac{11}{4}\right)$

22. $\left(\frac{1}{8}\right), \left(\frac{8}{20}\right), \left(\frac{1}{5}\right), \left(\frac{3}{17}\right)$

23. $\left(\frac{4}{5}\right), \left(\frac{6}{6}\right), \left(\frac{8}{9}\right), \left(\frac{5}{6}\right)$

24. $\left(\frac{6}{5}\right), \left(\frac{12}{11}\right), \left(\frac{16}{9}\right), \left(\frac{4}{3}\right)$

25. $\left(\frac{13}{6}\right), \left(\frac{21}{8}\right), \left(\frac{19}{4}\right), \left(\frac{8}{3}\right)$

Compare las siguientes fracciones e indique ¿Cuál es menor?

26. $\left(\frac{1}{9}\right), \left(\frac{3}{5}\right), \left(\frac{6}{11}\right), \left(\frac{12}{20}\right)$

27. $\left(\frac{6}{5}\right), \left(\frac{4}{7}\right), \left(\frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{10}\right)$

28. $\left(\frac{3}{7}\right), \left(\frac{1}{6}\right), \left(\frac{7}{15}\right), \left(\frac{4}{9}\right)$

29. $\left(\frac{3}{4}\right), \left(\frac{6}{7}\right), \left(\frac{5}{9}\right), \left(\frac{11}{12}\right)$

30. $\left(\frac{5}{4}\right), \left(\frac{12}{11}\right), \left(\frac{1}{6}\right), \left(\frac{7}{5}\right)$

Para encontrar la expresión equivalente irreducible se realizan reducciones sucesivas tanto en el numerador como en el denominador hasta que esta operación ya no se pueda efectuar.

Ejemplo 6

Reduzca la siguiente fracción a la mínima expresión:132/36

Solución

Se realizan las reducciones sucesivas de manera simultánea para numerador y denominador:

Numerador	Denominador	Divisor común
132	36	2
66	18	2
33	9	2
11	**3**	3

Por lo tanto la fracción irreducible es:

$$\mathbf{\frac{11}{3}}$$

Ejercicios de refuerzo 2.4

Reduzca las siguientes fracciones.

31. $\frac{20}{35}$ 33. $\frac{6}{63}$ 35. $\frac{126}{12}$ 37. $\frac{210}{245}$ 39. $\frac{357}{680}$

32. $\frac{125}{60}$ 34. $\frac{24}{32}$ 36. $\frac{350}{375}$ 38. $\frac{120}{200}$ 40. $\frac{1512}{960}$

2.5 Operaciones con fracciones aritméticas y algebraicas

Las operaciones con **fracciones aritméticas** son la suma, diferencia, producto y cociente, recordemos las reglas:

Definición

Suma y diferencia:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

Producto:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

Cociente:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 7

Encuentre el resultado de las siguientes operaciones aritméticas:

$a)\ \frac{3}{4} - \frac{7}{11}$ $\quad b)\ \left(\frac{12}{5}\right)\left(\frac{9}{23}\right)$ $\quad c)\ \frac{15}{6} \div \frac{5}{3}$ $\quad d)\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{3}{5}\right)}{\frac{2}{3}}$

Solución a)

Ahora hay una diferencia por lo tanto utilizamos la primera regla:

$$\frac{3}{4} - \frac{7}{11} = \frac{33 - 28}{44} = \mathbf{\frac{5}{44}}$$

Solución b)

Esta vez se tiene el producto utilizamos la regla del producto:

$$\left(\frac{12}{5}\right)\left(\frac{9}{23}\right)=\mathbf{\frac{108}{115}}$$

Solución c)

Se utiliza la regla del cociente.

$$\frac{15}{6}\div\frac{5}{3}=\mathbf{\frac{45}{30}}$$

$$\begin{array}{cc|c} 30 & 45 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & 3 \end{array}$$

La fracción irreducible es:

$$\frac{45}{30}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

Solución e)

Se utiliza la regla del cociente en el numerado y posteriormente en la fracción.

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\div\left(\frac{3}{5}\right)}{\frac{2}{3}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right)}{\frac{2}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{15}{12}=\mathbf{\frac{5}{4}}$$

Ejercicios de refuerzo 2.4

Reduzca las siguientes fracciones.

41. $\frac{1}{3}+\frac{7}{12}+\frac{4}{5}$
42. $\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$
43. $\frac{1}{8}-\frac{3}{5}+\frac{4}{9}$
44. $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{15}{12}$
45. $\frac{45}{4}+\frac{1}{9}-\frac{20}{3}$
46. $\left(\frac{12}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$
47. $\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{12}{15}\right)$
48. $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{6}{5}\right)$
49. $\left(\frac{14}{3}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$
50. $\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{18}{7}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$
51. $\left(\frac{13}{2}\right)\div\left(\frac{14}{5}\right)$
52. $\left(\frac{16}{5}\right)\div\left(\frac{1}{3}\right)$
53. $\left(\frac{7}{9}\right)\div\left(\frac{15}{9}\right)$
54. $\left(\frac{126}{9}\right)\div\left(\frac{356}{7}\right)$
55. $\frac{\left(\frac{9}{13}\right)\div\left(\frac{15}{7}\right)}{\frac{4}{3}}$
56. $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)}{\frac{2}{3}+\frac{7}{9}}$

En cuanto a las operaciones con **fracciones algebraicas**, en las que existe la suma, diferencia, producto y cociente como las aritméticas, en donde existen incógnitas serán nombradas como **cociente de polinomios**:

Definición

Para una fracción algebraica: $\frac{a}{b} = \frac{Dividendo}{Divisor}$

Para la suma y diferencia se puede tener que las fracciones tengan el mismo divisor o que sean diferentes; en cuanto al producto se debe recordar las reglas de las potencias así como para el cociente ya que este es un producto cruzado.

Al igual que las fracciones aritméticas también las expresiones algebraicas se pueden reducir o simplificar, considere los siguientes procedimientos para la operación de fracciones algebraicas:

I. SUMA Y RESTA CON MISMOS DIVISORES

El método general para sumar y restar fracciones algebraicas con el mismo divisor es:

1. Se suman o restan los dividendos y se escribe un divisor común.
2. Se factoriza el dividendo y divisor.
3. Se suprimen los factores idénticos del cociente.

Ejemplo 8

Realice las siguientes sumas y restas:

$$a)\ \frac{7}{x}+\frac{3}{x}-\frac{12}{x} \qquad b)\ \frac{4}{x-2}-\frac{x}{x-2}+\frac{6}{x-2} \qquad c)\ \frac{2x-4}{x^2-1}+\frac{x+3}{x^2-1}$$

Solución a)

Solo se suman los dividendos.

$$\frac{7}{x}+\frac{3}{x}-\frac{12}{x}=\frac{7+3-12}{x}=-\frac{2}{x}$$

Solución b)

Se suman los dividendos y los divisores.

$$\frac{4}{x-2}-\frac{x}{x-2}+\frac{6}{x-2}=\frac{4+6-x}{x-2}=\frac{10-x}{x-2}$$

Solución c)

Se suman los dividendos y los divisores.

$$\frac{2x+7}{x^2-1}+\frac{x-4}{x^2-1}=\frac{2x+7+x-4}{x^2-1}=\frac{3x+3}{x^2-1}$$

$$\frac{3x+3}{x^2-1}=\frac{3(x+1)}{x^2-1}=\frac{3(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\boldsymbol{\frac{3}{x-1}}$$

Ejercicios de refuerzo 2.5

Realiza las siguientes sumas y restas algebraicas.

57. $\frac{6}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{3}{x}$
58. $\frac{3}{x}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{x}$
59. $\frac{14}{3x}-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x}$
60. $\frac{12}{5x}-\frac{4}{3x}-\frac{2}{x}$
61. $\frac{18}{7x}-\frac{12}{11x}+\frac{4}{3x}$
62. $\frac{4}{x-2}+\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x-2}$
63. $\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+1}+\frac{2x}{x+1}$
64. $\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x}$
65. $\frac{3}{x+3}+\frac{x}{x+3}+\frac{2}{x}$
66. $\frac{x+4}{x^2-1}-\frac{2x+3}{x^2-1}$
67. $\frac{2x+1}{x^2-9}+\frac{x+8}{x^2-1}-\frac{3}{x-3}$
68. $\frac{2}{x+3}+\frac{6}{x-3}+\frac{1}{x}$
69. $\frac{10x}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}-\frac{5}{x+2}$
70. $\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x-1}-\frac{2}{x}$

II. SUMA Y RESTA CON DISTINTOS DIVISORES

El método general para sumar y restar fracciones algebraicas con distintos divisores es:

1. Se factoriza el dividendo y divisor.
2. Se obtiene el mínimo común de los divisores.
3. Se divide el mínimo común entre cada uno de los divisores, el resultado se multiplica por cada dividendo respectivo.
4. Se suman o restan los factores en el dividendo.
5. Se factoriza la expresión resultante.
6. Se suprimen los factores idénticos del cociente.

Ejemplo 9

Realice la operación que se indica:

$a)\ \frac{x}{3}+\frac{2}{4x}-\frac{1}{3}$ $\qquad b)\ \frac{6x+3}{x^2-x-2}+\frac{x}{x+1}$

Solución a)

Se obtiene el mínimo común denominador de los divisores $mcd(3,4x,3)\colon 12x$

$$\frac{x}{3}+\frac{2}{4x}-\frac{1}{3}=\frac{4x^2+6-4x}{12x}$$

Se factoriza para llegar a la mínima expresión.

$$\frac{2(2x^2-2x+3)}{2(6x)}=\frac{\mathbf{2x^2-2x+3}}{\mathbf{6x}}$$

Solución b)

Se factoriza el divisor.

$$x^2-x-2=(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})$$

Se obtiene el mínimo común denominador de los divisores

$$mcd(x+1)(x-2)(x+1)\colon(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})$$

$$\frac{6x+3}{x^2-x-2}+\frac{x}{x+1}=\frac{6x+3+x(x-2)}{(x+1)(x-2)}$$

Se realizan las operaciones en el dividendo:

$$\frac{6x+3+x(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\frac{6x+3+x^2-2x}{(x+1)(x-2)}$$

$$=\frac{x^2+4x+3}{(x+1)(x-2)}$$

Se factoriza el numerador:

$$\frac{x^2+4x+3}{(x+1)(x-2)}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-2)}$$

Se suprimen términos semejantes:

$$\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-2)}=\frac{\boldsymbol{x}+\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}$$

III. PRODUCTO DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

El método para multiplicar fracciones algebraicas es:

1. Se factoriza el dividendo y divisor.
2. Se suprimen los factores idénticos del cociente.
3. Se multiplican los divisores y los dividendos.

Ejemplo 10

Realice los siguientes productos de fracciones algebraicas:

$a)\ \left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2}{5x}\right)\left(\frac{10x^2}{7}\right) \qquad b)\ \left(\frac{4x^2+8x+16}{x-4}\right)\left(\frac{3x-12}{2x+8}\right)$

Solución a)

Se simplifican los factores idénticos.

$$\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2}{5x}\right)\left(\frac{10x^2}{7}\right) = \frac{2\cdot 10\cdot x\cdot x^2}{2\cdot 5\cdot 7\cdot x} = \boldsymbol{\frac{2}{7}x^2}$$

Solución b)

Se factorizan los dividendos y los divisores.

$$\left(\frac{4x^2+16x+16}{x-4}\right)\left(\frac{3x-12}{2x+8}\right) = \left[\frac{4(x^2+4x+4)}{x-4}\right]\left[\frac{3(x-4)}{2(x+4)}\right]$$

$$\left[\frac{4(x^2+4x+4)}{x-4}\right]\left[\frac{3(x-4)}{2(x+4)}\right] = \left[\frac{4(x+2)(x+2)}{x-4}\right]\left[\frac{3(x-4)}{2(x+4)}\right]$$

Ahora se simplifican los factores idénticos

$$\left[\frac{4(x+2)(x+2)}{x-4}\right]\left[\frac{3(x-4)}{2(x+4)}\right] = \boldsymbol{6\left[\frac{(x+2)(x+2)}{(x+4)}\right]}$$

Ejercicios de refuerzo 2.6

Realiza los siguientes productos algebraicos.

71. $\left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{5}{2x}\right)\left(\frac{12x^2}{11}\right)$

72. $\left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{5}{6x^2}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{11}\right)$

73. $\left(\frac{\sqrt{x}}{7}\right)\left(\frac{\sqrt{2x}}{9}\right)\left(\frac{3}{4x}\right)$

74. $\left(\frac{6x}{5}\right)\left(\frac{12}{15x^2}\right)\left(\frac{3x}{14x+1}\right)$

75. $\left(\frac{3x+1}{5}\right)\left(\frac{4}{3x}\right)\left(\frac{3x^2}{6x+2}\right)$

76. $\left[\frac{(x+2)^2}{3(x+1)}\right]\left[\frac{6(x+1)}{(x+2)(x-1)}\right]$

77. $\left(\frac{2x^2y}{y^2+y}\right)\left(\frac{y^3+y^2}{2x^2+4}\right)$

78. $\left(\frac{2x+6}{3x-3}\right)\left(\frac{6x-6}{8x^2+48x+72}\right)$

79. $\left(\frac{x^3-4x^2+4x}{x^4-3x^3+2x^2}\right)\left(\frac{2x^2-4x+2}{x^2-3x+2}\right)\left(\frac{3x-6}{2x-4}\right)$

80. $\left(\frac{2x+6}{3x-3}\right)\left(\frac{6x-6}{8x^2+48x+72}\right)$

IV. COCIENTE DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Para desarrollar un cociente recuerde que se puede hacer por tres métodos (producto cruzado, producto con el recíproco de la segunda fracción y regla del cociente conocido como regla del "sándwich"); por tanto el método del cociente recurre a la operación de producto.

Definición

Producto cruzado: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Producto con el reciproco: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}$

Regla del sándwich: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$

El método para cociente de fracciones algebraicas es:

1. Se factoriza el dividendo y divisor.
2. Se realiza algún método del cociente.
3. Se suprimen los factores idénticos del cociente.
4. Se multiplican los divisores y los dividendos.

Ejemplo 11

Realiza los siguientes cocientes:

$a)\ \frac{5x^2}{7} \div \frac{9x}{4}$ $\qquad b)\ \frac{x^2+x-12}{x^2+3x-4} \div \frac{x^2-10x+21}{x^2-4x+3}$

Solución a)

Se hace el producto con el reciproco de la segunda fracción algebraica.

$$\frac{5x^2}{7} \div \frac{9x}{4} = \left(\frac{5x^2}{7}\right)\left(\frac{4}{9x}\right) = \boldsymbol{\frac{20}{63}x}$$

Solución b)

Se factorizan los divisores y dividendos.

$$\frac{x^2+x-12}{x^2+3x-4} \div \frac{x^2-10x+21}{x^2-4x+3} = \frac{(x+4)(x-3)}{(x+4)(x-1)} \div \frac{(x-3)(x-7)}{(x-3)(x-1)}$$

Se pueden reducir términos semejantes:

$$\frac{(x-3)}{(x-1)} \div \frac{(x-7)}{(x-1)}$$

Se realiza el producto del reciproco de la segunda fracción y se suprimen los términos idénticos:

$$\left[\frac{(x-3)}{(x-1)}\right]\left[\frac{(x-1)}{(x-7)}\right] = \boldsymbol{\frac{(x-3)}{(x-7)}}$$

Ejercicios de refuerzo 2.7

Realiza los siguientes cocientes algebraicos.

81. $\left(\frac{4}{5x}\right) \div \left(\frac{9}{8x^2}\right)$
82. $\left(\frac{2a^2x^3}{7}\right) \div \left(\frac{4a^3x}{21}\right)$
83. $\left(\frac{15a^3b^2x^4}{8a^2x^2}\right) \div \left(\frac{45a^2b^3x}{2a^2x^2}\right)$
84. $\left(\frac{36x^6}{81x}\right) \div \left(\frac{64x^7}{243x^3}\right)$
85. $\left(\frac{3x-6}{2x^2+2}\right) \div \left(\frac{6x-12}{4x^2+4}\right)$
86. $\left(\frac{4x^2-4}{x+3}\right) \div \left(\frac{2x+2}{x^2+6x+9}\right)$
87. $\left[\frac{36(x-1)}{4(x^2-1)}\right] \div \left[\frac{6(x-1)^3}{7(x+1)^2}\right]$
88. $\left(\frac{36x^6}{81x}\right) \div \left(\frac{64x^7}{243x^3}\right)$
89. $\left(\frac{9x^2-1}{x+1}\right) \div \left(\frac{3x-1}{x^2-1}\right)$
90. $\left(\frac{x^3+x}{x^4+x^2}\right) \div \left(\frac{x^3+2x^2+x}{x^4+2x^3+x^2}\right)$

I. COCIENTES COMPLEJOS

Un cociente complejo es un cociente en donde tanto **el divisor como el dividendo son nuevamente fracciones**.

Para resolverlas se debe de resolver primero el cociente del dividendo y después del divisor (no hay problema en el orden) aplicando las reglas para la suma, resta, producto o cociente según sea necesario; para finalmente hacer regla del cociente con los resultados obtenidos.

Ejemplo 12

Realiza los siguientes cocientes:

$$a)\frac{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}} \qquad b)\frac{x}{1-\frac{1}{\frac{x+1}{\frac{1}{x}-1}}}$$

Solución a)

Primero se trabaja con el dividendo.

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)(x+1)+(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{(x+1)(x+1)+(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{x^2-1}$$

Ahora con el divisor.

$$\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)(x-1)-(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{(x-1)(x-1)-(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{x^2-1}$$

Se establece el producto con el reciproco del divisor:

$$\left(\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{x^2-1}\right)\left(\frac{x^2-1}{(x-1)^2-(x+1)^2}\right)$$

Se suprimen términos idénticos:

$$\left(\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{x^2-1}\right)\left(\frac{x^2-1}{(x-1)^2-(x+1)^2}\right)=\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$$

$$\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}=\frac{(x^2+2x+1)+(x^2-2x+1)}{(x^2-2x+1)-(x^2+2x+1)}$$

$$\frac{(x^2+2x+1)+(x^2-2x+1)}{(x^2-2x+1)-(x^2+2x+1)}=\frac{2x^2+2}{-4x}$$

$$\frac{2x^2+2}{-4x}=\frac{2(x^2+1)}{2(-2x)}=-\frac{\boldsymbol{x^2+1}}{\boldsymbol{2x}}$$

Solución b)

Se trabaja primero con el divisor, se expresa por lo tanto:

$$\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$

Ahora se hace la regla del "sandwich" (extremos por extremos y medios por medios):

$$\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1-x}{x}}=\frac{x}{(x+1)(1-x)}=\frac{x}{-x^2+1}=-\frac{x}{x^2-1}$$

Se realiza la suma:

$$1-\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}-1}=1+\frac{x}{x^2-1}$$

El denominador común será: x^2-1

$$1+\frac{x}{x^2-1}=\frac{(x^2-1)+x}{x^2-1}$$

$$\frac{(x^2-1)+x}{x^2-1}=\frac{x^2+x-1}{x^2-1}$$

Finalmente

$$\frac{x}{1-\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}-1}}=\frac{x}{\frac{x^2+x-1}{x^2-1}}$$

Para terminar se realiza nuevamente regla del "sandwich"

$$\frac{x}{\frac{x^2+x-1}{x^2-1}}=\frac{\boldsymbol{x(x^2-1)}}{\boldsymbol{x^2+x-1}}$$

Ejercicios de refuerzo 2.7

Realiza los siguientes cocientes algebraicos complejos.

91. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$

92. $\dfrac{\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{x}}{\dfrac{2x}{3}+\dfrac{4}{x}}$

93. $\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3x}{4}}$

94. $\dfrac{x+\dfrac{1}{x+2}}{x-\dfrac{1}{x+2}}$

95. $\dfrac{1-\dfrac{1}{y+1}}{1-\dfrac{1}{y-1}}$

96. $\dfrac{\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x-3}{x-2}}{x+2}$

97. $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}$

98. $x-\dfrac{y}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$

99. $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

100. $\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{x-\dfrac{1}{x}}}}$

101. $\dfrac{1-\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x-1}}}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{x-1}{x-\dfrac{1}{x+1}}}}$

102. $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$

103. $\dfrac{\dfrac{x-3}{x-4}-\dfrac{x+2}{x+1}}{x+3}$

104. $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}}{1+\dfrac{x+1}{1+\dfrac{x+1}{x-1}}}$

105. $\dfrac{1+\dfrac{2x}{2-\dfrac{1}{x+1}}}{1+\dfrac{x}{x-\dfrac{1}{1+\dfrac{2x}{x^2+1}}}}$

Quimática

Las fracciones en el diseño de fármacos

Escrito por: Benjamín García Ramírez
Instituto de Química, UNAM

Gran parte de los eventos bioquímicos se estudian mediante ecuaciones algebraicas caracterizadas por ser fracciones. Un ejemplo de este tipo de ecuaciones es el proceso de disociación reversible de un complejo Macromolécula-Ligando [ML] que se descompone Macromolécula [M] y Ligando [L].

$$[ML] \leftrightarrow [M] + [L]$$

La separación del complejo [ML] en sus componentes puede ser estudiada mediante la constante de disociación (K_d) definida como el producto de las especies libres entre el complejo.

$$K_d = \frac{[M][L]}{[ML]}$$

La K_d indica la cantidad de Macromolécula y de Ligando libre en función de la cantidad de complejo formado al equilibrio. Describe la estabilidad de un complejo, ya que es reciproca a la constante de unión, entre menor es el valor de K_d la estabilidad del complejo es mayor.

$$K_d = \frac{1}{K_a}$$

Por lo tanto

$$K_a = \frac{[ML]}{[M][L]}$$

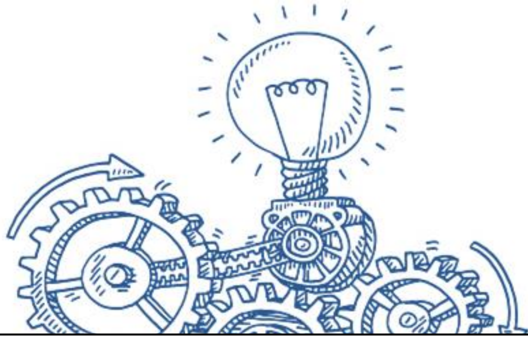
Entre las aplicaciones de la K_d están las farmacológicas donde se utiliza para suministrar moléculas en forma de medicamentos hacia receptores específicos, ya sea del mismo organismo o de organismos hospederos.

Es relevante destacar que a partir de este tipo de fracciones algebraicas derivan otras como la fracción de saturación (Y), la cual se define como la relación del número de sitios ocupados [ML] entre el número total de sitios disponibles $[M]_{total}$.

$$Y = \frac{Numero\ de\ sitios\ ocupados}{Número\ total\ de\ sitios}$$

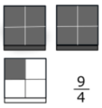
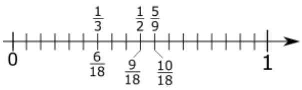
$$Y = \frac{[ML]}{[M]_{total}}$$

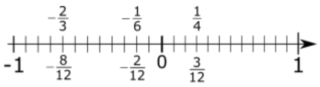
La cual permite estimar la proporción de macromoléculas que tienen un ligando, con valores que van de 0 que indica que no existe un Ligando unido a la macromolécula; hasta 1 cuando todas los Ligandos se han unido a la macromolécula.



Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 2. Fracciones

1.  $\frac{7}{9}$ **3.**  $\frac{9}{4}$ **5.**  $\frac{2}{11}$ **7.** 

9. 

11. $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$ **13.** $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$ **15.** $\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$ **17.** $\frac{4}{5}=\frac{32}{40}$ **19.** $\frac{18}{27}=\frac{36}{54}=\frac{2}{3}$ **21.** $\frac{1}{5}<\frac{3}{2}<\frac{7}{3}<\frac{11}{4}$

23. $\frac{4}{5}<\frac{5}{6}<\frac{6}{7}<\frac{8}{9}$ **25.** $\frac{13}{6}<\frac{21}{8}<\frac{16}{6}<\frac{19}{4}$ **27.** $\frac{6}{5}<\frac{4}{7}<\frac{4}{10}<\frac{1}{3}$ **29.** $\frac{5}{9}<\frac{3}{4}<\frac{6}{7}<\frac{11}{12}$ **31.** $\frac{4}{7}$

33. $\frac{2}{21}$ **35.** $\frac{21}{2}$ **37.** $\frac{6}{7}$ **39.** $\frac{21}{40}$ **41.** $\frac{103}{60}$ **43.** $-\frac{11}{360}$ **45.** $\frac{169}{36}$ **47.** $\frac{4}{3}$ **49.** 2 **51.** $\frac{48}{5}$

53. $\frac{7}{15}$ **55.** $\frac{63}{260}$ **57.** $\frac{9}{2x}$ **59.** $\frac{31}{6x}$ **61.** $\frac{650}{231x}$ **63.** $\frac{2-2x}{x+1}$ **65.** $\frac{x+2}{x}$ **67.** $-\frac{8(x+8)}{x-3}$ **69.** $\frac{x+5}{x-2}$

71. $\frac{15}{22}x^2$ **73.** $\frac{\sqrt{2}}{84}$ **75.** $\frac{2x}{5}$ **77.** $\frac{(xy)^2}{x^2+2}$ **79.** $\frac{3}{x}$ **81.** $\frac{32x}{45}$ **83.** $\frac{ax^3}{12b}$ **85.** 1 **87.** $\frac{21(x+1)}{2(x-1)^3}$

89. $(3x+1)(x-1)$ **91.** $\frac{x+1}{x-1}$ **93.** $\frac{2x^2-4}{4-3x^2}$ **95.** $\frac{y(y-1)}{(y+1)(y-2)}$ **97.** $\frac{1}{1-x}$ **99.** $\frac{2x+3}{x+2}$

101. $\frac{[x(x-1)-x][2x^2+x-2]}{[x(x-1)-1][3x^2+2x-3]}$ **103.** $\frac{5}{(x-4)(x+3)(x+1)}$ **105.** $\frac{(2x^2+4x+1)(x^3+x^2+x-1)}{(2x+1)(2x^3+3x^2+2x-1)}$

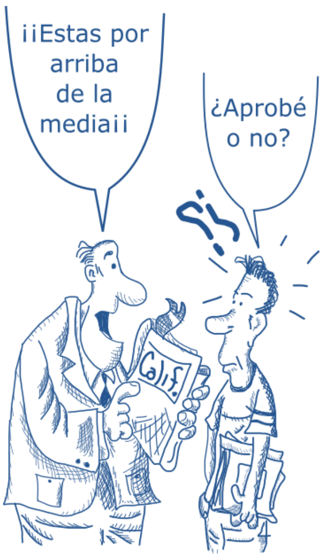
3

Razones y Proporciones

LO QUE APRENDERÁS. . .

3.1 Razón como cociente de dos números.
3.2 Cálculo de porcentajes.
3.3 Proporcionalidad directa e inversa.

3.1 Razón como cociente de dos números



Una razón es una **comparación de cantidades o de números,** muchas veces la comparación es con el promedio como le dice el profesor en la caricatura que se presenta. La comparación puede ser de dos maneras; por diferencia o por cociente.

Definición

Razón aritmética	Razón geométrica
$\boldsymbol{a-b}$	$\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ ó $\boldsymbol{a:b}$

Piense en la relación que existe en una molécula de agua, donde hay 1 átomo de oxígeno y 2 átomos de hidrógeno, esta razón se puede escribir como 1:2 o como $\frac{1}{2}$. Veamos algunos ejemplos de razones:

Las razones **comparan entre sí objetos heterogéneos**; es decir, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 2 pesos por 1 litro de agua destilada, estas con conocidas como tasa de cambio, velocidad de reacción etc.

Algunas razones no se representan con la notación fraccional, por ejemplo en una práctica de laboratorio se requiere en un matraz aforado 1 mililitro de clara de huevo con 9 mililitros de hidróxido de sodio 0.1 M. En este caso no se necesita, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.

En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una caja de 60 tubos de ensayo, 3 están rotos, la razón de tubos rotos puede ser 1:20, pero también se puede decir que puede ser 0:60, si es que ninguno está roto.

Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número π, que sabemos no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado (√2). Esta es una diferencia esencial entre “razón” y “fracción”, ya que como vimos las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros.

Como se observa hay una gran diferencia entre una fracción y una razón. Aunque una razón se puede expresar como un cociente, este no está constituido por los mismos elementos que una fracción $(\text{numerador}/\text{denominador})$, una razón está formada por los siguientes elementos:

$$\text{Razón} = \frac{\text{Antecedente}}{\text{consecuente}}$$

Ejemplo 1

Resuelve los siguientes ejercicios de razones:

a) ¿Qué parte de 15 es 6.3?
b) ¿Cuál es el precio actual de un densímetro si se devaluó 5/6 de su valor original de 1800 pesos?
c) ¿Cuál es la razón de 530 milimol a mol?
d) De un frasco de agar se tomó 3/11 y 2/7, para la preparación de dos diferentes medios de cultivo, si la cantidad de agar disminuyó en 7.8 g. ¿Cuál era la cantidad original?

Solución a)

¿Qué parte de 15 es 6.3?

Se divide 6.3 entre 15.

$$\frac{6.3}{15} = \mathbf{0.42}$$

Solución b)

¿Cuál es el precio actual de un densímetro si se devaluó 5/6 de su valor original de 1800 pesos?

Esto significa que se debe de multiplicar 5/6 por 1800.

$$\frac{5}{6}(1800) = \frac{5(1800)}{6} = \mathbf{1500\ pesos}$$

Solución c)

¿Cuál es la razón de 530 milimol a mol?

1mol es igual 1000 milimoles, por lo tanto, la razón es:

$$\frac{530}{1000} = \mathbf{0.53}$$

Solución d)

De un frasco de agar se tomó 3/11 y 2/7, para la preparación de dos diferentes medios de cultivo, si la cantidad de agar disminuyó en 7.8 g. ¿Cuál era la cantidad original?

La cantidad que se tomó 3/11 y 2/7 equivalen a:

$$\frac{3}{11} + \frac{2}{7} = \frac{21 + 22}{77} = \frac{43}{77}$$

43/77 corresponde a 7.8 g del agar que se utilizó (antecedente), se plantea la siguiente relación en donde x es el consecuente:

$$\frac{43}{77} = \frac{7.8\ g\ usados}{x\ g\ totales}$$

$$x = \frac{77(7.8\ g\ usados)}{43} = \mathbf{13.96\ g\ totales}$$

Ejercicios de refuerzo 3.1

Resuelva los siguientes ejercicios de proporciones.

1. ¿Qué razones guardan los siguientes números:

$$a)\ \frac{11.5}{22} \quad b)\ \frac{4}{16} \quad c)\ \frac{8}{64} \quad d)\ \frac{sen\pi}{cos\pi} \quad e)\ \frac{\cot \pi/3}{tan\pi/3}$$

2. Se sabe que la razón es 0.75, el antecedente es 12 ¿Cuál es el valor del consecuente?

3. La razón tiene un valor de 0.65 y el consecuente 14 ¿Cuál es el valor del antecedente?

4. ¿Cuál es el precio actual de un matraz aforado de 100 mL si se devaluó 3/5 de su valor original de 300 pesos?

5. ¿Cuál habrá sido el precio de un destilador si actualmente cuesta 3500 pesos y se sabe que se devaluó 3/4 de su precio.

6. ¿Cuál es la razón de 0.1 milimol de una cantidad de sustancia a mol?

7. En un frasco de reactivo se utilizaron 2/3 de 125.3 gramos, ¿Cuántas libras existen?

8. La razón del peso de la capsula de porcelana (antecedente) y una muestra (consecuente) es de 82/3 previamente se sabe que la capsula de porcelana pesó 32.1 g ¿Cuál es el peso de la muestra?

9. Por acción de la radiación solar los rieles del sistema de transporte aumentan 1/1200 su longitud, los tramos miden 50 metros ¿Cuál sería la separación en centímetros para que al momento de aumentar su tamaño solo se toquen?

Como se mencionó pueden existir **razones heterogéneas**, estas razones nos dan ideas de una proporción por unidad de una magnitud.

Ejemplo 2

Resuelve los siguientes ejercicios de razones heterogéneas:

a) En una reacción química se consumen 720 mg de reactivo, la reacción se lleva a cabo en 3 horas ¿Cuál es la tasa de consumo del reactivo?
b) Una empresa farmacéutica ofrece un nuevo medicamento, por estrategia de venta se encuentra al 2x1 y 3x2 ¿Qué promoción conviene?
c) ¿Cuál es la velocidad de reacción de cierto analgésico por hora si la dosis de éste es una tableta de 500 mg cada 8 horas?
d) El crecimiento de un cultivo de bacterias es de 1200 por hora ¿Cuál es el crecimiento por minuto?

Solución a)

En una reacción química se consumen 720 mg de reactivo, la reacción se lleva a cabo en 3 horas ¿Cuál es la tasa de consumo del reactivo?

Se establece la razón:

$$\frac{720\,mg}{3\,h} = \mathbf{240}\,\frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{h}}$$

Solución b)

Una empresa farmacéutica ofrece un nuevo medicamento, por estrategia de venta se encuentra al 2x1 o 3x2 ¿Qué promoción conviene?

Se comparan las razones:

$$\frac{1}{2} = \mathbf{0.5} \qquad \frac{2}{3} = \mathbf{0.66}$$

Por lo tanto, conviene más al 2x1

Solución c)

¿Cuál es la velocidad de reacción de cierto analgésico por hora si la dosis de éste es una tableta de 500 mg cada 8 horas?

Se establece la razón para conocer la velocidad:

$$\frac{500\,mg}{8\,h} = \mathbf{62.5}\,\frac{\boldsymbol{mg}}{\boldsymbol{h}}$$

Solución d)

El crecimiento de un cultivo de bacterias es de 1200 por hora ¿Cuál es el crecimiento por minuto?

Se expresa mediante una razón de horas a minutos.

$$\frac{1200\,microorganismo}{h}\left(\frac{1h}{60\,min}\right) = \mathbf{20}\,\frac{\boldsymbol{microorganismos}}{\boldsymbol{min}}$$

Ejercicios de refuerzo 3.2

Resuelva los siguientes ejercicios de razones heterogéneas.

10. Una caja tiene 25 tubos con reactivo color rojo y 8 tubos con reactivo color azul ¿Cuál es la razón que existen entre los tubos?

11. Un galón de gasolina premium cuesta 85.6 pesos ¿Cuál es el costo por litro de gasolina?

12. En una reacción química $A+B \rightarrow C+D$ se consumen 37.6 g del reactivo A y 23.4 g del reactivo B, la reacción se desarrolla en 2.5 horas ¿Cuál es a tasa del consumo del reactivo A y del B?

13. El crecimiento del cultivo de bacterias es de 150 cada 20 minutos, ¿Cuál es el crecimiento por hora?

14. La edad de José y Florencia tiene una relación de 21 a 19 y la suma de ambos es 80 años. Hallar la edad de José y Florencia.

15. La edad de dos hermanas tiene una relación de 15 a 5 y la diferencia entre ambas es de 24. Hallar la edad de éstas.

16. La relación entre la edad de María y Luis es de 1:2 mientras que la relación de Luis con Penélope es de 2:6. Hallar las edades de los tres.

17. La edad entre Hugo y Paco es de 4:2 mientras que Hugo con Luis es de 8:4 la suma de los tres es 120. Hallar la edad de los 3.

18. La dosificación de un reactivo en un reactor químico es 35 libras cada 3 horas ¿Cuál es la velocidad de reacción en g/min?

19. El ingreso del reactivo A en una reacción es 25 g/s el reactivo B lo hace a razón 3/4 y el reactivo C el doble de B ¿Cuál es la dosificación de B y C?

20. Un dispositivo inyecta a un paciente un volumen de 2 mililitros que contiene 25 mg de un analgésico cada 8 horas, el paciente debe estar con el tratamiento 30 días ¿Qué cantidad de analgésico ingresó a su cuerpo? y ¿Qué volumen de analgésico se administró al paciente?

El uso de las razones en química es muy común ya que éstas ayudan a expresar la relación que hay entre cada una de las moléculas presentes en la reacción, así como la cantidad de moléculas por mol que se necesitan para obtener el producto o productos deseados.

Ejemplo 3

Exprese las razones de mol de moléculas en la siguiente reacción química y calcule los gramos de productos y reactivos cuando se agrega 2 moles de nitrógeno:

$$N_{2\,(g)} + 3H_{2\,(g)} \rightarrow \; 2NH_{3\,(g)}$$

Solución

Las razones aquí expresadas para la formación del amoniaco indican cuantas moles de hidrógeno se requieren para obtener 2 moles de amoniaco y de igual forma las moles necesarias de nitrógeno. Por otra parte, indica las cantidades de nitrógeno e hidrógeno necesarias para obtener amónico.

1 mol de molécula **N_2: 3 mol molécula de H_2**
1 mol de molécula **N_2: 2 mol de molécula de NH_3**
3 mol de molécula **H_2: 2 mol de molécula de NH_3**

La cantidad de gramos cuando se agregan 2 moles de nitrógeno.

$$2mol\ N_2\left(\frac{28\ g}{1\ mol\ N_2}\right) = \mathbf{56\ g\ de\ N_2}$$

$$2mol\ N_2\left(\frac{3mol\ H_2}{1\ mol\ N_2}\right)\left(\frac{2\ g}{1molH_2}\right) = \mathbf{12\ g\ de\ H_2}$$

$$2mol\ N_2\left(\frac{2mol\ NH_3}{1\ mol\ N_2}\right)\left(\frac{17\ g}{1mol\ NH_3}\right) = \mathbf{68\ g\ de\ NH_3}$$

Se puede ver que cada uno de los valores mostrados en las razones son conocidos en química como factores estequiométricos ya que estos permiten establecer una relación cuantitativa entre cada una de las especies involucradas en la reacción. Para así poder cumplir con la ley de conservación de la materia.

Entrada	Elemento	Salida
2	N	2
6	H	6

Ejercicios de refuerzo 3.3

Exprese las proporciones de las siguientes reacciones químicas.

21. $3NH_3 + 4H_2SO_4 \rightarrow 4S + 3HNO_3 + 7H_2O$
22. $3H_2S + 2HNO_3 \rightarrow 3S + 2NO + 4H_2O$
23. $3H_2S + K_2Cr_2O_7 + 4H_2SO_4 \rightarrow 3S + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 7H_2O$
24. $2KMnO_4 + 10KCl + 8H_2SO_4 \rightarrow 2MnSO_4 + 2K_2SO_4 + 8H_2O$

De las reacciones del ejercicio anterior calcule los gramos de producto y reactivos cuando se agrega:

25. 2 moles de amoniaco
26. 3.5 moles de ácido nítrico
27. 4 moles de dicromato de potasio
28. 0.5 moles de permanganato de potasio

Otra de las aplicaciones de las razones está en la determinación de las ecuaciones de conversión de unidades como es el caso de la escala de Celsius (°C) a Kelvin (K).

Puede observarse que cada una de las escalas se divide en 100 unidades de lo cual se puede expresar la siguiente relación.

$$\frac{t\,[°C]}{100} : \frac{t[K]}{100}$$

Hay que notar que la escala de Kelvin (K) presenta una diferencia de 273.15 con respecto a los °C, debido a esta diferencia es que por cada unidad K deberemos restar 273.15 unidades.

Por lo tanto, esta nueva relación queda de la siguiente manera:

$$\frac{t\,[°C]}{100} : \frac{t[K] - 273.15}{100}$$

Para conocer el valor de °C sólo es necesario despejar las 100 unidades de la escala centígrada obteniendo la siguiente función.

$$t[°C]: \left(\frac{t[K] - 273.15}{100}\right) 100 = t[K] - 273.15$$

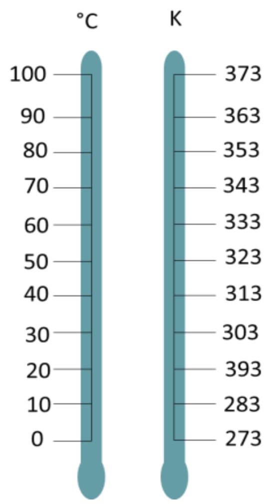


Figura 3.1 Escalas comparativas de temperatura de Celsius y de Kelvin.

Aplicando el mismo razonamiento que en el caso anterior resultan las siguientes relaciones:

$$\frac{t[°C]}{100} : \frac{t[°F]}{180}$$

Se observa que para este caso las escalas son diferentes para el caso de los grados Fahrenheit (°F) la escala está dividida en 180 unidades, y al igual que el caso anterior es necesario restar 32 unidades debido a su desplazamiento con respecto a los °C, por lo tanto, se tiene la siguiente función.

$$\frac{t[°C]}{100} : \frac{t[°F]-32}{180}$$

$$t[°C] : \left(\frac{t[°F]-32}{180}\right)100 = \frac{5}{9}(t[°F]-32)$$

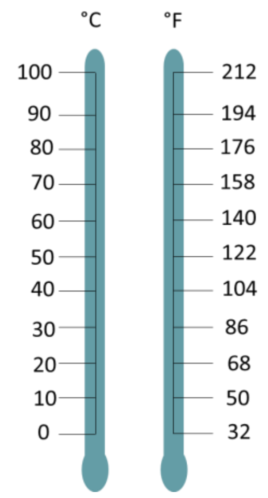


Figura 3.2 Escalas comparativas de temperatura de Celsius y de Fahrenheit.

Ejercicios de refuerzo 3.4

Obtenga las nuevas escalas de temperatura.

29. Se ha construido un termómetro empleando como líquido indicador etanol la temperatura de ebullición del etanol en grados centígrados es 78 °C, ésta equivale a 140° A (nueva escala) y con punto de fusión de -114 °C la cual corresponde a 0 °A. ¿Encontrar la ecuación que permita convertir °C a °A?

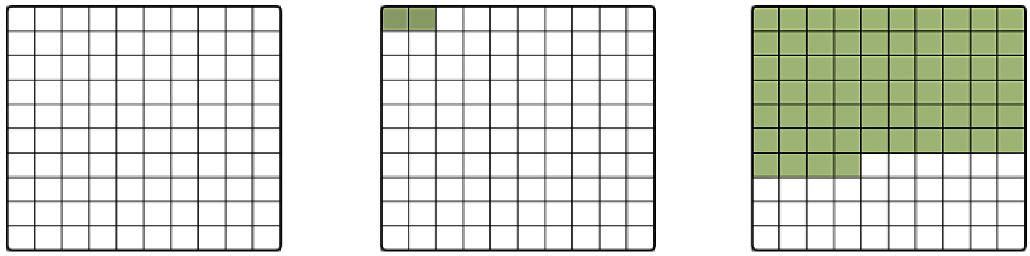
30. Un termómetro emplea como líquido indicador glicerina, se sabe que la temperatura de ebullición de éste es 290 °C, ésta equivale a 100 °Gli (nueva escala) y con punto de fusión de 18.1 °C la cual corresponde a 0 °Gli. ¿Encontrar la ecuación que permita convertir °Gli a °C?

31. Se ha elaborado un termómetro que usa dietiléter como líquido indicador, la temperatura de ebullición de dicha sustancia es 34.5 °C, ésta equivale a 110° De (nueva escala) y con punto de fusión de -114.3 °C la cual corresponde a 0 °De. ¿Encontrar la ecuación que permita convertir °De a C?

32. Un termómetro utiliza como líquido indicador dietiléter la temperatura de ebullición del dietiléter en grados centígrados es 308 K, ésta equivale a 210° De (nueva escala) y con punto de fusión de 159 K la cual corresponde a 0 °De. ¿Encontrar la ecuación que permita convertir °De a K?

3.2 Cálculo de porcentajes

El cálculo de porcentajes es una aplicación de la proporcionalidad directa al comparar cantidades y unidades de medidas como partes de un ciento. Observe las siguientes imágenes.



a) *b)* *c)*

Figura 3.3 Proporción de porcentaje. En el inciso a) se muestra un cuadro con 100 pequeños cuadros; cada uno de estos cuadrados es 1 parte de 100, en el inciso b) se muestra 2 cuadros de 100 y en inciso c) 64 cuadros de 100.

Por lo tanto, las imágenes b y c, representan los siguientes porcentajes 2% y 64%, es decir que en cada uno de ellos se colorearon, 2 cuadrados y 64 cuadrados los cuales forman parte de un total de 100 cuadrados respectivamente.

Definición

El porcentaje es una porción de un total o relativa y se representa con el símbolo **%.**

Para el cálculo de porcentaje se utiliza:

$$\frac{n_i}{N} * 100 = Porcentaje$$

Donde $\boldsymbol{n_i}$ *es el elemento i-ésimo* con respecto al total ***N.***

Esta ecuación muestra la proporción de un elemento $\boldsymbol{n_i}$ con respecto a un todo o total ***N*** el cociente de ambos da como resultado la proporción o fracción del elemento evaluado ahora realizando el producto de esta fracción por 100 obtenemos la relación porcentual o en porcentaje del elemento.

Ejemplo 4

En una fábrica donde se ensamblan 1500 unidades automotores, de los cuales 325 unidades son blancas, 150 son negras, 830 son rojas y 195 son azules. ¿Cuál es la relación porcentual entre colores que se producen?

Solución

Se puede ver que la fábrica construye 1500 autos los cuales representan el total de la producción N=1500 autos.

Comparando entre sí a 4 elementos (*i*) en este caso serán los colores y teniendo:

Elementos (n_i)	Fracción	Porcentajes
n_{blanco}= 325 autos	$\frac{325}{1500} = 0.21667$	$0.21666 * 100 = \mathbf{21.667}\ \%$
n_{negro}= 150 autos	$\frac{150}{1500} = 0.10000$	$0.10000 * 100 = \mathbf{10.000}\ \%$
n_{rojo}= 830 autos	$\frac{830}{1500} = 0.55333$	$0.55333 * 100 = \mathbf{55.\overline{333}}\ \%$
n_{azul}= 195 autos	$\frac{195}{1500} = 0.13000$	$0.13000 * 100 = \mathbf{13.000}\ \%$
Total	1.000	100%

Recordando que la suma de las fracciones es igual a 1 de forma similar la suma de los porcentajes de todos los elementos que forman parte del sistema de estudio debe dar 100 %.

La tabla muestra que el auto de color rojo es el de mayor producción con un 55.333%, seguido del blanco con 21.666%, en tercer lugar de producción tenemos el azul con 13% y por último el negro con un 10% de la producción total de automóviles.

El porcentaje tiene una gran utilidad en química cuando se requiere conocer la composición de cada elemento en una molécula o el porcentaje relativo de isótopos (átomo de un mismo elemento, el cual posee una cantidad distinta de neutrones).

Ejemplo 5

a) Calcule la abundancia relativa de cada isótopo del boro natural formado por B^{10} $(10.013\ uma)$ y B^{11} $(11.009\ uma)$, la masa atómica del boro es $10.811\ uma$.

b) Calcule la composición porcentual del sulfato de aluminio [Al_2 $(SO_4)_3$].

Solución a)

Sea x el porcentaje de abundancia del B^{10}

Entonces $(100-x)$ es el porcentaje de abundancia de B^{11}

$$10.811 = \frac{(10.13x) + [11.009(100-x)]}{100}$$

$$x = \mathbf{19.9\ \%\ de\ B^{10}}$$

$$(100-19.9) = \mathbf{80.1\ \%\ de\ B^{11}}$$

Solución b)

La molécula es: Al_2 $(SO_4)_3$

DATOS

Elemento	Al	S	O
Peso molecular (g/mol)	26.9	32.0	16.0

Peso molecular del sulfato de aluminio:

$$2(26.9) + 3(32.0) + 12(16) = \ 341.8\ g/mol$$

Porcentaje de Aluminio.

$$\%Al = \frac{2(26.9)g/mol}{341.8\ \mathrm{g/mol}} \times 100 = \mathbf{15.7}$$

Porcentaje de Azufre.

$$\%S = \frac{3(32.0)\ g/mol}{341.8\ \mathrm{g/mol}} \times 100 = \mathbf{28.1}$$

Porcentaje de Oxígeno.

$$\%0 = \frac{12(16)g/mol}{341.8\ \mathrm{g/mol}} \times 100 = \mathbf{56.1}$$

El siguiente ejemplo hace referencia a una disolución donde se expresan los porcentajes de cantidad de masa en términos de la mol (unidad básica en el Sistema internacional de cantidad de sustancia), que se obtiene con el cociente de la masa entre el peso molecular.

Ejemplo 6

Se mezclan 36 g de agua con 100 gramos de sulfato de cobre pentahidratado ($CuSO_4 \cdot 5H_2O$), ¿Cuál es el porciento en mol de agua presente?

Solución

Para resolver este problema inicialmente hay que convertir los gramos de cada una de las sustancias a unidad de mol.

DATOS

Elemento	Cu	S	O	H
Peso molecular (g/mol)	63.5	32.0	16	1.0

Mol de agua

$$36\ g\ H_2O\left[\frac{1\ mol}{(2(1.0)+16)g/mol}\right] = 2\ mol\ de\ H_2O$$

Mol de sulfato de cobre pentahidratado

$$100\ g\ CuSO_4 \cdot 5H_2O\left[\frac{1\ mol}{\big(63.5+32+10(1.0)+9(16)\big)g/mol}\right] = 0.4\ mol\ de\ CuSO_4 \cdot 5H_2O$$

La proporción porcentual de 5 mol de agua en el sulfato de cobre es:

$$\frac{5\ mol\ H_2O}{5\ mol\ H_2O + 1\ mol\ CuSO_4} * 100 = 83.333\ \%\ H_2O$$

Por lo que:

$$0.400\ mol\ CuSO_4.5H_2O * \frac{83.333\ \%}{100\ \%} = \mathbf{0.3333\ mol\ H_2O}$$

En 0.400 moles de sulfato de cobre pentahidratado hay 0.3333 mol de H_2O.

Sumando las moles de agua pura y las moles de agua del sulfato de cobre pentahidratado se tienen las moles de agua en la disolución.

Por lo tanto, n_i= 2.3333 mol de H_2O y las moles totales (N) será la suma de moles de $CuSO_4.5H_2O$ y las de agua pura N= 2.4

De estos datos es posible obtener el porciento en mol de agua presente en la disolución.

$$\frac{2.3333\ moles\ H_2O}{2.4\ moles\ totales} * 100 = \mathbf{97.221\ \%}$$

A través de este ejemplo se muestra el uso de los porcentajes como una aplicación directa, tal y como se emplea para determinar la parte proporcional de agua en la molécula de sulfato de cobre pentahidratado.

$$\boldsymbol{N * \frac{\%\, porcentaje}{100} = proporción}$$

Probablemente sea la operación más usada de los porcentajes, ya que a través de ella es posible calcular el ahorro que tendríamos al ir de compras a un centro comercial y aprovechar las ofertas que se anuncian.

También se pueden determinar las **fórmulas moleculares** de un compuesto, por lo que debe contarse con la siguiente información:

a) Los elementos que constituyen el compuesto.
b) La masa atómica de los elementos.
c) La composición porcentual del compuesto y la
d) Masa molecular del compuesto.

Ejemplo 7

¿Cuál es la fórmula molecular de un compuesto? Si al analizarlo se encontró que la masa molecular es de 178 y la composición porcentual es 40.01% de Carbono, 6.67% de hidrógeno y 53.32% de Oxígeno.

Solución

Primero se calcula la masa de cada compuesto.

$$Carbono: \quad 178\frac{40.01}{100} = 71.2\ g/mol$$

$$Hidrógeno: \quad 178\frac{6.67}{100} = 11.9\ g/mol$$

$$Oxígeno: \quad 178\frac{53.32}{100} = 94.9 g/mol$$

Ahora se calcula el número de átomos de cada elemento.

$$Carbono: \quad 71.2/12 \approx 6\ átomos$$

$$Hidrógeno: \quad 11.9/1 \approx 12\ átomos$$

$$Oxígeno: \quad 94.9/16 \approx 6\ átomos$$

Por lo tanto, la fórmula del compuesto es: $\boldsymbol{C_6H_{12}O_6}$

Ejercicios de refuerzo 3.5

Resuelva los siguientes ejercicios.

33. En el anaquel de un laboratorio se tiene material de vidrio. De éste, 600 son tubos de ensaye, 300 pipetas volumétricas, 250 son matraces Erlenmeyer de 250 mL, 280 son probetas de diferentes capacidades, 320 pipetas de diferente medida, 300 matraces aforados de diferentes volúmenes y 100 embudos de separación ¿Cuál es la relación porcentual entre cada uno de los materiales?

34. En una Preparatoria se tiene una población estudiantil de 2000 alumnos los cuales se encuentran distribuidos en las siguientes áreas: 500 en fisicomatemáticas, 245 en químico-biológicas, 800 en ciencias políticas y sociales, 100 en artes plásticas y 355 en filosofía y letras. ¿Cuál es la relación porcentual de alumnos por área?

35. Una mezcla acuosa ésta compuesta por 5 % de Urea, 15% de Vaselina, 20% de Glicerina y el resto de Agua. Calcular la cantidad másica que hay que agregar de cada uno de los componentes para hacer medio kilogramo de esta crema.

36. Una disolución acuosa está formulada por 0.05% de Glucosa, 17% de Cloruro de Sodio, 23% Cloruro de Potasio y 37 % de otras sales. Calcular la cantidad másica en gramos de cada una de los componentes para hacer 4.5 libras.

37. Calcule la abundancia relativa de los isótopos formados por Cu^{65} $(62.93\ uma)$ y Cu^{63} $(64.9278\ uma)$, la masa atómica del cobre es 63.55 uma.

38. Determine la abundancia relativa de los isótopos formados por Cl^{35} y Cl^{37}, cuyas masas atómicas son 34.968 y 36.956 respectivamente, la masa atómica del cloro es 35.45 uma.

39. El latón es una aleación de cobre (80%) y zinc (20%), se posee cobre al 85% de pureza y zinc al 90%. Se requiere generar 120 kilos de latón ¿Qué cantidad se tendrá que usar de cada metal?

40. Una mina produce 20 toneladas de cobre a partir de la calcopirita ($CuFeS_2$). La mena contiene sólo el 0.8% de cobre, si la densidad de la mena es 2.8 g/cm^3. Calcule el volumen (cm^3) de la mena al año.

41. Una solución se prepara con 10 gramos de NaCl al 75%, disueltos en 200 mL de agua ¿Cuál es la molaridad?

42. Se colocan 25 gramos de $[Cr(H_2O)_5Cl]Cl_2\cdot H_2O$ en 100 gramos de agua ¿Cuál es el porciento en mol de agua presente?

43. Se solubilizan 10 gramos de $[Co(NH_3)_5\cdot H_2O]Cl_3$ en 50 gramos de agua ¿Cuál es el porciento en mol del agua en la disolución?

44 En la combustión de cierta sustancia se encontró que 52.17 % correspondía a Carbono, 13.13 % Hidrógeno y 34.78 % Oxígeno; la masa molecular es de 46 g/mol.

45. La fórmula empírica del vinagre es de CH_2O ¿Cuál es la fórmula molecular si su masa aproximada es de 60 g?

46. Un compuesto tiene 1.52 g de Nitrógeno, 3.47 g de Oxígeno. Se sabe que la masa molar del compuesto es de 92 g/mol, determine la fórmula molecular del compuesto.

47. El glutamato monosódico (GMS) tiene la composición de 35.5% de Carbono, 4.7% de Hidrógeno, 37.8% de Oxígeno, 8.29% de Nitrógeno y 13.6% de Sodio ¿Cuál es su fórmula molecular si su masa molar es de 169 g?

Calcule la composición porcentual de las siguientes moléculas.

48. $[Pt(NH_3)_4][PtCl_6]$
49. $[Pt(NH_3)_4(NO_2)Cl]SO_4$
50. $[Co(NH_3)_4(H_2O)_2]Br_3$
51. $NH_4[Cr(SCN)_4(NO)_2]$
52. $[Cr(NH_3)_6][Co(CN)_6]$
53. $C_{55}H_{72}MgN_4O_5$ (Clorofila)
54. $[Ni(NH_3)_6]Cl_2$

En la preparación de soluciones, también se utiliza el porcentaje, entre las que están masa-masa, volumen-volumen y peso-volumen.

Definición

Las ecuaciones para soluciones porcentuales son:

$$\% \, p - p = \frac{m_{soluto}}{m_{solución}} \times 100 \qquad \% \, v - v = \frac{v_{soluto}}{v_{solución}} \times 100 \qquad \% \, p - v = \frac{m_{soluto}}{v_{solución}} \times 100$$

Ejemplo 8

Determinar la masa de soluto que se encuentra en una solución al 5 % p/p en 430 mL de agua. Considere la densidad del agua de $1 g/mL$.

Solución

Considere una base de cálculo de 100 gramos por lo tanto tendremos 5 gramos de soluto y 95 gramos de agua.

Ahora se puede expresar los 430 ml de agua = 430 g de agua, con ello los gramos de soluto son:

$$\frac{430 \, g \, agua \, (5 \, g \, de \, soluto)}{95 \, g \, de \, agua} = \mathbf{22.632 \, g \, de \, soluto}$$

Ejemplo 9

La fórmula química del nitrato de miconazol (antifúngico) es $C_{18}H_{14}Cl_4N_2O$. Determinar la composición porcentual del nitrato de miconazol. Masa molar = 416 g/mol

Solución

Se calculan los porcentajes, llenando la siguiente tabla:

Elemento	Masa molar (g/mol)	Mol/elemento	Masa (gramos)	Porcentaje p/p
C	12	18	216	51.923
H	1	14	14	3.365
Cl	35.5	4	142	34.135
N	14	2	28	6.731
O	16	1	16	3.846
			Masa total 416	100 %

Ejercicios de refuerzo 3.6

55. Calcule la masa del soluto en una solución al 11% p/p en 320 mL de agua. Considere una densidad del agua de 1 g/mL.

56. ¿Cuál es la masa del disolvente en una solución al 20% p/p con una cantidad de soluto de 15 gramos?

57. Obtenga la cantidad de soluto en una disolución al 30% v/v en 400 mL de agua. Considere una densidad de 1 g/mL.

58. Calcule la cantidad de disolvente en una solución al 25% v/v con una cantidad de soluto de 5 mL.

59. Obtenga la cantidad de disolvente que se necesita para preparar una solución al 10% v/v con 5g de soluto (considere que la densidad es 1.3 g/mL).

Calculé los porcentajes p/p de las siguientes moléculas:

60. $CaCO_3$ (Mármol).

61. $NaHCO_3$ (Polvo para hornear).

62. $CuFeS_2$ (Calcopirita, importante mena de cobre).

63. $CaSO_4 \cdot 2H_2O$ (Yeso).

64. $MgSO_4 \cdot 7H_2O$ (Sal de epsom).

65. $C_{2952}H_{4664}N_{812}O_{832}S_8Fe_4$ (Hemoglobina, transporta oxígeno a la sangre).

66. $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ (sosa para lavar).

3.3 Proporcionalidad directa e inversa

Íntimamente ligado al estudio de las razones está el tema de la proporción. Una proporción es aquella donde **dos razones se igualan**.

En consecuencia, el producto cruzado de los numeradores y denominadores serán iguales entre sí. Cualquier cambio de disposición entre los cuatro valores que forman una proporción que no modifique los productos cruzados de los numeradores y denominadores entre si dará lugar a una nueva igualdad de fracciones (Figura 3.4).

$$\begin{tikzcd}
\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & & \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \arrow[d, leftrightarrow] \\
 & \boldsymbol{a\cdot d = b\cdot c} & \\
\frac{d}{b}=\frac{c}{a} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \frac{d}{c}=\frac{b}{a}
\end{tikzcd}$$

Figura 3.4 Descripción de una proporción para describir las cuatro igualdades equivalentes entre dos fracciones (que suelen ser interpretadas como razones).

En la práctica una de las fracciones tendrá el numerador o el denominador desconocido y se plantea el problema de encontrar su valor usando la relación de proporcionalidad que se establece. Se dice que las magnitudes pueden compararse entre sí de tres formas **proporcionales, inversas y compuestas**.

Para que dos magnitudes mantengan una relación de **proporcionalidad directa** tienen que estar relacionadas de tal manera que, si se duplica una, la otra se duplica también, si se triplica una de ellas la otra también se triplica y si una se reduce a la mitad la otra también se reduce a la mitad.

Cuando dos magnitudes son **directamente proporcionales,** se escribe**:**

$$A \propto B$$

Ellas se relacionan por un valor constante, se cambia el símbolo de proporcionalidad por un igual y una constante.

$$A = KB$$

Se despeja la constante:

$$K = \frac{A}{B}$$

Esta proporcionalidad se puede entender de la siguiente manera: al aumentar una magnitud la otra lo hace también; gráficamente corresponde a una **función creciente.** Es decir que cualquier aumento o diminución en una de las cantidades, la otra debe aumentar o disminuir en forma proporcional.

Ejemplo 10

Si A, varía directamente proporcional con B, se sabe que $A = 600$ y $B = 250$. Encuentre A cuando $B = 75$.

Solución

Primero se calcula la constante:

$$K = \frac{600}{250} = 2.4$$

Ahora:

$$A = (2.4)(75)$$

$$\mathbf{A = 180}$$

En muchas situaciones prácticas se establecen relaciones entre las cantidades de dos magnitudes, de tal modo que las cantidades de una de ellas se obtiene multiplicando un mismo número las distintas cantidades de la otra.

Gramos de reactivo	1	2	3	4	5	6
Precio Pesos MXN	13	26	39	52	65	78

Guy-Lussac en 1800 estableció una relación entre la presión y la temperatura manteniendo el volumen constante (Figura 3.5). “Cuando el volumen del recipiente es constante la presión del sistema aumenta de manera **directamente** proporcional a la temperatura”.

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

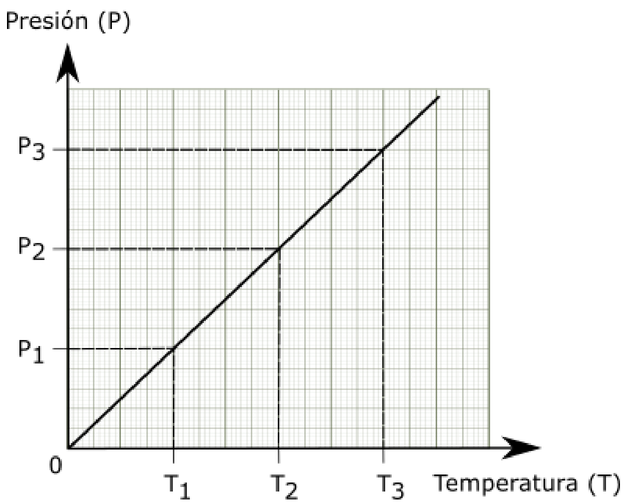


Figura 3.5 Relación proporcional de la Presión y la Temperatura, representada por la ecuación de Guy-Lussac

Ejemplo 11

Sé sabe que 1 pie (ft) es a 30.48 cm, ¿Cuántos pies hay en 60 cm?

Solución

En la siguiente tabla podemos ver que se trata de una relación directa entre ambas unidades de longitud.

ft	1	2	3	4	5	60
cm	30.48	60.96	91.44	121.92	152.4	1828.8

Resolviendo el cociente de $\frac{pies\ (ft)}{cm}$ se observa que se guarda una relación constante de 0.0328.

Esta es una propiedad de las proporciones directas. Ahora bien, para conocer la proporción solicitada en el enunciado se debe establecer primero, las razones involucradas.

$$\frac{30.48\ cm}{1\ ft} = \frac{60\ cm}{x\ ft}$$

De la presente ecuación se despeja x que es la incógnita por buscar.

$$x\ ft = \left[\frac{\frac{60\ cm}{1}}{\frac{30.48\ cm}{1 ft}}\right] = \frac{60\ \cancel{cm} * ft}{30.48\ \cancel{cm}} = 1.969\ ft$$

De esta relación se establece la siguiente correspondencia:

$$\boldsymbol{ft = 0.0328(x\ cm)}$$

Ejemplo 12

Se requiere saber la temperatura a la cual una reacción se efectúa, inicialmente se encuentra a 25 °C y una presión de 586 mmHg. Tiempo después el manómetro da una lectura constante de 733.41 mmHg de presión.

Solución

Primero se convierte la temperatura de grados centígrados a grados kelvin, para ello emplearemos la relación de °C y K.

$$K = 273.15 + 25 = 298.15\ K$$

Utilizando esta temperatura y despejando la T_2 de la ecuación de Guy Lussac, se tiene la siguiente ecuación.

$$T_2 = \frac{P_2 T_1}{P_1} = \frac{733.41\,mmHg * 298.15K}{586\,mmHg} = 373.15\,K$$

Transformando esta temperatura °C, se tiene que la temperatura es:

$$K = 373.15 - 273.15 = \mathbf{100\,°C}$$

Ejercicios de refuerzo 3.7

Resuelva los siguientes ejercicios de proporciones directas.

67. Los valores de A y B son directamente proporcionales, se sabe que A es 50 y B es 35 ¿Cuál es el valor de B cuando A es 10?

68. La variación de B es el triple del cuadrado de C ¿Cuál es el valor de B cuando C tiene un valor de 216?

69. El cambio de A es directamente proporcional con el doble de la raíz cuadrada de B ¿Cuánto vale B si A toma el valor de 72?

70. ¿Cuantos pies existen en 2 millas?

71. Se tienen 1200 mililitros de volumen, exprese esta cantidad en galones y pulgadas cúbicas.

72. ¿Qué cantidad es mayor (compárelo con gramos) 35 libras o 15 onzas?

Utilice la ley de Gay Lussac ($P_1T_2 = P_2T_1$) para resolver los siguientes ejercicios:

73. ¿Cuál es la presión final para una temperatura de 150 °C, en cierta reacción, sabiendo que inicialmente se tenía una presión de 1 atmósfera y una temperatura de 25°C?

74. Para un proceso químico un equipo reporta inicialmente una temperatura de 30°C y una presión de 1.5 atmósferas, si la presión se triplica ¿Cuál es la temperatura en el equipo?

75. Una mezcla exotérmica requiere ser controlada con presión, se presenta durante la reacción una temperatura de 500°C y una presión de 50000 mm de Hg y se requiere aumentar la temperatura a 750 °C ¿Cuál será la presión que debe de registrar el manómetro?

Utilice la ley de Charles ($T_2V_1 = T_1V_2$) para resolver los siguientes ejercicios:

76. Un volumen de 9 litros de gas hidrógeno está a 88 °C, se enfría hasta que su volumen disminuye a 2 litros ¿Cuál es la temperatura del gas?

77. Una muestra de CO_2 ocupa un volumen de 3 litros a 120 °C. Calcule la temperatura a la cual el gas ocupa un volumen 0.5 Litros.

78. Una cantidad de 50 litros de gas metano gaseoso se calienta desde 25° hasta 90°C ¿Cuál es su volumen final?

79. Una cantidad de 1.5 litros de amoniaco se calienta el doble de su temperatura inicial ¿Cuál es su volumen final?

Ahora para dos magnitudes **inversamente proporcionales** se tiene **que** $A \propto B$.

Ellas se relacionan por un valor constante, cambiamos el símbolo de proporcionalidad por un igual y una constante.

$$A = \frac{K}{B}$$

Se despeja la constante:

$$K = AB$$

Esta proporcionalidad indica que al aumentar magnitud la otra disminuye; gráficamente corresponde a una **función decreciente.**

Ley de Boyle-Mariotte, enuncia que manteniendo la temperatura constante la presión aumenta de manera inversamente proporcional con el volumen (Figura 3.6).

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

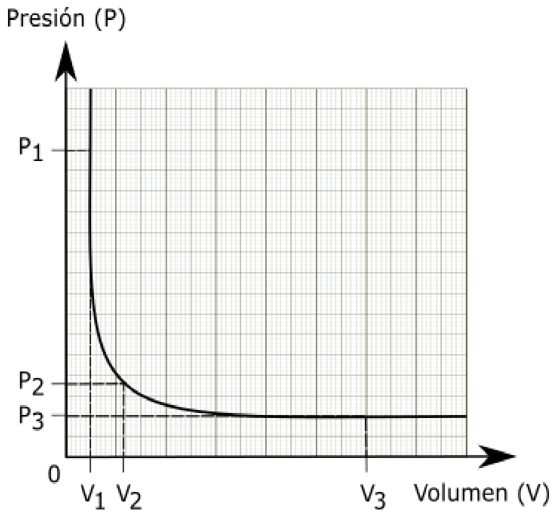


Figura 3.6 Relación inversamente proporcional de la Presión y el Volumen, representada por la ecuación Boyle-Mariotte

Ejemplo 13

Si las magnitudes de A y B son inversamente proporcionales, encuentre $x + y$.

A	4	y	12
B	x	10	5

Solución

Primero se calcula la constante con los valores que se tienen de A y de B:

$$K = 12(5) = 60$$

Ahora para x se tiene:

$$A = \frac{K}{x}$$

Por lo tanto

$$x = \frac{60}{4} = \mathbf{15}$$

Finalmente para y

$$B = \frac{K}{y}$$

$$y = \frac{60}{10} = 6$$

La operación que se solicita es $x + y$

$$x + y = 15 + 6$$

$$\boldsymbol{x + y = 21}$$

Ejemplo 14

¿Cuál es el volumen ocupado por 25 litros de gas a 1 atm de presión después de que ha sido comprimido a temperatura constante hasta 4 atm?

Solución

De la ecuación propuesta por Boyle se despeja el V_2 para asi obtener su valor a la presión indicada.

$$V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$V_2 = (25\ lt)\left(\frac{1\ atm}{4\ atm}\right)$$

$$\boldsymbol{V_2 = 6.2\ lt}$$

Ejercicios de refuerzo 3.8

Resuelva los siguientes ejercicios de proporciones inversas.

80. El comportamiento de la viscosidad con respecto a la temperatura de cierto aceite lubricante se puede observar en la siguiente tabla:

Temperatura (°C)	30	42	y
μ (cp)	70	x	35

Encuentre la viscosidad a 42 °C y la temperatura a la cual la viscosidad es 35 cp.

81. La variación de presión y volumen de cierto gas se presenta en la siguiente tabla.

P (mm de Hg)	724	x	998
V (Litros)	1.5	1.33	y

Encuentre el producto PV que corresponde a xy.

82. El amoniaco gaseoso tiene un comportamiento casi lineal con respecto a la viscosidad y la temperatura, por lo tanto una buena aproximación es aplicar la ecuación $\boldsymbol{T_1\mu_1 = T_2\mu_2}$**.** Calcule la viscosidad a 60°, si a 30° la viscosidad es 0.16 cp.

83. Con esta tabla prediga la viscosidad a 50 °C y encuentre la temperatura a la cual la viscosidad es 0.5 cp.

Temperatura (°C)	40	70	100
μ (cp)	1.05	0.6	0.42

Utilice la ley de Boyle $(\boldsymbol{P_1V_1 = P_2V_2})$ para resolver los siguientes ejercicios:

84. Una muestra de cloro gaseoso ocupa un volumen de 350 mL a una presión de 720 mm de Hg. Calcule la presión del gas si el volumen se reduce a 50 mL.

85. Un gas ocupa un volumen de 725 mL y la presión es 1.2 atmosferas, el gas se expande a temperatura constante hasta una presión de 0.5 atmosferas ¿Cuál es el volumen final?

86. A 323 Kelvin una muestra de amoniaco ejerce una presión de 5.5 atmosferas ¿Cuál es la presión para que el volumen se reduzca a 1/5 de su valor original, manteniendo la misma temperatura?

87. El volumen de un gas es de 6 litros, cuando la presión es de 1.5 atmosferas ¿Qué volumen ocupa cuando la presión es de 7 atmosferas?

Las proporciones y su importancia en medicina

Escrito por: Dr. Isaac Senado Lara
Centro Médico Nacional, 20 de noviembre del ISSSTE
surgysen1@yahoo.com.mx

Tenemos que una proporción es la igualdad entre dos o más razones, y una razón es la comparación de dos cantidades, por medio de división o cociente. (1)

Tomaremos como ejemplo al cáncer de próstata, ya que es una de las principales causas de muerte en los hombres en México, que ha aumentado desde 2005. (2)

De acuerdo con el INEGI en México había una población de 119 530 753 personas, de la cual 48.6% eran hombres y 51.4% mujeres. Entonces la proporción fue de 94.4 hombres por cada 100 mujeres. (3)

En 2018 se presentaron en México 25049 casos de cáncer de próstata, mientras que el número de defunciones por este cáncer fue de 6915. (4)

Desafortunadamente hasta un 70% de los casos de cáncer de próstata que se detectan cada año están en un grado avanzado de enfermedad.

Es importante la difusión para el diagnóstico temprano, ya que en esta etapa no hay síntomas.

En el rubro de la detección se encuentra el examen digitorrectal y la toma de muestra en sangre del Antígeno Prostático Específico (APE).

En los siguientes casos es recomendable tomar muestras de tejido prostático (biopsias) para descartar este cáncer:

- En los pacientes sin sospecha al tacto rectal, pero con alteración en los niveles de APE entre 4 y 10 ng/ml.

- Hay una parte del APE que se une a las proteínas del cuerpo y otra porción circula libre por la sangre. Entonces, la disminución del 20% de la fracción libre (la proporción menor de 8/2 es sospechosa de tener tumor).

- Densidad mayor de 0.15. Se usa en los hombres que tienen glándulas prostáticas grandes para tratar de corregir las variaciones de APE debidas al tamaño de la próstata. Se mide el tamaño de la próstata mediante una ecografía transrectal y divide el número de PSA entre el volumen de la próstata. Una densidad alta de PSA indica una mayor probabilidad de que haya cáncer.

- Velocidad mayor de 0.75ng/ml/año y tiempo de duplicación menor a 3 meses. Medida que indica cuán rápido el PSA aumenta a medida que pasa el tiempo. Normalmente, los niveles del APE se incrementan lentamente con la edad. Algunos estudios han encontrado que estos niveles aumentan más rápidamente si un hombre tiene cáncer. (5)(6)

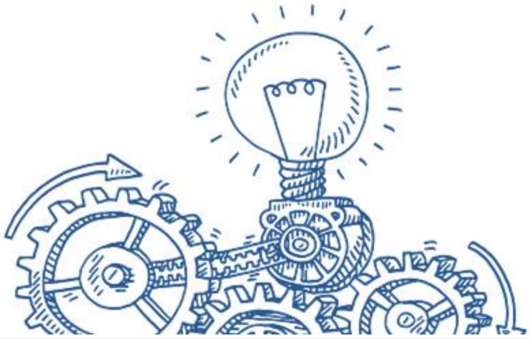
La toma de biopsias se realiza con apoyo de estudios de imagen como ultrasonido con sus diferentes modalidades (con contraste, de alta resolución, microultrasonido, etc), en casos seleccionados por Resonancia Magnética. (7)

En la biopsia prostática el cáncer puede medirse en términos del número de muestras positivas, el total de milímetros de cáncer en todas las muestras, el porcentaje de cáncer en cada muestra y el porcentaje total de cáncer en el total de la muestra. La extensión del cáncer se puede predecir con bastante exactitud combinando el grado obtenido en la punción de biopsia con el estadio clínico y los valores en sangre de APE. (8)

Como vemos, el uso de las Matemáticas y en especial de las proporciones en el caso del cáncer de próstata nos apoya en cada momento en la toma de decisiones desde el diagnóstico, elegir el tratamiento óptimo y seguimiento de los pacientes.

Referencias

1. Razones y proporciones. Educación Matemática Primer nivel o ciclo de Educación Media Educación para Personas Jóvenes y Adultas. Ministerio de Educación, Gobierno de Chile, 2013.
2. Reynoso-Noverón N. & Torres Domínguez J.A. Epidemiología del cáncer en México: carga global y proyecciones 2000-2020. Revista Latinoamericana de Medicina Conductual. Vol. 8, Núm. 1, Agosto 2017-Enero 2018: 9-15.
3. Encuesta Intercensal 2015 del Instituto Nacional de Estadística y Geografía, (INEGI). p:1.
4. GLOBOCAN. The Global Cancer Observatory, México. World Health Organization, May 2019. p. 2
5. Guía de Práctica Clínica. Diagnóstico y Tratamiento del Cáncer de Próstata en el Segundo y Tercer Nivel de Atención. Centro Nacional de Excelencia Tecnológica en Salud, México, 2010. Pp: 13-14.
6. Detección temprana, diagnóstico y clasificación por etapas. American Cancer Society. cancer.org | 1.800.227.2345 agosto 1, 2019. Pp. 6-20
7. Guidelines of Prostate Cancer. European Association of Urology. 2020.
8. G. A. Hernández-Palacios et.al.Correlación entre número de cilindros positivos y enfermedad extraprostática en pacientes operados de prostatectomía radical. Revista Mexicana de Urología. 2014;74(3):146-154.



Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 3. Razones y proporciones

1. $a)$ 0.52 $b)$ $\frac{1}{4}$ $c)$ $\frac{1}{8}$ $d)$ 0 $e)$ $\frac{1}{3}$ **3**. 9.1 **5**. 2625 **7**. 0.1837 lb **9**. 4.1 cm **11**. $22.6\frac{\$}{\text{litro}}$

13. $450\frac{\text{bacetrias}}{\text{hora}}$ **15**. $\text{t}(°\text{C}) = \frac{74}{55}\text{De} - 114$ **17**. José 42 años, Florencia 38 años

19. Hugo 60 años, Paco y luis 30 años cada uno **21**. (3: 4), (3: 3), (3: 7), (4: 4), (4: 3), (4: 7)

23. (3: 3), (3: 1), (3: 1), (3: 7), (1: 3), (1: 1), (1: 1), (1: 7), (4: 3), (4: 1), (4: 1), (4: 7)

25. $H_2SO_4 = 261.333g, S = 85.333g, HNO_3 = 126, H_2O = 84g$ **27**. $H_2S = 408g$

$H_2SO_4 = 1568g, S = 384, Cr_2(SO_4)_3 = 1568g,$ $K_2SO_4 = 696,$ $H_2O = 504\ g$

29. $t(A°) = \frac{35}{48}(t(°C) + 114)$ **31**. $t(°C) = \frac{74}{55}°De - 114$ **33**. *Tubos de ensayo* 27.9%, *Pipetas* 13.9%, *Matraz Enlemneyer*, 11.6%, *Probetas* 13%, *Pipetas* 14.8%,

Matraz aforado 13.9% *y Embudos de separación* 4.6% **35**. 25*g de urea*, 75*g de vaselina*,

100*g de glicerina y* 300 *g de agua* **37**. 68.96% *de* Cu^{65} 31.01% *de* Cu^{63} **39**. 112.9 Kg de Cu

y 26.6 Kg de Zinc **41**. $0.64\frac{\text{mol}}{\text{L}}$ 43. 94.1% **45**. $C_2H_4O_2$ **47**. $C_5H_8O_4NNa$

49. Pt 44.2%	**51**. N 27%	**53**. C 20.4%	**55**. 35.2 g
N 15.8%	H 1.1%	H 24.5%	**57**. 120 g
H 2.7%,	Cr 14.14%	Mg 8.2%	**59**. 34.6 mL
0 21.7%	S 35.3%	N 19.6%	
Cl 8.1%	C 13.2%	0 27.2%	
S 7.2%	O 8.8%		

61. Na 27.3% H 1.2% C 14.2% O 57.1% v **63**. Ca 23.2% S 18.6% O 55.8% H 2.3%

65. C 54.3% H 7.1% N 17.4% O 20.4% S 0.4% Fe 0.3% **67**. $B = 7$ **69**. $B = 1296$

71. 0.3 Gal 19200 in^3 **73**. 6 atm **75**. 75000 $mm\ de\ Hg$ **77**. 20$°C$ **79**. 3L

81. 881.8 (PV) **83**. 1.2 cp **85**. 5040 $mm\ de\ Hg$ **87**. 1.3 L

4

Potencias y Raíces

LO QUE APRENDERÁS. . .

4.1 Leyes de potencias y raíces.
4.2 Potencias negativas y potencia cero.
4.3 Expresión de la raíz n-ésima como potencia fraccionaria.
4.4 Cálculo de raíces n-ésima usando factores primos.
4.5 Radicalización de un radical.
4.6 Racionalización de radicales.
4.7 Suma de radicales.

4.1 Leyes de potencias y raíces

La potenciación resulta de la repetición de la multiplicación, por ejemplo.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

En la expresión:

$$a^n$$

a Es la base.
n Es el exponente.

El resultado, es decir a^n es la n-ésima potencia de a.

También existe la potencia fraccionaria, conocida como "raíz", a la que recurre nuestro amigo de la caricatura.

ADVERTENCIA: LAS POTENCIAS SE LLEVAN MAL CON LAS SUMAS.

Las leyes de las potencias se usan para simplificar multiplicaciones, pero cuando se tiene una suma de factores que se encuentran elevados a alguna potencia las leyes que a continuación se ejemplifican no aplican.

MULTIPLICACIÓN DE POTENCIAS CON LA MISMA BASE

Si necesitamos multiplicar 2^4con 2^2 se obtiene 2^6 ya que en la primera potencia existen 4 factores y en la segunda potencia hay 2; en total son 6.

$$\begin{aligned} 2^4 \cdot 2^2 &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2) \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2) \\ &= 2^6 \end{aligned}$$

La ley se resume como: $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

MULTIPLICACIÓN DE POTENCIAS CON LOS MISMOS EXPONENTES

Si se requiere multiplicar 2^3 con 5^3 se obtiene 10^3 ya que la primer potencia hay 3 factores 2 y en la segunda potencia hay 3 factores 5, así que hay tres factores $2 \cdot 5 = 10$:

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 5^3 &= (2 \cdot 2 \cdot 2)(5 \cdot 5 \cdot 5) \\ &= (2 \cdot 5)(2 \cdot 5)(2 \cdot 5) \\ &= 10^3 \end{aligned}$$

La ley se resume como: $\boldsymbol{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}$

POTENCIACIÓN DE POTENCIAS

Si se solicita 5^4 a la tercera potencia, se obtiene 3 factores 5^4 es decir $3 \cdot 4$ factores de 5:

$$(5^4)^3 = (5^4) \cdot (5^4) \cdot (5^4)$$
$$= (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)$$
$$= 5^{12}$$

La ley se simplifica como: $$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$$

DIVISIÓN DE POTENCIAS CON LA MISMA BASE

Si necesitamos dividir 2^5 entre 2^3 se obtiene 2^2, ya que la primera potencia hay 5 factores 2 y en la segunda potencia hay 3. Por la simplificación de fracciones quedan 2 factores:

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}$$
$$= 2 \cdot 2$$
$$= 2^2$$

La ley se simplifica como: $$\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

DIVISIÓN DE POTENCIAS CON LOS MISMOS EXPONENTES

Si se requiere dividir 10^3 entre 2^3 se obtiene 5^3, ya que la primera potencia hay 3 factores 10 y en la segunda potencia 3 factores 2. Por lo tanto hay 3 factores de 5:

$$\frac{10^3}{2^3} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{2 \cdot 2 \cdot 2}$$
$$= \left(\frac{10}{2}\right) \cdot \left(\frac{10}{2}\right) \cdot \left(\frac{10}{2}\right)$$
$$= 5^3$$

La ley se reduce como: $$\boldsymbol{\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

4.2 Potencias negativas y potencia cero

POTENCIAS NEGATIVAS

Una potencia negativa tiene un significado cuando se habla de una fracción, por ejemplo la expresión $\mathbf{2^{-3}}$, es una convención a primera lectura sin sentido porque se leería como "*existen* -3 *factores* 2".

Como las potencias negativas cumplen con las leyes de las potencias que se han visto, entonces $\mathbf{2^{-3}}$ solo puede significar lo siguiente:

$$2^{-3} = \frac{1}{8}$$

La explicación es la siguiente:

$$2^{-3} = 2^{2-5} = \frac{2^2}{2^5} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

En general se puede formular esta ley como:

$$\boldsymbol{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

POTENCIA CERO

Si se piensa en una potencia cero, sólo se podría obtener en una resta de potencia, por ejemplo:

$$3^0 = 3^{2-2} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 1$$

La única interpretación de esto es el número 1:

$$3^0 = 1$$

Por lo tanto, cualquier número elevado a la cero es la unidad.

$$a^0 = 1$$

Concretando se tiene:

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

En resumen las leyes de las potencias son:

Definición

Multiplicación de potencias con la misma base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Multiplicación de potencia con los mismos exponentes	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
Potencia de potencias	$(a^m)^n = a^{mn}$
División de potencias con la misma base	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
División de potencias con los mismos exponentes	$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
Potencias negativas	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
Potencia cero	$a^0 = 1$

Ejemplo 1

Calcule las siguientes operaciones sin utilizar calculadora.

$a)\ \frac{3^7}{18 \cdot 3^2}$ $\qquad b)\ \frac{(3^{-3})^{-2} \cdot (3^2)^{-1}}{(3^2)^{-4} \cdot (9^2)^{-4}}$

Solución

$a)\ \frac{3^7}{18 \cdot 3^2}$

Primero se expresa 18 como $2 \cdot 3^2$

$$\frac{3^7}{18 \cdot 3^2} = \frac{3^7}{2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}$$

Ahora se utiliza la ley de Multiplicación de potencias con la misma base:

$$\frac{3^7}{2 \cdot 3^4}$$

Se usa la ley de División de potencias con la misma base

$$\frac{3^{7-4}}{2}=\frac{\mathbf{3^3}}{\mathbf{2}}$$

$b)\quad \dfrac{(3^{-3})^{-2}\cdot(3^2)^{-1}}{(3^2)^{-4}\cdot(9^{-2})^{-4}}$

Se utiliza potencia de potencias y se expresa 9 como 3^2.

$$\frac{3^6\cdot 3^{-2}}{3^{-8}\cdot 3^{16}}$$

Ahora se aplica la ley de Multiplicación de potencias con la misma base.

$$\frac{3^{6-2}}{3^{-8+16}}=\frac{3^4}{3^8}$$

Se emplea la ley de División de potencias con la misma base.

$$\frac{3^4}{3^8}=3^{4-8}$$

El resultado es una potencia negativa.

$$3^{-4}$$

La forma como potencia positiva es:

$$3^{-4}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^4}}$$

Ejercicios de refuerzo 4.1

Calcule el resultado de las siguientes operaciones sin utilizar calculadora.

1. $(2^{\,3})^{-2}$
2. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$
3. $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{-4}$
4. $\left[\dfrac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}\right]^2$
5. $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}}$
6. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3\right]^2$
7. $\left(\dfrac{2^2\cdot 3^4\cdot 4^2}{2^5\cdot 3^2}\right)^2$
8. $\dfrac{10^{1/3}}{2^{-4/3}.5^{-11/3}}$
9. $\dfrac{2^{-1/2}\cdot 3^{3/4}\cdot 4^3}{2^{5/2}\cdot 3^{-1/4}\cdot 4^{3/2}}$
10. $\dfrac{\left\{\left[2^{1/3}\right]^{1/2}\right\}^{-4}}{\left\{\left[8^{-1/2}\right]^{-1/4}\right\}^3}$
11. $\left[\left(\frac{1}{2}-1\right)^3\right]^2$
12. $\left[\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)^{-1}\right]+\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{7}{9}\right)^2\right]$

4.3 Expresión de una raíz n-ésima como potencia fraccionaria

Ahora se puede pensar en que la **potencia sea un número fraccionario**, por ejemplo $2^{\frac{1}{3}}$. La única forma de hacerlo utilizando las leyes de las potencias es manejar $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. La expresión se puede entender como:

$$3 = 3^1$$

Por tanto.

$$3 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

El único número positivo de raíz de tres elevado al cuadrado es 3, de ahí la equivalencia de $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, por ello tiene sentido que:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Generalizando se tiene:

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$$

Ejemplo 2

Simplifique las siguientes expresiones:

$a)$ $\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{3}}{9\cdot\sqrt[4]{3}}$ $\qquad b)$ $\sqrt[3]{\dfrac{a^5\sqrt{a}}{\sqrt{a^5}}}$ $\qquad c)$ $\left[\left(\dfrac{a^2b^{2/3}c^4}{\sqrt{a}b^2c^{1/2}}\right)^2\sqrt{\dfrac{a^{3/2}bc}{a\sqrt{b^3}}}\right]^{1/3}$

Solución a)

Primero se expresa la raíz como una potencia fraccionaria.

$$\frac{3^{1/3}\cdot 3^{1/2}}{3^2\cdot 3^{1/4}}$$

Ahora se aplica la ley de Multiplicación de potencias con la misma base.

$$\frac{3^{1/3+1/2}}{3^{2+1/4}} = \frac{3^{5/6}}{3^{9/4}}$$

Se emplea la ley de División de potencias con la misma base.

$$\frac{3^{5/6}}{3^{9/4}} = 3^{5/6-9/4}$$

$$3^{-17/12}$$

El resultado tiene potencia negativa, se expresa con potencia positiva, quedando:

$$\mathbf{\frac{1}{3^{17/12}}}$$

Solución b)

Primero se pasan a potencias fraccionarias las raíces.

$$\sqrt[3]{\frac{a^5\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}} = \left(\frac{a^5 \cdot a^{1/2}}{a^{1/5}}\right)^{1/3}$$

Se aplican las reglas de potencias; primero la ley de Multiplicación de potencias con la misma base.

$$\left(\frac{a^{5+1/2}}{a^{1/5}}\right)^{1/3}$$

Ahora la ley de División de potencias con la misma base.

$$\left(\frac{a^{11/2}}{a^{1/5}}\right)^{1/3}$$

Se utiliza la ley de potencia de potencias.

$$\left(a^{11/2-1/5}\right)^{1/3}$$

$$\left(a^{53/10}\right)^{1/3}$$

Finalmente.

$$\boldsymbol{a^{53/30}}$$

Solución c)

Primero todo se expresa con potencia fraccionaria.

$$\left[\left(\frac{a^2b^{3/2}c^4}{a^{1/2}b^2c^{1/2}}\right)^2\left(\frac{a^{3/2}bc}{ab^{3/2}}\right)^{1/2}\right]^{1/3}$$

Se agrupan términos.

$$\left[\left(\frac{a^2}{a^{1/2}}\cdot\frac{b^{3/2}}{b^2}\cdot\frac{c^4}{c^{1/2}}\right)^2\left(\frac{a^{3/2}}{a}\cdot\frac{b}{b^{3/2}}\cdot c\right)^{1/2}\right]^{1/3}$$

Ahora la ley de División de potencias con la misma base.

$$\left[\left(a^{2-1/2}\cdot b^{3/2-2}\cdot c^{4-1/2}\right)^{2}\left(a^{3/2-1}\cdot b^{1-3/2}\cdot c\right)^{1/2}\right]^{1/3}$$

$$\left[\left(a^{3/2}\cdot b^{-1/2}\cdot c^{7/2}\right)^{2}\left(a^{1/2}\cdot b^{-1/2}\cdot c\right)^{1/2}\right]^{1/3}$$

Se utiliza la ley de potencia de potencias.

$$\left[a^{3}\cdot b^{-1}\cdot c^{7}\cdot a^{1/4}\cdot b^{-1/4}\cdot c^{1/2}\right]^{1/3}$$

Se agrupan los términos.

$$\left[a^{3}\cdot a^{1/4}\cdot b^{-1}\cdot b^{-1/4}\cdot c^{7}\cdot c^{1/2}\right]^{1/3}$$

Ahora se aplica la ley de Multiplicación de potencias con la misma base.

$$\left[a^{3+1/4}\cdot b^{-1-1/4}\cdot c^{7+1/2}\right]^{1/3}$$

$$\left[a^{13/4}\cdot b^{-5/4}\cdot c^{15/2}\right]^{1/3}$$

Nuevamente se utiliza la ley de potencia de potencias.

$$a^{13/12}\cdot b^{-5/12}\cdot c^{5/2}$$

El resultado se tiene a la base "b" con potencia negativa, se expresa con potencia positiva, quedando:

$$\frac{a^{13/12}\cdot c^{5/2}}{b^{5/12}}$$

Se homologan las potencias con denominador 12.

$$\frac{a^{13/12}\cdot c^{30/12}}{b^{5/12}}$$

Finalmente se expresa como raíz:

$$\sqrt[12]{\frac{a^{13}c^{30}}{b^{5}}}$$

Ejercicios de refuerzo 4.2

Simplifique las siguientes raices utilizando potencias fraccionarias.

13. $\sqrt[4]{3}$

14. $\sqrt[16]{2\sqrt{4}}$

15. $\sqrt{\frac{10}{3}\sqrt{2}}$

16. $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}}$

17. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

18. $\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}}$

19. $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}\right)^{48}$

20. $\frac{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}$

21. $\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{4\sqrt{6}}}{3\sqrt{2}}}$

22. $\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^5}}{c^{-3}d^2}}$

23. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\right)^2$

24. $\left(\sqrt{\frac{2^3\cdot 5^5}{2^{-1}\cdot 5^3}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{2^4\cdot 5^{-1}}{2^5\cdot 5^{-1}}}\right)$

25. $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}}}}}}$

4.4 Cálculo de raíces n-ésima usando factores primos

Para el cálculo de raíces por descomposición en factores primos, tome en cuenta el siguiente teorema:

Definición

La radicación de un producto es igual a la radicación de los factores primos por separado.

La radicación de una potencia es igual a la base de la potencia elevada a la división del exponente con el índice de la radicación.

El procedimiento para la descomposición de una raíz en factores primos es:

1. Se descompone el radicando en los factores primos.
2. Se expresa el radicando como un producto de potencias.
3. Se separan los radicandos.
4. Se operan las raíces.
5. Se multiplican los factores.

Ejemplo 3

Encontrar el resultado de las siguientes raíces, utilizando la descomposición en factores primos.

$a)\quad \sqrt{1296}$ $\qquad b)\quad \sqrt[3]{27000}$

Solución a)

$\sqrt{1296}$

Primero se expresa el radicando en sus factores primos.

Número	Factor primo
1296	2
648	2
324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Se expresan los factores primos con potencias de 2 por que la raíz es cuadrada.

$$1296 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$
$$= 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2$$

Se expresa el radicando con estas potencias.

$$\sqrt{1296} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}$$

Se separan los radicandos.

$$1296 = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3^2}$$

Se operan las raíces.

$$\sqrt{1296} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Se multiplican los factores primos.

$$\mathbf{\sqrt{1296} = 36}$$

Solución b)

$\sqrt[3]{27000}$

Se inicia expresando el radicando en sus factores primos.

Número	Factor primo
27000	2
13500	2
6750	2
3375	3
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

Se expresan los factores primos con potencias de 3 ya que la raíz es cubica.

$$27000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$
$$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$$

Ahora se expresa el radicando con estas potencias.

$$\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3}$$

Ahora se expresa el radicando con estas potencias.

$$\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3}$$

Se separan los radicandos.

$$\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5^3}$$

Se operan las raíces.

$$\sqrt[3]{27000} = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Se multiplican los factores primos.

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{27000} = 30}$$

Ejercicios de refuerzo 4.3

Encuentre el resultado de las raíces por descomposición en factores primos.

26. $\sqrt{240}$

27. $\sqrt[3]{8000}$

28. $\sqrt{144}$

29. $\sqrt{540}$

30. $\sqrt{1080}$

4.5 Radicalización de un radical

Si se tiene una raíz dentro de otra raíz, por ejemplo $\sqrt{\sqrt{2}}$ se puede expresar el número con potencia fraccionaria, quedando:

$$\left(2^{1/2}\right)^{1/2} = 2^{1/4}$$

Observe que se está aplicando la ley de potencia de potencias, entonces tiene sentido decir en la operación de la radicalización de una raíz, los radicales se multiplican.

Generalizando se tiene:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Ejemplo 4

Encontrar el resultado de las siguientes radicales.

$a)\ \sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ $\qquad b)\ \sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{2}}}$

Solución a)

$a)\ \sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$

Primero se introduce el número 2 en la raíz cuártica, para ello se eleva a la cuarta potencia con una raíz cuartica:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{8}}$$

Ahora se tiene la misma raíz cuártica, por lo que se puede expresar como una misma potencia:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \cdot 8}}$$

Se multiplican las raíces:

$$\sqrt[3\cdot 4]{2^4 \cdot 8}$$

$$\sqrt[12]{2^4 \cdot 8}$$

Se expresa el 8 con una base de 2.

$$\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3}$$

Finalmente se simplifica:

$$\sqrt[12]{\mathbf{2^7}}$$

Solución b)

$$\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt{2}}}$$

Se inicia expresando el 3 con raíz cuadrada.

$$\sqrt{2\sqrt[3]{\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2}}}$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{\sqrt{3^2 \cdot 2}}}$$

Se multiplican las raíces

$$\sqrt{2\sqrt[6]{3^2 \cdot 2}}$$

Se eleva a la sexta el número dos y se expresa con raíz sexta.

$$\sqrt{\sqrt[6]{2^6} \cdot \sqrt[6]{3^2 \cdot 2}}$$

Se expresan como una sola raíz.

$$\sqrt{\sqrt[6]{2^6 \cdot 3^2 \cdot 2}}$$

Se multiplican las raíces nuevamente.

$$\sqrt[12]{2^6 \cdot 3^2 \cdot 2}$$

Se simplifica.

$$\sqrt[12]{\mathbf{2^7 \cdot 9}}$$

Ejercicios de refuerzo 4.4

Encontrar el resultado de las siguientes radicales y simplifique.

31. $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$

32. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4}}$

33. $2\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$

34. $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{2}}}$

35. $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}}$

36. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5\sqrt{2}}}$

37. $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}}}$

38. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{4}\sqrt{a^2b}}{2}}$

39. $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$

40. $\sqrt{a^{\sqrt{2}}}$

41. $\sqrt[7]{2\sqrt{\frac{1}{3}}}$

42. $2\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$

43. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[3]{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{4}}}$

44. $\sqrt{a^5\sqrt{a\sqrt{a^3}}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}$

45. $\sqrt{64a^2\cdot\sqrt{b^{10}\cdot\sqrt[3]{2c^6}}}$

46. $\sqrt{4ab\cdot\sqrt{2ac^2\cdot\sqrt[3]{4ab^6\sqrt{2c}}}}$

4.6 Racionalización de radicales

Ahora piense que tiene una suma de fracciones y una de ellas tiene como **denominador una raíz**, esto complica obtener el mínimo común denominador para efectuar la operación, por ejemplo:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Se tiene en la segunda fracción en el denominador a $\sqrt{2}$, por tal motivo se racionaliza el radical, y para ello solo se opera la segunda fracción, teniendo:

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{2}$$
$$= \sqrt{2}$$

Ahora se puede expresar la suma con un denominador de 3:

$$\frac{1}{3} + \sqrt{2} = \frac{1 + 3\sqrt{2}}{3}$$

Pero, ¿qué ocurre cuando la raíz en el denominador es distinta a la cuadrada?

Recuerde que la potencia al final de la operación debe ser 1, por ejemplo si se tiene $\sqrt[3]{2}$, es $2^{1/3}$, entonces

$$2^{1/3} \cdot (2^x)^{1/3} = 2^1$$

Se establece una igualdad con las potencias.

$$\frac{1}{3} + x\frac{1}{3} = 1$$
$$1 + x = 3$$
$$x = 2$$

Por tanto

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2$$

Se puede generalizar la racionalización como:

Definición

Racionalización con un radical en el denominador:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{c^{n-m}}}{\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \cdot c}}$$

Ejemplo 5

Racionalice las siguientes fracciones:

$a)\quad \dfrac{3}{4\sqrt[12]{2}}\qquad\qquad b)\quad \dfrac{6}{\sqrt[6]{8}}$

Solución a)

El radical es un 12 y la potencia de la base es 1 por lo tanto la potencia resultante para la base 2 es 11.

$$\frac{3}{4\sqrt[12]{2}}\cdot\frac{\sqrt[12]{2^{11}}}{\sqrt[12]{2^{11}}}=\frac{3\sqrt[12]{2^{11}}}{4\cdot 2}$$

$$=\mathbf{\frac{3}{8}\sqrt[12]{2^{11}}}$$

Solución b)

Primero se observa que el 8 se puede expresar como 2^3.

$$\frac{6}{\sqrt[6]{2^3}}$$

Se reduce el radical.

$$\frac{6}{\sqrt[6]{2^3}}=\frac{6}{\sqrt{2}}$$

Se opera el radical.

$$\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}\quad=\mathbf{3\sqrt{2}}$$

Ejercicios de refuerzo 4.5

Racionalice los siguientes radicales.

47. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	51. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$	55. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$	59. $\dfrac{3+\sqrt{2^3}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}$
48. $-\dfrac{5}{\sqrt{7}}$	52. $\dfrac{1}{6\sqrt[12]{2}}$	56. $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}}$	60. $\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}}$
49. $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$	53. $\dfrac{3}{\sqrt[5]{2^3}}$	57. $\dfrac{\sqrt{2}-3}{2\sqrt[3]{3}}$	61. $3\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$
50. $\dfrac{4}{3\sqrt{7}}$	54. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}}$	58. $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{6}}$	

Otro caso es tener en el denominador una suma en la que se encuentre más de una raíz, como:

$$\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

Por lo que se utiliza el **conjugado del binomio** para suprimir los radicales, de tal modo que este binomio conjugado es igual al binomio con el **signo central cambiado**:

Definición

Conjugado de un binomio, cuyo resultado es $\boldsymbol{a^2-b^2}$:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

$$(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

Ejemplo 6

Racionalice las siguientes fracciones, utilizando el binomio conjugado:

$a)\quad \frac{3}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \qquad b)\quad \frac{12}{-\sqrt{3}-\sqrt{5}} \qquad c)\quad \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Solución a)

Se identifica el binomio conjugado para suprimir las raíces.

$$\frac{3}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

Se establece el binomio conjugado del tipo: $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$

$$\frac{3\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{2-4(3)}=-\frac{\mathbf{3}\left(\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\right)}{\mathbf{10}}$$

Solución b)

Para este caso el binomio conjugado será $(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$**:**

$$\left(-\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)=3-5$$

Por lo que:

$$\frac{12}{-\sqrt{3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{12\left(-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5}$$

$$= -\frac{12\left(-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{2}$$

Se suprimen los términos, para obtener:

$$= -\mathbf{6}\left(-\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

Se aplica regla de los signos:

$$= \mathbf{6}\left(\sqrt{\mathbf{3}}-\sqrt{\mathbf{5}}\right)$$

Solución c)

Ahora se tiene en el denominador tres términos $(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$, el conjugado se obtiene cambiando los signos, por lo que:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Se opera el producto.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{2}-3}$$

Se suprimen términos

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-2+2\sqrt{3}\sqrt{2}-3}$$

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-4+2\sqrt{3}\sqrt{2}}$$

Nuevamente el binomio conjugado ahora es: $\left(-4-2\sqrt{3}\sqrt{2}\right)$.

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-4+2\sqrt{3}\sqrt{2}} \cdot \frac{-4-2\sqrt{3}\sqrt{2}}{-4-2\sqrt{3}\sqrt{2}}$$

Se aplica el álgebra.

$$\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-4+2\sqrt{3}\sqrt{2}} \cdot \frac{-4-2\sqrt{3}\sqrt{2}}{-4-2\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(-4-2\sqrt{3}\sqrt{2}\right)}{16-(4\cdot 3\cdot 2)}$$

$$\frac{-4-2\sqrt{3}\sqrt{2}\ +4\sqrt{2}+2\cdot 2\sqrt{3}\ -4\sqrt{3}-2\cdot 3\sqrt{2}}{-8}$$

$$\frac{-4-2\sqrt{3}\sqrt{2}\ -2\sqrt{2}}{-8}$$

$$\frac{-2\left(2+\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{-8}$$

Finalmente el resultado es:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\mathbf{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\mathbf{4}}$$

Ejercicios de refuerzo 4.6

Racionalice las siguientes fracciones utilizando el binomio conjugado.

62. $\frac{3}{3-\sqrt{5}}$

63. $\frac{5}{\sqrt{2}-4}$

64. $\frac{2}{-\sqrt{2}+3}$

65. $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

66. $\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

67. $\frac{3}{-4-2\sqrt{2}}$

68. $\frac{\sqrt[3]{4}}{8-\sqrt{3}}$

69. $\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}$

70. $\frac{-4}{2-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

71. $\frac{1}{1-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}}$

4.7 Suma de radicales

Piense que en una suma o resta de radicales se requiere simplificar, esta operación se puede efectuar siempre y cuando **los radicales tengan el mismo radicando y raíz**. Por ejemplo:

$$4+\sqrt{5}+\sqrt{7}+3+7\sqrt{5}$$

Se agrupan términos comunes:

$$4+3+\sqrt{5}(1+7)+\sqrt{7}$$

Para obtener:

$$\mathbf{7+8\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

Ejemplo 7

Efectúe la suma de las siguientes expresiones:

$a)\quad 2\sqrt[3]{162}+3\sqrt[3]{48}$ $\qquad b)\quad 2\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{135}$

Solución a)

Se inicia descomponiendo en factores primos

Número	Factor primo
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Número	Factor primo
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$162=2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$ $\qquad 48=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$

Se expresan los factores primos con potencias de 3 ya que la raíz es cúbica.

$$\begin{aligned}2\sqrt[3]{162}&=2\sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}\\&=2\sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 3^3}\\&=2\cdot 3\sqrt[3]{2\cdot 3}\\&=6\sqrt[3]{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\sqrt[3]{48}&=3\sqrt[3]{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}\\&=3\sqrt[3]{2\cdot 2^3\cdot 3}\\&=3\cdot 2\sqrt[3]{2\cdot 3}\\&=6\sqrt[3]{6}\end{aligned}$$

El factor común es $\sqrt[3]{6}$

$$\begin{aligned}2\sqrt[3]{162}+3\sqrt[3]{48}&=6\sqrt[3]{6}+6\sqrt[3]{6}\\&=\sqrt[3]{6}(6+6)\\&=\mathbf{12\sqrt[3]{6}}\end{aligned}$$

Solución b)

Se inicia descomponiendo en factores primos

Número	Factor primo
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

Número	Factor primo
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$40=2\cdot 2\cdot 2\cdot 5$ $\qquad 135=3\cdot 3\cdot 3\cdot 5$

Se expresan los factores primos con potencias de 3 ya que la raíz es cúbica.

$2\sqrt[3]{40} = 2\sqrt[3]{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}$	$\sqrt[3]{135} = \sqrt[3]{3\cdot 3\cdot 3\cdot 5}$
$= 2\sqrt[3]{2^3\cdot 5}$	$= \sqrt[3]{3^3\cdot 5}$
$= 2\cdot 2\sqrt[3]{5}$	$= 3\sqrt[3]{5}$
$= 4\sqrt[3]{5}$	$= 3\sqrt[3]{5}$

El factor común es $\sqrt[3]{5}$

$$2\sqrt[3]{40} - \sqrt[3]{135} = 4\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} \quad = \sqrt[3]{5}$$

Ejercicios de refuerzo 4.7

72. $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2}$
73. $3\sqrt[3]{7} - 2\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7}$
74. $\sqrt{12} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{75}$
75. $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486}$
76. $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{250}$
77. $2\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{676}$
78. $\sqrt{8ab} + \sqrt{72ab} + \sqrt{50ab} + \sqrt{288ab}$
79. $b\sqrt{a^2c} + \sqrt[4]{16a^8b^4c^2} + a\sqrt[6]{b^6c^3}$

Las potencias en la disolución de medicamentos

Escrito por: Dra. Leticia Cruz Antonio
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM

Las potencias son una forma de escribir la multiplicación de números o variables por sí mismos varias veces. Por ejemplo, 5 al cuadrado es $5^2 = 5 \times 5$; 6 al cubo 3 es $6^3 = 6 \times 6 \times 6$; las variables: a a a m zz se pueden simplificar como a^3mz^2 o bien $\frac{1}{2\times2\times2\times2}$ se puede simplificar como $\frac{1}{2^4}$ que es igual a 2^{-4}.

En general la potencia puede representarse como x^n , donde x es conocido como la base y n es llamada potencia. Siempre que n sea igual a 1, tendremos $x^1 = x$ y cuando n sea cero, entonces $x^0 = 1$. Lo opuesto a elevar un número (x) a su potencia n es encontrar la raíz que marca n, lo que puede expresarse como: $\sqrt[n]{x}$.

Las potencias son importantes para explicar el efecto terapéutico de algunos medicamentos. Debido a que la disolución de un medicamento administrado en forma sólida por vía oral es un requisito previo para su absorción dentro del organismo. Ya que solo los fármacos disueltos pueden difundir a través de las barreras biológicas para llegar hasta a su sitio de acción y ejercer un efecto (Figura 1). La velocidad de disolución de un fármaco a partir de su forma farmacéutica o medicamento es crucial para la eficacia de un medicamento.

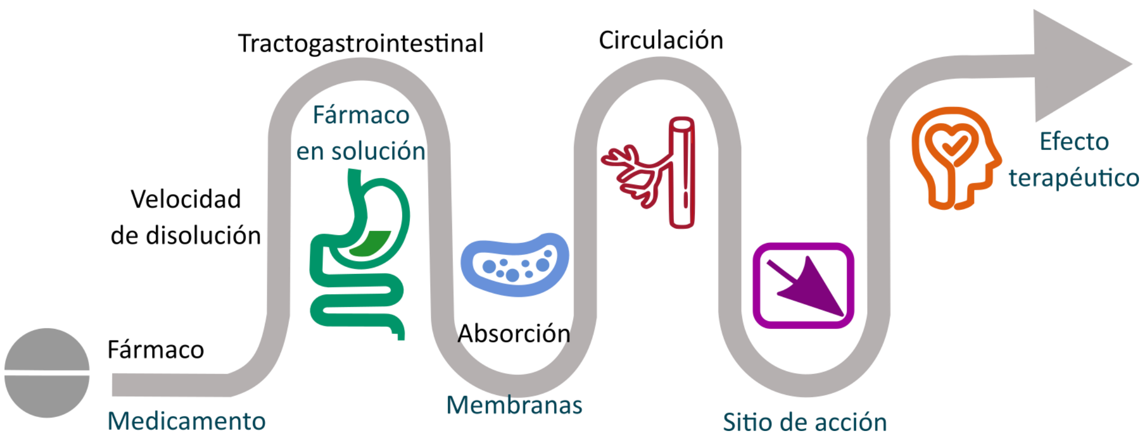


Figura 1. Etapas generales involucradas para alcanzar el efecto terapéutico de un fármaco contenido en un medicamento sólido oral.

El proceso de disolución de un fármaco puede semejar una reacción química en la cual, la afinidad entre los compuestos que están presentes (fármaco y aditivos que conforman el medicamento), podrán interactuar con el medio de disolución para lograr que el fármaco entre en solución y sea absorbido. Cuando la disolución de un medicamento sólido oral inicia, la cantidad del fármaco contenido en éste (reactante) disminuye, en tanto la cantidad de fármaco disuelto (producto) incrementa con el tiempo (Figura 2) es decir, la cantidad de fármaco cambia con el tiempo antes que la reacción sea completa o alcance su equilibrio.

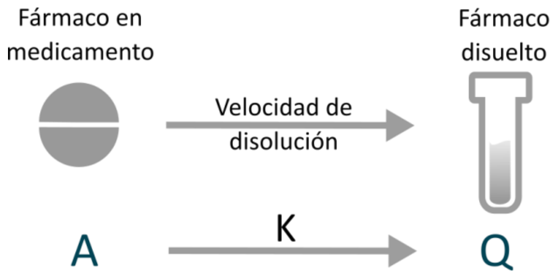


Figura 2. Representación del proceso de disolución de un fármaco visto como una reacción química. A= Cantidad de fármaco contenido en el medicamento y sobre la cual ocurre el proceso de disolución. Q = Cantidad de fármaco disuelto al tiempo “t”. K = Constante de velocidad de disolución

La velocidad de una reacción se expresa a través de su constante de velocidad y la concentración de los reactantes elevadas a alguna ***potencia***. Para la reacción de la figura 2, la ley de la velocidad se puede representar como:

$$\frac{dA}{dt} = -kA^n \qquad Ec \ldots 1$$

$$\frac{dQ}{dt} = kQ^n \qquad Ec \ldots 2$$

Donde: k es la constante de velocidad, A es la cantidad del reactante, Q es la cantidad del producto y n es el orden de reacción.

El orden de reacción respecto de un determinado reactivo es la **potencia** a la cual está elevada la cantidad o concentración de dicho reactivo. En la ley de velocidad, la potencia o potencias son valores experimentales y no tienen relación con la estequiometría de la reacción. El orden de una reacción se define en términos de las concentraciones de los reactivos, y puede tener cualquier valor, incluso cero.

Velocidad de disolución de orden cero.

Si la potencia (n) en la ecuación 1 o 2 tiene el valor de cero entonces pueden expresarse como:

$$\frac{dA}{dt} = -k \qquad Ec \ldots 3$$

$$\frac{dQ}{dt} = k \qquad Ec \ldots 4$$

El término k representa la constante de velocidad de disolución de orden cero con unidades de masa/tiempo. La integración de las ecuaciones 3 y 4 y al tiempo cero, resulta en:

$$A = -kt \qquad Ec \ldots 5$$

$$Q = kt \qquad Ec \ldots 6$$

Una velocidad de disolución de orden cero en medicamentos implica que, la velocidad de disolución es constante y no depende la cantidad de fármaco contenido en el medicamento (reactante). Este tipo de comportamiento se presenta en los medicamentos conocidos como de liberación modificada, los cuales están diseñados para liberar gradualmente el fármaco a fin de lograr una disolución lenta y sostenida (como en el caso de un parche transdérmico), o una absorción selectiva a través del tracto gastrointestinal (GI), y / o resultando en un tiempo de disolución retrasado, como es en tabletas con recubierta entérica.

Velocidad de disolución de primer orden.

Si la potencia en la ecuación 1 o 2 tiene el valor de uno, entonces la cantidad de fármaco (A) está disminuyendo a una velocidad proporcional a la cantidad de fármaco remante en el medicamento o está aumentando la cantidad de fármaco disuelto (Q), y puede expresarse como:

$$\frac{dA}{dt} = kA \qquad Ec \ldots ⑦$$

$$\frac{dQ}{dt} = kQ \qquad Ec \ldots ⑧$$

Donde, ahora k es la constante de velocidad de disolución de primer orden y tiene unidades de tiempo^{-1}. La integración de las ecuaciones 7 y 8 resultarán en:

$$\ln A = -kt + \ln A_0 \qquad Ec \ldots ⑨$$

$$\ln Q = kt + \ln Q_0 \qquad Ec \ldots ⑩$$

Siendo Q la cantidad de fármaco disuelto en el tiempo t y Q_0 la cantidad inicial de fármaco. Los medicamentos con velocidad de disolución de primer orden son llamados medicamentos de liberación inmediata y son particularmente importantes cuando se desea la acción rápida del medicamento (ejemplo: para un analgésico). Los medicamentos de liberación inmediata están diseñados para desintegrarse completamente y disolverse tras la exposición a fluidos fisiológicos en un período corto de tiempo (de 2.5 a 10 min).

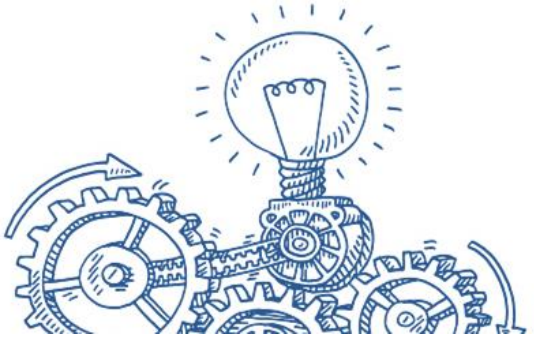
Referencias

1. Straker A. (19,02,2020). Exploring Maths: Tier 5 : Teacher's Book, recuperado de: https://www.pearsonschoolsandfecolleges.co.uk/secondary/Mathematics/11-16/ExploringMathsKS3/Samples/SamplematerialfromTier5/SamplepagesfromExploringmathsTier5TeacherBook.pdf

2. Costa PJ, Sousa Lobo M. Modeling and comparison of dissolution profiles. Review. European Journal of Pharmaceutical Sciences, 2001(13): 123–133.

3. Banakar U.V. Pharmaceutical dissolution testing, MarcellDekker: New York, 1992, pp. 5–9.

4. Secretaría de Salud, Comisión permanente de la Farmacopea de los Estados Unidos Mexicanos. Farmacopea de los Estados Unidos Mexicanos (FEUM) 12 ed. México; 2018.



Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 4. Potencias y raíces

1. $\frac{1}{64}$ **2.** $\frac{1}{8}$ **3.** 2^{16} **5.** $\frac{16}{9}$ **7.** $2 \cdot 3^4$ **9.** $3^{\frac{15}{4}}$ **11.** $\frac{1}{64}$ **13.** $3^{\frac{1}{4}}$ **15.** $\left(\frac{200}{9}\right)^{\frac{1}{4}}$ **17.** $2^{\frac{15}{16}}$ **19.** 8 **21.** $\left(\frac{128}{27}\right)^{\frac{1}{12}}$

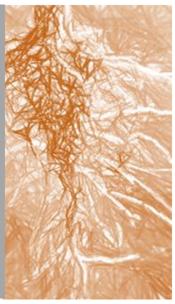
23. $17 + (120)^{\frac{1}{2}}$ **25.** $\frac{1}{2^{\frac{1}{32}}}$ **27.** $20\sqrt{5 \cdot 2}$ **29.** $6\sqrt{3 \cdot 5}$ **31.** $\sqrt[6]{2}$ **33.** $2\sqrt[6]{24}$ **35.** $\sqrt[9]{24}$ **37.** $\frac{1}{\sqrt[8]{432}}$ **39.** $\sqrt[24]{2^{17}}$

41. $\sqrt[14]{\frac{4}{3}}$ **43.** $\sqrt[36]{3^3 \cdot 2^7}$ **45.** $8ab^2\sqrt[12]{2b^6c^6}$ **47.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **49.** $\frac{2\sqrt{5}}{15}$ **51.** $\sqrt[3]{3^2}$ **53.** $\frac{3\sqrt[5]{2^2}}{2}$ **55.** $\frac{\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^4}}{3}$ **57.** $\frac{\sqrt[3]{3^2}(\sqrt{2}-3)}{6}$

59. $\frac{\sqrt[6]{3^5}(3+\sqrt{2^3})}{3}$ **61.** $\frac{\sqrt[6]{2^5}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)}{2}$ **63.** $-\frac{5\sqrt{2}+20}{14}$ **65.** $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ **67.** $\frac{3\sqrt{2}-6}{4}$ **69.** $\frac{\sqrt[4]{72}}{12}$

71. $\frac{2\left(1+\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)(2-\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$ **73.** $2\sqrt[3]{7}$ **75.** $6\sqrt{6}$ **77.** $-7\sqrt{2}$ **79.** $4ab\sqrt{c}$

5



Operaciones Algebraicas

LO QUE APRENDERÁS. . .

5.1 Operaciones con potencias y radicales.
5.2 Operaciones con fracciones.

5.1 Operaciones con potencias y radicales

Las expresiones algebraicas pueden ser usadas para representar problemas de la vida real y cotidiana, cualquier problema puede ser planteado con números y letras, aun cuando el conductor del automóvil en la caricatura no lo entienda.

En una expresión algebraica los términos que la conforman:

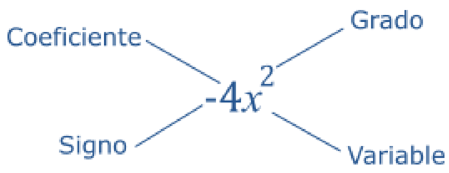


Figura 5.1 Partes de una expresión algebraica

El **coeficiente** es el número que antecede a la variable.

La **variable** es la letra o símbolo que acompaña al coeficiente, puede ser una o más variables, siempre y cuando sean distintas.

Exponente o grado es el número o letra localizado como superíndice de la variable, entendiendo que si no aparece el valor es 1.

Signo, puede ser positivo o negativo, si no cuenta la expresión algebraica con signo se sobre entiende que es positivo.

Cualquier expresión algebraica deber ser simplificada utilizando las propiedades de los exponentes, de los números y de los signos, por ejemplo:

$$4x^2 + 4x - x^2 - 2 = \mathbf{3x^2 + 4x - 2}$$

El grado de la expresión algebraica con una sola variable es el exponente máximo de la variable, por ejemplo la expresión $5\boldsymbol{x^2} - \mathbf{11}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}$ es de grado **dos.**

CLASIFICACIÓN DE POLINOMIOS

Cuando los polinomios no tienen denominadores se les conocen como **enteros;** pero cuando si lo tienen se llaman **fraccionarios**; ahora si tiene una letra en el denominador se conoce como **racional**; si el polinomio contiene raíces o números como π u otro se tienen polinomios **irracionales;** finalmente si en cada término del polinomio las potencias de las variables suman lo mismo es un polinomio **homogéneo**, pero si no lo hacen es **heterogéneo**.

$a)\ Entero:\ \ x^2 - x, \qquad \dfrac{x^3}{2}$

$b)\ Fraccionario:\ \ \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$

$c)\ Racional:\ \ pueden\ ser\ a)\ y\ b)$

$d)\ Irracional:\ \ \sqrt{2x}$

$e)\ Homogéneo:\ \ 4y^3 + 5xy^2 - 6x^2y + 3x^3$

$f)\ Heterogéneo:\ \ x^4 + xy - 8$

Recuerde que un polinomio puede ser ordenado con respecto a una variable conocida como variable **ordenatriz**, la cual puede ir en ascenso o descenso en su valor.

Si el polinomio en uno de sus términos no contiene variable, a dicho término se le conoce como **término independiente**.

TÉRMINOS SEMEJANTES

Dos o más términos semejantes cuando contienen la misma variable con el mismo exponente, es decir, que lo único diferente es el coeficiente. La reducción de los términos semejantes pueden ser del mismo signo y signo diferente.

Ejemplo 1

Resuelva los siguientes ejercicios.

$a)\ \ 3x + 2x = \mathbf{5x}$

$b)\ \ \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 5\sqrt{x} = \mathbf{-2\sqrt{x}}$

$c)\ \ -8a^x + 12a^x = \mathbf{4a^x}$

$d)\ \ \dfrac{1}{2}xy - \dfrac{1}{3}xy + \dfrac{1}{4}xy = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\right)xy = \mathbf{\dfrac{5}{12}xy}$

$e)\ \ 25a^{m+1} + 3a^m - 2a^{n-1} + 5a^{m+1} - a^m + a^{n-1} = \mathbf{30a^{m+1} + 2a^m - a^{n-1}}$

Ejercicios de refuerzo 5.1

Suma los siguientes términos semejantes.

1. $9ab - 15ab$
2. $-14xy + 27xy$
3. $25x^2 - 50x^2 + 11x^2 + 12x^2$
4. $\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}y - \frac{1}{5}y$
5. $\frac{2a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4} - a$
6. $-x^{a-1} + 7x^{a-1} - 3x^{a-1} + 6x^{a-1}$
7. $23n - 34n - 25n + 46n + n^2$
8. $2y + 3xz - 4y + 6z - 2xz + 3z$
9. $2a - 3b + 4c + d - a - 2b + 3c - d$
10. $6x^2 + \frac{x^2}{2} - 3b - \frac{b}{4} + 5x$
11. $\sqrt{2x} + 4\sqrt{2x} - 3\sqrt{2x} - 2\sqrt{x}$
12. $4x^{b-1} - 3x^b + \frac{1}{2}x^{b-1} + \frac{1}{4}x^b$
13. $\frac{3}{5}\sqrt{a} - \frac{\sqrt{a}}{4} + \frac{2\sqrt{a}}{3} - \frac{\sqrt{4a}}{2}$
14. $7y^2 - 2y^2 + 3xy - 2xy - xy + 4x^2 +$
    $+2x^2 - x^2 + 5x^3 - 6x^3$

VALOR NUMÉRICO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

El valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al sustituir el valor de la incógnita en la expresión algebraica y efectuar las operaciones indicadas.

Ejemplo 2

Resuelva los siguientes ejercicios, considere $a = 1, b = 2, m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}$

$a)$ $3a + 2m + 3 = 3(1) + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 3 + 1 + 3 = \mathbf{7}$

$b)$ $2b^2 + 5\sqrt{n} = 2(2)^2 + 5\sqrt{\frac{1}{4}} = 2(4) + 5\left(\frac{1}{2}\right) = 8 + \frac{5}{2} = \mathbf{\frac{21}{2}}$

$c)$ $(3m^2n)^2 = 3^2m^4n^2 = 9\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 9\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{16}\right) = \mathbf{\frac{9}{256}}$

Ejercicios de refuerzo 5.2

Encuentre el valor numérico de las siguientes expresiones, para ello considere que:

$$\boldsymbol{x = 1, \quad y = 2 \quad z = 3 \quad a = \frac{1}{2} \quad b = \frac{1}{3} \quad c = \frac{1}{4}}$$

15. $2xy$
16. x^2yab
17. $\frac{2}{3}y^2a^3c$
18. $\sqrt{2bc^2}$
19. $\frac{24xy}{2\sqrt{a^2b^2}}$
20. $\frac{67x^2y}{3ab}$
21. $5(x+y)+3(b^2+2)$
22. $\frac{\sqrt{3a^2n}}{z^3}$
23. $x^2-2xy+y^2$
24. $\frac{xy}{a}+\frac{xz}{c}-\frac{yz}{b}$
25. $(x+y)z-a$
26. $(a+b)(b-a)$
27. $x+a\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{y^2}-\frac{1}{z}\right)$
28. $\frac{3(a^2b)}{y^2z}$
29. $\frac{79(a+b)-4cy}{2xy}$

NOTACIÓN ALGEBRAICA

La notación algebraica es el traslado de un texto que describe un problema haciendo uso de incógnitas, coeficientes, signos, potencias y operaciones aritméticas. Por ejemplo.

Ejemplo 3

Escriba los siguientes textos como expresiones algebraicas

a) La suma del cuadrado de x, con el cubo de y:

$$\boldsymbol{x^2 + y^3}$$

b) Una persona contaba con cierta cantidad de dinero, después recibió 50 pesos, y después pagó otra cantidad de dinero:

$$\boldsymbol{x + 50 - y}$$

c) Si un tubo de ensayo cuesta 20 pesos ¿Cuánto cuestan 8 tubos, 20 tubos y n tubos?:

$$\boldsymbol{x = 20; \qquad 8x = 160; \qquad 20x = 400; \qquad nx = n20}$$

d) En la planta baja de un hotel hay x habitaciones, en el primer nivel existen el doble de habitaciones, en el segundo nivel existe la mitad de la planta baja ¿Cuántas habitaciones tiene el hotel?

$$Hab = x + 2x + \frac{1}{2}x$$

$$Hab = \boldsymbol{\frac{7}{2}x}$$

e) La presión de cierta sustancia se duplica cuando la temperatura aumenta al cuadrado.

$$\boldsymbol{2P = T^2}$$

Ejercicios de refuerzo 5.3

Represente cada uno de los siguientes enunciados en lenguaje algebraico.

30. La suma de $a, b\ y\ x$.
31. La suma del cuadrado de x, el cubo de y y la cuarta potencia de z.
32. La raíz cuadrada del producto del cubo x y la quinta potencia de c.
33. Si un matraz cuesta $2x$, ¿Cuánto costarán 8 matraces, 128 matraces y n matraces?
34. Escriba la diferencia entre el cuadrado de m y el cubo de n.
35. De una jornada de x horas, ya se han laborado m horas, ¿Cuánto falta por laborar?
36. Se debe de recorrer x km. El lunes se recorrieron a km, el martes b km y el miércoles c km ¿Cuánto falta andar?
37. Una persona tiene x cantidad de dinero, le cobraron el cuadrado de a y le regalaron la raíz de b ¿Cuánto dinero le queda?
38. Al vender una torre de destilación un consorcio químico gano 2 millones de pesos, ¿Cuánto costó la torre de destilación?
39. Siendo x un número entero par, escriba los tres primeros números pares consecutivos.
40. Siendo x un número entero, escriba los dos números consecutivos anteriores.
41. Si han transcurrido x días de un año ¿Cuántos faltan por transcurrir?
42. Escriba la suma del duplo de x con el triple de z la mitad de w.
43. Exprese la superficie de un laboratorio que mide de largo a y de ancho b.
44. Un rectángulo mide 12 metros de ancho, de largo el doble del ancho menos 3 metros. ¿Cuál es el área del rectángulo?
45. El cuadrado de la suma de dos números enteros consecutivos.
46. La mitad del resultado de sumarle 3 a un número.
47. Escriba el área de cierto triángulo, el cual la base es la mitad de su altura.
48. Escriba el quíntuplo del área de un cuadrado de lado x.
49. Escriba el doble de la edad que tendré en cinco años.
50. Escriba el perímetro de un triángulo isósceles en donde el lado desigual mide 4cm menos que cada uno de los lados iguales.
51. La suma de tres números consecutivos pares es 156, ¿De qué número se trata?
52. La suma de tres números impares consecutivos es 99, ¿De qué número se trata?

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Las operaciones con expresiones algebraicas son **suma, resta, producto** y **división**.

La **suma** y **resta** de expresiones algebraicas tiene como objetivo sumar o restar dos o más expresiones algebraicas en una sola expresión.

Ejemplo 4

Sume y/o reste las siguientes expresiones algebraicas:

$a)$ $5x + 2x - 3 = (5 + 2 - 3)x = \mathbf{4x}$

$b)$ $7y - 8y + 17y - (9y - 8) = (7 - 8 + 17 - 9)y + 8 = \mathbf{7y + 8}$

$c)$ $\frac{3}{2}c - \frac{1}{3}c - c = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} - 1\right)c = \mathbf{\frac{1}{6}c}$

Ejercicios de refuerzo 5.4

Realice las siguientes operaciones.

53. $-8x - 5x$
54. $91b - 15ab$
55. $4abc - 5abc + 3abc$
56. $\frac{x}{2} + \frac{2}{3y} - \frac{3}{4}x$
57. $\frac{b}{3} + \frac{2}{5}b$
58. $\frac{25}{6}w^3 + \frac{142}{8}w^3 + \frac{1482}{9}w^3$
59. $5xy - 47xy + 547xy - 842xy$
60. $\frac{x}{4} + \frac{3}{2}y - \frac{x}{5} + \frac{y}{7} - \frac{y}{2}$
61. $2\sqrt{x} + 4x^{1/2} - 3\sqrt{x}$
62. $a - 2b + c - d + 3b - 2c + 3d$
63. $3a + 2b - c + 2a + 3b + c$
64. $2w - 3x + y + 2x - 3x + y - w + 6x + 3y$
65. $6x^3 + 2x + 1 - 3x^2 + 4x - 3 - 4x^3 + x^2 + 3x$
66. $3x^2 - 4xy + y^2 - 5xy + 6x^2 - 3y^2 - 6y^2 - 8xy - 9x^2$
67. $g - e + 2e + 3m - 2g - 2m - 8g + 3e - m$
68. $-2x + 3y^2 + 6y - 3z^3 + y^2 - 2z^3 + 3x + 4x - 5y^2 - 8z^3 - 2y$
69. $5p^2 - 3p + 6 \;\; restar \;\; -9p^2 + 5p + 3$
70. $-4x^3 + 2x^2 - 2x - 3 \;\; restar - 2x^3 + 4$

Las operaciones pueden encontrarse entre signos de agrupación, los cuales pueden estar precedidos por un signo, si éste es negativo, los signos dentro de la agrupación cambian; mientras que si es positivo, los signos de los elementos de la agrupación se mantienen.

Los signos de agrupación son tres y el orden jerárquico es: paréntesis (), el corchete [], las llaves {}, es decir primero se realiza la reducción del signo de agrupación del paréntesis, seguido del corchete y al final las llaves.

En la **multiplicación** pueden existir las siguientes operaciones:

- Monomio por monomio.
- Monomio por polinomios.
- Polinomio por polinomios.

Para realizar los productos de **monomio por monomio,** primero se utiliza la regla de los signos, después se multiplican los coeficientes, a continuación se escriben las incógnitas en orden alfabético colocando los exponentes para hacer la suma de ellos.

Ejemplo 5

Realice los siguientes productos algebraicos.

$a)\quad (-2a^3)(5a^4) = -10a^{3+4} = \boldsymbol{-10a^7}$

$b)\quad (-xy^2)(-5mx^4y^3) = \boldsymbol{5mx^5y^5}$

$$c)\quad (3a^2b)(-4a\sqrt{b}) = -12a^3b^{1+\frac{1}{2}}$$
$$= -12a^3b^{3/2}$$
$$\boldsymbol{= -12a^3\sqrt{b^3}}$$

Ejercicios de refuerzo 5.5

Resuelva las siguientes multiplicaciones.

71. $\left(\frac{a^3}{2}\right)(5a^2)$
72. $(-xy^2)(-5mx^4y^3)$
73. $(3ab^3x)(-4b^4\sqrt{x})$
74. $(3\sqrt[3]{x})(2x)$
75. $(15xyz^2)\left(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}}x^{\frac{2}{3}}\right)$
76. $(\sqrt{xzy})(\sqrt{2}xy^2)$
77. $(2xy)\left(\frac{3abx}{2}\right)(4\sqrt{ab})$
78. $\left(\frac{1}{2}a\right)(-axy^3)(-5\sqrt{a})$
79. $(-2x^{m+1})\left(-\frac{x^{\frac{1}{2}m+3}}{3}\right)$
80. $(a^{2n-1}b^{3m+2})\left(-\frac{3}{2}a^{\frac{3}{2}n+2}b^{\frac{3}{2}m-\frac{1}{4}}\right)$

Para realizar los productos de **monomio por polinomio,** se multiplica el monomio por cada término del polinomio, teniendo en cuenta la multiplicación de monomio por monomio.

Ejemplo 6

Realice el siguiente producto algebraico.

$$(a^2)(a^{m+2}-4a^m-2a^{m+1}) = a^{m+2+2}-4a^{m+2}-2a^{m+2+1}$$

$$= \boldsymbol{a^{m+4}-4a^{m+2}-2a^{m+3}}$$

Para **multiplicar polinomios** se multiplica cada término del polinomio multiplicador por cada término del polinomio multiplicado, reduciendo al final los términos semejantes.

Ejemplo 7

Realice la siguiente multiplicación de polinomios:

$a)\ (x^2-4x-2)(x+1) \qquad b)\ \left(\sqrt{x^5}+4\sqrt{2x^3}\right)(3x^4-1)$

Solución a)

$$\begin{array}{r}
x^2-4x-2\\
x+1\\
\hline
x^2-4x-2\\
x^3-4x^2-2x\phantom{{}-2}\\
\hline
\boldsymbol{x^3-3x^2-6x-2}
\end{array}$$

Solución b)

$$\begin{array}{r}
x^{5/2}+4\sqrt{2}x^{3/2}\\
3x^4-1\\
\hline
-x^{5/2}-4\sqrt{2}x^{3/2}\\
3x^{5/2+4}\qquad\qquad +12\sqrt{2}x^{3/2+4}\\
\hline
3x^{13/2}-x^{5/2}-4\sqrt{2}x^{3/2}+12\sqrt{2}x^{11/2}
\end{array}$$

$$\boldsymbol{3\sqrt{x^{13}}-\sqrt{x^5}-4\sqrt{2x^3}+12\sqrt{2x^{11}}}$$

Ejercicios de refuerzo 5.6

Realice las siguientes multiplicaciones.

81. $(x^2 + 5x + 1)(x - 3)$

82. $(5x^3 - 4x^2 + 6x - 1)(x - 1)$

83. $(2x^3 - 5x^2 - 7x + 3)(x^2 - 5)$

84. $(5x^3 - x + 7)(x^2 + 8)$

85. $(2x^3 + 3x^2 - x - 1)(x^2 + 3x - 1)$

86 $x(2x + 1)(x + 6)$

87. $(2x + 1)(3x - 2)(4x + 2)$

88. $x^2(x^3 + x)(2x - 1)$

89. $4x + [x(2x + 3)(x + 1)]$

90. $(x^{m+1} + 2x^m + 1)(x^m + 3)$

91. $(2x^m - x^{m-1} + 2x^{m-2})(x - 1)$

92. $(x^{-m-1} - 2x^m + 1)(2x^{m+\frac{1}{2}} - 2)$

La **división** de expresiones algebraicas, puede ser de:

- Monomio entre monomios.
- Polinomio entre monomio.
- Polinomio entre polinomios.

La división está formada por dos cantidades llamadas **dividendo** y **divisor**

$$Cociente = \frac{Dividendo}{Divisor}$$

En la **división de monomios,** primero se aplica la regla de los signos, después se dividen los coeficientes y al final se hace la diferencia de los exponentes de las incógnitas idénticas.

Definición

La regla de los signos en la división:

$$\frac{(+)}{(+)} = + \qquad \frac{(-)}{(-)} = + \qquad \frac{(+)}{(-)} = - \qquad \frac{(-)}{(+)} = -$$

Ejemplo 8

Realice las siguientes divisiones algebraicas.

$a)\quad 6x^5 \div -3x^3 = \dfrac{6}{-3}x^{5-3} = \boldsymbol{-2x^2}$

$b)\quad -15x^{10}y^5z^3 \div -3x^7y^2z = \dfrac{-15}{-3}\,x^{10-7}\,y^{5-2}\,z^{3-1} = \boldsymbol{5x^3y^3z^2}$

$c)\quad 2\sqrt{x}yz \div \sqrt{5}x\sqrt{y}z^2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,x^{1/2\,-1}y^{1-1/2}\,z^{1-2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}x^{-1/2}y^{1/2}z^{-1} = \boldsymbol{\dfrac{2}{z}\sqrt{\dfrac{y}{5x}}}$

Para la **división de polinomio entre monomio,** se divide cada término del polinomio entre el monomio, teniendo en cuenta lo visto anteriormente.

Ejemplo 9

Realice las siguiente división de polinomio entre monomio.

$$(6x^5y^4 - 9x^6y^5 + 12x^2y^3 - 3x^4y^8 + 3x^2y^2) \div (3x^2y^2)$$

Solución

Se expresa como un cociente.

$$\frac{6x^5y^4 - 9x^6y^5 + 12x^2y^3 - 3x^4y^8 + 3x^2y^2}{3x^2y^2}$$

Se separa cada cociente:

$$\frac{6x^5y^4}{3x^2y^2} - \frac{9x^6y^5}{3x^2y^2} + \frac{12x^2y^3}{3x^2y^2} - \frac{3x^4y^8}{3x^2y^2} + \frac{3x^2y^2}{3x^2y^2}$$

Se desarrollan los cocientes monomiales.

$$2x^{5-2}y^{4-2} - 3x^{6-2}y^{5-2} + 4x^{2-2}y^{3-2} - 1x^{4-2}y^{8-2} + 1x^{2-2}y^{2-2}$$

El resultado es:

$$\boldsymbol{2x^3y^2 - 3x^4y^3 + 4y - x^2y^6 + 1}$$

Para la **división de polinomio entre polinomio,** recuerde que el cociente

$$Cociente = \frac{Dividendo}{Divisor}$$

Se puede representar como:

$$\begin{array}{r|l} & \underline{Cociente} \\ Divisor & Dividendo \\ & \qquad Residuo \end{array}$$

Se sigue el siguiente procedimiento:

- Se ordena el dividendo y divisor respecto a una incógnita en forma decreciente.
- Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, para obtener el primer término del cociente (recuerde tomar en cuenta la ley de los signos y de los exponentes).
- El cociente parcial se multiplica por el polinomio divisor y el resultado se le resta al polinomio dividendo, la diferencia es el residuo.
- Se divide el primer término del residuo obtenido entre el primer término del divisor, obteniendo el segundo término del cociente, este segundo término se multiplica por el divisor y se le resta al dividendo que queda, y así sucesivamente hasta que el polinomio residuo sea de menor grado que el polinomio divisor.

Ejemplo 10

Realice las siguientes divisiones polinomiales.

$a)$ $(4x^3 + 2x^2 + x + 3) \div (x + 1)$ $\qquad$ $b)$ $(8x^5 + 2x^4 + 7x^2 + 2x + 3) \div (x^2 + 1)$

Solución a)

$$\begin{array}{rl} & \mathbf{4x^2 - 2x + 3} \\ x + 1 & 4x^3 + 2x^2 + x + 3 \\ & \underline{-4x^3 - 4x^2} \\ & \qquad -2x^2 + x \\ & \qquad \underline{2x^2 + 2x} \\ & \qquad\qquad 3x + 3 \\ & \qquad\qquad \underline{-3x - 3} \\ & \qquad\qquad\quad \mathbf{0} \end{array}$$

El dividendo por tanto es igual al divisor multiplicado por el cociente.

$$4x^3 + 2x^2 + x + 3 = (\boldsymbol{x + 1})(\boldsymbol{4x^2 - 2x + 3})$$

Solución b)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 8x^3+2x^2-8x+5 \\
x^2+1 & 8x^5+2x^4+7x^2+2x+3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\underline{-8x^5-\ 8x^3} \\
\quad 2x^4-8x^3 \\
\quad \underline{-2x^4 \qquad -2x^2} \\
\qquad -8x^3+5x^2 \\
\qquad \underline{8x^3 \qquad +8x} \\
\qquad\quad 5x^2+10x \\
\qquad\quad \underline{-5x^2 \qquad -5} \\
\qquad\qquad\quad 10x-2
\end{array}
$$

El dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente mas el residuo.

$$8x^5+2x^4+7x^2+2x+3=\boldsymbol{(x^2+1)(8x^3+2x^2-8x+5)+10x-2}$$

Ejercicios de refuerzo 5.7

Realice las siguientes divisiones.

93. $(6x^4y^5z^3)\div(3x^3y^2z)$
94. $(18x^6y^4z^4)\div(-2x^2y^3z^2)$
95. $(-10a^5b^8c^2)\div(5a^5b^6c^2)$
96. $(5a^6bc^2)\div(-4a^2bc)$
97. $\left(-24x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}z\right)\div\left(-4\sqrt{xyz}\right)$
98. $(15x^5+20x^3-5x^2+25x)\div(5x)$
99. $(24x^8-18x^7-36x^5-9x^3)\div(-3x^2)$
100. $(-45x^{10}+36x^9+27x^5-63x^4)\div(9x^3)$
101. $(12x^8+18x^6-6x^5-30x^3+18x)\div(6x)$
102. $(x^7+9x^6-12x^4+3x^2+24)\div\left(3\sqrt{x}\right)$
103. $(x^5+4x^6+8x^3+x^2-4x)\div\left(-2\sqrt{x}\right)$
104. $(4x^3+2x^2+x-1)\div(x+1)$
105. $(5x^3-8x^2-2x+6)\div(x-2)$
106. $(x^5+2x^4+5x^3+13x^2+6x-2)\div(x^2+2x)$
107. $(x^3-1)\div(x-1)$

108. $(x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 6x + 10) \div (x^2 + 2)$

109. $(2x^6 + 2x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 6) \div (x^3 + 1)$

110. $(5x^6 - 2x^5 - 19x^4 + 5x^3 - 28x^2 + 25x - 10) \div (x^2 - 5)$

111. $(2x^5 - 9x^4 - 2x^3 + 14x^2 + 16x - 10) \div (x^2 - 3x + 2)$

112. $(2x^6 + 2x^5 - 13x^4 - 3x^3 + 13x^2 - x + 6) \div (x^2 + x - 5)$

5.2 Operaciones con fracciones

Las operaciones algebraicas con fracciones utilizan los mismos principios vistos en la sección 5.1. La **Suma y resta de términos semejantes,** se hace la operación que indique el signo agrupando las incógnitas.

Ejemplo 11

Resuelva los siguientes ejercicios.

$a)\ \frac{\sqrt{x}}{3} + 3 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{\sqrt{x}}{4} \qquad b)\ \frac{1+x}{3} - \frac{x-1}{4}$

Solución a)

$$\frac{\sqrt{x}}{3} + 3 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{\sqrt{x}}{4} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\sqrt{x} - \frac{2}{3}x + 3$$

$$= -\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{12}\sqrt{x} - \frac{2}{3}x + 3$$

Se factoriza la fracción

$$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{24}}\left(\mathbf{3x^2 - 14\sqrt{x} + 16x - 72}\right)$$

Solución b)

$$\frac{1+x}{3} - \frac{x-1}{4}$$

Se obtiene un denominador común

$$\frac{1+x}{3} - \frac{x-1}{4} = \frac{(4+4x) - (3x-3)}{12}$$

$$\frac{(4+4x) - (3x-3)}{12} = \frac{4+3+4x-3x}{12}$$

$$= \frac{\mathbf{x+7}}{\mathbf{12}}$$

Ejercicios de refuerzo 5.8

Realice las siguientes sumas.

113. $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{2}$

114. $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{4}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{5}$

115. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y}{3}+\dfrac{15}{2}x-\dfrac{y}{7}$

116. $\dfrac{\pi x}{3}+\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{a^3}{2}-\pi+\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}$

117. $\dfrac{3+x}{2}-\dfrac{x-2}{3}$

118. $\dfrac{x^2+x}{2}+\dfrac{2-x}{3}$

119. $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{2x-1}{4}$

120. $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{x^2+1}{2}-\dfrac{x-1}{3}+\dfrac{x+5}{4}$

Para la **multiplicación de monomios** con fracciones y la de **monomios por polinomios confracciones**, de la misma manera se operan las fracciones, se suman las potencias y se aplica la regla de los signos.

Ejemplo 12

Realice el producto de los siguientes monomios.

$a)$ $\left(\dfrac{3}{2}a^2\right)\left(-\sqrt{2}a^{-4}\right)=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\,a^{2-4}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a^{-2}=-\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{2a^2}}$

$b)$ $\left(\dfrac{4}{3}xy\right)\left(\dfrac{7}{2}x\sqrt{y}\right)\left(-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)=-\left(\dfrac{4}{3}\right)\left(\dfrac{7}{2}\right)(2)x^{1+1-\frac{1}{2}}y^{1+\frac{1}{2}}=-\dfrac{56}{6}x^{3/2}y^{3/2}$

$$=-\boldsymbol{\frac{28}{3}\sqrt{(xy)^3}}$$

$b)$ $\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}xy}\right)\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}x\cdot y}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}\,x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[6]{3^3\cdot(3^2)^2}}=\sqrt[6]{\dfrac{x^5y^9}{3^7}}$

$$=\boldsymbol{\frac{y}{3}\sqrt[6]{\frac{x^5y^3}{3}}}$$

$d)$ $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{3}\sqrt{x}-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{4}x^{\frac{1}{2}+1}-\dfrac{5}{6}x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{8}\sqrt{x}=\dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{5}{6}x-\dfrac{1}{8}\sqrt{x}$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt{x^3}-\frac{5}{6}x-\frac{1}{8}\sqrt{x}}$$

Ejercicios de refuerzo 5.9

Realice los siguientes productos.

121. $\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{a}{4}\right)$

122. $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5x}\right)\left(\frac{3\sqrt[3]{x}}{2}\right)$

123. $\left(\frac{1}{2}ab\right)\left(\frac{2}{5}a^2b\right)\left(\frac{3}{2}ab-a\right)$

124. $\left(\frac{e}{xy}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{xy}}\right)\left(\sqrt{\frac{4x}{3}}\right)$

125. $\left(\frac{2x}{5y^2}\right)\left(\frac{15y}{x^2}\right)$

126. $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}y}{3}\right)\left(-\frac{x^my^2}{4}\right)$

127. $\left(\frac{5x^{m+1}}{3}\right)\left(\frac{x^{m-2}}{3}\right)$

128. $\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\left(\frac{x^{-m+3}}{4}\right)$

129. $\left(\frac{xy^{m+1}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{y}}{x^2}\right)\left(-\frac{x^{-m-1}}{3}\right)$

130. $\left(\frac{\sqrt[m]{x}}{2}\right)\left(\frac{x^2y}{3}\right)\left(\frac{4x^{2m+1}}{5\sqrt{y}}\right)$

Para la división de **polinomio entre monomios fraccionarios,** primero se realiza la regla del cociente para los coeficientes y posteriormente se realiza la división:

Ejemplo 13

Realice la división de las siguientes expresiones.

$a)\quad \dfrac{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x+\frac{1}{5}\sqrt{x}}{\frac{4}{5}x}$ $\qquad b)\quad \dfrac{\sqrt{2}xy-\frac{1}{2}x\sqrt{y}+\frac{1}{3}\sqrt{xy}}{-\sqrt{3xy}}$

Solución a)

$$a)\quad \frac{\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x+\frac{1}{5}\sqrt{x}}{\frac{4}{5}x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}x^{3-1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}x^{1-1}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{4}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{5}{12}x^2-\frac{15}{8}+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\mathbf{\frac{5}{12}x^2+\frac{1}{4\sqrt{x}}-\frac{15}{8}}$$

Solución b)

$$b)\quad \frac{\sqrt{2}xy-\frac{1}{2}x\sqrt{y}+\frac{1}{3}\sqrt{xy}}{-\sqrt{3xy}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(xy)^{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}x^{1-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(xy)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(xy)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}y^{0}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot(xy)^{0}$$

Se racionaliza la raíz en el denominador:

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{2xy}+\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\left(-\sqrt{2xy}+\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\sqrt{2xy}+\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

Ejercicios de refuerzo 5.10

Realice las siguientes divisiones.

131. $\dfrac{\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^2+5}{\frac{3}{2}x}$

132. $\dfrac{\frac{6}{5}\sqrt{x}+\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}x}$

133. $\dfrac{\frac{1}{3}x^2y^3+\frac{2}{5}xy^2+\frac{2}{3}}{2\sqrt{xy}}$

134. $\dfrac{4p+\frac{1}{2pq}-2q}{\frac{1}{3}pq}$

135. $\dfrac{-7n^2p-2n^{-1}p^2+\frac{1}{3}m^{-1}n^1p}{\frac{1}{2}mnp}$

136. $\dfrac{3y^{-1}z+\frac{1}{3}y^2z^{-3}-4x^{-1}y^{-1}z^4}{\frac{2}{5}xyz}$

137. $\dfrac{-\frac{1}{2}u^{-2}vw^{-1}-\frac{1}{5}u^{-2}w^2+\frac{3}{5}vw^{-1}}{\frac{2}{3}u^{-1}vw^{1/2}}$

138. $\dfrac{\frac{2}{3}(xy^2)^3+3\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^2}{\sqrt{2}xy^2}$

139. $\dfrac{\left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3+3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(x^2y^4\sqrt{z}\right)^3}{\frac{8}{27}(x^2y^4)^2}$

140. $\dfrac{\frac{4}{3}\sqrt{2}x^2y^4z^4+4xy^2z^8+2\sqrt{2}z^{12}}{\frac{2}{3}xy^2}$

¿Es importante conocer la concentración de residuos de fármacos en el medio ambiente?

Escrito por: Dra. Silvia Armenta Jaime
Universidad McGill, Canadá
silviuxqa@gmail.com

Debido a que la respuesta a la pregunta es sí. Es importante saber que existen dos conceptos ampliamente usados en farmacología conocidos como EC50 y IC50. EL EC50 se refiere a la concentración de un fármaco a la cual se obtiene la mitad de la máxima respuesta. El IC50 se refiere a la concentración de un inhibidor a la cual la respuesta se reduce a la mitad. Aunque el significado puede expresar conceptos diferentes, el método para conocer estos datos es muy similar, ya que contempla conceptos matemáticos similares.

Para calcular cualquiera de estas concentraciones se requiere una serie de datos de dosis-respuesta. Por ejemplo, para calcular el IC50 de un nuevo fármaco se consideran diferentes concentraciones (X1, X2, X3, …Xn) y cómo cada una de ellas puede llegar a inhibir el crecimiento de una bacteria o un grupo específico de organismos (Y1, Y2, Y3, …Yn). Con estos datos se genera una gráfica, a partir de la cuál es posible determinar la relación entre la variable independiente (concentración del fármaco) y la variable dependiente (inhibición del crecimiento, en este caso). Conocer la relación entre ambas variables es posible a través del modelo de regresión lineal que se expresa con la ecuación de la recta $y=mx + b$; donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen (Kalliokoski et al., 2013).

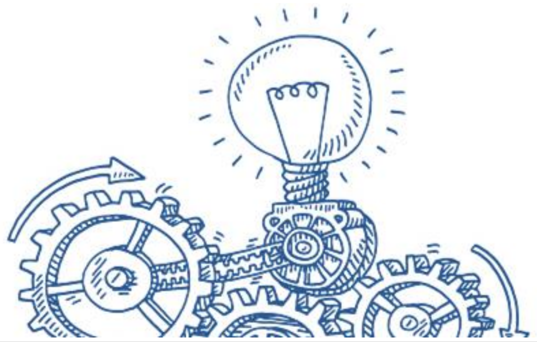
Lo anterior tiene diferentes aplicaciones en toxicología. Por ejemplo, un importante problema medioambiental son los residuos de diversos medicamentos en sistemas acuáticos y en el suelo. Cuñat y Ruiz (2016) hicieron una recopilación de los resultados obtenidos en ensayos de toxicidad de diferentes residuos de fármacos en el ambiente, considerando vías de entrada a los sistemas, así como toxicidad aguda, a medio y a largo plazo. Los autores muestran datos de EC50, entre otros, respecto a fármacos que actúan principalmente sobre el sistema nervioso, como analgésicos, antiepilépticos y antidepresivos; sobre el sistema hormonal, como estrógenos y andrógenos; además de diversos antibióticos.

Respecto a medicamentos de uso frecuente como los analgésicos, se han reportado los valores de EC50 con los que se evidencia el efecto de analgésicos no opiáceos como el ibuprofeno, diclofenaco o el paracetamol sobre organismos acuáticos y terrestres (Cuñat y Ruiz, 2016). Primero es importante saber que la mayoría de estos compuestos persisten a la fotólisis, hidrólisis y biodegradación, porque se han encontrado en aguas superficiales y residuales (Santos et al., 2010; Ruiz y Font, 2011). Los principales efectos han sido observados en los organismos de sistemas acuáticos afectado su movilización, inhibiendo su crecimiento y provocando su muerte (Santos et al., 2010). Por otro lado, en sistemas terrestres se ha observado alteraciones en el crecimiento y germinación de plantas debido a la absorción de estos compuestos a través de la radícula, así como la muerte de gusanos de tierra (Carter et al., 2014; Pino et al., 2015). Por lo tanto, los efectos tóxicos de los residuos de medicamentos pueden afectar en los diferentes niveles de los ecosistemas siendo un riesgo enorme para todas las especies vivas que habitan el planeta.

En consecuencia, contar con un registro de los datos de EC50, IC50, etc., es indispensable para generar y gestionar normas de regulación, conocer la trazabilidad de los medicamentos y generar conciencia ciudadana acerca del uso indiscriminado de algunos medicamentos, así como promover la mitigación adecuada de estos residuos.

Referencias

1. Carter LJ, Garman CD, Ryan J, Dowle A, Bergström E, Thomas-Oates J, Boxall ABA (2014) Fate and uptake of pharmaceuticals in soil-earthworm systems. Environ. Sci. Technol. 48, pp 5955-5963.
2. Cuñat Zaira A, Ruiz MJ (2016) Ensayos de ecotoxicidad de los fármacos y efectos tóxicos en el medio ambiente. Rev. Toxicol. 33(2) pp. 108-119.
3. Kalliokoski T, Kramer C, Vulpetti A, Gedeck P (2013) Comparability of Mixed IC50 Data – A Statistical Analysis. PLoS ONE 8(4): e61007. doi:10.1371/ journal.pone.0061007.
4. Ruiz MJ, Font G (2011). Ecotoxicological Effects of Pharmaceuticals in the Environment. Ecotoxicology around the globe. Visser, JE (ed): Nova Science Publishers, Inc., pp 227-246
5. Santos HL, Araujo AN, Fachini A, Pena A, Delerue-Matos C, Montenegro MC (2010). Ecotoloxical aspects related to the presence of pharmaceuticals in the aquatic environment. J. Hazard. Mater. 175, pp 45-49.
6. Pino MR, Val J, Mainar AM, Zuriaga E, Español C, Langa E (2015) Acute toxicological effects on the earthworm *Eisenia foetida* of 18 common pharmaceuticals in artificial soil. Sci. Total Environ. 518-519, pp 225-337.



Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 5. Operaciones algebraicas

1. $-6ab$ **3**. $-2x^2$ **5**. $\frac{a}{4}$ **7**. $10n+n^2$ **9**. $a-5b+7c$ **11**. $2\sqrt{2x}-2\sqrt{x}$

13. $\frac{\sqrt{a}}{60}$ **15**. 4 **17**. $\frac{1}{12}$ **19**. 16 **21**. $21\frac{1}{3}$ **23**. 3 **25**. $\frac{17}{2}$ **27**. $\frac{4}{3}$ **29**. $\frac{383}{24}$

31. $x^2+y^3+z^4$ **33**. $16x;\ \ 236x;\ \ 2xn$ **35**. $x-n$ **37**. $x-a^2+\sqrt{b}$

39. $2x;\ \ 2x+2;\ \ 2x+4$ **41**. $365-x$ **43**. $A=ab$ **45**. $[x+(x+1)]^2$ **47**. $A=\frac{h^2}{4}$

49. $2(x-5)$ **51**. 25. **53**. $-13x$ **55**. $2abc$ **57**. $\frac{11}{15}$ **59**. $-337w^3$ **61**. $a-c+3d$

63. $5a+5b$ **65**. $2x^3-2x^2+9x-2$ **67**. $-9g+4e$ **69**. $14p^2-8p+3$ **71**. $\frac{5}{2}a^5$

73. $-12ab^7x^{\frac{3}{2}}$ **75**. $15x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{5}{4}}z^{\frac{8}{3}}$ **77**. $4x^2ya^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}$ **79**. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}m+4}$ **81**. $x^3+2x^2-14x-3$

81. $2x^5-5x^4-17x^3+28x^2+35x-15$ **83**. $2x^5-5x^4-17x^3+28x^2+35x-15$

85. $2x^5+9x^4+6x^3-7x^2-2x+1$ **87**. $24x^3+8x^2-10x-4$ **89**. $2x^3+5x^2+7x$

91. $2x^{m+1}-3x^m+x^{m-1}+2x^{m-2}$ **93**. $2xy^3z^2$ **95**. $-2b^2$ **97**. $4yz^{\frac{1}{2}}$

99. $-8x^6+6x^5+12x^3+3x$ **101**. $2x^7+3x^5-x^4-5x^2+3$

103. $-2x^{\frac{9}{2}}-2x^{\frac{11}{2}}-4x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}$ **105**. $5x^2+2x+2\ Residuo\ 10$ **107**. x^2+x+1

109. $2x^3+2x^2-6x+1\ Residuo\ 2x^2+12x+5$ **111**. $2x^3-3x^2-15x-25\ \ Residuo\ 29x+40$

113. $\frac{2}{15x}+\frac{1}{2}$ **115**. $8x-\frac{10}{21y}+\frac{x^2}{3}$ **117**. $\frac{x+13}{6}$ **119**. $\frac{4x+1}{12}$ **121**. $\frac{a}{8}$

123. $\frac{3x^4y^3}{10}-\frac{x^4y^2}{5}$ **125**. $\frac{6}{xy}$ **127**. $\frac{5}{9}x^{2m-1}$ **129**. $-\frac{1}{12}x^{m-2}y^{m+\frac{3}{2}}$ **131**.

133. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{5}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}$ **135**. $-\frac{14n}{m}-\frac{4p}{mn^2}+\frac{2}{3m^2n^2}$ **137**. $-\frac{3}{4uw^{\frac{3}{2}}}-\frac{3v}{10uw^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{5uw^{\frac{3}{2}}}$

139. $\frac{9}{2}x^2y^4z^{3/2}$

6

Productos y cocientes Notables

LO QUE APRENDERÁS. . .

6.1 Productos de binomios.
6.2 Productos de binomios conjugados.
6.3 Producto de un binomio con un término común.
6.4 Trinomio al cuadrado.
6.5 Binomio al cubo.
6.6 Triángulo de Pascal.
6.7 Desarrollo del binomio de Newton.
6.8 Cocientes notables.

6.1 Producto de binomios

Se llama **producto notable** a ciertas operaciones que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección sin necesidad de verificar la multiplicación; aunque parece que el niño de la caricatura aún no conoce un producto notable.

Definición

Los productos notables son **identidades notables**, en donde polinomios de dos términos (**binomios**) **elevados a una potencia entera siempre siguen las mismas reglas**.

Dentro de los productos notables se encuentran:

1. Binomio al cuadrado.
2. Binomios conjugados.
3. Producto de un binomio con un término común.
4. Trinomio al cuadrado.
5. Triángulo de pascal.
6. Binomio de Newton.
7. Cocientes.

La regla de un **binomio al cuadrado** puede ser suma o diferencia de monomios elevados al cuadrado.

Definición

Para la **suma**: El cuadrado del primer término más el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término. De forma algebraica sería:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$$

Para la **diferencia**: El cuadrado del primer término menos el doble producto el primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término. De forma algebraica sería:

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$$

Ejemplo 1

Realice los siguientes binomios al cuadrado:

$a)\quad (x+b)^2 = \boldsymbol{x^2 + 2xb + b^2}$

$b)\quad (2x-y)^2 = \boldsymbol{4x^2 - 4xy + y^2}$

$c)\quad (x+2)^2 = \boldsymbol{x^2 + 4x + 4}$

$d)\quad (3x-3c)^2 = \boldsymbol{9x^2 + 18xc + 9c^2}$

$e)\quad (a+4b)^2 = \boldsymbol{a^2 + 8ab + 16b^2}$

$f)\quad (x^2-2y)^2 = \boldsymbol{x^4 - 4x^2y + 4y^2}$

$g)\quad (x^2+5y^3)^2 = \boldsymbol{x^4 + 10x^2y^3 + 25y^6}$

$h)\quad (3p^3-2r^3)^2 = \boldsymbol{9p^6 - 12p^3r^3 + 4r^6}$

$i)\quad \left(a^3+\frac{1}{2}b^2\right)^2 = \boldsymbol{a^6 + a^3b^2 + \frac{1}{4}b^4}$

$j)\quad \left(\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{3}y^{1/2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{4}a^6 + \frac{2}{3}x^3y^{1/2} + \frac{4}{9}y}$

Ejercicios de refuerzo 6.1

Desarrolla la expansión de los siguientes binomios al cuadrado.

1. $\left(\frac{1}{2}-3x\right)^2$
2. $\left(\frac{1}{3}+\sqrt{3}x\right)^2$
3. $\left(y^2+\sqrt{2x}\right)^2$
4. $\left(ex-4\sqrt[3]{y}\right)^2$
5. $\left(2am-\frac{3}{5x}\right)^2$
6. $\left(3xy+2\sqrt{ab}\right)^2$
7. $\left(\frac{x}{3}-\frac{\sqrt{2}y}{3}\right)^2$
8. $(2x-8y)^2$
9. $\left(-x^2-\frac{1}{2}y^2\right)^2$
10. $\left(\frac{12}{5}+\sqrt{2y}\right)^2$
11. $(2x+3y^2)^2$
12. $(a^3+b^2)^2$
13. $(2m-4n)^2$
14. $\left(-\frac{x}{5}-3y^2\right)^2$
15. $\left(\frac{x^{\frac{1}{4}}}{5}-\frac{2y^{\frac{2}{3}}}{3}\right)^2$

6.2 Producto de binomios conjugados

La regla de un binomio conjugado son la suma y una diferencia de binomios, que tienen un término común y un término simétrico y se expresa como:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

Para resolver el producto haremos lo siguiente:

Definición

El cuadrado del término común menos el cuadrado del término simétrico:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{2}-\boldsymbol{b}^{2}$$

Ejemplo 2

Realice los siguientes binomios conjugados:

$a)$ $(x+c)(x-c)=\boldsymbol{x^2-c^2}$

$b)$ $(x+3)(x-3)=\boldsymbol{x^2-9}$

$c)$ $(3x+6y^2)(3x-6y^2)=\boldsymbol{9x^2-36y^4}$

$d)$ $(2m^4+5np)(2m^4-5np)=\boldsymbol{4m^8-25n^2p^2}$

$e)$ $(4z^5+6y^3)(4z^5-6y^3)=\boldsymbol{16z^{10}-36y^6}$

$f)$ $(r^2s+2rs)(r^2s-2rs)=\boldsymbol{r^4s^2-4r^2s^2}=\boldsymbol{r^2s^2(r^2-4)}$

Ejercicios de refuerzo 6.2

Desarrolla la expansión de los siguientes binomios conjugados.

16. $\left(\frac{x}{3}+\frac{4x}{3}\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{4x}{3}\right)$

17. $(\sqrt{2}x+y^2)(\sqrt{2}x-y^2)$

18. $\left(4x+y^{\frac{2}{3}}\right)\left(4x-y^{\frac{2}{3}}\right)$

19. $(2x+5y)(2x-5y)$

24. $(2m-5n^2)(5n^2-2m)$

25. $(5x^2-3)(5x^2+3)$

26. $(7a^2+2b^3)(7a^2-2b^3)$

27. $(-6x^3+2y)(6x^3+2y)$

20. $(-2x+a)(-2x-a)$

21. $(-\sqrt{3}\sqrt[3]{x}+\sqrt{y})(-\sqrt{3}\sqrt[3]{x}-\sqrt{y})$

22. $(15xa^2+2yb)(15xa^2-2yb)$

23. $(2a^3b+\sqrt{x})(2a^3b-\sqrt{x})$

28. $(10r^2t^3p^4+12s^2u^5w)\ (10r^2t^3p^4-12s^2u^5w)$

29. $(6jk+5mn)(4mn-6jk)$

30. $(-\propto+1)(\propto+1)$

6.3 Producto de un binomio con un término común

Es el producto de dos binomios que tiene un término común y un término cualquiera y se expresa como:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$$

Para resolver el producto se sigue la siguiente regla:

Definición

El cuadrado del término común más la suma de los términos no comunes más el producto de los términos no comunes:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{bc}$$

Ejemplo 3

Realice los siguientes binomios conjugados:

$a)$ $(x+5)(x+2)=$ $\boldsymbol{x^2+7x+10}$

$b)$ $(x+3)(x-7)=\boldsymbol{x^2-4x-21}$

$c)$ $(3x+10)(3x-11)=\boldsymbol{9x^2-3x+110}$

$d)$ $(a+12)(a-11)=\boldsymbol{a^2-a-132}$

$e)$ $(b^{x+1}+5)(b^{x+1}-4)=\boldsymbol{b^{2x+2}+b^{x+1}-20}$

$f)$ $\left(\frac{1}{2}a^5-6\right)\left(\frac{1}{2}a^5-5\right)=\boldsymbol{\frac{1}{4}a^{10}-\frac{11}{2}a^5+30}$

$g)$ $(4r^2s+5)(4r^2s-12)=\boldsymbol{16r^4s^2-28r^2s-60}$

Ejercicios de refuerzo 6.3

Desarrolla la expansión de los siguientes binomios con un término común.

31. $(2x-3)(2x+5)$
32. $(a+6)(a+2)$
33. $(y+6)\left(y-\frac{2}{3}\right)$
34. $(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}-5)$
35. $(x^2-3)(x^2+10)$
36. $(xy+b)(xy-5)$
37. $\left(y^2-\frac{8}{5}\right)\left(y^2-\frac{2}{3}\right)$
38. $(a^x-4)(a^x+6)$
39. $(a^2b^3+10)(a^2b^3+33)$
40. $\left(\frac{\sqrt{x}m}{3}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{x}m}{3}-\frac{4}{5}\right)$
41. $(e^x-\sqrt{2})\left(e^x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
42. $(15x+7)(15x+2)$
43. $\left(\frac{3}{4}x+3q\right)\left(\frac{3}{4}x+2q\right)$
44. $\left(\frac{a}{4}-2b\right)\left(\frac{a}{4}-6b\right)$
45. $(4x^2b-3a)(4x^2b+9a)$

6.4 Trinomio al cuadrado

El producto de un trinomio al cuadrado se escribe como:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2$$

Para resolver el producto se observa la siguiente

Definición

El cuadrado de cada término más el doble producto de la combinación de los términos entre sí:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2+2\boldsymbol{ab}+2\boldsymbol{bc}+2\boldsymbol{ac}$$

Ejemplo 4

Realice los siguientes binomios conjugados:

$a)$ $(x+2y+3)^2 = \boldsymbol{x^2+4y^2+9+4xy+12y+6x}$

$b)$ $(2a-3b-4c)^2 = \boldsymbol{4a^2+9b^2+16c^2-12ab+24bc-16ac}$

$c)$ $(2x+3y-5z)^2 = \boldsymbol{4x^2+9y^2+25z^2+12xy-20xz-30yz}$

$d)$ $(3m-p-5q)^2 = \boldsymbol{9m^2+p^2+25q^2-6mp-30mq+10pq}$

$e)$ $(3x+2xy-4y)^2 = \boldsymbol{9x^2+4x^2y^2+16y^2+12x^2y-16xy^2-24xy}$

$f)$ $\left(x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z\right)^2 = \boldsymbol{x^2+\frac{1}{4}y^2+\frac{9}{4}z^2+xy+3xz+\frac{3}{2}yz}$

$g)$ $(4x+\sqrt{y}-6)^2 = \boldsymbol{16x^2+y+36+8x\sqrt{y}-12\sqrt{y}-48x}$

Ejercicios de refuerzo 6.4

Desarrolla los siguientes trinomios al cuadrado.

46. $(4x+2y-5)^2$
47. $\left(\frac{a}{2}+b-3\right)^2$
48. $(2m-3n+\sqrt{2})^2$
49. $(3a-2b+4)^2$
50. $\left(\frac{x}{2}+3y-2\right)^2$
51. $\left(m-\frac{n}{2}+3\right)^2$
52. $\left(x-2y+\frac{1}{3}\right)^2$
53. $\left(\frac{5}{x}+\frac{1}{y}+2\right)^2$
54. $\left(\frac{1}{x}+2y+1\right)^2$
55. $(-2z-3w-3)^2$
56. $(-5x-2y-1)^2$
57. $\left(\frac{x}{8}+\frac{7}{y}-\frac{1}{6}\right)^2$
58. $\left(\frac{2x}{3}-\frac{2y}{9}+\frac{1}{9}\right)^2$
59. $(2x^2+3y^2-2)^2$
60. $\left(9-\sqrt[3]{b^2}+1\right)^2$

6.5 Binomio al cubo

Un binomio al cubo se escribe como:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3$$

Una interpretación geométrica del producto notable es un cubo cuyo producto es el volumen:

$$V=(a+b)^3$$

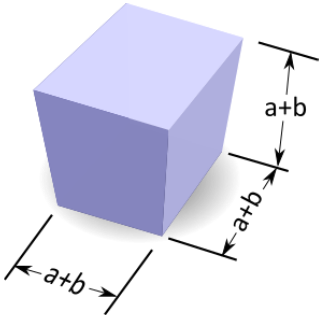


Figura 6.1 Volumen de un cubo cuyos lados representan un binomio.

Para resolver el producto se sigue la siguiente regla:

Definición

El cubo del primer término más el triple producto del primer término al cuadrado por el segundo más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término más el cubo del segundo término:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3+3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}^3$$

Para una diferencia se utiliza la siguiente regla:

El cubo del primer término menos el triple producto del primer término al cuadrado por el segundo más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término menos el cubo del segundo término:

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3-3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}^3$$

Ejemplo 5

Realice los siguientes binomios al cubo:

$a)$ $(a+c)^3=\boldsymbol{a^3+3a^2c+3ac^2+c^3}$

$b)$ $(2x-y)^3=(2x)^3-3(2x)^2y+3(2x)y^2-y^3$

$$\boldsymbol{8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3}$$

$c)\quad (4x+5y)^3 = (4x)^3 + 3(4x)^2(5y) + 3(4x)(5y)^2 + (5y)^3$

$$\mathbf{64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3}$$

$d)\quad \left(3m+\frac{1}{2}\right)^3 = (3m)^3 + 3(3m)^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3(3m)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$\mathbf{27m^3 + \frac{27}{2}m^2 + \frac{9}{4}m + \frac{1}{8}}$$

$e)\quad (2x^2+y)^3 = (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2y + 3(2x^2)y^2 + y^3$

$$\mathbf{8x^6 + 12x^4y + 6x^2y^2 + y^3}$$

$f)\quad \left(3ax+\frac{1}{4}by^3\right)^3 = (3ax)^3 + 3(3ax)^2\left(\frac{1}{4}by^3\right) + 3(3ax)\left(\frac{1}{4}by^3\right)^2 + \left(\frac{1}{4}by^3\right)^3$

$$\mathbf{27a^3x^3 + \frac{27}{4}a^2x^2by^3 + \frac{9}{16}axb^2y^6 + \frac{1}{64}b^3y^9}$$

$g)\quad \left(\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)^3 = \left(\sqrt{2x}\right)^{\mathbf{3}} + \mathbf{3}\left(\sqrt{2x}\right)^{\mathbf{2}}\sqrt{y} + \mathbf{3}\left(\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{y}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\sqrt{y}\right)^{\mathbf{3}}$

$$\sqrt{2^3x^3} + 3(2x)\sqrt{y} + 3(\sqrt{2x})y + \sqrt{y^3}$$

$$\mathbf{\sqrt{8x^3} + 6x\sqrt{y} + 3y\sqrt{2x} + \sqrt{y^3}}$$

Ejercicios de refuerzo 6.5

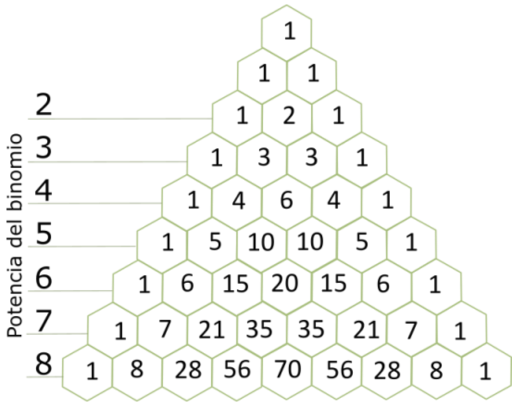
Desarrolla los siguientes binomios al cubo.

61. $(3x-2y)^3$
62. $\left(\frac{x}{2}+\sqrt{y}\right)^3$
63. $(x^2-2b)^3$
64. $\left(\sqrt{x}+4y\right)^3$
65. $\left(\sqrt{2x}+\sqrt{3y}\right)^3$
66. $\left(-\frac{m}{3}-4n\right)^3$
67. $(3p^2r-2qr^2)^3$
68. $\left(\frac{a}{2}-\frac{3b^2}{4}\right)^3$
69. $\left(-4w-\frac{z^2}{3}\right)^3$
70. $\left(3x-\sqrt[3]{y}\right)^3$
71. $\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{y}\right)^3$
72. $(-3qr-2wr)^3$
73. $(2ab^3-3ay^3)^3$
74. $(4e+5)^3$
75. $\left(\sqrt{3x}-2\sqrt{y}\right)^3$

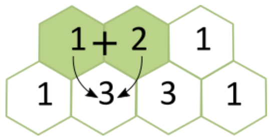
6.6 Triángulo de Pascal

Este triángulo nos da los coeficientes de los términos del desarrollo de cualquier potencia de un binomio, ver figura 6.1.

Figura 6.1 Coeficientes de un binomio de potencia "n"



Para formar el triángulo se escribe en la primera fila el número 1, en la segunda fila se coloca 1 y 1. Desde la tercera fila cada número se obtiene sumando los números que tiene encima.



Definición

Los coeficientes del desarrollo de cualquier potencia de un binomio son los números que se hallan en la fila horizontal del triángulo de Pascal, recordando que el primer término disminuye su potencia y el segundo término la aumenta.

Se puede ver en la siguiente tabla la expansión de un binomio.

Tabla 6.1

Expansión de un polinomio utilizando el triángulo de Pascal

Potencia	Coeficientes	Expansión polinomial
2	1, 2, 1	$(x+1)^2 = \mathbf{1}x^2 + \mathbf{2}x + \mathbf{1}$
3	1, 3, 3, 1	$(x+1)^3 = \mathbf{1}x^3 + \mathbf{3}x^2 + \mathbf{3}x + \mathbf{1}$
4	1, 4, 6, 4, 1	$(x+1)^4 = \mathbf{1}x^4 + \mathbf{4}x^3 + \mathbf{6}x^2 + \mathbf{4}x + \mathbf{1}$

Ejemplo 6

Obtenga la expansión de los siguientes binomios:

$a)\ (a-b^2)^4$
$b)\ (x^2-3y^5)^5$

Solución

$$(a-b^2)^4 = 1(a)^4(b^2)^0 - 4(a)^3(b^2)^1 + 6(a)^2(b^2)^2 - 4(a)^1(b^2)^3 + 1(a)^0(b^2)^4$$

$$(a-b^2)^4 = \boldsymbol{a^4 - 4a^3b^2 + 6a^2b^4 - 4ab^6 + b^8}$$

$$(x^2-3y^5)^5 = 1(x^2)^5(3y^5)^0 - 5(x^2)^4(3y^5)^1 + 10(x^2)^3(3y^5)^2 - 10(x^2)^2(3y^5)^3 + 5(x^2)^1(3y^5)^4 - 1(x^2)^0(3y^5)^5$$

$$(x^2-3y^5)^5 = \boldsymbol{x^{10} - 15x^8y^5 + 90x^6y^{10} - 270x^4y^{15} + 405x^2y^{20} - 243y^{25}}$$

6.7 Binomio de Newton

El binomio de Newton es una fórmula que nos ayuda a encontrar el resultado de un binomio elevado a cualquier potencia:

Ahora para encontrar el valor del número de combinaciones sin repetición, es decir el **número combinatorio** se utiliza la siguiente formula:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!\,\boldsymbol{r}!}$$

Definición

La fórmula del binomio de Newton es:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{0}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{b} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{2}} + \cdots + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}$$

Otra forma de expresar esta fórmula es:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Si el binomio tiene signo negativo, el resultado de éste signo se alterna.

Ahora para encontrar el valor del número de combinaciones sin repetición, es decir el **número combinatorio** se utiliza la siguiente fórmula:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!\,\boldsymbol{r}!}$$

Recuerda que...

Cero factorial: $0! = 1$

Cuatro factorial: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Seis factorial: $6! = 6 \times 5 \times 4!$

Ocho factorial: $8! = 8 \times 7 \times 6!$

Ejemplo 7

Obtenga el número combinatorio para los siguientes incisos:

$a)\ \binom{7}{2}$ $\qquad$ $b)\ \binom{6}{3}$

Solución

$\boldsymbol{a})\ \binom{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!\,2!}$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!\,2!}$$

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = \frac{42}{2} = \mathbf{21}$$

$\boldsymbol{b})\ \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}}$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!}$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!\,3!}$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = \frac{120}{6} = \mathbf{20}$$

Ejercicios de refuerzo 6.6

Obtenga el resultado de las siguientes agrupaciones combinatorias:

86. $\binom{7}{2}$
87. $\binom{9}{3}$
88. $\binom{15}{4}$
89. $\binom{6}{4}$
90. $\binom{12}{9}$
91. $\binom{8}{2}$
92. $\binom{10}{4}$
93. $\binom{13}{9}$
94. $\binom{15}{13}$
95. $\binom{11}{7}$

Ejemplo 8

Encuentre la expansión utilizando el binomio de Newton para:

$a)\ (x+y)^6$

$b)\ (2a-3b)^5$

Solución

$$a)(x+y)^6=\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{0}}x^6+\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{1}}x^5y+\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{2}}x^4y^2+\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{3}}x^3y^3+\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{4}}x^2y^4+\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}xy^5+\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{6}}xy^6$$

Los números combinatorios son:

$$\binom{6}{0}=\frac{6!}{6!\,0!}=\frac{1}{0!}=1$$

$$\binom{6}{1}=\frac{6!}{5!\,1!}=\frac{6\times 5!}{5!\,1!}=6$$

$$\binom{6}{2}=\frac{6!}{4!\,2!}=\frac{6\times 5\times 4!}{4!\,2!}=15$$

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\,3!}=\frac{6\times 5\times 4\times 3!}{3!\,3!}=\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=20$$

$$\binom{6}{4}=\frac{6!}{2!\,4!}=\frac{6\times 5\times 4!}{2!\,4!}=15$$

$$\binom{6}{5}=\frac{6!}{1!\,5!}=\frac{6\times 5!}{1!\,5!}=6$$

$$\binom{6}{6}=\frac{6!}{0!\,6!}=\frac{1}{0!}=1$$

$$\boldsymbol{(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+xy^6}$$

$b)\ (2a-3b)^5$

Solución

Se expande el binomio según

$$a)\ (2a-3b)^5=\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{0}}(2a)^5-\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{1}}(2a)^4 3b+\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}(2a)^3(3b)^2-\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}(2a)^2(3b)^3+\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}2a(3b)^4-\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{5}}(3b)^5$$

Los números combinatorios son:

$$\binom{5}{0}=\frac{5!}{5!\,0!}=\frac{1}{0!}=1$$

$$\binom{5}{1}=\frac{5!}{4!\,1!}=\frac{5\times 4!}{4!\,1!}=5$$

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{3!\,2!}=\frac{5\times 4\times 3!}{3!\,2!}=10$$

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{2!\,3!}=\frac{5\times 4\times 3!}{2!\,3!}=\frac{5\times 4}{2!}=10$$

$$\binom{5}{4}=\frac{5!}{1!\,4!}=\frac{5\times 4!}{1!\,4!}=5$$

$$\binom{5}{5}=\frac{5!}{0!\,5!}=\frac{5!}{0!\,5!}=\frac{1}{0!}=1$$

$$(2a-3b)^5=(2a)^5-\mathbf{5}(2a)^4 3b+\mathbf{10}(2a)^3(3b)^2-\mathbf{10}(2a)^2(3b)^3+\mathbf{5}(2a)(3b)^4-(3b)^5$$

Se desarrollan las potencias de los coeficientes, obteniéndose:

$$\boldsymbol{(2a-3b)^5=32a^5-240a^4b+720a^3b^2-1080a^2b^3+810ab^4-243b^5}$$

Ejercicios de refuerzo 6.7

Desarrolle las siguientes expresiones utilizando el binomio de Newton:

96. $(a-5b)^5$
97. $\left(\frac{1}{2}+2x\right)^4$
98. $(2x^2-3)^5$
99. $(a+\sqrt{x})^6$
100. $(-x-2y^2)^4$
101. $\left(\sqrt{a+b^2}\right)^8$
102. $\left(\frac{1+2x}{3}\right)^5$
103. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{b}\right)^4$
104. $(ax^2+by)^5$
105. $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{y}\right)^5$

Ahora si solo se quiere encontrar algún término en específico de la expansión de un binomio, se utiliza la siguiente expresión:

Definición

El término *i-ésimo* para el desarrollo de la potencia *n-ésima* del binomio $(a+b)$ es:

$$\binom{n}{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$$

Ejemplo 9

Obtener el octavo término para el inciso a) y el décimo noveno término para el inciso b) de las expresiones:

$a)\ \ (x-y)^{13} \qquad b)\ \ (2x+y)^{22}$

Solución

$a)\ \ (x-y)^{13}$

$\boldsymbol{n=13 \qquad r=8}$

$$\binom{13}{8-1} x^{13-8+1}(-y)^{8-1}$$

El número combinatorio es:

$$\binom{13}{7} = \frac{13!}{(13-7)!\,7!}$$

$$\binom{13}{7} = \frac{13\times 12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7!}{6!\,7!} = \mathbf{10296}$$

El octavo término es:

$$-1716\,x^6y^7$$

$b)\ \ (2x+y)^{22}$

$\boldsymbol{n=22 \qquad r=19}$

$$\binom{22}{19-1} (2x)^{22-19+1} y^{19-1}$$

El número combinatorio es:

$$\binom{22}{18} = \frac{22!}{(22-18)!\,18!} = \frac{22!}{4!\,18!}$$

$$\binom{22}{18} = \frac{22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18!}{4!\,18!}$$

$$\binom{22}{18} = \frac{22 \times 21 \times 20 \times 19}{4!} = \mathbf{7315}$$

El décimo noveno término es:

$$7315\,(2x)^4 y^{18}$$

$$\mathbf{117040\,x^4 y^{18}}$$

Ejercicios de refuerzo 6.8

Desarrolle las siguientes expresiones utilizando el binomio de Newton:

106. $(x+7)^{25}$

107. $(2x+2)^{18}$

108. $(x+5)^{12}$

109. $(3x-2)^{19}$

110. $(2x+1)^{8}$

111. $(4x-1)^{11}$

112. $(x+y)^{131}$

113. $(2x-y)^{99}$

114. $(6x+2y)^{12}$

115. $\left(\frac{x}{2}+y\right)^{15}$

6.8 Cocientes notables

Los cocientes son divisiones de polinomios; en el caso que estas **divisiones son exactas** (en donde el residuo es cero), se puede obtener el resultado de manera directa sin realizar algún cálculo. La forma de estos cocientes son de la forma:

$$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$$

Donde n es mayor o igual a 2.

Se puede hacer una demostración con la diferencia al cuadrado visto en la sección 6.2:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Ahora se despeja $(a+b)$

$$\frac{\boldsymbol{a^2-b^2}}{\boldsymbol{a-b}}=\boldsymbol{a+b}$$

Por lo tanto el resultado de este cociente puede generalizarse y establecer una regla. De estos cocientes notables se pueden tener cuatro casos.

Definición

CASO 1. Diferencia de dos cantidades con potencias iguales, pares o impares. La solución está dada por:

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1}$$

Ejemplo 10

Aplique el caso 1 para resolver el siguiente cociente notable:

$a)\ \dfrac{x^6-y^6}{x-y}$ $\qquad b)\ \dfrac{2x^3-2y^3}{x-y}$

Solución a)

Se aplica la regla:

$$\frac{\boldsymbol{a^m-b^m}}{\boldsymbol{a-b}}=a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1}$$

$$\frac{x^6-y^6}{x-y}=\boldsymbol{x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5}$$

Solución b)

$$\frac{2x^3-2y^3}{x-y}=\boldsymbol{2x^2+2xy+2y^2}$$

Definición

CASO 2. Diferencia de dos cantidades con potencias iguales par. La solución está dada por:

$$\frac{a^m - b^m}{a+b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} - b^{m-1}$$

Ejemplo 11

Aplique el caso 2 para resolver el siguiente cociente notable:

$a)\ \dfrac{x^4 - y^4}{x+y}$ $\qquad b)\ \dfrac{3a^6 - 3b^6}{a+b}$

Solución

$a)\ \dfrac{x^4 - y^4}{x+y}$

Se utiliza la regla:

$$\frac{\boldsymbol{a^m - b^m}}{\boldsymbol{a+b}} = a^{m-1} - a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} - b^{m-1}$$

$$\frac{x^4 - y^4}{x+y} = \boldsymbol{x^3 - x^2y + xy^2}$$

Solución

$b)\ \dfrac{3a^6 - 3b^6}{a+b}$

$$\frac{3a^6 - 3b^6}{a+b} = \boldsymbol{3a^5 - 3a^4b + 3a^3b^2 - 3a^2b^3 + 3ab^4 - 3b^5}$$

Definición

CASO 3. Diferencia de dos cantidades con potencias iguales impar. La solución está dada por:

$$\frac{a^m + b^m}{a + b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + \cdots + a^2b^{m-3} - ab^{m-2} + b^{m-1}$$

Ejemplo 12

Aplique el caso 3 para resolver el siguiente cociente notable:

$a)\ \dfrac{x^5 + y^5}{x + y}$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{8a^3 + 125b^3}{2a + 5b}$

Solución a)

Se usa la regla:

$$\frac{\boldsymbol{a^m + b^m}}{\boldsymbol{a + b}} = a^{m-1} - a^{m-2}b + \cdots + a^2b^{m-3} - ab^{m-2} + b^{m-1}$$

$$\frac{x^5 + y^5}{x + y} = \boldsymbol{x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4}$$

Solución b)

Se expresan los términos constantes del numerador en relación a las bases de los denominadores.

$$\frac{(2a)^3 + (5b)^3}{2a + 5b}$$

Ahora se aplica la regla:

$$\frac{(2a)^3 + (5b)^3}{2a + 5b} = (2a)^2 - (2a)(5b) + (5b)^2$$

$$\frac{(2a)^3 + (5b)^3}{2a + 5b} = \boldsymbol{4a^2 - 10ab + 25b^2}$$

Definición

CASO 4. La suma de dos cantidades con igual potencia par o impar, en el cual **no** se genera un **cociente notable**. El cociente es de la forma:

$$\frac{a^m + b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \cdots + b^{m-1}$$

Genera un residuo de $\boldsymbol{2b^n}$.

NÚMERO DE TÉRMINOS DE UN COCIENTE NOTABLE

Para encontrar el número de términos de un cociente notable de la forma:

$$\boldsymbol{\frac{a^p \pm b^q}{a^r \pm b^s}}$$

Definición

El número de términos se calcula como la división de los exponentes de la misma variable:

$$\boldsymbol{n = \frac{p}{r} = \frac{q}{s}}$$

Ejemplo 13

Encuentre la cantidad de términos del siguiente cociente notable: $\boldsymbol{\frac{1 - b^{12}}{1 - b^3}}$

Solución

Los exponentes son $q = 12$ y $s = 3$

El número de términos es:

$$n = \frac{12}{3} \qquad \boldsymbol{n = 4}$$

El desarrollo del cociente notable tiene 4 términos.

TÉRMINO "K" DE UN COCIENTE NOTABLE

Para encontrar el término en la posición "k" de un cociente notable de la forma:

$$\frac{a^m - b^m}{a - b}$$

Definición

El término i-esimo del desarrollo de un cociente notable se obtiene de la siguiente manera:

$$t_i = (-1)^{k-1} a^{m-k} b^{k-1}$$

Ejemplo 14

Encuentre el octavo y noveno término para los respectivos cocientes notables:

$a)\ \dfrac{x^{43} - y^{43}}{x - y}$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{x^{38} - y^{38}}{x^2 - y^2}$

Solución a)

Se usa la expresión

$$t_i = (-1)^{k-1} a^{m-k} b^{k-1}$$

Se tiene para el séptimo término:

$$t_8 = (-1)^{8-1} x^{43-8} y^{8-1}$$

$$t_8 = (-1)^7 x^{35} y^7$$

$$t_8 = -x^{35} y^7$$

Solución b)

Se expresa el cociente como:

$$\frac{(x^2)^{27} - (y^2)^{27}}{x^2 - y^2}$$

$$t_9 = (-1)^{9-1} (x^2)^{27-9} (y^2)^{9-1}$$

$$t_9 = (-1)^8 (x^2)^{18} (y^2)^8$$

$$t_9 = x^{36} y^{16}$$

Ejercicios de refuerzo 6.9

Desarrolle los siguientes cocientes notables:

116. $\frac{2x^5+2y^5}{x+y}$

117. $\frac{x^7+y^7}{2x+2y}$

118. $\frac{x^6+y^6}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

119. $\frac{x^5-y^5}{x^2+y^2}$

120. $\frac{3x^4-3y^4}{x+y}$

121. $\frac{4x^6-4y^6}{3x+3y}$

122. $\frac{27x^3-8y^3}{3x-2y}$

123. $\frac{x^4-16}{x-2}$

124. $\frac{x^7-128}{x-2}$

125. $\frac{64a^6-72b^6}{2a+3b}$

126. $\frac{3125m^5+1024n^5}{5m+4n}$

El gran actor tras bambalinas (Productos notables)

Escrito por: Dr. Enrique García Leal
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM

Sabemos que las matemáticas son tan extensa como el mismo universo, en esta ocasión hablaremos de un digno representante del algebra y que sin su ayuda no sería posible encontrar soluciones e interpretaciones sencillas a diferentes escenarios de las ciencias y estos son los productos notables.

Seguramente te has preguntado cual es el rol o su actuación más destacada de los productos notables, sobre todo en las áreas químico-biológicas. Un ejemplo directo del papel que desempeñan los productos notables se da en el diseño de desarrollos urbanos a través del manejo de áreas, mientras que, en los campos de la química y la biología, el uso de los productos notables resulta ser un actor de gran importancia ya que gracias a sus características (Los productos notables cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación. Estas operaciones son fáciles de recordar sin necesidad de efectuar la multiplicación correspondiente) permiten simplificar modelos matemáticos que de otra forma serían muy complejos de manejar e interpretar, existen numerosos casos donde participa este gran actor.
Solo por mencionar algunos, en el desarrollo de la ecuación de Van der Waals (Ver ecuación 1; gases reales) para el cálculo de su volumen (Ver ecuación 2) así mismo para la creación de ecuaciones que permiten determinar el valor de las propiedades críticas de los gases a partir de esta.

$Ec.$ ①

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(\bar{V}-b)=RT$$

Donde:

a y b	Se conocen como constantes de Van der Waals y son específicas para cada gas.
$\bar{V}$	Es el volumen molar.

Después de un tratamiento matemático de esta ecuación se obtiene una expresión cubica para el $\bar{V}$, la cual permite estimar el volumen de un gas en condiciones reales.

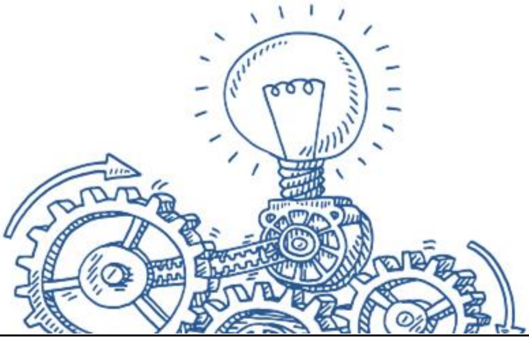
$Ec.$ ②

$$p\bar{V}^3-\bar{V}^2(pb+RT)+a\bar{V}-ab=0$$

Otro campo que hace un gran uso de los diferentes productos notables es la cinética química, debemos recordar que la cinética química permite estimar o determinar la rapidez de reacción de un nuevo producto o el simular el mejoramiento de la cinética de algún producto ya existente para ello hace uso de diversos actores de las matemáticas como el uso de ecuaciones diferenciales que sin la participación de los productos notables y otras partes del algebra sería muy complicado el uso y la interpretación de estos resultados.

También podemos ver el rol de los productos notables en el desarrollo de modelos que permiten predecir el crecimiento de sistemas bacterianos los cuales son muy útiles para realizar estudios de eficiencia de fármacos sobre determinada bacteria.

Esto son solo algunos escenarios en los que podemos encontrar el actuar de los productos notables.



Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 6. Productos y cocientes notables

1. $9x^2-3x+\frac{1}{4}$ **3**. $2x+\sqrt{8}\sqrt{x}\,y^2+y^4$ **5**. $4a^2m^2+\frac{9}{25x^2}-\frac{12am}{5x}$ **7**. $\frac{2}{9}y^2-\frac{2xy}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{9}x^2$ **9**. $\frac{y^4}{4}+x^2y^2+x^4$

11. $4x^2+12xy^2+9y^4$ **13**. $\frac{x^2}{25}+\frac{6xy^2}{5}+9y^4$ **15**. $\frac{\sqrt{x}}{25}+4\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}+\frac{4\sqrt[3]{y^4}}{9}$ **17**. $2x^{\,2}-y^4$ **19**. $4x^2-25y^2$

21. $3\sqrt[3]{x^2}-y$ **23**. $4a^6b^2-x$ **25**. $25x^4-9$ **27**. $4y^2-36x^6$ **29**. $16m^2n^2-36j^2k^2$ **31**. $4x^2+4x-15$

33. $y^2+\frac{16y}{3}-4$ **35**. x^4+7x^2-30 **37**. $y^4-\frac{34y^2}{15}+\frac{16}{15}$ **39**. $a^2b^6+43a^2b^3+330$ **41**. $e^{2x}+\frac{e^x\sqrt{x}(1-\sqrt{6})}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}$

43. $\frac{9x^2}{16}+\frac{15xq}{4}+6q^2$ **45**. $16a^4b^2-24a^3b-27a^2$ **47**. $\frac{a^2}{4}+b^2+ab-6b-3a+9$ **49**. $9a^2+4b^2-16b-12ab+24a+16$

51. $m^2+\frac{n^2}{4}-mn-3n+6m+9$ **53**. $\frac{4(x+5y)}{xy}+\frac{1}{y^2}+\frac{10}{xy}+\frac{25}{x^2}+4$ **55**. $1+4y^2+4y+\frac{2(2y+1)}{x}+\frac{1}{x^2}$

57. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{49}+\frac{xy}{28}-\frac{x}{24}-\frac{y}{21}+\frac{1}{36}$ **59**. $4x^4+9y^4+12x^2y^2-12y^2-8x^2+4$ **61**. $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

63. $\boldsymbol{x^6}-6x^4b+12x^2b^2-8b^3$ **65**. $2\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}+6\sqrt{3}xy+9\sqrt{2x}\,y^2+3\sqrt{3}y^3$ **67**. $27p^6r^3-54p^4r^4q+36p^2r^5q^2-8r^6q^3$

69. $-64w^3-16w^2z^2-\frac{4wz^4}{3}-\frac{z^6}{27}$ **71**. $\frac{1}{x^3}-\frac{6}{x^2y}+\frac{12}{xy^2}-\frac{8}{y^3}$ **73**. $8a^3b^9-36a^3b^6y^3+54a^3b^3y^6-27a^3y^9$

75. $3\sqrt{3x^3}-18x\sqrt{y}+12\sqrt{3x}y-8\sqrt{y^3}$ **77**. $729x^6-2916x^5+4860x^4-4320x^3+2160x^2-576x+64$

79. $16x^4-224x^3+1176x^2-2744x+2401$ **81**. $\sqrt{x^2}+5x^2\sqrt{y}+10\sqrt{x^3}y+10x\sqrt{y^3}+5\sqrt{x}y^2+\sqrt{y^5}$

83. $x^6+12x^5+60x^4+160x^3+240x^2+192x+64$ **85**. $x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$ **87**. 84 **89**. 15 **91**. 28

93. 715 **95**. 330 **97**. $16x^4+16x^3+6x^2+x+\frac{1}{16}$ **99**. $a^6+6a^5\sqrt{x}+15a^4x+20a^3x^{\frac{3}{2}}+15a^2x^2+6ax^{\frac{5}{2}}+x^3$

101. $a^4+4a^3b^2+6a^2b^4+4ab^6+b^8$ **103**. $\frac{x^4}{4}+\sqrt{2b}x^3+3bx^2+2\sqrt{2}b^{\frac{3}{2}}x+b^2$ **105**. $a^5x^{10}+5a^4bx^8y+10a^3b^2x^6y^2+10a^2b^3x^4y^3+5ab^4x^2y^4+b^5y^5$ **107**. $802160640x^{14}$ **109**. $889861816512x^{15}$ **111**. $5406720x^7$ **113**. $3764376x^{95}y^4$

115. $\frac{1365x^{11}y^4}{2048}$ **117**. $\frac{1}{2}(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)$ **119**. $\frac{x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4}{x+y}$

121. $\frac{4}{3}(x^2+y^2)$ **123**. x^3+2x^2+4x+8 **125**. $\frac{2a^6-(3b)^6}{2a+3b}$

7

Resolución de la Ecuación Lineal

LO QUE APRENDERÁS. . .

7.1 Función lineal: ordenada al origen, pendiente y ecuación de la recta.
7.2 Método gráfico.
7.3 Ecuaciones enteras de primer grado con una incógnita.
7.4 Ecuaciones con coeficientes fraccionarios de primer grado con una incógnita.
7.5 Ecuaciones fraccionarias de primer grado con una incógnita.
7.6 Simplificación de una igualdad a una ecuación de primer grado.
7.7 Ángulos entre dos rectas, criterios de perpendicularidad.
7.8 Aplicaciones de las ecuaciones de primer grado.

7.1 Función lineal: ordenada al origen, pendiente y ecuación de la recta

Una ecuación lineal se puede escribir de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B, y C son números reales, sujeto a que A y B no pueden ser cero simultáneamente. Esta expresión es una ecuación de primer grado con dos variables, seguro nuestro amigo el chef no lo sabe.

El conjunto solución de toda ecuación lineal con dos variables, son pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación. Al unirse estos pares ordenados se obtiene una línea recta que se denomina **ecuación lineal** o **ecuación de la recta**.

Las formas para expresar una ecuación lineal son:

a) General.
b) Punto pendiente.
c) Pendiente intersección.

Definición

La **ecuación de una recta** la podemos definir como el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que al tomarse en pares ordenados se obtiene la misma pendiente.

FORMA GENERAL

Como se dijo con anterioridad la forma general se escribe como:

$$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$$

Cuando la ecuación de una recta se presenta de esta forma se recomienda que el término "A" sea positivo.

FORMA PUNTO PENDIENTE

La forma punto pendiente de un **polinomio de primer grado**, se puede escribir como: $\boldsymbol{y = mx + b}$ (Fig. 7.1).

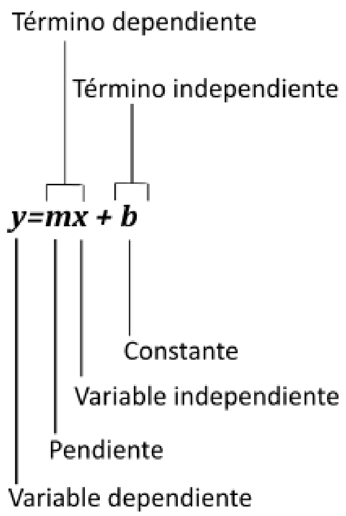


Figura 7.1 Partes de un polinomio de primer grado.

Cada parte de la función lineal tiene características particulares que dan información del comportamiento de algún fenómeno que es representado por un polinomio de primer grado. Iniciemos por definir lo que es una variable.

Definición

Una **variable** es un símbolo al cual se le asigna un conjunto de valores, normalmente se utilizan las letras $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$.

La variable pueden ser independiente (x) o bien dependiente (y); es decir el valor de y depende de x.

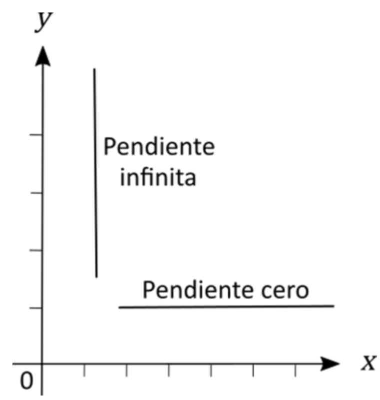


Figura 7.2 Pendiente cero e infinita de una recta.

La **pendiente** (m) de una recta, determina el **grado de inclinación,** es constante e independiente del valor que adopte la "x".

Si la pendiente es positiva la función será creciente y si es negativa es decreciente. Para determinar la pendiente (elevación entre avance) se utiliza la siguiente ecuación.

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Ahora si la pendiente adquiere un valor de cero, significa que la función no tiene pendiente (Fig. 7.2). Una línea horizontal cuya elevación es nula tiene una pendiente de cero ya que el valor del numerador es cero $(y_2 - y_1 = 0)$.

$$m = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$$

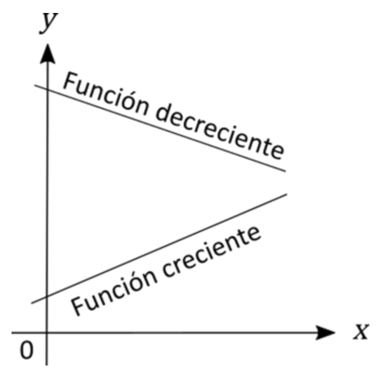


Figura 7.3 Pendientes de una recta.

Para una línea vertical cuyo avance es nulo $(x_2 - x_1 = 0)$, la pendiente es infinita.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{0} = \infty$$

Las pendientes cuando no son nulas o infinitas son crecientes (positivas) o decrecientes (negativas) lo cual se puede ver en la Figura 7.3.

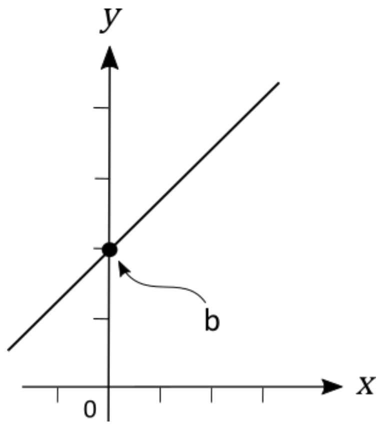


Figura 7.4 Ordenada al origen de una recta.

La constante (b) también es llamada **ordenada al origen**, el valor de b representa el lugar en donde la curva **cruza al eje y** (Fig. 7.4).

La ordenada al origen se puede obtener igualando a cero la variable independiente (x), teniendo:

$$y = mx + b \qquad\qquad y = b$$

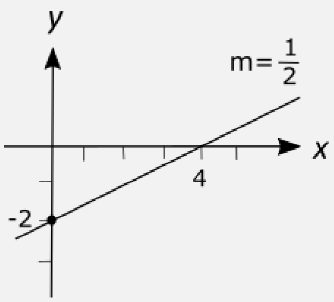
Ejemplo 1

De las siguientes ecuaciones determine la pendiente y la ordenada al origen:

$a)\ 2y - x + 4 = 0 \qquad\qquad b)\ 2y + x = 0$

Solución a)

Primero la ecuación se expresa de la forma punto pendiente



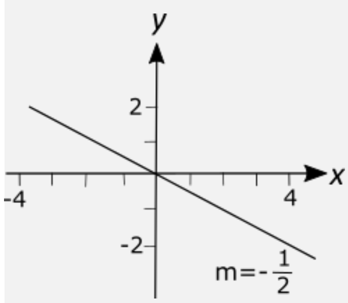
$$2y = x - 4$$

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

La pendiente tiene un valor de $1/2$ y es positiva por lo que es creciente la línea recta, finalmente la línea cruza en el eje "y" en el valor de -2.

$$\boldsymbol{m = \frac{1}{2} \qquad b = -2}$$

Solución b)



Nuevamente se expresa como punto pendiente la ecuación:

$$y = -\frac{1}{2}\,x$$

La pendiente es 1/2 y es negativa, por ello la línea recta es decreciente y la ordenada al origen es cero.

$$\boldsymbol{m = -\frac{1}{2} \qquad b = 0}$$

Ejercicios de refuerzo 7.1

Determine la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes ecuaciones:

1. $3y + 2x - 4 = 0$
2. $5x + 6x + 2 = 0$
3. $2x - 7y = 3$
4. $x + 2y = 3$
5. $-x - 3y = -4$
6. $y + 8x = 9$
7. $6x + y - 5 = 0$
8. $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{5} = 0$
9. $\frac{3}{4}y - \frac{1}{5}x + 6 = 0$
10. $\frac{4}{9}y - \frac{3}{5}x + \frac{2}{7} = 0$

Para encontrar la ecuación de una línea recta basta saber la pendiente y un punto (par coordenadas x, y), se utiliza la siguiente expresión.

$$\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Ejemplo 2

Encuentre la ecuación de la línea recta sabiendo que la pendiente es igual a 2 y pasa por el par ordenado (3,2) e indique el valor de la ordenada al origen.

Solución

Se utiliza la expresión:

$$y - 2 = 2(x - 3)$$

$$\boldsymbol{y = 2x - 4}$$

La ordenada al origen es $\boldsymbol{-4}$

FORMA PUNTO PUNTO

Cuando se tienen las coordenadas de dos puntos en una recta numérica, es posible determinar su ecuación, debido a que **cualquier punto en la recta tiene la misma pendiente.**

Se puede establecer que $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos en la recta, tomando un tercer punto entre estos; es decir $R(x, y)$, (Fig. 7.5) se pueden escribir las pendientes como:

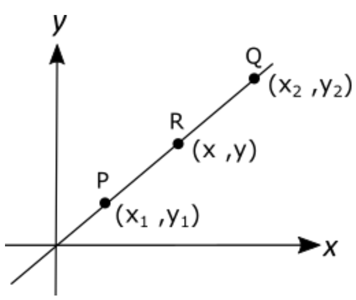


Figura 7.5 Puntos P, Q y R con la misma pendiente.

Las pendientes de los puntos PQ y PR:

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad m_{PR} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Igualando las pendientes se tiene:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

También se puede representar como:

$$\boldsymbol{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Ejemplo 3

Encuentre la ecuación de la línea recta conociendo los puntos $A(3,2)$ y $B(-1,-4)$, indique cual es la pendiente y la ordenada al origen.

Solución

Se define para el punto:

$$A:\quad \boldsymbol{x_1 = 3} \qquad \boldsymbol{y_1 = 2} \qquad B:\quad \boldsymbol{x_2 = -1} \qquad \boldsymbol{y_2 = -4}$$

Se utiliza la ecuación

$$y - (2) = \frac{(-4) - (2)}{(-1) - (3)}[x - (3)] \qquad y - 2 = \frac{6}{4}(x - 3)$$

$$\boldsymbol{y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}}$$

La pendiente es 3/2 y la ordenada al origen es $-5/2$

Ejercicios de refuerzo 7.3

Encuentre la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos:

21. $(3,3)$ y $(1,-2)$
22. $(-1,0)$ y $(1,1)$
23. $(0,-5)$ y $(3,4)$
24. $(-1,-2)$ y $(0,-2)$
25. $(2,-3)$ y $(-1,-5)$
26. $(3,-2)$ y $(0,4)$
27. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(2,-\frac{5}{2}\right)$
28. $(4,2)$ y $\left(0,-\frac{4}{3}\right)$
29. $\left(\frac{3}{4},0\right)$ y $\left(-\frac{5}{9},-\frac{7}{2}\right)$
30. $\left(-\frac{6}{5},-1\right)$ y $(-3,0)$

7.2 Método gráfico

Existen varios métodos para graficar una función entre los que se encuentran:

1. Tabulación
2. Intersección con los ejes
3. Punto pendiente

TABULACIÓN

Este método consiste en obtener pares ordenados con base a la ecuación lineal y después localizarlos en el plano cartesiano. Basta con obtener dos puntos y unirlos para encontrar la representación gráfica de la línea recta.

INTERSECCIÓN CON LOS EJES

Una forma sencilla de graficar una ecuación lineal con su forma general $(\boldsymbol{Ax + By + C = 0})$ es mediante la **intersección con los ejes cartesianos**:

Para obtener la intersección con el eje x, se hace $y = 0$.

$$Ax + B(0) + C = 0$$

$$Ax + C = 0$$

$$\boldsymbol{x = -\frac{C}{A}}$$

Para obtener la intersección con el eje y, se hace $x = 0$.

$$A(0) + By + C = 0$$

$$By + C = 0$$

$$\boldsymbol{y = -\frac{C}{B}}$$

Definición

Los puntos de intersección son:

$\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ llamada **abscisa al origen.**

$\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ llamada **ordenada al origen.**

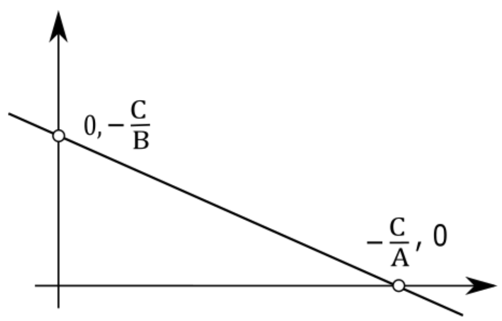


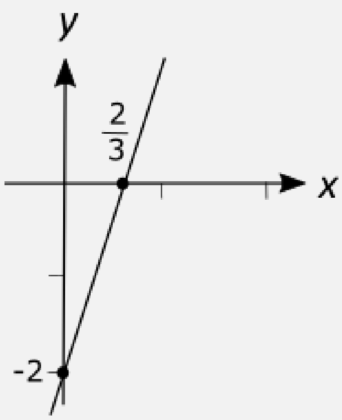
Figura 7.6 Intersección de una línea recta con los ejes cartesianos.

Ejemplo 4

Realice el bosquejo de la gráfica para ello encuentre la intersección con los ejes cartesianos de la función $y = 3x - 2$.

Solución

Primero la ecuación de la línea recta se expresa en su forma general, quedando:



$$3x - y - 2 = 0$$

Ahora los puntos de cruce con los ejes son:

Con el eje x

$$x = -\frac{C}{A} \qquad x = -\frac{-2}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

Con el eje y

$$y = -\frac{C}{B} \qquad y = -\frac{-2}{-1} = \mathbf{-2}$$

La línea recta cruza en el eje x en $2/3$ y en el eje y en -2.

Ejercicios de refuerzo 7.4

Realice el bosquejo de la gráfica de la línea recta utilizando la intersección con los ejes:

31. $\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$
32. $\left(1, \frac{4}{5}\right)$
33. $(-3, -6)$
34. $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$
35. $(1, 3)$
36. $(-1, -4)$
37. $\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}\right)$
38. $\left(\frac{6}{7}, \frac{3}{4}\right)$
39. $\left(\frac{1}{4}, -1\right)$
40. $(-5, -8)$

PUNTO PENDIENTE

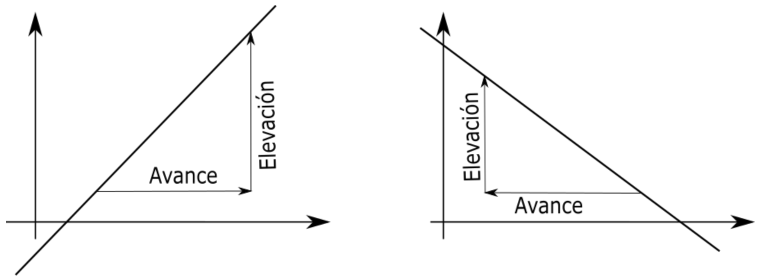
Este método consiste en localizar primero la **ordenada al origen (b)** y después desde ese punto **descomponer el valor de la pendiente** en elevación entre avance para encontrar el segundo punto y con ello unirlos para trazar la línea recta. Se recomienda no realizar cambio en la escala de los ejes para el trazado.

Definición

La pendiente se descompone según sea el caso:

- Si es una **fracción,** el numerador es la elevación y el denominador es el avance**.**
- Si es un **entero** la elevación es el valor del entero y como avance la unidad.

Ahora bien si la **pendiente es negativa** para una fracción se elige que la elevación sea negativa (descenso) o que el avance sea negativo (retroceso).



a) b)

Figura 7.7 Pendiente de una línea recta **a) positiva** para un avance hacia la derecha y elevación hacia arriba y **b)** **negativa** para un avance hacia la izquierda y una elevación hacia arriba.

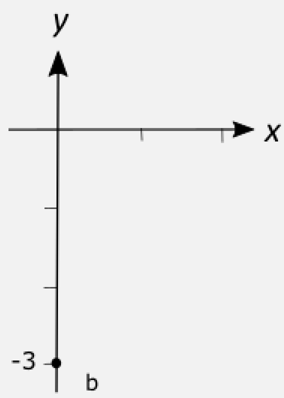
Ejemplo 5

Trace las gráficas utilizando el método punto pendiente para las funciones:

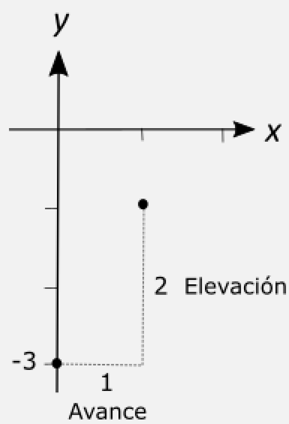
$a)\ \ y = 2x - 3$ $\qquad b)\ \ y = -\frac{1}{3}x + 2$

Solución a)

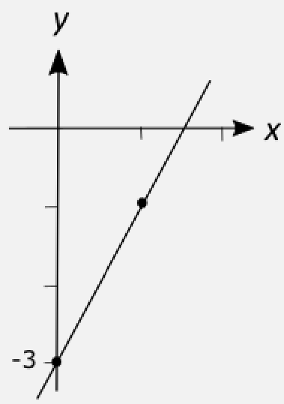
Primero se identifica que la ordenada al origen es -3.



Después se traza el segundo punto con el valor de la pendiente (dos de elevación y uno de avance).



Finalmente se unen los dos puntos.

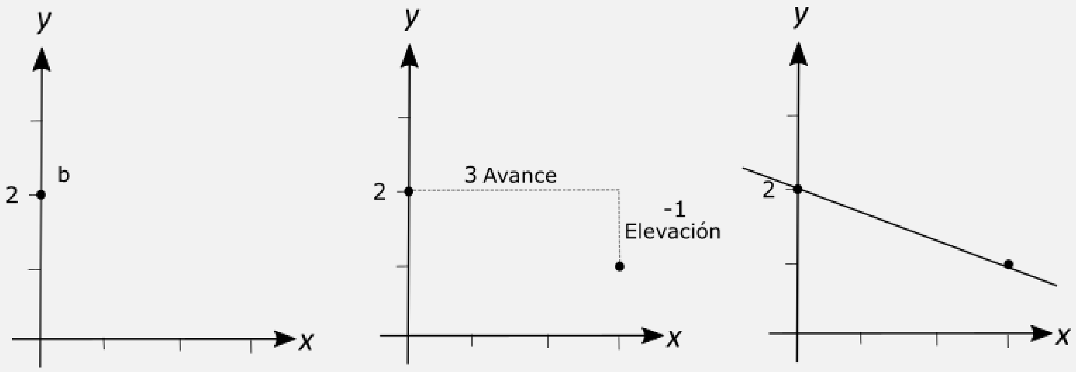


Solución b)

La ordenada al origen es 2.

Ahora se traza el segundo punto con el valor de la pendiente (uno de retroceso y tres de avance).

Finalmente se unen los dos puntos.



Ejercicios de refuerzo 7.5

Dibuje la gráfica de la línea recta utilizando el método de punto pendiente:

41. $y = 3x - 1$
42. $y = \frac{1}{2}x + 4$
43. $y = -\frac{1}{3}x - 3$
44. $y = 2x - \frac{1}{4}$
45. $y = -4x + \frac{1}{5}$
46. $y = 6x - 4$
47. $y = -5x + 4$
48. $y = \frac{2x - 6}{3}$
49. $y = \frac{x + 9}{2}$
50. $y = \frac{2x - 5}{6}$

7.3 Ecuaciones con coeficientes enteros de primer grado con una incógnita

Recordando que una función es una relación entre una variable dependiente (y) y una independiente (x), la cual se expresa mediante una ecuación. La ecuación por ende es aquella en donde se expresa una igualdad como $3x = 2$. Ahora bien la igualdad se puede definir como:

Definición

Una **igualdad** es una afirmación en donde dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor, el símbolo utilizado es "=".

La expresión que se encuentra en la parte izquierda se llama **primer miembro** y el que se encuentra después se llama **segundo miembro**. Cuando en la igualdad existe alguna cantidad desconocida se tiene una ecuación, lo cual nos lleva a la siguiente definición.

Definición

Una **ecuación** es una igualdad en donde existe uno o más cantidades desconocidas, las cuales se les conocen como **incógnitas.**

Si una ecuación es sólo verdadera para algunos valores de las incógnitas se le conoce como **ecuación condicional**. Por ejemplo para la ecuación:

$$x + 3 = 0$$

Se tiene al menos una solución que es cuando $x = -3$, existen otros valores de la variable que no son solución, por ejemplo cuando $x = -1$. Por lo tanto en una ecuación condicional basta con mostrar un valor que dé solución a la misma. Las ecuaciones por su construcción pueden clasificarse en cinco tipos (Fig. 7.6).

Es una **ecuación numérica** cuando todos los coeficientes son números, una **ecuación literal** se tiene cuando alguno de los coeficientes es una literal; un **ecuación entera** es cuando todos los coeficientes son enteros; una **ecuación fraccionaria** se tiene cuando al menos una de las incógnitas se encuentra en el denominador y finalmente una **ecuación irracional** se tiene cuando por lo menos alguna de las incógnitas está dentro de un radical.

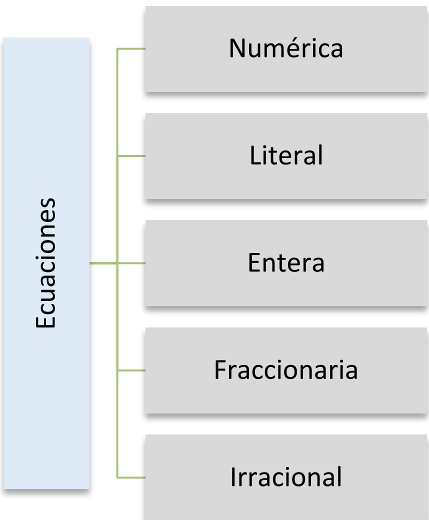


Figura 7.8 Tipos de ecuaciones

Por ejemplo en la Tabla 7.1, se presentan ejemplos aplicativos a química en donde se definen los tipos de ecuaciones.

Tabla 7.1

Tipos de ecuaciones

Clasificación	Ejemplo de ecuación
Ecuación numérica	$x + 3 = 5$
Ecuación literal	$ax + b^2 = a^2 - bx$
Ecuación entera	$3x + 2 = 6x - 1$
Ecuación Fraccionaria	$\frac{1}{2x} - 1 = x - 4$
Ecuación irracional	$3x + 2 = 6\sqrt{x} - 1$

También se pueden clasificar las funciones por el valor de la potencia a la que está elevada la incógnita, es decir **por el grado de la función.** La asignación del grado de la ecuación es por el mayor grado de las expresiones que lo formen**,** vea la siguiente tabla.

Tabla 7.2

Tipos de ecuaciones por el grado de la incógnita

Clasificación	Ejemplo de ecuación
Ecuación lineal	$x + 7 = 0$
Ecuación cuadrática	$x^2 + x - 2 = 0$
Ecuación cúbica	$x^3 + x = 0$
Ecuación cuártica	$x^4 + x^2 + x = 0$
$\vdots$	$\vdots$

Ahora bien por el **número de incógnitas** también se pueden clasificar las ecuaciones, es decir se obtiene el **orden de la ecuación**, lo cual se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 7.3

Tipos de ecuaciones por el número de incógnitas

Clasificación	Ejemplo de ecuación
Ecuación de orden uno	$x - 2 = 0$
Ecuación de orden dos	$x + y - 8 = 0$
Ecuación de orden tres	$x - y + z + 1 = 0$
Ecuación de orden cuatro	$x + y + z - w - 4 = 0$
$\vdots$	$\vdots$

Es importante señalar que el **resolver una ecuación,** significa encontrar el valor de la incógnita o como comúnmente se dice "*hallar sus raíces*", la cual satisface la igualdad. Debemos de revisar por tanto las propiedades de las igualdades para el desarrollo de operaciones en las ecuaciones.

PROPIEDADES DE LAS IGUALDADES

Para una ecuación las propiedades se derivan del **axioma fundamental de las igualdades** que indica:

Definición

Si en dos miembros de una igualdad se realizan operaciones iguales, los resultados serán iguales.

Para que la igualdad subsista con base en el axioma anterior se debe cumplir las siguientes **propiedades de las igualdades**:

- Que a los dos miembros de una igualdad se **suman o restan una misma cantidad**,
- Que a los dos miembros de una igualdad se **multipliquen o se dividan por una misma cantidad**, diferente de cero.
- Que a los dos miembros de una igualdad se **elevan a la misma potencia**.
- Que a los dos miembros de una igualdad se extraiga una misma raíz.

Para conocer el valor de la incógnita mediante el **despeje**, es necesario utilizar las propiedades de las igualdades.

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Recordando que una ecuación de primer grado es aquella en donde la potencia de la única incógnita es 1. A estas ecuaciones también se les llama **ecuaciones lineales de primer orden**. El método general para resolver estas ecuaciones es:

1. Se efectúan las operaciones indicadas.
2. Se reducen los términos semejantes en ambos miembros de la ecuación.
3. Se hace la transposición (lado izquierdo incógnitas y lado derecho de la igualdad constantes).
4. Se reducen los términos.
5. Se simplifica la ecuación, transponiendo el coeficiente de la incógnita.

Ejemplo 6

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros:

$a)\ 7x + x - 5 = 6x - 10 - 3x$

$b)\ (x-3)(x-1) + (x+5)(x-2) = x^2 + (x-2)(x+3) - 2$

Solución a)

$a)\ 7x + x - 5 = 6x - 10 - 3x$

Primero se reducen los términos semejantes, quedando:

$$8x - 5 = 3x - 10$$

Se transponen los términos, por lo que debemos de sumar 6 y restar $3x$.

$8x - 3x = 5 - 10$ Se reducen los términos.

$5x = -5$ Se divide entre 5 ambos miembros.

$$x = -1$$

Verificación

Si $x = -1$ al sustituir en la ecuación tenemos:

$$7(-1) + (-1) - 5 = 6(-1) - 10 - 3(-1)$$

$$-7 - 1 - 5 = -6 - 10 + 3$$

$$-13 = -13$$

Por lo tanto $\boldsymbol{x = -1}$ Es la solución de la ecuación

Solución b)

$b)\ (x - 3)(x - 1) + (x + 5)(x - 2) = x^2 + (x - 2)(x + 3) - 2$

En este ejercicio primero se realizan los productos indicados, así:

$$x^2 - 4x + 3 + x^2 + 3x - 10 = x^2 + x^2 + x - 6 - 2$$

Se reducen términos

$$2x^2 - x - 7 = 2x^2 + x - 8$$

Se hace la transposición restando $(2x^2)$ y (x) y sumando (7).

$-2x = -1$ Se divide entre -2 ambos miembros

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$$

Verificación

Si $\boldsymbol{x = 1/2}$ al sustituir en la ecuación tenemos:

$$\left(\frac{1}{2} - 3\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{2} + 5\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\right)\left(\frac{1}{2} + 3\right) - 2$$

$$\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{11}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)-2$$

$$\frac{5}{4}-\frac{33}{4}=\frac{1}{4}-\frac{21}{4}-2$$

$$-\frac{28}{4}=-\frac{20}{4}-\frac{8}{4}$$

$$-7=-7$$

Por lo tanto $\boldsymbol{x=1/2}$ Es la solución de la ecuación

Ejercicios de refuerzo 7.6

Resuelva las siguientes ecuaciones enteras de primer grado:

51. $6x-x+3=8x-6-4x$
52. $-3x-2(x+2)=3(x-2)-x$
53. $4(2-y)+3(y+1)=3(y-1)+y$
54. $z+4(z-2)=3(z-4)-2(z+3)$
55. $3m+2(1-m)-3=4(2m-3)\ -3(2-3m)+5m$
56. $2p+2[3p-2(2-p)]-2=3[2-(2p-3)]$
57. $4+3[2q-4]-5(q+1)=3\{2+3[2q-1]\}+5q$
58. $1+2[w-3]-5(q+1)=3\{2+3[2q-1]\}+5q$
59. $1+2[w-2]-(w-1)=2\{1-2[w-(2+2w)]\}$
60. $-\ \{4(r-1)-2[2-3(r-1)]\}=-\{1-[r-(1-2r)]\}$

7.4 Ecuaciones con coeficientes fraccionarios de primer grado con una incógnita

El método general para resolver las ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios es:

1. Se obtiene el mínimo común múltiplo con coeficientes fraccionarios.
2. Se multiplica la ecuación por el mínimo común múltiplo.
3. Se efectúan las operaciones indicadas.
4. Se reducen los términos en ambos miembros de la ecuación.
5. Se hace la trasposición de términos de tal manera que uno de los miembros contenga todos los miembros con incógnita y el otro miembro las constantes.
6. Se transpone el coeficiente de la incógnita y se simplifica la fracción obtenida.
7. Se vuelven a reducir los términos semejantes.

Ejemplo 7

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros:

$a)\ \frac{4x}{3}-\frac{5x}{2}+\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$ $\qquad b)\ \frac{4x}{3}-\frac{1}{4}-\frac{5x}{8}=\frac{x}{3}-\frac{3}{4}$

Solución a)

Primero se debe obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores, así:

$mcm\ (2,3)$: 6 Se multiplica la ecuación por 6

$$6\left(\frac{4x}{3}-\frac{5x}{2}+\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\right)$$

$$8x-15x+3x=2$$

$$-4x=2 \quad \text{Se despeja a } x$$

$$\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}}$$

Verificación

Si $\boldsymbol{x=-1/2}$ al sustituir en la ecuación se tiene:

$$\frac{4x}{3}-\frac{5x}{2}+\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)}{3}-\frac{5\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{x=-1/2}$ Es la solución de la ecuación

Solución b)

Primero se debe obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores, así:

$mcm(3{,}4{,}8){:}\ 6$ Se multiplica la ecuación por 24

$$24\left(\frac{4x}{3}-\frac{1}{4}-\frac{5x}{8}=\frac{x}{3}-\frac{3}{4}\right)$$

$$32x-6-15x=8x-18 \quad \text{Se transponen los términos}$$

$$9x=-12$$

Se despeja a x

$$\boldsymbol{x=-4/3}$$

Verificación

Si $\boldsymbol{x=-4/3}$ al sustituir en la ecuación tenemos:

$$\frac{4(-4/3)}{3}-\frac{1}{4}-\frac{5(-4/3)}{8}=\frac{(-4/3)}{3}-\frac{3}{4}$$

$$-\frac{16}{9}-\frac{1}{4}+\frac{5}{6}=-\frac{4}{9}-\frac{3}{4}$$

$$-\frac{43}{36}=-\frac{43}{36}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{x=-4/3}$ Es la solución de la ecuación

Ejercicios de refuerzo 7.6

Resuelva las siguientes ecuaciones enteras de primer grado:

61. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{3x}{2}\right)=1+\frac{x}{4}$

62. $\frac{x}{3}-\frac{2}{3}=2\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)$

63. $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-\frac{3x}{4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{2x}{3}$

64. $2+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{4x}{3}-\frac{x}{4}\right)\right]=\frac{1}{3}-\frac{x}{4}$

65. $\frac{1}{6}-\frac{2x}{9}=\frac{7x}{12}+\frac{5x}{3}-\frac{x}{4}+\frac{5}{6}$

66. $\frac{2x}{3}-\frac{x}{12}=\frac{5x}{4}+\frac{4}{3}$

67. $\frac{x}{5}+\frac{3x}{8}-\frac{7}{5}=\frac{2}{5}-\frac{7x}{8}$

68. $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}-\frac{3x}{5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)$

69. $\frac{3}{4}\left(\frac{5x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-\frac{5}{4}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{4x}{3}-1\right)$

70. $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{4x}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

7.5 Ecuaciones fraccionarias de primer grado con una incógnita

En estas ecuaciones la incógnita se encuentra en el denominador de una fracción, el método general para resolverlas es:

1. Se factorizan todos los denominadores de las fracciones.
2. Se obtiene el mínimo común múltiplo de los denominadores.
3. Se multiplica toda la ecuación por el mínimo común múltiplo.
4. Se efectúan las operaciones indicadas.
5. Se reducen los términos semejantes en ambos miembros de la ecuación.
6. Se hace la transposición de términos, para que en el lado izquierdo estén los términos con incógnita y del lado derecho las constantes.
7. Se vuelven a reducir los términos semejantes.
8. Se transpone el coeficiente de la incógnita y se simplifica el resultado.

Ejemplo 8

Resuelva las siguientes ecuaciones fraccionarias de primer grado con:

$a)\ \frac{5}{2x}-\frac{2}{3x}+\frac{5}{6}=\frac{1}{x}$ $\qquad b)\ \frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x^2-4}$

Solución a)

Primero se debe obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores, así:

$$mcm\ (2x,3x,6): 6x \quad \text{Se multiplica la ecuación por } 6x$$

$$6x\left(\frac{5}{2x}-\frac{2}{3x}+\frac{5}{6}=\frac{1}{x}\right)$$

$$15-4+5x=6 \quad \text{Se despeja la incógnita}$$

$$\boldsymbol{x=-1}$$

Verificación

Si $\boldsymbol{x=-1}$ al sustituir en la ecuación tenemos:

$$\frac{5}{2(-1)}-\frac{2}{3(-1)}+\frac{5}{6}=\frac{1}{-1}$$

$$-\frac{5}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=-1$$

$$-1=-1$$

Por lo tanto $\boldsymbol{x=-1}$ Es la solución de la ecuación

Solución b)

Primero se factorizan los denominadores, así:

$$\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}=\frac{2}{(x+2)(x-2)}$$

El mínimo común múltiplo de estos denominadores es $(x+2)(x-2)$, entonces se multiplica la ecuación por este mínimo común múltiplo.

$$(x+2)(x-2)\left(\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-2}=\frac{2}{(x+2)(x-2)}\right)$$

$$(x-2)2-(x+2)1=2$$

$2x-4-x-2=2$ Despejando la incógnita

$$\boldsymbol{x=8}$$

Verificación.

Si $\boldsymbol{x=8}$ al sustituir en la ecuación tenemos:

$$\frac{2}{8+2}-\frac{1}{8-2}=\frac{2}{(8)^2-4}$$

$$\frac{2}{10}-\frac{1}{6}=\frac{2}{60}$$

$$\frac{1}{30}=\frac{1}{30}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{x=8}$ Es la solución de la ecuación.

Ejercicios de refuerzo 7.7

Resuelva las siguientes ecuaciones fraccionarias de primer grado:

71. $\frac{3}{x}-\frac{5}{x}=\frac{1}{3}$

72. $\frac{1}{2x}+\frac{6}{x}-\frac{1}{4}=0$

73. $\frac{3}{4x}-\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$

74. $\frac{5}{3x}-\frac{x-2}{2x^2}=\frac{1}{x}$

75. $\frac{x}{x^2-x-20}-\frac{5}{3x+12}=\frac{3}{2x-10}$

76. $\frac{x}{x^2-x-20}-\frac{5}{3x+12}=\frac{3}{2x-10}$

77. $\frac{3}{2x}-\frac{x-4}{x^2}=\frac{x^2+4}{2x^3}$

78. $\frac{3x}{x+1}+\frac{2x^2+1}{x^2+2}=5$

79. $\frac{4x}{3x+9}-\frac{8x+4}{5x+15}=\frac{1}{x+3}$

80. $\frac{6x}{x^2-x-20}+\frac{1}{x+4}=\frac{3}{x-5}$

7.6 Simplificación de una igualdad a una ecuación de primer grado

Ahora con una ecuación de primer grado con dos incógnitas (igualdad) se puede llegar a la ecuación de primer grado en su forma general ($\boldsymbol{Ax+By+C=0}$) o bien punto pendiente. El método general para resolverlas es:

1. Se efectúan las operaciones indicadas.
2. Para expresar la ecuación en su forma general, se hace la transposición de miembros de tal manera que del lado derecho de la igualdad éste el cero y del lado izquierdo los demás.
3. Para la forma punto pendiente (explicita), se hace la transposición dejando de lado izquierdo a la incógnita "y" y del lado derecho lo demás (escribiendo primero a "x" y después la constante).
4. Se transpone el coeficiente de la incógnita y se simplifica la ecuación obtenida.

Ejemplo 9

Exprese las siguientes igualdades en una ecuación de primer grado como se indica:

$a)$ $3x-(4y+6)=2y-(x+18)$ En su forma general.
$b)$ $2x-(2y+8)=4x-(12-y)$ En su forma punto pendiente.

Solución a)

Primero se suprimen paréntesis, así:

$$3x-(4y+6)=2y-(x+18)$$

$$3x-4y-6=2y-x-18$$ Se hace la transposición restando $(2y)$, $(-x)$ y (-18)

$$3x+x-4y-2y-6+18=0$$ Se reducen los términos

$$4x-6y+12=0$$

La ecuación en su forma general es: $\boldsymbol{4x-6y+12=0}$

Solución b)

Primero se suprimen paréntesis, así:

$$2x-(2y+8)=4x-(12-y)$$

$$2x-2y-8=4x-12+y$$ Se hace la transposición restando $2x, -8$ y y

$$2x-2x-2y-y-8+8=4x-2x-12+8+y-y$$ Se reducen los términos

$$-3y=2x-4$$ Se multiplica por -1

$$3y=-2x+4$$ Se divide por 3

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$$

La ecuación en su forma punto pendiente es:

$$\boldsymbol{y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}}$$

Ejercicios de refuerzo 7.8

Encuentre la ecuación de la recta en su forma general:

81. $8x-2(y+1)=y-2(x+5)$

82. $4y-\frac{1}{2}(x+2)=x-2(y-2)$

83. $-4x-4\left(y+\frac{1}{2}\right)=2x-3\left(y-\frac{1}{2}\right)$

84. $\frac{1}{3}y+\frac{2}{5}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{3}\right)\right]=x-\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{3}\right)$

85. $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\left[5-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}y$

86. $3x=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\left(y+\frac{1}{3}\right)+6\right]-\frac{5}{2}x$

87. $14x+y(2+x)=x(y-2)-2x+5$

88. $-y+2x(1+x)=x(4+2x)-3y-2$

89. $\frac{x-3}{4}-\frac{2y-1}{2}=\frac{x-2}{3}+\frac{1}{2}$

90. $\frac{x-1}{2}-\frac{x+3}{6}=\frac{4}{3}-\frac{y-5}{2}$

7.7 Ángulos entre dos rectas, criterios de perpendicularidad

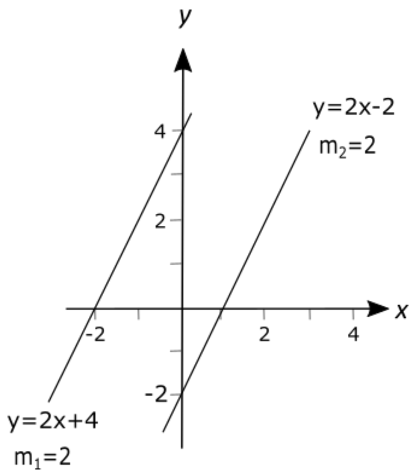


Figura 7.9 Rectas paralelas

Primero se debe establecer que dos rectas son **paralelas** cuando las pendientes tienen el mismo valor, es decir que:

$$\boldsymbol{m_1 = m_2}$$

Para las rectas.

$$y = 2x + 4$$

$$y = 2x - 2$$

El valor de la pendiente en ambas ecuaciones es 2, por lo que se tienen rectas paralelas (Fig. 7.9).

Ahora bien si las pendientes son inversas entre sí, se tienen rectas **perpendiculares** (90° entre ellas) para ello se debe de cumplir que:

$$\boldsymbol{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$$

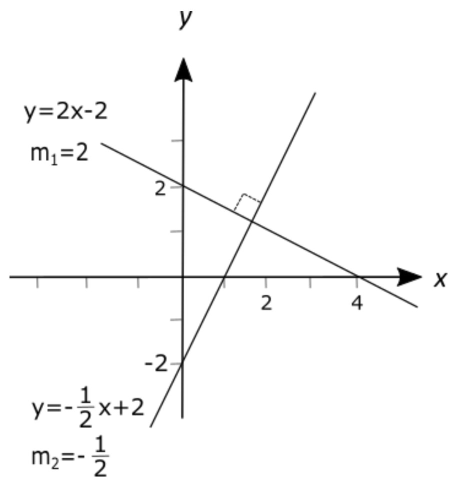


Figura 7.10 Rectas perpendiculares. El valor de la pendiente de $m_1 = 2$ es el inverso negativo de $m_2 = -1/2$

Otro criterio de perpendicularidad es el siguiente:

$$\boldsymbol{m_1 m_2 = -1}$$

Para encontrar el ángulo que se forma entre dos rectas que se cruzan, se puede hacer utilizando una ecuación que está en función de las pendientes:

Para este ejemplo será:

$$m_1 m_2 = (2)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Ejemplo 10

Indique si las siguientes rectas son paralelas o perpendiculares:

$a)\ \frac{15}{2}x-\frac{3}{2}y+2=0 \qquad y \qquad 5x-y-4=0$

$b)\ \frac{4}{3}x+\frac{4}{7}y-\frac{2}{5}=0 \qquad \text{y} \qquad y=\frac{3}{7}x-\frac{1}{5}$

Solución a)

La primera ecuación se expresa en la forma punto pendiente.

$$\frac{3}{2}y=\frac{15}{2}x+2$$

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)\frac{15}{2}x+\left(\frac{2}{3}\right)2$$

$$y=\mathbf{5}x+\frac{4}{3}$$

Ahora la segunda ecuación

$$y=\mathbf{5}x-4$$

Se verifica que tienen la misma pendiente, por lo que estas rectas son **paralelas**.

Solución b)

Sólo se trabaja la primera ecuación, debido a que la segunda ya está escrita en su forma punto pendiente.

$$\frac{4}{7}y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{5}$$

$$y=-\left(\frac{7}{4}\right)\frac{4}{3}x+\left(\frac{7}{4}\right)\frac{2}{5}$$

$$y=-\frac{7}{3}x+\frac{7}{10}$$

Ahora se comparan las pendientes:

$$y=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}x-\frac{1}{5} \qquad\qquad y=-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}x+\frac{7}{10}$$

Como son diferentes las pendientes se verifica el criterio de perpendicularidad con la expresión:

$$\boldsymbol{m_1 m_2=-1}$$

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\left(-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right)=\mathbf{-1}$$

Se obtiene como resultado que las rectas son **perpendiculares**.

Ejercicios de refuerzo 7.9

Demuestre si las siguientes ecuaciones de rectas son paralelas o perpendiculares?

91. $a)$ $6x - 2y + 4 = 0$
    $b)$ $3y + 3x + 15 = 0$

92. $a)$ $5x - 5y + 1 = 0$
    $b)$ $3x - 3y + 2 = 0$

93. $a)$ $2x - y - 1 = 0$
    $b)$ $14x - 7y + 3 = 0$

94. $a)$ $2x + 3y - 1 = 0$
    $b)$ $3x - 2y - 4 = 0$

95. $a)$ $35x + 7y - 2 = 0$
    $b)$ $x - 5y - \frac{5}{4} = 0$

96. $a)$ $8x - 6y + 3 = 0$
    $b)$ $15y - 20x + 3 = 0$

97. $a)$ $4x - 18y + 27 = 0$
    $b)$ $9y - 2x + 3 = 0$

98. $a)$ $15y - 9x + 10 = 0$
    $b)$ $12y + 20x - 3 = 0$

99. $a)$ $9y - 12x + 5 = 0$
    $b)$ $4x - 3y + 8 = 0$

100. $a)$ $42x - 8y + 1 = 0$
     $b)$ $21y + 4x + 28 = 0$

Ejemplo 11

Encuentre la ecuación de una recta que pasa por el punto $(3,1)$, perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(3,-1)$ y $(-6,2)$.

Solución

Se obtiene la pendiente con los dos puntos conocidos.

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{2 - (-1)}{-6 - 3} = -\frac{1}{3}$$

Ahora se encuentra la pendiente de la recta perpendicular:

$$m_1 m_2 = -1$$

$$m_2 = 3$$

Se utiliza la forma pendiente de la línea recta, sabiendo que pasa por el punto $(3,1)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = 3(x - 3)$$

Empleando álgebra:

$$y - 1 = 3x - 9$$

$$\boldsymbol{y = 3x - 8}$$

Ahora, si las rectas no son paralelas (misma pendiente) o perpendiculares (ángulo recto), el valor del ángulo entre las dos rectas que se cruzan, se puede encontrar utilizando una ecuación que está en función de las pendientes:

Definición

Dos rectas que se cruzan con pendientes m_1 y m_2, forman un ángulo cuya tangente es:

$$tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Ejemplo 12

Encuentre el ángulo que se forma cuando se cruzan las rectas:

$y = \frac{1}{3}x + 2$ y $y = -\frac{3}{4}x - 5$

Solución

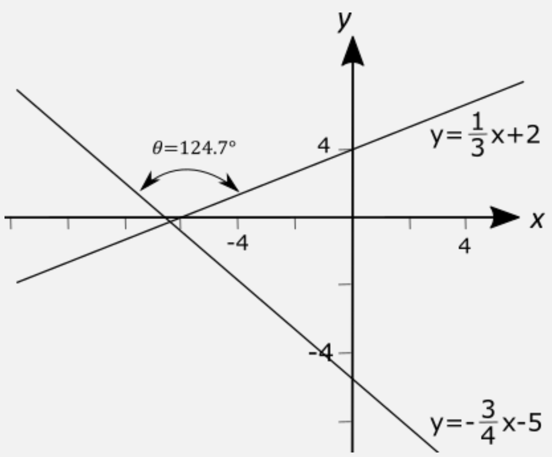
Se obtienen las pendientes de las rectas:

$$m_1 = \frac{1}{3} \qquad m_2 = -\frac{3}{4}$$

Se utiliza la ecuación:

$$tan\theta = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{3}}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} \qquad tan\theta = -\frac{156}{108}$$

Ahora se obtiene el ángulo θ $\qquad \theta = \left(-\frac{156}{108}\right) = \mathbf{-55.3°}$



El resultado es un ángulo negativo, por tanto se suma a este valor 180°, para obtener **124.7°**

Ejercicios de refuerzo 7.9

Calcule el ángulo que se forma entre las rectas:

101. $a)\ y = 3x + 2$ $\quad b)\ y = \frac{1}{3}x - 5$

102. $a)\ y = 2x - 1$ $\quad b)\ y = -x + 5$

103. $a)\ y = \frac{1}{2}x + 1$ $\quad b)\ y = -\frac{2}{3}x - 2$

104. $a)\ y = 3x + \frac{1}{2}$ $\quad b)\ y = x - 6$

105. $a)\ y = -4x - 1$ $\quad b)\ y = \frac{1}{2}x + 3$

106. $a)\ y = -2x - 2$ $\quad b)\ y = -\frac{1}{3}x + 4$

107. $a)\ y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{2}$ $\quad b)\ y = 2x + \frac{1}{3}$

108. $a)\ y = x + \frac{1}{3}$ $\quad b)\ y = \frac{1}{4}x + 2$

109. $a)\ y = -4x - 1$ $\quad b)\ y = -\frac{1}{2}x + 2$

110. $a)\ y = 5x - \frac{1}{9}$ $\quad b)\ y = \frac{1}{3}x + 2$

7.8 Aplicaciones de las ecuaciones de primer grado

En todas las disciplinas que tienen que ver matemáticas se emplean fórmulas que explican el desarrollo de un fenómeno, ahora se muestra la descripción textual de problemas de aplicación de las ecuaciones de primer grado. Para su resolución de manera general, se pueden seguir los siguientes pasos:

a) Lea cuidadosamente el problema e identifique lo que se desea calcular (incógnita).
b) Asígnele una literal a esta incógnita.
c) Las demás cantidades se expresan en términos de la incógnita.
d) Se expresa el enunciado del problema mediante una ecuación de primer grado.
e) Se resuelve la ecuación planteada.
f) Verifique la respuesta con el problema escrito y observe si es congruente.

Ejemplo 13

Resuelva los siguientes ejercicios referentes a números:

a) La cuarta parte de un número resulta ser seis unidades menor que la tercera parte de él. Encuentre el número.

Solución a)

Se designa al número como x, por lo que:

$$\frac{1}{4}x = \frac{1}{3}x - 6$$

Multiplicamos todo por 12.

$$3x = 4x - 72$$

$$\boldsymbol{x = 72}$$

El número requerido es 72.

b) Un número es quíntuplo de otro. Si la suma de ambos es de 138, encuentre los números.

Solución b)

Primer número x

Segundo número $5x$

$$x + 5x = 138$$

$$6x = 138$$

$$\boldsymbol{x = 23}$$

Los números solicitados son 23 y 115.

c) La suma de tres números consecutivos es 402. Halle los números.

Solución c)

Primer número m

Segundo número $m + 1$

Tercer número $m + 2$

$$m + m + 1 + m + 2 = 402$$

$$3m + 3 = 402$$

$$\boldsymbol{m = 133}$$

Los números solicitados son 133, 134 y 135

Encuentre dos números cuya suma sea 65 y que el triple del mayor número supere en 3 unidades al quíntuple del menor.

Solución d)

Número menor y

Número mayor $65 - y$

Ahora: $$3(65 - y) = 5y + 3$$

$$195 - 3y = 5y + 3$$

$$8y = 192$$

$$por\ lo\ que:\ \boldsymbol{y = 24}$$

Los números pedidos son 24 y 41

Ahora se muestra la aplicación de las ecuaciones de primer orden con mezclas químicas.

Ejemplo 14

Resuelva los siguientes ejercicios referentes a mezclas:

a) ¿Cuántos mililitros de una solución salina al 25% deben de agregarse a 20 mililitros de otra solución de la misma sal al 35% para producir una de 30%?

b) En laboratorio se mezclaron 200 mililitros de metanol puro con 100 ml de una solución de yodo al 60% ¿Qué porcentaje de yodo se obtuvo de la mezcla?

c) Se mezcla en un horno de fusión una aleación de zinc al 75% con 250 Kg de la misma aleación, para producir 4000 Kg al 45% ¿Qué porcentaje de zinc tiene la segunda aleación?

Solución a)

Organizando los datos en la siguiente tabla resulta:

	1ra solución	2da solución	Mezcla
Volumen (mL)	x	20	$x + 20$
Concentración (%)	25	35	30

Se establece la ecuación de primer grado:

$$25x + 35(20) = 30(x + 20)$$

$$25x + 700 = 30x + 600 \text{ Se transpone } (-30x) \text{ y } (700)$$

$$5x = 100$$

$$x = 20$$

Se deben de agregar 20 mililitros de la solución al 25%.

Solución b)

Organizando los datos en la siguiente tabla resulta:

	1ra solución	2da solución	Mezcla
Volumen (mL)	200	100	300
Concentración (%)	0	60	x

Se establece la ecuación de primer grado:

$$0(200) + 60(100) = x(300)$$

$$6000 = 300x$$

$$x = 20$$

La solución resultante de yodo es 20 %.

Solución c)

Organizando los datos en la siguiente tabla resulta:

	1ra solución	2da solución	Mezcla
Masa (Kg)	250	3750	4000
Concentración (%)	75	x	45

Se establece la ecuación de primer grado:

$$75(250) + x(3750) = 45(4000)$$

$$18750 + 3750x = 180000$$
$$\boldsymbol{x = 43}$$

El porcentaje de zinc de la segunda aleación es 43 %.

Ejercicios de refuerzo 7.10

Establece las ecuaciones de primer orden para resolver los siguientes problemas.

111. La suma de tres números es 74. El mayor excede en ocho unidades al del medio y al menor en catorce, ¿cuáles son los números?

112. La suma de tres números es 125, el mayor excede en cinco unidades al del medio y al menor en nueve ¿cuáles son los números?

113. Tres cajas contienen 301 tubos de ensayo, la primera caja tiene 22 tubos más que la segunda y 23 tubos menos que la tercer caja. Encuentre el número de tubos en cada caja.

114. Se desea dividir en tres partes; tales que la primera sea 28 unidades más que la segunda y 50 menos que la tercera.

115. La diferencia de los cuadrados de dos enteros consecutivos es 49. Halle los números.

116. El producto de tres números consecutivos es 10 unidades mayor que el cubo del menor más el triple del cuadrado del mismo número. Halle los números.

117. Halle cuatro números consecutivos cuya suma sea 146.

118.- La mitad de la suma de tres números consecutivos es 81. Halle los números.

119. ¿Cuántos mililitros de una solución al 35% deben agregarse a otra solución (con el mismo soluto) al 45% para producir 120 mL al 40%?

120. ¿Cuál es la concentración de una solución de yodo, a la cual se añadieron 150 mL de agua destilada a 50 mL de una solución al 20%?

121. ¿Cuál es la concentración de una solución resultante al mezclar 10 mL de nitrato de plata 0.3 ppm con 15 mL de concentración de 0.2 ppm?

122. Se mezcló un litro de una solución salina al 30% con otra al 60% para producir una de 40% ¿Cuántos litros se obtuvieron?

123. ¿Cuántos litros de agua deben agregarse a 30 litros de una solución de hipoclorito de sodio al 10% para producir otra al 2%?

124. ¿Cuantos mililitros de una solución de NaOH al 20% deben agregarse a 100 mililitros de la misma solución al 70% para producir una solución al 40%?

125. Se mezclaron 600 gramos de una aleación ferrosa al 30% con 1250 gramos de la misma aleación ¿Cuál es el porcentaje de hierro en la segunda aleación para que al final la aleación de hierro sea de 40%?

126. Se mezcló en un horno 1200 gramos de oro blanco (80% de oro, 5% cobre, 10% niquel y 5% Zinc) con 2000 gramos de la misma aleación ¿Cuál es el porcentaje de oro de la segunda aleación si el producto final es de 60% de oro?

127. Se mezclaron 60 mililitros de una solución de sulfato de cobre II al 15% con 200 mililitros de la misma solución ¿Cuál es el porcentaje de la segunda solución, si la mezcla tiene 25% del soluto?

128. Se mezclaron 100 Kg de duraluminio (94.5% de aluminio) con 450 Kg de una aleación de aluminio al 60% ¿Cuál es el porcentaje de aluminio finalmente?

129. Se requiere producir soldadura blanda (67% de plomo y 33 % de estaño), se cuentan con 50 Kg de plomo al 40% ¿Cuánto se debe de agregar de plomo al 90%.

Quimática

Uso de la línea recta para medir concentraciones

Escrito por: M. en C. María Catalina Cárdenas Ascención
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM

Uno de los métodos de análisis cuantitativo, usado en el área de química analítica, es el uso de la curva estándar o también llamada de calibración, la cual se basa en el modelo de la **línea recta**.

El método se fundamenta en la capacidad de la materia de absorber y/o emitir radiación electromagnética. La determinación está soportada por la ley de Lambert-Beer, la cual relaciona la absorción de la radiación electromagnética con las propiedades del material que ésta atraviesa. La ley establece que la concentración de una sustancia es directamente proporcional a la cantidad de energía radiante absorbida por la sustancia.

Existe una **relación lineal** entre la absorción de luz de una sustancia y la concentración de la misma, según la siguiente expresión:

$$A = \varepsilon C l$$

Donde:

A = Absorbancia.

ε = Es la constante de proporcionalidad llamada coeficiente de extinción molar, coeficiente de absortividad o coeficiente de extinción. La cual mide qué tanto una sustancia absorbe la radiación a una longitud de onda determinada. Es una característica propia de cada especie química y depende de su estructura. El valor de la absortividad para un compuesto varía con la longitud de onda.

C = Concentración de la especie de la cual se está midiendo la absorbancia (M).

l= Es el paso óptico, recorrido que hace el haz de luz a través de la muestra limitado por el ancho de la celda que contiene la muestra (cm).

La absorbancia y la concentración se relacionan de forma directamente proporcional. Esta relación sólo se observa a concentraciones bajas del analito, es decir en soluciones diluidas.

Para el desarrollo de la metodología, se debe construir la curva estándar o de calibración, la cual fungirá como nuestro instrumento de medida. Para ello se utiliza un compuesto estándar (similar al que se desea medir) a partir del cual se realiza la solución estándar (de concentración perfectamente conocida). Ahora se realiza una serie de diluciones a partir de la solución estándar (de las cuales también debemos conocer su concentración). Se incluye la concentración cero o también llamada blanco de reactivos.

La determinación espectrométrica de cada una de las muestras en la serie de diluciones, incluyendo el blanco, se puede hacer de manera directa (si la molécula por si misma presenta absorción) o desarrollar a partir de ésta un compuesto que presente absorción. El espectro se ajusta a cero con el blanco (el cual quedó conformado por todos los componentes de la matriz del análisis excepto el compuesto estándar) y se obtiene la señal de cada uno de los puntos en la serie de diluciones. Los valores obtenidos, junto con su respectiva concentración son graficados (Figura 1).

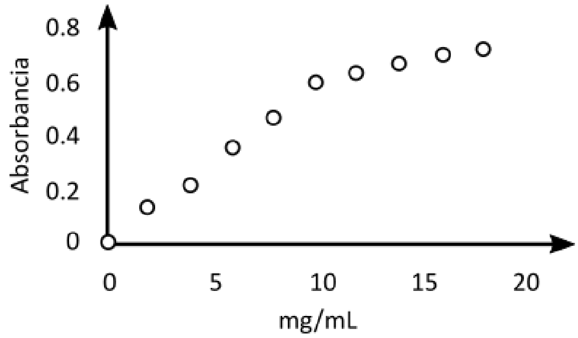


Figura 1. Absorbancia de una solución a distintas concentraciones de cierto analito.

Una vez graficados los datos podemos identificar que no toda la curva es útil. Ya que deseamos aplicar la ley de Lamber-Beer, la absorbancia y la concentración se deben relacionar de manera directamente proporcional, y esto sólo se cumple en la región lineal, que como habíamos dicho corresponden con las concentraciones diluidas (Figura 2). Vemos que a concentraciones altas la linealidad se pierde y se observa que la línea se aplana, por lo que ésta región no es útil para realizar mediciones.

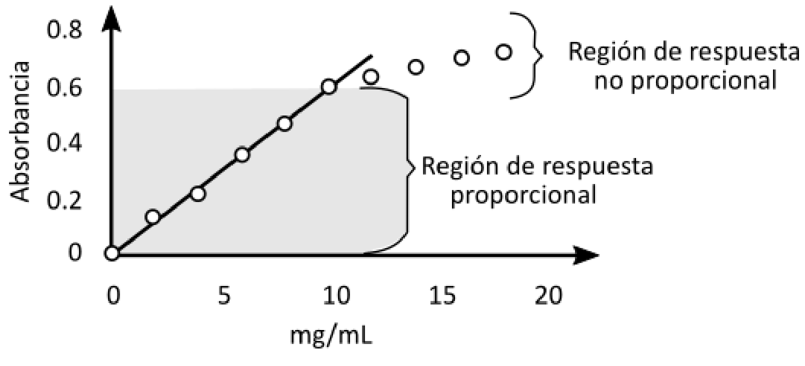


Figura 2. Regiones de respuesta en una curva estándar.

La región lineal identificada, define el rango de sensibilidad del método, es decir, la región en la cual la medición es Para ser usada la curva como instrumento de medida, requerimos de la mejor línea recta que pase por los diferentes puntos. confiable. El método será útil hasta esa concentración; concentraciones mayores no pueden ser medidas de manera segura.

En la práctica, los valores siempre presentan cierta dispersión, por lo que cada uno de los puntos está sujeto a error, y se debe aplicar un método estadístico para encontrar el mejor ajuste de los datos a la curva de calibración. El método estadístico más frecuente es la regresión lineal, conocido como "mínimos cuadrados".

Una vez obtenida la regresión lineal, la curva puede ser usada:

1. Las muestras problema, son tratadas de la misma forma que los tubos de la curva estándar
2. Se determina la absorbancia de cada una de las muestras problema
3. El valor de la absorbancia obtenida, es interpolado en la curva estándar, para estimar el valor de la concentración del analito en esa muestra.

Referencias

1. Maniatis T, Fritsch EF, Sambrook J. 1982. Molecular cloning a laboratory manual. Cold Spring Harbor Laboratory, Cold Springs Harbor, NY.

2. Stoscheck CM. Quantitation of Protein. 1990. *Methods in Enzymology 182,* 50-69.

3. Peterson GL. 1977. A simplification of the protein assay method of Lowry *et al.* which is more generally applicable. *Analytical Biochemistry* 83, 346-356.

4. Wang Y, Wade H, Wong E-T, Li YC, Rodewald LW, Wahl GM 2007. Quantitative analyses reveal the importance of regulated Hdmx degradation for P53 activation. *PNAS* 104 (30), 12365-12370.

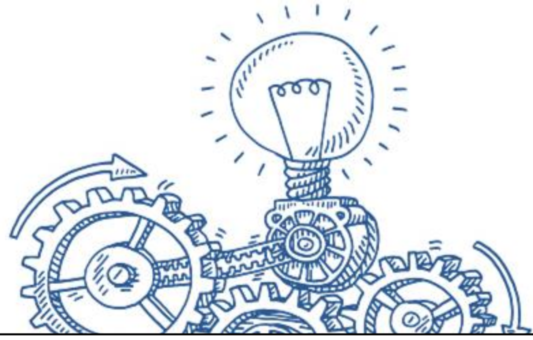
5. Harris, D. C. Análisis Químico Cuantitativo. 3ª ed. Capítulo 18. Ed. Reverté, 2007.

6. Higson, S. P. J. Química Analítica. 1ª ed. Capítulo 5. Ed. Mc Graw Hill. 2007.

7. Martínez Urreaga, J.; Narros Sierra, A.; De La Fuente García-Soto, M.M.; Pozas.

8. Requejo, F.; Díaz Lorente, V.M. Experimentación en Química General. Capítulo 5. Ed. Thomson Paraninfo, 2006.

9. Hernández-Hernández, L.; González-Pérez, C. Introducción al análisis instrumental. Capítulo 3. Ed. Ariel Ciencia, 2002.



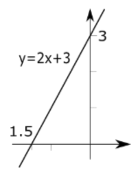
Respuesta a los problemas de número impar

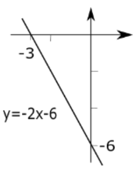
Capítulo 7. Resolución de la ecuación lineal

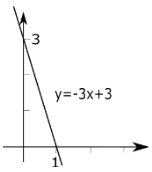
1. $m=-\frac{2}{3}, b=\frac{4}{3}$ **3**. $m=\frac{2}{7}, b=-\frac{3}{7}$ **5**. $m=-\frac{1}{3}, b=\frac{4}{3}$ **7**. $m=-6, b=5$ **9**. $m=\frac{4}{15}, b=-8$

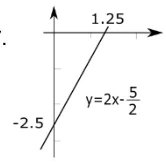
11. $y=2x-5$ **13**. $y=5x-13$ **15**. $y=-4x-5$ **17**. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}$ **19**. $y=-\frac{4}{5}x+\frac{29}{60}$

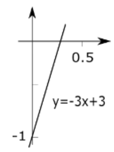
21. $y=\frac{5}{2}x-\frac{9}{2}$ **23**. $y=3x-5$ **25**. $y=\frac{2}{3}x-\frac{13}{3}$ **27**. $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ **29**. $y=\frac{127}{47}x-\frac{381}{188}$

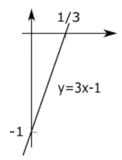
31.


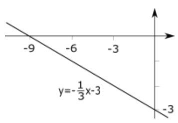
33.


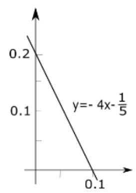
35.


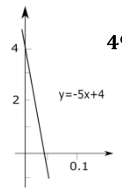
37.


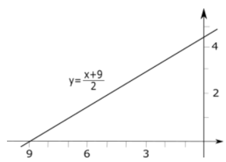
39.


41.


43.


45.


47.


49.


51. $x=9$ **53**. $y=\frac{14}{5}$ **55**. $m=\frac{17}{21}$ **57**. $q=\frac{5}{11}$ **59**. $w=-12$ **61**. $x=-2$ **63**. $x=\frac{7}{3}$

65. $x=-\frac{3}{10}$ **67**. $x=\frac{36}{29}$ **69**. $x=\frac{63}{13}$ **71**. $x=\frac{1}{2}$ **73**. $x=-\frac{3}{2}$ **75**. $x=\frac{14}{13}$ **77**. $x=\frac{1}{2}$

79. $x=-\frac{3}{4}$ **81**. $10x-4y+8=0$ **83**. $-6x-y-\frac{7}{2}=0$ **85**. $10x-6y-29=0$ **87**. $18x+2y-5=0$

89. $-x-12y-1=0$ **91**. *Perpendiulares* **93**. *Paralelas* **95**. *Perpendiculares* **97**. *Paralelas*

99. *Paralelas* **101**. $59.3°$ **103**. $66.9°$ **105**. $44.2°$ **107**. $57.9°$ **109**. $54.8°$ **111**. $32, 24$ *y* 18

113. $101, 100$ *y* 100 **115**. 25 *y* 24 **117**. $35, 36, 37$ *y* 38 **119**. $80\ mL$ **121**. $0.24\ ppm$ **123**. $120\ L$

125. $44.6\ \%\ de\ Fe$ **127**. $28\%\ de\ CuSO_4$ **129**. $58.7\ Kg\ de\ Pb$

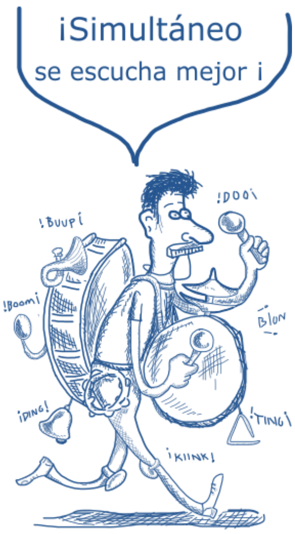
8

Resolución de sistemas de Ecuaciones simultáneas

LO QUE APRENDERÁS. . .

8.1 Método gráfico.
8.2 Método de sustitución.
8.3 Método de igualación.
8.4 Método de reducción.
8.5 Resolución por determinantes.
8.6 Uso de aplicaciones interactivas para la solución de sistemas de ecuaciones.

8.1 Método gráfico



Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse por:

- Método gráfico
- Método lineal

Cuando existen **dos ecuaciones lineales** se dice que es de **orden dos** el sistema. Al realizar la graficación de los sistemas puede suceder que las rectas:

a) Se intersectan.
b) No se intersectan.
c) Se intersectan en puntos infinitos.

El **significado geométrico** corresponde **al punto de intersección** y éste par ordenado es compartido por ambas rectas (ver Figura 8.1), se dice que se resuelve de manera simultánea, mediante un sistema de ecuaciones tal como el artista de la caricatura toca de manera simultánea los diferentes instrumentos. El método gráfico consiste en trazar en un plano cartesiano las rectas representadas del sistema. La solución es el punto de intersección de ambas.

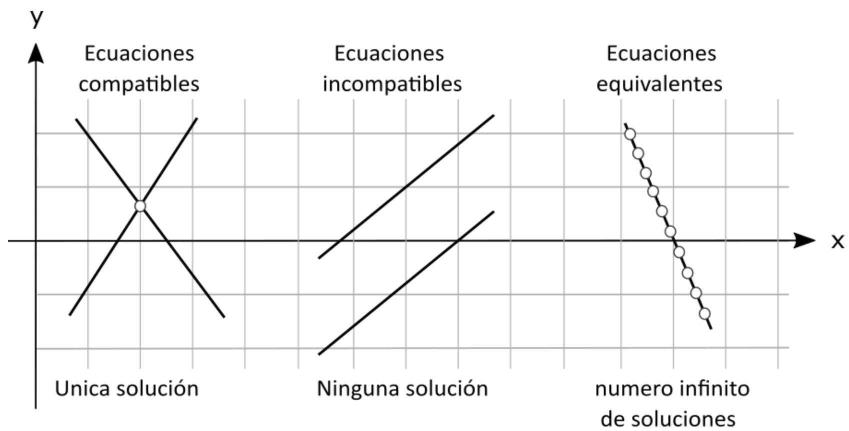


Figura 8.1 Tipos de soluciones de un sistema de ecuaciones de orden dos.

Recordemos que una ecuación lineal es aquella que tiene la forma de un polinomio de primer grado, es decir, las incógnitas no están elevadas a potencias superiores a uno, ni multiplicadas entre sí, ni en el denominador. Como se sabe, las ecuaciones lineales de dos incógnitas representan una recta en el plano. Si la ecuación lineal tiene tres incógnitas. Su representación gráfica es un plano en el espacio (ver Figura 8.2).

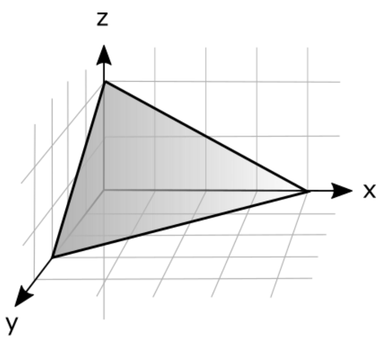


Figura 8.2 Representación de una ecuación con tres variables.

Dos o más ecuaciones son simultáneas cuando tienen la misma solución, o geométricamente se cruzan en el mismo punto

Ejemplo 1

Encuentre la solución del sistema de ecuación de segundo grado.

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \ldots & (1) \\ -x - y + 2 = 0 \ \ldots & (2) \end{cases}$$

Solución

Primero se grafican las rectas, utilizando la intersección con los ejes.

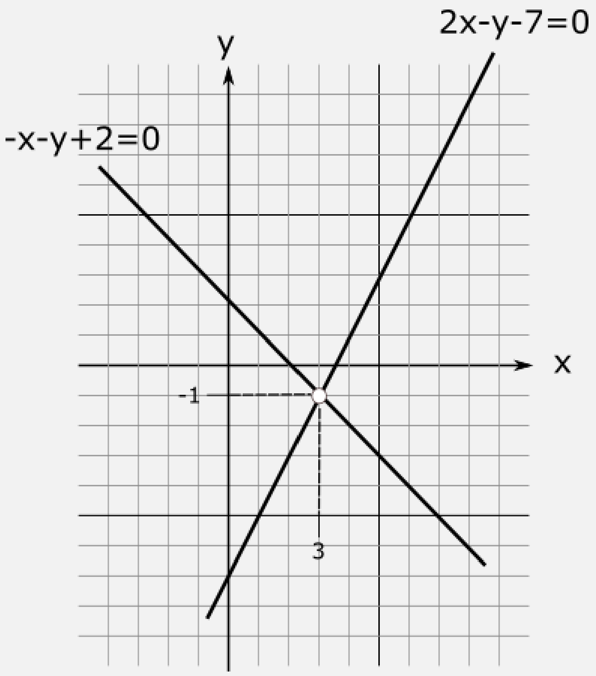
Ecuación (1)

Intersección en x

$$y = 0$$
$$2x - (0) - 7 = 0$$
$$x = \frac{7}{2}$$

Intersección en y

$$x = 0$$
$$2(0) - y - 7 = 0$$
$$y = -7$$



Ecuación (2)

Intersección en x

$$y = 0$$
$$-x - (0) + 2 = 0$$
$$x = 2$$

Intersección en y

$$x = 0$$
$$-(0) - y + 2 = 0$$
$$y = 2$$

Se lee las coordenadas del punto de intersección, que corresponde a la solución:

(3,-1)

Una forma de saber si las ecuaciones lineales del sistema no tienen solución se puede hacer la prueba de la pendiente-intersección.

Definición

Prueba de la pendiente- intersección:

$\boldsymbol{m_1 = m_2}$; $\boldsymbol{b_1 = b_2}$ **Rectas equivalentes.**

$\boldsymbol{m_1 = m_2}$; $\boldsymbol{b_1 \neq b_2}$ **Rectas paralelas o incompatibles.**

$\boldsymbol{m_1 \neq m_2}$ **Rectas compatibles.**

Para lograr la comparación de las pendientes de la recta se debe de expresar la ecuación de la línea recta en su forma pendiente-intersección.

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Ejemplo 2

Indique cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones tienen solución o no, aplicando la prueba de la pendiente-intersección.

$a)\quad \begin{cases} 2x + 3y + 6 = 0 \\ 4x + 6y - 15 = 0 \end{cases}$

$b)\quad \begin{cases} 5x - 2y - 13 = 0 \\ 3x + y + 1 = 0 \end{cases}$

$c)\quad \begin{cases} x - 2y + 8 = 0 \\ 3x - 6y + 24 = 0 \end{cases}$

Solución a)

Se expresan las ecuaciones de la forma pendiente intersección.

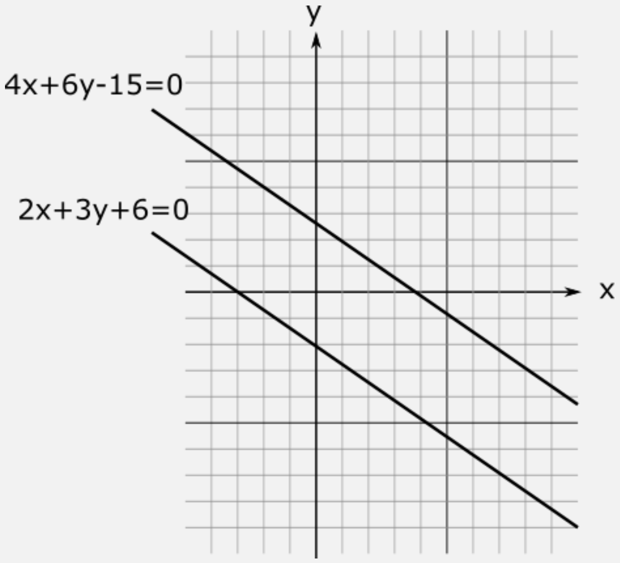
Ecuación ①	Ecuación ②
$2x + 3y + 6 = 0$	$4x + 6y - 15 = 0$
$3y = -2x - 6$	$6y = -4x + 15$
$y = -\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x - 2$	$y = -\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}x + \dfrac{5}{2}$

$m_1 = m_2 = -\dfrac{2}{3}$ *Por tanto las ecuaciones* ***son incompatibles.***

Ahora la gráfica de las funciones es:

Ecuación (1)

Intersección en x
$y = 0$
$2x + 3(0) + 6 = 0$
$x = -3$
Intersección en y
$x = 0$
$2(0) + 3y + 6 = 0$
$y = -2$



Ecuación (2)

Intersección en x
$y = 0$
$4x + 6(0) - 15 = 0$
$x = 15/4$
Intersección en y
$x = 0$
$4(0) + 6y - 15 = 0$
$y = 5/2$

Solución b)

Se expresan las ecuaciones de la forma pendiente intersección.

Ecuación (1)

$5x - 2y - 13 = 0$

$2y = 5x - 13$

$y = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}x - \frac{13}{2}$

Ecuación (2)

$3x + y + 1 = 0$

$y = -3x - 1$

$y = -\mathbf{3}x - 1$

$m_1 \neq m_2$ *Por tanto las ecuaciones* ***son compatibles****.*

Ahora la gráfica de las funciones es:

Ecuación (1)

Intersección en x
$y = 0$
$5x - 2(0) - 13 = 0$
$x = \frac{13}{5}$
Intersección en y
$x = 0$
$5(0) - 2y - 13 = 0$

$y = -\frac{13}{2}$

Ecuación (2)

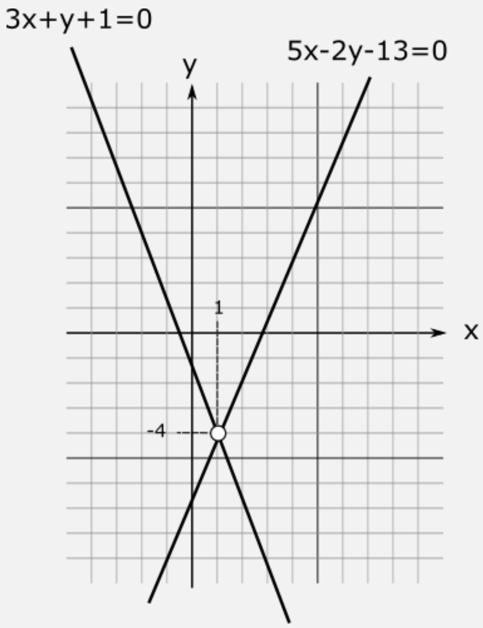
$y = 0$
$3x + (0) + 1 = 0$
$x = -\frac{1}{3}$

$x = 0$
$3(0) + y + 1 = 0$

$y = -1$

Se lee las coordenadas del punto de intersección, que corresponde a la solución:

(1,-4)



Solución c)

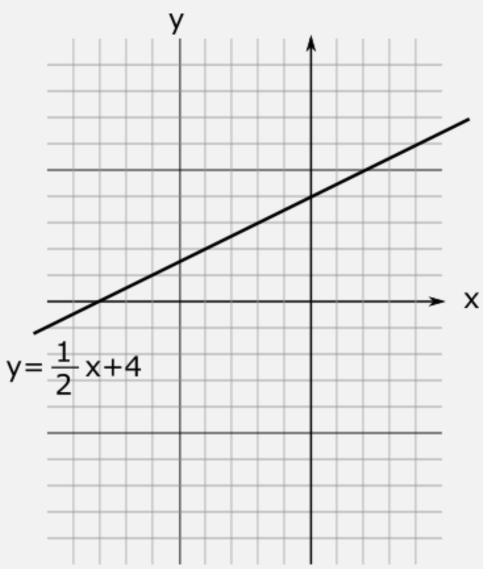
Se expresan las ecuaciones de la forma pendiente intersección.

$Ecuación$ ①	$Ecuación$ ②
$x-2y+8=0$	$3x-6y+24=0$
$2y=x+8$	$6y=3x+24$
$y=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}x+4$	$y=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}x+4$

$m_1=m_2;\ b_1=b_2$ $\quad Por\ tanto\ las\ rectas\ \boldsymbol{son\ equivalentes}.$

Ahora la gráfica de la función es:

Intersección en x
$y=0$
$x=-8$
Intersección en y
$x=0$
$y=4$



Obtener el valor para *x* y *y* que satisfagan al sistema de ecuaciones utilizando el método gráfico.

1. $\begin{cases} 2x-4y=-12 \\ 5y=20 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x+5y=45 \\ 3x+16y=46 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-32y=-\dfrac{23}{2} \\ -3x+y=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$

4. $\begin{cases} -24x-\dfrac{1}{5}y=23 \\ 43x+y=63 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -\dfrac{1}{16}x+\dfrac{8}{9}y=2 \\ \dfrac{3}{7}x+\dfrac{8}{3}y=5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y=250 \\ \dfrac{1}{6}x+\dfrac{5}{3}y=100 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}y=1 \\ -\dfrac{2}{3}x-3y=\dfrac{20}{3} \end{cases}$

8. $\begin{cases} 8x+2y=50 \\ -3y=-75 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 52x-4y=-1792 \\ -8x-43y=581 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -\dfrac{45}{98}x-\dfrac{23}{3}y=\dfrac{173}{5} \\ -\dfrac{8}{92}x+4200y=5*10^{-6} \end{cases}$

8.2 Método de sustitución

El método de sustitución consiste en **despejar una incógnita de una ecuación y sustituirla en la otra ecuación**, para tener una ecuación con una sola incógnita, al resolverla se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales o en la ecuación despejada.

Ejemplo 3

Calcule la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x+15y+5=0 \\ \dfrac{3}{5}x-2y-3\ =0 \end{cases}$$

Solución

De la Ecuación ① se despeja a y.

$$15y = -6x - 5$$

$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{3} \quad \dots \quad Ec.\ ③$$

Ahora la Ecuación ③ se sustituye en la Ecuación ②.

$$\frac{3}{5}x - 2\left(-\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}\right) - 3 \ = 0$$

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}x + \frac{2}{3} - 3 = 0$$

$$\frac{7}{5}x = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{(5)7}{(7)3}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{5}{3}}$$

Se sustituye este valor en la ecuación ③.

$$y = -\frac{2}{5}\left(\frac{5}{3}\right) - \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{y = -1}$$

Finalmente se verifica el resultado.

Con la ecuación ①.

$$6\left(\frac{5}{3}\right) + 15(-1) + 5 = 0$$

$$10 - 15 + 5 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

Con la ecuación ②.

$$\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}\right) - 2(-1) - 3 \ = 0$$

$$1 + 2 - 3 = 0$$

$$0 \equiv 0$$

$$Por\ tanto\ \ \boldsymbol{x = \frac{5}{3}},\ \ \boldsymbol{y = -1}\ son\ la\ solución\ del\ sistema.$$

Para resolver un sistema de orden tres (3 ecuaciones con 3 incógnitas), el procedimiento es despejar una incógnita de una de las ecuaciones y se sustituye en las otras dos ecuaciones, este nuevo sistema de ecuaciones de orden dos ahora se resuelve como se mostró en el ejercicio anterior.

Ejemplo 4

Halle la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+2y+z-1=0 \\ 5x+3y+4z-2=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}$$

Solución

De la ecuación ① se despeja a z

$$z=-3x-2y+1$$

Y se sustituye en ② y ③

$$5x+3y+4(-3x-2y+1)-2=0$$

$$5x+3y-12x-8y+4-2=0$$

$$\boldsymbol{-7x-5y+2=0} \quad \ldots\ Ec.\ ④$$

$$x+y-(-3x-2y+1)-1=0$$

$$\boldsymbol{4x+3y-2=0} \quad \ldots\ Ec.\ ⑤$$

Ahora el nuevo sistema es:

$$\begin{cases} -7x-5y+2=0 \quad \ldots \quad ④ \\ 4x+3y-2\ =0 \quad \ldots \quad ⑤ \end{cases}$$

De la ecuación ④ se despeja a y

$$y=-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}$$

Se sustituye en ⑤

$$4x+3\left(-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}\right)-2\ =0$$

$$-\frac{1}{5}x\ =\frac{4}{5} \qquad \boldsymbol{x=-4}$$

Ahora con el valor de x se encuentra a y y z.

$$y = -\frac{7}{5}(-4) + \frac{2}{5} \qquad \boldsymbol{y = 6}$$

$$z = -3(-4) - 2(6) + 1 \qquad \boldsymbol{z = 1}$$

Se verifica el resultado.

Con la ecuación 1

$3x + 2y + z - 1 = 0$

$3(-4) + 2(6) + 1 - 1 = 0$

$-12 + 12 + 1 - 1 \equiv 0$

$0 \equiv 0$

Con la ecuación 2

$5x + 3y + 4z - 2 = 0$

$5(-4) + 3(6) + 4(1) - 2 = 0$

$-20 + 18 + 4 - 2 = 0$

$0 \equiv 0$

Con la ecuación 3

$x + y - z - 1 = 0$

$-4 + 6 - 1 - 1 = 0$

$0 \equiv 0$

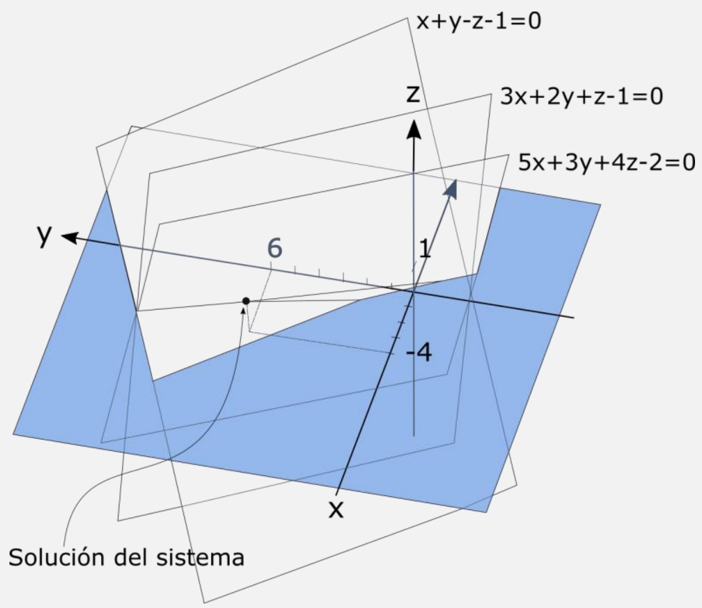
Por tanto, la solución al sistema es:

$$\boldsymbol{x = -4}$$

$$\boldsymbol{y = 6}$$

$$\boldsymbol{z = 1}$$

La solución para un sistema de orden tres, se explica como la intersección en un punto de tres planos en donde cada uno representa una ecuación (Vea la siguiente figura).



Empleando el método de sustitución encontrar los valores que satisfacen la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

11. $\begin{cases} 5x - 2y = \frac{1}{2} \\ 3x + \frac{4}{7}y = 8 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 25a - 2b + 5c - 4d = \frac{1}{2} \\ a + 8b - 32c - 64d = 128 \\ -5a + 15b + 30c + 60d = 80 \\ 2a - 4b + 8c - 5d = 25 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 23x + \frac{11}{2}y - 23 = 0 \\ \frac{4}{9}x + 2y = \frac{-1}{10} \end{cases}$

17. $\begin{cases} -24a - 48b - 64c + 1200d = 8320 \\ a + b + c + d = 52 \\ b - 100c + 50d = -2743 \\ 25c - 800 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3s + 5t - 8r = 3 \\ 5s - 8t + 23r = -20 \\ -4s + 5r = 8 \end{cases}$

1 8. $\begin{cases} 3x + 5y + 8z + 10w = \frac{1765}{168} \\ 2x - 4y - 6z + 3w = \frac{3}{14} \\ -5x - 10y - 25z - 7w = \frac{-193}{12} \\ -16 + 2x + 8y + 6z = -21w \end{cases}$

14. $\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{8}{9}y - 5z = 2 \\ 2z - 23y + 37 = 0 \\ 8y - 24x + 2 = -5z \end{cases}$

19. $\begin{cases} 5b + \frac{1}{2}c + 3d = \frac{207}{2} \\ -56a - 9c + 56d = 983 \\ -5a + 89b + 2c + 4d = 624 \\ a - b + 4c - 4d = -58 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 8x + 2y - z = 1 \\ -2x + 4y + 3z = 8 \\ 5x - 15y + 35z = 6 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 9x - 3y + z = 0 \\ 4x - 5z = 25 \\ 4y - 3z = 3x + 8 \end{cases}$

8.3 Método de igualación

El método consiste en **despejar de ambas ecuaciones la misma incógnita y se igualan entre sí**. El resultado es una ecuación con una incógnita, la cual es sencilla de resolver.

Ejemplo 5

Encuentre la solución del siguiente sistema de ecuaciones, utilizando el método de igualación.

$$\begin{cases} 5x + 3y - 24 = 0 \\ 2x - 7y + 15 = 0 \end{cases}$$

Solución

Se despeja a x de cada ecuación.

$$5x = -3y + 24 \qquad\qquad 2x = 7y - 15$$

$$x = \frac{-3y + 24}{5} \quad \ldots\ Ec.\ ③ \qquad\qquad x = \frac{7y - 15}{2} \quad \ldots\ Ec.\ ④$$

Se iguala la ecuación ③ y ④

$$\frac{-3y + 24}{5} = \frac{7y - 15}{2}$$

$$2(-3y + 24) = 5(7y - 15)$$

$$-6y - 35y = -48 - 75$$

$$\boldsymbol{y = 3}$$

Con la ecuación ③ ó ④ se obtiene x.

$$x = \frac{7(3) - 15}{2} \qquad\qquad \boldsymbol{x = 3}$$

Se verifica el resultado.

Con la ecuación ①	Con la ecuación ②
$5x + 3y - 24 = 0$	$2x - 7y + 15 = 0$
$5(3) + 3(3) - 24 = 0$	$2(3) - 7(3) + 15 = 0$
$15 + 9 - 24 \equiv 0$	$6 - 21 + 15 = 0$
$0 \equiv 0$	$0 \equiv 0$

$$Por\ tanto\ \ \boldsymbol{x = 3},\ \ \boldsymbol{y = 3}\ \ son\ la\ solución\ del\ sistema.$$

Para resolver un sistema de tercer grado por el método de igualación se despeja la misma incógnita de cada ecuación y se iguala la primera ecuación con la segunda y la segunda con la tercera, posteriormente se despeja nuevamente una incógnita de éstas últimas y se igualan.

Ejemplo 6

Halle la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y - z - 8 = 0 \\ 2x - y + 2z + 2 = 0 \\ 5x + 3y - z - 12 = 0 \end{cases}$$

Solución

Se despeja a x de cada ecuación.

$$x = -3y + z + 8 \quad \ldots \quad Ec.\ (1)$$

$$x = \frac{y}{2} - z - 1 \quad \ldots \quad Ec.\ (2)$$

$$x = -\frac{3}{5}y + \frac{z}{5} + \frac{12}{5} \quad \ldots \quad Ec.\ (3)$$

Ahora se iguala la ecuación (1) con (2) y la ecuación (2) con (3).

$$-3y + z + 8 = \frac{y}{2} - z - 1$$

$$-\frac{7}{2}y + 2z + 9 = 0 \quad \ldots \ Ec.(4)$$

$$\frac{y}{2} - z - 1 = -\frac{3}{5}y + \frac{z}{5} + \frac{12}{5}$$

$$\frac{11}{10}y - \frac{6}{5}z - \frac{17}{5} = 0 \quad \ldots \ Ec.(5)$$

Nuevamente, se despeja de estas ecuaciones la incógnita y.

$$y = \frac{4z + 18}{7} \quad \ldots Ec\ (6)$$

$$y = \frac{60z + 170}{55} \quad \ldots Ec\ (7)$$

Se igualan las ecuaciones:

$$\frac{4z + 18}{7} = \frac{60z + 170}{55}$$

Aplicando álgebra:

$$(4z + 18)55 = (60z + 170)7$$

$$220z + 990 = 420z + 1190$$

$$-200z = 200$$

$$\boldsymbol{z = -1}$$

Ahora se sustituye en la Ecuación ⑥ ó ⑦

$$y = \frac{-4+18}{7} \qquad \boldsymbol{y = 2}$$

Finalmente con la ecuación ①, se tiene el valor de x.

$$x = -3(2) - 1 + 8 \qquad \boldsymbol{x = 1}$$

Se verifica el resultado.

Con la ecuación ①

$x + 3y - z - 8 = 0$

$1 + 3(2) + 1 - 8 = 0$

$1 + 6 + 1 - 8 = 0$

$0 \equiv 0$

Con la ecuación ②

$2x - y + 2z + 2 = 0$

$2(1) - 2 + 2(-1) + 2 = 0$

$2 - 2 - 2 + 2 = 0$

$0 \equiv 0$

Con la ecuación ③

$5x + 3y - z - 12 = 0$

$5(1) + 3(2) + 1 - 12 = 0$

$0 \equiv 0$

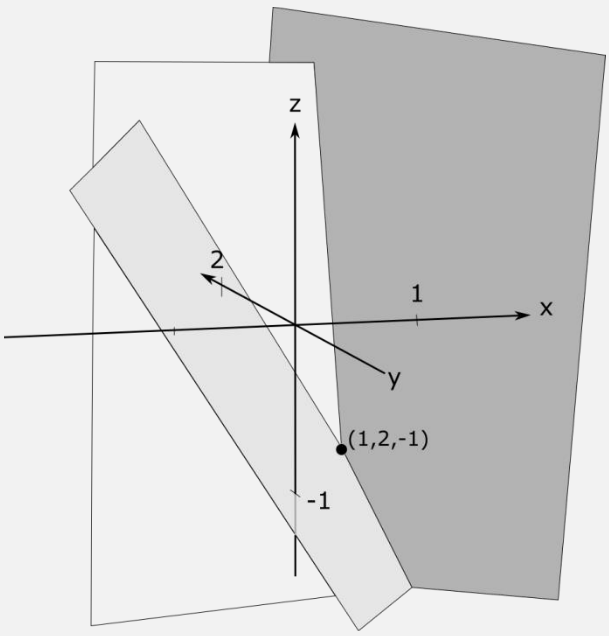
Por tanto, la solución al sistema es:

$$\boldsymbol{x = 1}$$

$$\boldsymbol{y = 2}$$

$$\boldsymbol{z = -1}$$

La solución para un sistema de orden tres, se puede visualizar en tres dimensiones, vea la siguiente figura.



Ejercicios de refuerzo 8.3

Empelando el método de igualación encuentre los valores que satisfacen la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

21. $\begin{cases} 2x - 7y = 3 \\ 3x + 2y = 17 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 6x + 7y = 5 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 4s + 5t = 14 \\ 2s - 3t = 4 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x + 3y - z = 8 \\ 2x - 7 + 2z = -2 \\ 5x + 3y - z = 12 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = 11 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + y + z - w = 2 \\ x + y - 2z + w = -4 \\ 2x - y + 2z + w = 7 \\ x + y - 3z - w = -6 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x - y + z + w = -2 \\ 2x + y - z - w = -1 \\ 3x - 2y - z - 2w = -4 \\ 4x - y - z + w = -7 \end{cases}$

2 8. $\begin{cases} x - 2y - z + w = 3 \\ x + y - z - w = 1 \\ -x + y + 2z + w = -2 \\ x - y - z + w = 3 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x - 2y - z + w = -3 \\ x + 2y + z - 2w = 6 \\ x - y + z - w = 2 \\ x - y - z - w = 0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x - y + z + w = 3 \\ -x + y - 3z - w = 1 \\ x + 2y + 2z - w = 1 \\ 2x - y - z - w = 3 \end{cases}$

8.4 Método de reducción

El método consiste en **reducir las incógnitas,** mediante suma o resta de las ecuaciones, para ello primero se escoge una incógnita de una ecuación con el objetivo que la misma incógnita en la otra ecuación tenga el mismo valor pero signo contrario. Para ende la segunda ecuación es susceptible a ser operada como nos convenga. Lo que se obtiene es una ecuación reducida en el número de incógnitas fácil de resolver.

Ejemplo 7

Encuentre la solución del siguiente sistema de ecuaciones, utilizando el método de reducción.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 5x + 4y + 37 = 0 \end{cases}$$

Solución

Se escoge reducir a x, por tal motivo la primera ecuación se multiplica por -5 y la segunda por 2, para ser sumadas, teniendo:

$$\begin{array}{rl} -10x + 15y - 5 = 0 & \dots .\ Ec\ ① \\ 10x + 8y + 74 = 0 & \dots\ Ec\ ② \\ \hline 23y + 69 = 0 & \dots\ Ec.\ ③ \end{array}$$

De la ecuación ③ se tiene:

$$\boldsymbol{y = -3}$$

Ahora de la ecuación ①

$$2x - 3(-3) + 1 = 0$$

$$\boldsymbol{x = -5}$$

Se verifica el resultado.

Con la ecuación ①

$2x - 3y + 1 = 0$

$2(-5) - 3(-3) + 1 = 0$

$-10 + 9 + 1 = 0$

$0 \equiv 0$

Con la ecuación ②

$5x + 4y + 37 = 0$

$5(-5) + 4(-3) + 37 = 0$

$-25 - 12 + 37 = 0$

$0 \equiv 0$

$$Por\ tanto\quad \boldsymbol{x = -5},\ \ \boldsymbol{y = -3}\ \ son\ la\ solución\ del\ sistema.$$

Para resolver un sistema de tercer grado por el método de reducción se escoge una ecuación para ser utilizada como apoyo para la reducción, esta ecuación también es conocida como “pivote” la cual se suma o resta según convenga a las otras dos ecuaciones para aplicar la reducción.

Ejemplo 8

Encuentre la solución del siguiente sistema de ecuaciones, utilizando el método de reducción.

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 5z - 11 = 0 \\ x - 5y + 6z - 29 = 0 \end{cases}$$

Solución

Se escoge reducir a x, con la primer ecuación, por tanto se suma la primera (multiplicada por -2) con la segunda y la primera (multiplicada por -1) con la tercera.

Primera ecuación reducida.

$$\begin{array}{rl} -2x - 2y - 2z + 4 = 0 & \dots\ Ec\ ① \\ 2x + 3y + 5z - 11 = 0 & \dots\ Ec\ ② \\ \hline y + 3z - 7 = 0 & \dots\ Ec\ ④ \end{array} \qquad \begin{array}{rl} -x - y - z + 2 = 0 & \dots\ Ec\ ① \\ x - 5y + 6z - 29 = 0 & \dots\ Ec\ ③ \\ \hline -6y + 5z - 27 = 0 & \dots\ Ec\ ⑤ \end{array}$$

Ahora se deben de reducir la Ec ... ④ y ⑤

$$y + 3z - 7 = 0 \quad \dots\ Ec\ ④$$

$$-6y + 5z - 27 = 0 \quad \dots\ Ec\ ⑤$$

Se reduce a y, por tanto se multiplica la ecuación ④ por 6 y se suma a la ecuación ⑤.

$$\begin{array}{rl} 6\,y + 18z - 42 = 0 & \dots\ Ec\ ④ \\ -6y + 5z - 27 = 0 & \dots\ Ec\ ⑤ \\ \hline 23z - 69 = 0 & \end{array}$$

Por tanto $\boldsymbol{z = 3}$

Ahora con la ecuación ④ ó ⑤ se obtiene a y.

$$6\,y + 18z - 42 = 0$$

$$6\,y + 18(3) - 42 = 0$$

$$6\,y + 12 = 0$$

$$\boldsymbol{y = -2}$$

Finalmente para x, con la ecuación ①, ② ó ③

$$x + y + z - 2 = 0$$

$$x - 2 + 3 - 2 = 0$$

$$\boldsymbol{x = 1}$$

Se verifica el resultado.

Con la ecuación ①

$x + y + z - 2 = 0$

$1 - 2 + 3 - 2 = 0$

$-1 + 1 = 0$

$0 \equiv 0$

Con la ecuación ②

$2x + 3y + 5z - 11 = 0$

$2(1) + 3(-2) + 5(3) - 11 = 0$

$2 - 6 + 15 - 11 = 0$

$0 \equiv 0$

Con la ecuación ③

$x - 5y + 6z - 29 = 0$

$1 - 5(-2) + 6(3) - 29 = 0$

$1 + 10 + 18 - 29$

$0 \equiv 0$

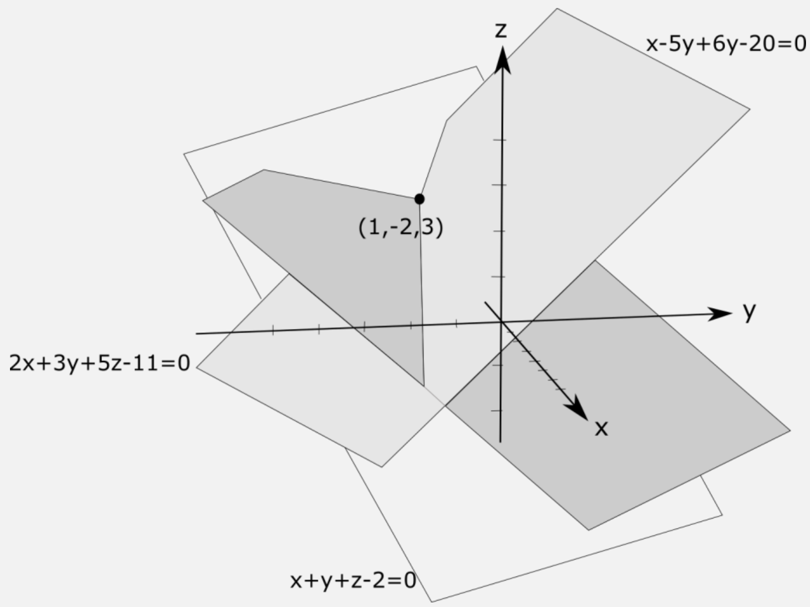
Por tanto, la solución al sistema es:

$$\boldsymbol{x = 1}$$

$$\boldsymbol{y = -2}$$

$$\boldsymbol{z = 3}$$

La siguiente figura proporciona la intersección de los tres planos en un punto (solución).



Empleando el método de reducción encuentre los valores que satisfacen la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

31. $\begin{cases} 54x - 8y = 136 \\ -\dfrac{3}{5}x - \dfrac{8}{7}y = -\dfrac{484}{35} \end{cases}$

32. $\begin{cases} -5x - 3y = 97 \\ 5x + 34y = 89 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 3x - 5 = 4y \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 34 \\ -x + 34y - 5 = 0 \\ 3z - 2x + 87y = -10 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 5x + 4y - 2z + 8w = 96 \\ x + 16y + 26z + 4w = 328 \\ -25x - 32y - 24z - w = -461 \\ 8x + y - z + w = 38 \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{y}{8} + \dfrac{1}{4}z - 2w = 8 \\ x + 6y + z + w = 2 \\ 4x - 2y + 3z - w = 0 \\ 2y + \dfrac{w}{8} = 6 \end{cases}$

37. $\begin{cases} -25x + \dfrac{1}{4}y - 9z + 8w = -\dfrac{431}{32} \\ 2x - 6y + 5z + \dfrac{8}{7}w = \dfrac{1587}{28} \\ -8x - 9y - 2z - w = -\dfrac{265}{8} \\ 5x + 6y + 7z + 8w = \dfrac{585}{4} \end{cases}$

38. $\begin{cases} x + y + z + w + v = 42 \\ 2x + y - 48z - w + 4v = 1252 \\ x + 5w - 4v = 32 \\ 5x - 10y - 20z + 8w - 25v = 1000 \\ -64w - 50v = 100 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x + y + z + w = 14616 \\ -x - y - z + w = -12974 \\ 8x + 16y + 32z + 128w = 348240 \\ 2x + 5y + 8z + 8w = 72999 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 10 \\ 3y - 8x + 100 = 0 \\ 5x - 8y + z = 25 \end{cases}$

8.5 Resolución por determinantes

Un determinante es un arreglo cuadrado de elementos que se acomodan en filas y renglones, su símbolo es la letra griega delta (Δ). Un determinante se resuelve haciendo el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de la diagonal secundaria.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Ejemplo 9

Encuentre la solución de los siguientes determinantes.

$a)\quad \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (3)(4) - (-1)(7) = 12 + 7 = \mathbf{19}$

$b)\quad \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = (8)(-5) - (-1)(6) = -40 + 6 = \mathbf{-34}$

$c)\quad \begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = (-12)(2) - (-8)(-4) = -24 - 32 = \mathbf{-56}$

$d)\quad \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-3)(2) - (4)(0) = -6 - 0 = \mathbf{-6}$

$e)\quad \begin{vmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{-3-5}{6} = -\frac{8}{6} = -\mathbf{\frac{4}{3}}$

Si el determinante es de orden 3, es decir tres renglones y tres columnas, en esta sección se utilizará el **Método de Sarrus.**

Consiste en **agregar debajo del tercer renglón, los dos primeros**, multiplicando sus elementos diagonales (solo los que tengan tres elementos), sumando las diagonales principales menos la suma de las diagonales secundarias.

Determinante	Se escriben las dos Primeras filas debajo de la tercera	Productos de las diagonales principales menos las secundarias

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = [dbi + ahf + gec] - [aei + dhc + gbf]$$

Ejemplo 10

Encuentre la solución de los siguientes determinantes.

$$a)\ \Delta=\begin{vmatrix}5 & 1 & 2\\ -3 & 3 & 1\\ 4 & 0 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 1 & 2\\ -3 & 3 & 1\\ 4 & 0 & -1\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & 0 & -1\end{vmatrix}=[(4)(1)(-1)+(5)(0)(1)+(4)(3)(2)]-$$

$$-[(5)(3)(-1)+(-3)(0)(2)+(4)(1)(-1)]$$

$$=[-4+0+24]-[-15+0-4]$$

$$=[20]-[-19]$$

$$\mathbf{=39}$$

$$b)\ \Delta=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\ [(1)(-1)(3)+(2)(-1)(2)+(1)(-1)(3)]-$$

$$-[(2)(-1)(3)+(1)(-1)(3)+(1)(-1)(2)]$$

$$=[-3-4-3]-[-6-3-2]$$

$$=[-10]-[-11]$$

$$\mathbf{=1}$$

Ejercicios de refuerzo 8.5

Calcule los siguientes determinantes.

41. $\Delta=\begin{vmatrix}-3 & 6\\ 2 & -1\end{vmatrix}$

42. $\Delta=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -2 & -5\end{vmatrix}$

43. $\Delta=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}$

44. $\Delta=\begin{vmatrix}-5 & \frac{3}{4}\\ 3 & -2\end{vmatrix}$

45. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 3 & -3\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 5\end{vmatrix}$

46. $\Delta=\begin{vmatrix}-1/2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & -3\\ 1 & 1/3 & 2\end{vmatrix}$

47. $\Delta=\begin{vmatrix}1/3 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 1/2\\ 1 & 1 & -1/3\end{vmatrix}$

48. $\Delta=\begin{vmatrix}0 & 2/3 & 5/3\\ 1/3 & 1/4 & 2\\ 1/2 & 3/2 & -1\end{vmatrix}$

49. $\Delta=\begin{vmatrix}0 & -1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & -2\\ 4 & -5 & 1 & -1\end{vmatrix}$

50. $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 5 & 3\\ -4 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}$

Para resolver los sistemas de ecuaciones utilizando los determinantes se utiliza la **Regla de Cramer,** cuidando que el sistema de ecuaciones tenga el mismo acomodo y que cada ecuación este igualada al término independiente.

El valor de la incógnita es igual al cociente, cuyo denominador es el determinante del sistema formado por los coeficientes de las incógnitas y el numerador es el determinante del sistema sustituyendo la columna de los coeficientes de la incógnita a hallar por la columna de los términos independientes.

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

Determinante del sistema	Determinante de x	Determinante de y
$\Delta S = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = \boldsymbol{bd - ae}$	$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = \boldsymbol{fb - ce}$	$\Delta y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = \boldsymbol{bc - af}$

Las incógnitas se calculan como sigue.

$$\boldsymbol{x = \frac{\Delta x}{\Delta S}} \qquad \boldsymbol{y = \frac{\Delta y}{\Delta S}}$$

Ejemplo 9

Encuentre el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$a)\ \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 4x + 2y \ = 14 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 5x + y = 2 \\ x + 4y \ = -11 \end{cases}$$

Solución a)

Expresa el sistema de ecuaciones con los coeficientes y de forma ordenada.

$$\begin{array}{ccc} x & y & cte \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 14 \end{array}$$

Los determinantes son:

$$\Delta S = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -20 - 4 = \boldsymbol{-24}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 14 & 2 \end{vmatrix} = -70 - 2 = \boldsymbol{-72}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = 4 - 28 = \boldsymbol{-24}$$

Ahora las incógnitas:

$$x = \frac{-72}{-24} = \boldsymbol{3}$$

$$y = \frac{-24}{-24} = \boldsymbol{1}$$

Solución b)

Se escribe el sistema de ecuaciones con los coeficientes de forma ordenada.

$$\begin{array}{ccc} x & y & cte \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -11 \end{array}$$

Los determinantes son:

$$\Delta S = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 20 = \mathbf{-19}$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -11 & 4 \end{vmatrix} = -11 - 8 = \mathbf{-19}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} = 2 + 55 = \mathbf{57}$$

Ahora las incógnitas:

$$x = \frac{-19}{-19} = \mathbf{1}$$

$$y = \frac{57}{-19} = \mathbf{-3}$$

Ahora bien si el sistema es de orden 3.

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ ex + fy + gz &= h \\ ix + jy + kz &= l \end{aligned}$$

Determinante del sistema:

$$\Delta S = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix} = [ebk + ajg + ifc] - [afk + ejc + ibg]$$

Determinante de x :

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \\ d & b & c \\ h & f & g \end{vmatrix} = [hbk + djg + lfc] - [dfk + hjc + lbg]$$

Determinante de y:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & l & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & l & k \\ a & d & c \\ e & h & g \end{vmatrix} = [edk + alg + ihc] - [ahk + elc + idg]$$

Determinante de z:

$$\Delta z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \\ a & b & d \\ e & f & h \end{vmatrix} = [ebl + ajh + ifd] - [afl + ejd + ibh]$$

Las incógnitas se calculan como sigue.

$$\boldsymbol{x} = \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta \boldsymbol{S}} \qquad \boldsymbol{y} = \frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{S}} \qquad \boldsymbol{z} = \frac{\Delta \boldsymbol{z}}{\Delta \boldsymbol{S}}$$

Ejemplo 11

Encuentre el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 7 \\ 4x + 3y - 2z = -8 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x - 2y + 3z = -3 \\ x + y - z = 6 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$$

Solución a)

Se ordena y se escribe el sistema de ecuaciones con los coeficientes.

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & cte \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & -2 & -8 \end{array}$$

Determinante del sistema.

$$\Delta S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [-4 + 3 - 4] - [2 + 6 + 4] = [-5] - [12] = \mathbf{-17}$$

Determinante de x.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ -8 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [-14 + 6 + 8] - [4 + 21 - 8] = [0] - [17] = \mathbf{-17}$$

Determinante de y.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 4 & -8 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = [-8 - 8 + 28] - [-14 - 16 + 8] = [12] - [-22] = \mathbf{34}$$

Determinante de z.

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = [-16 + 21 - 8] - [8 + 12 + 28] = [-3] - [48] = \mathbf{-51}$$

Las incógnitas son:

$$x = \frac{-17}{-17} = \mathbf{1} \qquad y = \frac{34}{-17} = \mathbf{-2} \qquad z = \frac{-51}{-17} = \mathbf{3}$$

Se verifica el resultado.

Con la ecuación 1.

$x + y + z = 2$

$1 - 2 + 3 = 2$

$2 \equiv 2$

Con la ecuación 2.

$2x - y + z = 7$

$2(1) + 2 + 3 = 7$

$7 \equiv 7$

Con la ecuación 3.

$4x + 3y - 2z = -8$

$4(1) + 3(-2) - 2(3) = -8$

$-8 = -8$

Solución b)

Se ordena y se expresa el sistema de ecuaciones sólo con los coeficientes.

x	y	z	cte
1	−2	3	−3
1	1	−1	6
2	−3	1	8

Determinante del sistema.

$$\Delta S = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [-2 + 3 + 6] - [1 - 9 + 4] = [7] - [-4] = \mathbf{11}$$

Determinante de x.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \end{vmatrix} = [-12 - 9 + 24] - [-3 - 54 + 16] = [3] - [-41] = \mathbf{44}$$

Determinante de y.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 6 & -1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = [-3 - 8 + 36] - [6 + 24 + 6] = [25] - [36] = \mathbf{-11}$$

Determinante de z.

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 8 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = [-16 - 18 - 6] - [8 + 9 - 24] = [-40] - [-7] = \mathbf{-33}$$

Las incógnitas son:

$$x = \frac{44}{11} = \mathbf{4} \qquad y = \frac{-11}{11} = \mathbf{-1} \qquad z = \frac{-33}{11} = \mathbf{-3}$$

Se verifica el resultado.

Con la ecuación ①.

$x - 2y + 3z = -3$

$4 - 2(-1) + 3(-3) = -3$

$-3 \equiv -3$

Con la ecuación ②.

$x + y - z = 6$

$4 - 1 + 3 = 6$

$6 \equiv 6$

Con la ecuación ③.

$2x - 3y + z = 8$

$2(4) - 3(-1) - 3 = 8$

$8 = 8$

Ejercicios de refuerzo 8.6

Usando el método de determinantes obtener la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

51. $\begin{cases} x + y = 9 \\ -2x + 6y = 10 \end{cases}$

52. $\begin{cases} 5x - 8y = \dfrac{24}{5} \\ -9x + 36y = 45 \end{cases}$

53. $\begin{cases} 67y - 9 = 7x \\ \dfrac{7}{3} + \dfrac{5}{8}x = 65y \end{cases}$

54. $\begin{cases} 6x + 7y = 42 \\ 64x - y = 98 \end{cases}$

55. $\begin{cases} 8y - x = 70 \\ 6x - 9y = 40 \end{cases}$

56. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{4}{9}y = 84 \\ \dfrac{8}{7}x + \dfrac{6}{5}y = 60 \end{cases}$

57. $\begin{cases} 5s - 9t = 64 \\ 9t = 10 + 2s \end{cases}$

58. $\begin{cases} \dfrac{7}{37}w + t = 80 \\ 35t = 20 \end{cases}$

59. $\begin{cases} 8t - 4y = 84 \\ 6t - 5y = 64 \end{cases}$

60. $\begin{cases} 9g - 23b = 30 \\ g + 84b = 6 \end{cases}$

61. $\begin{cases} 3x - 6y + 10z = 9 \\ 5x - 8y + 4z = 6 \\ 24x - 6y + 10z = 8 \end{cases}$

62. $\begin{cases} 6x - 24y - 32z = 6 \\ -x + 44y - 8z = 2 \\ -45x - 55y - 65z = 70 \end{cases}$

63. $\begin{cases} 7x = -8y + 43z - 1 \\ 4x + 8z = 9 \\ 6x - 3y = 10 + 23z \end{cases}$

64. $\begin{cases} 12x + y = 8 \\ 54y - 8z = 5 \\ 78x + 76z = -10 \end{cases}$

65. $\begin{cases} -x - y = z - 65 \\ 5y - 95x + 62z = 32 \\ 8x - 9y - 9z = 0 \end{cases}$

66. $\begin{cases} 10p + 6q - 32r = 21 \\ 9p - 65 + 72q - r = 99 \\ -p - q - r = 87 \end{cases}$

67. $\begin{cases} 6s + 4t - w = 20 \\ 36s - 6w + 8 = 10t \\ 6s - 8w + 10t = 52 \end{cases}$

68. $\begin{cases} 4x - 25y + 8z = 10 \\ 8x - 9z - 21y = 2 \\ 4x - 7y + 15z = 9 \end{cases}$

69. $\begin{cases} 8x + 6y - 3z = 21 \\ 6x - 66y + 12z = 54 \\ 9x + 22y - 55z = 110 \end{cases}$

70. $\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 2x + 4y + 6z = 24 \\ 8x - y + 6z = 1 \end{cases}$

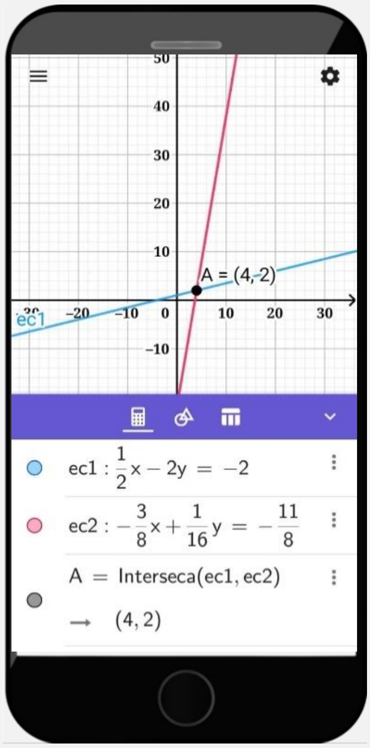
8.6 Uso de aplicaciones interactivas para la solución de sistemas de ecuaciones

Hoy en día podemos encontrar diferentes aplicaciones móviles que permiten la solución de problemas matemáticos como: Geogebra®, Symbolab®, Mathematica Alpha®, sólo por mencionar algunas, estas herramientas cuentan con licencia libre y se encuentra disponible casi para cualquier sistema operativo (IOS, Android, Linux, Windows), a continuación, veremos algunos ejercicios empleando la aplicación de Geogebra® como una herramienta para la solución de sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 12

Usando la aplicación Geogebra® encontrar los valores que satisfacen la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - 2y = -2 \\ \dfrac{-3}{8}x + \dfrac{1}{16}y = -\dfrac{11}{8} \end{cases}$$



Solución

Al igual que en los otros casos se puede verificar que estos valores satisfagan al sistema a través de la sustitución de estos sobre una de las ecuaciones que conforman al sistema de ecuaciones y viendo que cumplan con la igualdad.

Geogebra® muestra los valores que cumplen con la solución al sistema de ecuaciones (punto de intersección) mediante el método gráfico, Symbolab® no sólo reporta los valores si no que al igual que Mathematica dan la opción de una demostración paso por paso de la solución. Así mismo podemos resolver sistemas de ecuaciones más complejas como la siguiente:

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = -8 \\ 5y - 2z = 12 \\ 4x - z = 4 \end{cases}$$

Empleando la aplicación de Geogebra® en uso de calculadora 3D, es posible

El punto "A" indica la intersección de cada uno de los planos que describen a cada una de las ecuaciones que componen al sistema.

Sin embargo, Geogebra® se ve un poco limitado para sistemas de ecuaciones superiores a 3x3, en el siguiente ejemplo emplearemos otra aplicación llamada Symbolab®.

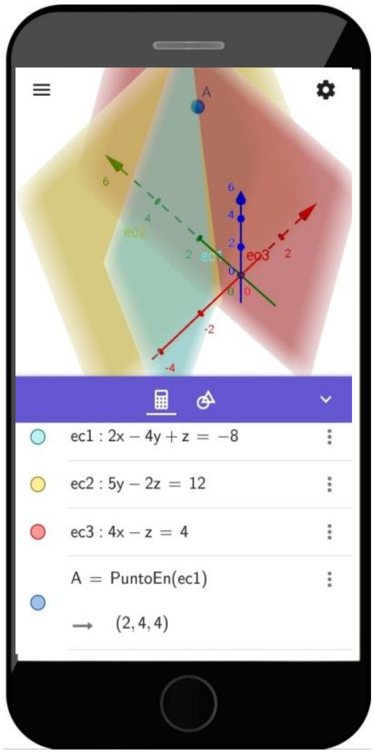


Figura 8.2 Solución al sistema de ecuaciones empleando Geogebra®.

Ejemplo 13

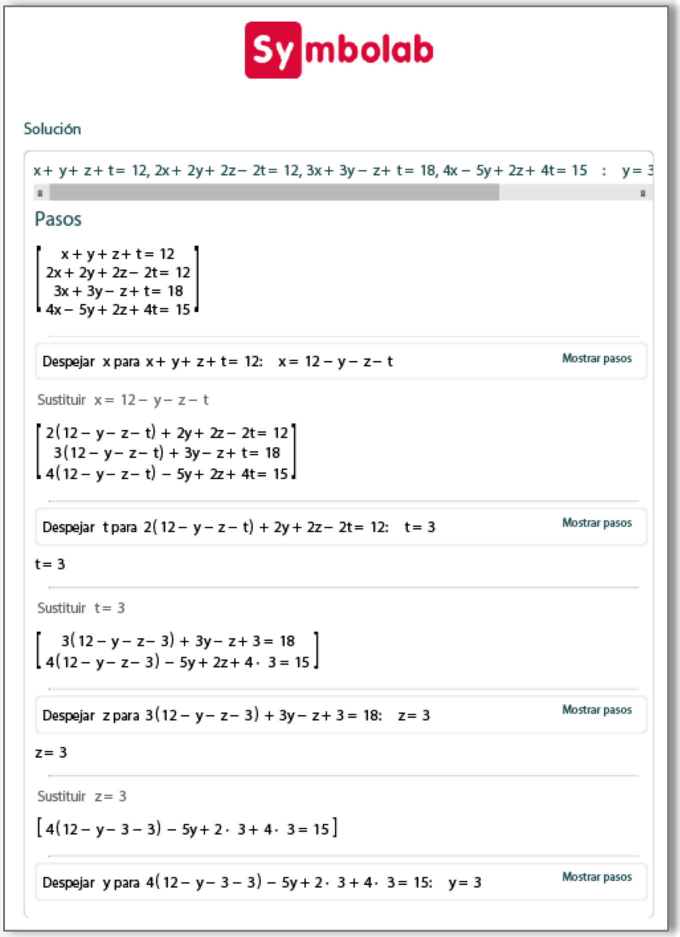
Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando Symbolab®.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 12 \\ 2x + 2y + 2z - 2t = 12 \\ 3x + 3y - z + t = 18 \\ 4x - 5y + 2z + 4t = 15 \end{cases}$$

Solución

Usando la aplicación de Symbolab® obtenemos los siguientes resultados.

La ventaja que ofrece esta aplicación es que tiene como opción el mostrar los pasos que se siguen para la solución de los sistemas de ecuación mediante los diferentes métodos.



Para x = 12 − y − z − t

Sustituir y = 3

Sustituir z = 3

Sustituir t = 3

x = 12 − 3 − 3 − 3

12 − 3 − 3 − 3 = 3 Mostrar pasos

x = 3

Las soluciones para el sistema de ecuaciones son:

y = 3, z = 3, t = 3, x = 3

Ejercicios de refuerzo 8.7

Empleando algún software gratuito encuentre la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.

71. $$\begin{cases} 3x - 6y + 12z = 135 \\ 6x - 15y - 2z = -150 \\ -8x - 16y - 32z = -680 \end{cases}$$

72. $$\begin{cases} 8x + \frac{1}{2}y + z = 32 \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 8 \\ 3x - 5y - 3z = 4 \end{cases}$$

73. $$\begin{cases} \dfrac{1}{16}x + \dfrac{1}{8}y = 10 \\ \dfrac{1}{128}x - \dfrac{6}{84}y + \dfrac{1}{4}z = \dfrac{513}{28} \\ \dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{64}y - \dfrac{1}{128}z = 4 \end{cases}$$

74. $$\begin{cases} 3x + 5y + 3z = 8 \\ -2x - 5y + \frac{1}{4}z = 7 \\ 7x - 45y + 25z = 204 \end{cases}$$

75. $$\begin{cases} -2x - 7y - 5z = -\dfrac{1440}{69} \\ -5y - \dfrac{3}{43}z = -1 \\ 5x + \dfrac{1}{23}z = \dfrac{2030}{69} \end{cases}$$

76. $$\begin{cases} -7x + 9y + 45z = -23 \\ 67x + 4y + 1235z = 761 \\ -4x + 5y + 65z = -14 \end{cases}$$

77. $$\begin{cases} 3x - 2y = 25 \\ x - y - z = -2 \\ 3z - 2x + 5y - 20 = 0 \end{cases}$$

78. $$\begin{cases} \dfrac{1}{2}x + 3y + \dfrac{1}{45}z = 27\dfrac{17}{18} \\ 3x + 4y + \dfrac{1}{30}z = 55\dfrac{2}{3} \\ -2x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{20}z = -16 \end{cases}$$

79. $$\begin{cases} 3x - 56y - 6z = -316 \\ -5y - 4z = -57 \\ -2x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{20}z = \dfrac{-109}{10} \end{cases}$$

80. $$\begin{cases} \dfrac{-1}{4}x - \dfrac{1}{16}y - \dfrac{1}{32}z = 128 \\ \dfrac{8}{5}x - \dfrac{4}{15}z = -40 \\ -7x - 14y - 21z + 63 = 0 \end{cases}$$

Aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas en el área química y microbiológica

Escrito por: QFB Beatriz Arellano Pimentel
Laboratorio de Microbiología de la
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM

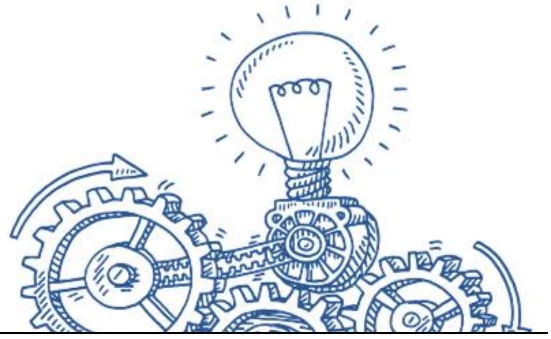
Queridos lectores, sabemos que las matemáticas están implícitas en el mundo que nos rodea, sin embargo muchas veces vemos las matemáticas como una disciplina árida y no vemos más allá, debido a que están inmersas en nuestra vida cotidiana y en lo profesional, por lo que te invito a echar un vistazo a este apasionante capitulo llamado "Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales Simultaneas", ya que, en este capítulo aprenderás como resolver paso a paso sistemas de ecuaciones lineales simultaneas a través de matrices, las cuales podrás aplicar, por ejemplo para realizar el balanceo de una reacción química determinada, representándola para ello como una ecuación química, ya que como recordaras "la materia no se crea ni se destruye, sino que solo se transforma" por lo que deberás encontrar el equilibrio entre los átomos de los reactivos y los átomos de los productos, y todo ello te servirá para resolver problemas de estequiometria y así puedas tu saber cuántos moles de algún compuesto tienes que hacer reaccionar con otro y saber quién actúa como reactivo limitante, para que así obtengas un determinado rendimiento en tus productos ya sea para sintetizar un principio activo o alguna otra molécula de interés.[1]

Además de esto y por si fuera poco, también aprenderás a resolver problemas sobre mezclas, aplicando los sistemas de ecuaciones lineales simultaneas, lo cual te será de gran utilidad en tu desempeño como futuro químico, ya que por mencionar un ejemplo, si deseas mezclar soluciones ácidas, partiendo de tres soluciones a diferentes concentraciones porcentuales de ácido, para así obtener una cierta cantidad o volumen de mezcla ácida a una determinada concentración porcentual, el aprender a analizar el problema, te ayudará a saber que lo puedes resolver aplicando el sistema de ecuaciones lineales simultaneas a través de matrices, lo cual te ayudará a determinar qué cantidad o volumen de cada una de las tres soluciones ácidas tendrás que mezclar, para así obtener tu solución final a una determinada concentración porcentual.[2,3,4] Así mismo otro ejemplo de aplicación es en el ámbito microbiológico, el cual también forma parte de tu formación profesional, tan es así, que si deseas mezclar soluciones de desinfectantes que según sus propiedades fisicoquímicas no den reacciones adversas (antagonismo), sino todo lo contrario, potencialicen su acción bactericida (sinergismo) y disminuya su efecto tóxico para el ser humano, entonces analizando el problema y aterrizándolo en un sistema de ecuaciones lineales simultaneas, lo puedas resolver mediante matrices para determinar el volumen de cada desinfectante a utilizar para realizar tu mezcla y una vez obtenida esta, realizar pruebas de susceptibilidad antimicrobiana, probando tu mezcla a diferentes concentraciones de cada uno de los desinfectantes para que puedas investigar cual es la mejor de ellas, utilizando para ello el método de difusión en placa muy similar al método de Kirby Bauer el cual es para determinar sensibilidad antimicrobiana a antibióticos o quimioterapéuticos específicos (antibiograma); Así, una vez obtenidas tus mezclas de desinfectantes las podrás probar contra cepas de bacterias conocidas (ATCC), por ejemplo: *Escherichia coli y Staphylococcus aureus,* para probar que tan susceptibles son estas bacterias al desinfectante que preparaste, teniendo en cuenta los mecanismos de acción de los desinfectantes involucrados con respecto a los microorganismos de prueba; así, una vez estandarizada tu mezcla de desinfectantes, se pueda utilizar para la desinfección de áreas de trabajo a nivel hospitalario, industrial, etc.[5]

Como puedes ver, ya para concluir, queda claro que las matemáticas nos ayudan a resolver diversas situaciones a las que nos enfrentamos en nuestra vida cotidiana y/o en nuestro quehacer profesional. Así que espero hayas disfrutado este capítulo "Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales Simultaneas".

Referencias

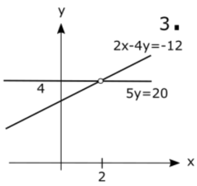
1. Chang R, Goldsby K. *Química*. 12° ed. México: Mc Graw- Hill/ Interamericana Editores;2017
2. Swokowski E, Cole J. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* 12° ed.México: Cengage Learning Editores; 2009
3. Barnett R, Zingler M, Byleen K. *Precálculo: Funciones y Graficas*. México: Mc Graw_ Hill/ Interamericana Editores; 2000
4. Aguilar Marquez A, Bravo Vazquez F, Gallegos Ruiz H, Ceron Villegas M, Reyes Figueroa R. *Pearson Matematicas Simplificadas.*3° ed. México: Pearson Educación de México; 2014
5. Madigan M, Martinko J, Parker J. *Brock Biología de los Microorganismos.* 8° ed. Madrid: Prentice Hall Iberia; 1999



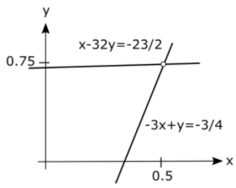
Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 8. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales simultaneas

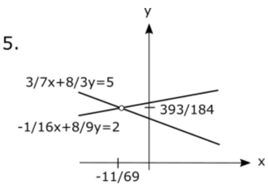
1.



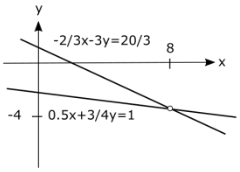
3.



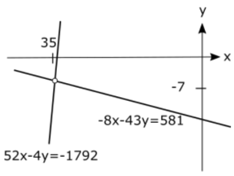
5.



7.



9.



11. $x = \frac{57}{31}$ $y = \frac{539}{124}$ **13**. $s = \frac{788}{449}$ $t = \frac{883}{449}$ $r = \frac{88}{449}$

15. $x = -\frac{39}{328}$ $y = \frac{2233}{1640}$ $z = \frac{633}{820}$ **17**. $a = 4$ $b = 7$ $c = 32$ $d = 9$

19. $a = 4$ $b = 6$ $c = 9$ $d = 23$

21. $x = 5$ $y = 1$ **23**. $s = \frac{31}{11}$ $t = \frac{6}{11}$ **25**. $x = 2$ $y = 1$ $z = 3$

27. $x = -1$ $y = 1$ $z = 1$ $w = -1$ **29**. $x = 1$ $y = 1$ $z = 1$ $w = -1$ **31**. $x = 4$ $y = 10$

33. $x = \frac{23}{5}$ $y = \frac{11}{5}$ **35**. $x = 4$ $y = 5$ $z = 8$ $w = 9$ **37**. $x = \frac{1}{2}$ $y = \frac{1}{8}$ $z = 9$ $w = 10$

39. $x = 4500$ $y = 5643$ $z = 3652$ $w = 821$ **41**. -9 **43**. 4 **54**. -21 **47**. $-\frac{1}{9}$

49. -71 **51**. $x = \frac{11}{2}$ $y = \frac{7}{2}$ **53**. $x = -\frac{10288}{119115}$ $y = \frac{4177}{119115}$

55. $x = \frac{950}{39}$ $y = \frac{460}{39}$ **57**. $s = \frac{41}{4}$ $t = -\frac{1}{2}$ **61**. $x = -\frac{1}{21}$ $y = -\frac{271}{588}$ $z = \frac{125}{196}$

63. $x = \frac{3433}{1804}, y = -\frac{1547}{1804}$ $z = \frac{313}{1804}$ **65**. $x = \frac{585}{17}, y = -\frac{23879}{969}$ $z = \frac{53519}{969}$

67. $x = \frac{214}{357}$ $y = -\frac{160}{119}$ $z = \frac{64}{17}$ **69**. $x = \frac{3949}{1521}$ $y = -\frac{4274}{4563}$ $z = \frac{8897}{4563}$ **71**. $x = 5$ $y = 10$ $z = 15$

73. $x = \frac{90144}{3335}$ $y = \frac{221728}{3335}$ $z = \frac{35648}{3335}$ **75**. $x = \frac{48922429}{8333820}$ $y = \frac{21499}{120780}$ $z = \frac{114251}{72468}$

77. $x = \frac{5}{4}$ $y = -\frac{85}{8}$ $z = \frac{111}{8}$ **79**. $x = 4$ $y = 5$ $z = 8$

9

Resolución de la ecuación Cuadrática

LO QUE APRENDERÁS. . .

9.1 Función cuadrática

El matemático Francés François Viète escribió lo siguiente:

"B in A quadratum, plus D plano in A, aequari Z sólido", cuyo significado es:

$$BA^2 + D^2A = Z^3$$

Que corresponde a:

$$ax^2 + b^2x = m^3$$

Que hoy se escribe como:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Representando así todas las ecuaciones de segundo grado, en la caricatura se representa esta expresión como algo básico, hasta en la carnicería se puede encontrar, haciendo referencia que hasta el chicharronero la conoce.

Definición

Una ecuación de segundo grado, es de la forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

Donde: a, b, c Son números reales, con $a \neq 0$

Además los términos son llamados como:

$\boldsymbol{ax^2}$ Término cuadrático.
$\boldsymbol{bx}$ Término lineal.
$\boldsymbol{c}$ Término independiente.

Los métodos para resolver la ecuación cuadrática son dos: el gráfico y el analítico (factorización, completar cuadrado y fórmula general).

9.2 Método gráfico

La representación de la ecuación de segundo grado en el plano cartesiano esboza una **parábola** (ver Figura 9.1) que puede abrir hacia abajo o hacia arriba. Una vez que se da solución a la ecuación lo que puede ocurrir en la gráfica es:

- La parábola intersecta al eje x en **dos puntos**.
- La parábola intersecta al eje x en **un punto**.
- La parábola **no intersecta** al eje x.

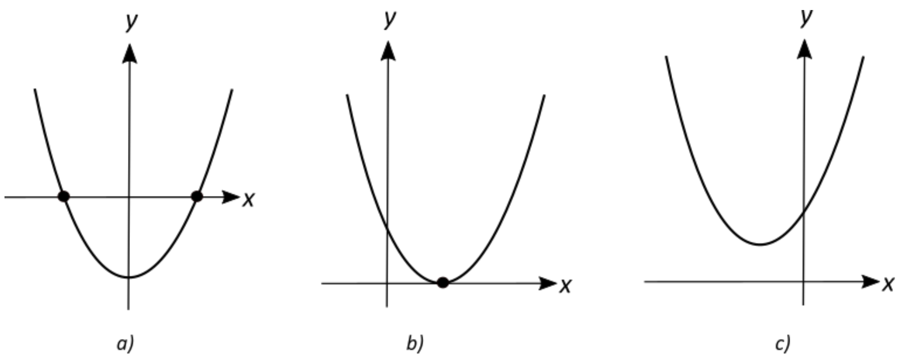


Figura 9.1 Intersección con el eje x, de una ecuación cuadrática. *a) Dos puntos de intersección, b) Un punto de intersección y c) Sin intersección*.

Si la parábola abre hacia arriba se tendrá un mínimo y si abre hacia abajo se tendrá un máximo. Ese punto se llama **vértice** de la parábola (ver Figura 9.2), la abscisa de este vértice se obtiene con la siguiente expresión:

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

El valor encontrado (x_V) se sustituye en la ecuación cuadrática para obtener y_V, este par ordenado (x_V, y_V) se localiza en el plano cartesiano y verticalmente se tiene un eje de simetría.

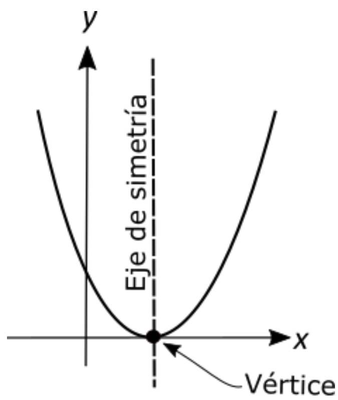


Figura 9.2 Eje de simetría de una parábola.

Por lo tanto conociendo las coordenadas del vértice; sólo se dan dos valores (uno hacia la derecha y otro hacia la izquierda) para localizar los puntos y bosquejar la parábola.

Ejemplo 1

Calcule los vértices de las parábolas y haga un bosquejo de las gráficas:

$a)\ \ y = x^2 + 6x + 8$ $\qquad b)\ \ y = x^2 - 4x + 4$ $\qquad c)\ \ y = x^2 + 4x + 6$

Solución a)

Para el inciso $a)\ \ y = x^2 + 6x + 8$

Primero se obtiene el vértice

$$x_V = -\frac{6}{2(1)} = -3$$

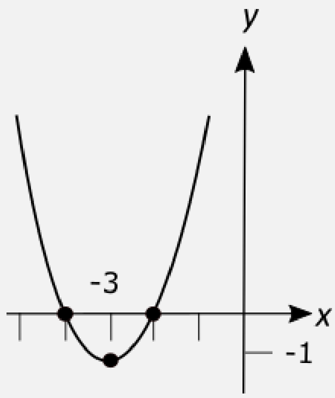
Con esto se obtiene el valor de y.

$$y_V = (-3)^2 + 6(-3) + 8 = -1$$

El par ordenado del vértice es: $(\mathbf{-3}, \mathbf{-1})$

Los puntos a escoger para tabular serán:

x	y
-4	0
-3	-1
-2	0



La parábola intersecta en dos puntos el eje de la x, por tanto existen dos soluciones reales:

$x_1 = -4 \quad x_2 = -2$

Solución b)

Primero se obtiene el vértice

$$x_V = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

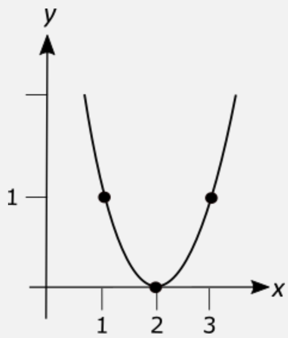
Con esto se obtiene el valor de y.

$$y_V = (2)^2 - 4(2) + 4 = 0$$

El par ordenado del vértice es: $(\mathbf{2}, \mathbf{0})$

Los puntos a escoger para tabular serán:

x	y
1	1
2	0
3	1



La parábola sólo intersecta en un punto, este se encuentra en $x = 2$, la solución real de la ecuación cuadrática es $x_1 = 1$

Solución c)

Primero se obtiene el vértice

$x_V = -\frac{4}{2(1)} = -2$

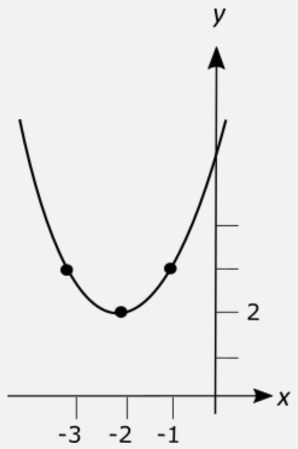
Con esto se obtiene el valor de y.

$y_V = (-2)^2 + 4(-2) + 6 = 2$

El par ordenado del vértice es: $(\mathbf{-2}, \mathbf{2})$

Los puntos a escoger para tabular serán:

x	y
-3	3
-2	2
-1	3



La parábola no intersecta el eje de la x, por tanto no tiene solución real.

Ejercicios de refuerzo 9.1

Encuentre los vértices y haga un bosquejo de las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 + 4x + 3 = 0$
2. $x^2 - 6x + 8 = 0$
3. $x^2 - 2x + 1 = 0$
4. $x^2 + 12x + 35 = 0$
5. $x^2 + 10x + 24 = 0$
6. $x^2 - 8x + 16 = 0$
7. $x^2 - 6x + 9 = 0$
8. $x^2 + 6x + 10 = 0$
9. $x^2 + 14x + 45 = 0$
10. $x^2 - 2x - 15 = 0$
11. $x^2 - 4x - 4 = 0$
12. $x^2 + 10x + 24 = 0$
13. $x^2 + 6x + 5 = 0$
14. $x^2 - 2x - 3 = 0$
15. $x^2 - 8x + 16 = 0$

9.3 Resolución por factorización

Una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ cuando es factorizable se puede expresar como el **producto de dos factores lineales igualados a cero** (la solución de la ecuación se obtiene igualando cada factor a cero). Las ecuaciones cuadráticas pueden ser factorizadas según sea la forma que presente (Figura 9.3):

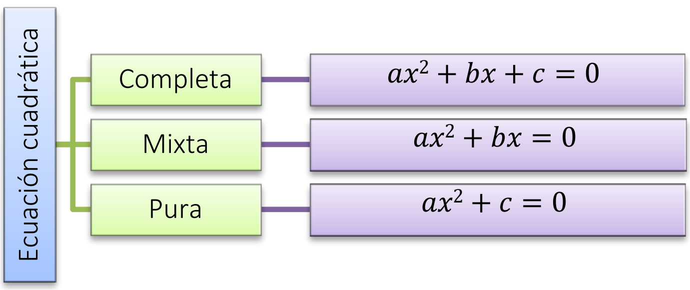


Figura 9.3 Representaciones de una ecuación cuadrática.

La factorización para una **ecuación cuadrática pura** es la más sencilla, sólo basta con despejar la incógnita y aplicar raíz.

Ejemplo 2

Factorice la siguiente ecuación cuadrática: $4x^2 - 5 = 0$

Solución

Primero se despeja la incógnita.

$$4x^2 = 5 \qquad\qquad x^2 = \frac{5}{4}$$

Se factoriza y se obtiene:

$$\left(x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

La factorización para una **ecuación cuadrática mixta** también es fácil, sólo basta con factorizar a la incógnita, por ende una raíz es cero.

Ejemplo 3

Factorice la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 - 8x = 0$

Solución

Primero se factoriza la incógnita.

$$x(x - 8) = 0$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 8$$

La factorización para una **ecuación cuadrática completa** se hace considerando si éste es un Trinomio Cuadrado No Perfecto o si es un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Definición

Un trinomio cuadrado no perfecto representado como una ecuación cuadrática completa ($ax^2 + bx + c = 0$) se puede expresar como el producto de dos binomios; para ello se buscan: **dos números cuyo producto sea el valor de c y cuya suma sea el valor de b**.

Recuerde que se puede deducir que es un trinomio cuadrado no perfecto si no cumple la regla:

$$(\boldsymbol{ax \pm b})^2 = \boldsymbol{x^2 \pm 2abx + b^2}$$

Ejemplo 4

Resuelva la siguiente ecuación de segundo grado, utilizando el método de factorización:

$a)$ $2x^2 - 7x + 6 = 0$

$b)$ $x^2 - 5x - 36 = 0$

$c)$ $x^2 + 10x + 25 = 0$

Solución a)

Se identifica que se trata de un trinomio cuadrado no perfecto, se divide entre 2 toda la ecuación, quedando:

$$x^2 - \frac{7}{2}x + 3 = 0$$

Ahora buscan dos números cuyo producto es 3 y cuya suma sea $-7/2$; los números que cumplen estas reglas son $\boldsymbol{-3/2}$ y $\boldsymbol{-2}$, entonces:

$$x^2 - \frac{7}{2}x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 2)$$

Igualando a cero cada binomio se tiene:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$(x - 2) = 0$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{3}{2}} \qquad \boldsymbol{x_2 = 2}$$

Solución b)

Como no es trinomio cuadrado perfecto, se buscan dos números cuyo producto es -36 y cuya suma sea -5; los números que cumplen estas guías son $\mathbf{-9}$ y $\mathbf{4}$, entonces:

$$x^2 - 5x - 36 = (x - 9)(x + 4)$$

Igualando a cero cada binomio se tiene:

$$(x - 9) = 0$$

$$(x + 4) = 0$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es:

$$\boldsymbol{x_1 = 9} \qquad \boldsymbol{x_2 = -4}$$

Solución c)

Este resulta ser un trinomio cuadrado perfecto, se buscan dos números cuyo producto es 25 y cuya suma sea 10; los números que cumplen estos requerimientos son $\mathbf{5}$ y $\mathbf{5}$, entonces:

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)(x + 5)$$

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

Igualando a cero el binomio se tiene:

$$(x + 5) = 0$$

Por lo tanto la única solución de la ecuación es: $\boldsymbol{x_1 = -5}$

Ejercicios de refuerzo 9.2

Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado por el método de factorización.

16. $x^2 + 2x - 3 = 0$
17. $x^2 - 4x - 5 = 0$
18. $x^2 + 4x - 21 = 0$
19. $x^2 - 2x - 35 = 0$
20. $x^2 - 5x - 14 = 0$
21. $x^2 + 3x - 4 = 0$
22. $x^2 - 36 = 0$
23. $x^2 - 8x = 0$
24. $2x^2 - 6x - 80 = 0$
25. $x^2 - 17x + 60 = 0$
26. $x^2 - 14x + 49 = 0$
27. $x^2 + 2x - 99 = 0$
28. $x^2 + x - 110 = 0$
29. $9x^2 + 24x + 16 = 0$
30. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
31. $\frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{45}{2} = 0$
32. $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$

La factorización para una **ecuación cuadrática completa** también puede expresarse como un **trinomio cuadrado perfecto** si no lo es, y por tanto se puede factorizar. El procedimiento para completar el trinomio cuadrado perfecto de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, es:

Definición

Procedimiento para completar un trinomio cuadrado perfecto.

- La ecuación debe escribirse de la forma: $ax^2 + bx = c$.
- Se suman en ambos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad del término lineal.
- Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto y se obtiene la raíz cuadrada (resultarán dos valores el positivo y el negativo).
- Se separa el doble signo y se obtienen dos ecuaciones de primer grado, que al resolverla se tiene la solución de la ecuación.

Ejemplo 5

Resuelva la siguiente ecuación cuadrática utilizando el método de completar el trinomio cuadrado perfecto:

$a)\ x^2 - 18x + 72 = 0$ $\qquad b)\ \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 = 0$

Solución a)

Primero se expresa de la forma: $ax^2 + bx = c$.

$$x^2 - 18x = -72$$

Se obtiene la mitad de 18 (sin importar el signo) y se eleva al cuadrado, el resultado es 81. Se suma en ambos miembros 81, para obtener:

$$x^2 - 18x + 81 = -72 + 81$$

$$x^2 - 18x + 81 = 9$$

Se factoriza

$$(x - 9)^2 = 9$$

Se extrae raíz cuadrada

$$x - 9 = \pm 3$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es: $\boldsymbol{x_1 = 12}$ $\qquad \boldsymbol{x_2 = 6}$

Solución b)

Primero se multiplica la ecuación por 2 para quitar la fracción del término cuadrático, quedando:

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Se expresa la ecuación cuadrática de la forma: $ax^2 + bx = c$.

$$x^2 - 8x = -12$$

Se obtiene la mitad de 8 y se eleva al cuadrado, el resultado es 16. Se suma en ambos miembros 16, para obtener:

$$x^2 - 8x + 16 = -12 + 16$$

$$x^2 - 8x + 16 = 4$$

Se factoriza.

$$(x-4)^2 = 4$$

Se extrae la raíz cuadrada.

$$x - 4 = \pm 2$$

Se separan los signos:

$$x - 4 = 2$$

$$x - 4 = -2$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es: $\boldsymbol{x_1 = 6}$ $\boldsymbol{x_2 = 2}$

Ejercicios de refuerzo 9.3

Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado por el método de completar el cuadrado perfecto.

33. $x^2 + 10x + 21 = 0$	38. $x^2 + 12x + 36 = 0$	43. $x^2 - 16x + 64 = 0$
34. $x^2 - 4x - 5 = 0$	39. $x^2 + 3x - 70 = 0$	44. $x^2 - 2x - 15 = 0$
35. $x^2 - 2x - 8 = 0$	40. $x^2 + 6x - 7 = 0$	45. $x^2 - 18x + 72 = 0$
36. $x^2 - 8x + 12 = 0$	41. $x^2 + 22x + 120 = 0$	46. $x^2 - 16x + 55 = 0$
37. $x^2 + 14x + 45 = 0$	42. $x^2 - 8x - 65 = 0$	

9.4 Reducción de igualdad a una ecuación cuadrática

Una reducción de igualdad cuadrática se logra realizando un **cambio de variable** y establecer si la nueva ecuación ahora es un trinomio cuadrado no perfecto o si es perfecto.

Ejemplo 6

Resuelva la siguiente igualdad reduciéndola a una ecuación cuadrática:

$a)\ x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ $\qquad$ $b)\ x^{2/3} + 5x^{1/3} + 6 = 0$

Solución a)

Primero se expresa la potencia cuartica a cuadrada y la cuadrada a lineal, de la siguiente manera:

$$(x^2)^2 - 13(x^2) + 36 = 0$$

El cambio de variable será para $w = x^2$, quedando:

$$w^2 - 13w + 36 = 0$$

Se resuelve el trinomio cuadrado no perfecto, se buscan dos números cuyo producto es 36 y cuya suma sea -13; los números que cumplen estas reglas son $-\mathbf{9}$ y $-\mathbf{4}$, entonces:

$$w^2 - 13w + 36 = (w-9)(w-4)$$

Igualando a cero cada binomio se tiene:

$$(w-9) = 0$$

$$(w-4) = 0$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es:

$$\boldsymbol{w_1 = 9}$$

$$\boldsymbol{w_2 = 4}$$

Ahora se regresa a la variable original.

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = 4$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es:

$$\boldsymbol{x_1 = \pm 3}$$

$$\boldsymbol{x_2 = \pm 2}$$

Solución b)

Se expresa la potencia fraccionaria $2/3$ a cuadrada y $1/3$ a lineal, de la siguiente manera:

$$(x^{1/3})^2 + 5(x^{1/3}) + 6 = 0$$

El cambio de variable será para $w = x^{1/3}$, quedando:

$$w^2 + 5w + 6 = 0$$

Se resuelve el trinomio cuadrado no perfecto, se buscan dos números cuyo producto se 6 y cuya suma sea 5; los números que cumplen estas reglas son $\mathbf{2}$ y $\mathbf{3}$, entonces:

$$w^2 + 5w + 6 = (w+2)(w+3)$$

Igualando a cero cada binomio se tiene:

$$(w+2) = 0$$

$$(w+3) = 0$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es:

$$\boldsymbol{w_1 = -2}$$

$$\boldsymbol{w_2 = -3}$$

Ahora se regresa a la variable original.

$$x^{1/3} = -2$$

$$x^{1/3} = -3$$

Se eleva al cubo cada variable para obtener la solución:

$$x_1 = (-2)^3 \qquad \boldsymbol{x_1 = -8}$$

$$x_2 = (-3)^3 \qquad \boldsymbol{x_2 = -27}$$

Ejercicios de refuerzo 9.4

Reduzca y resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado.

47. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
48. $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$
49. $9x^4 + 481x^2 - 10000 = 0$
50. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$
51. $x^4 + 5x^3 - 36 = 0$
52. $x^4 - 4x^2 + 5 = 0$
53. $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$
54. $x^8 - 7x^4 + 12 = 0$

9.5 Deducción de la fórmula general

Se parte de la expresión general de una ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se despeja el término constante y divide entre la constante a.

$$\frac{ax^2 + bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Se completa el cuadrado:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se factoriza el lado izquierdo de la igualdad.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se aplica raíz, en ambos miembros de la ecuación.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Ahora se usan las propiedades de los radicales:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

Se despeja a la variable.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se homologa el denominador común.

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Existe otra forma de deducir la fórmula general que se presenta a continuación:

Se parte de la expresión general de una ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se despeja el término constante y se multiplica por a.

$$a^2x^2 + abx = -ac$$

Se suma en ambos lados de la ecuación $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - ac$$

Se multiplica la ecuación por 4.

$$4a^2x^2 + 4bx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Se factoriza.

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Se aplica la raíz.

$$2ax + b^2 = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Finalmente se despeja a la x.

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Recuerde que esta fórmula solo se trabaja con los coeficientes numéricos, nunca con las variables.

Definición

Al radicando $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$, se le conoce como **discriminante,** por lo que:

- Si el discriminante es **mayor a cero**, la ecuación tiene **dos raíces reales**.
- Si el discriminante es **igual a cero**, la ecuación tiene **una raíz real.**
- Si el discriminante es **menor a cero**, la ecuación **no tiene raíces reales.**

Ejemplo 7

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado, utilizando la fórmula general:

$a)\ x^2 + 4x - 12 = 0$ $\qquad$ $b)\ 12x^2 - 13x + 3 = 0$

Los términos a sustituir en la formula general son:

Solución a)

$$a = 1 \qquad b = 4 \qquad c = -12$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+8}{2} \\ x_2 = \dfrac{-4-8}{2} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \boldsymbol{x_1 = 2} \\ \boldsymbol{x_2 = -6} \end{matrix}$$

Solución b)

$$a = 12 \qquad b = -13 \qquad c = 3$$

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(12)(3)}}{2(12)}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{24}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{13+5}{24} \\ x_2 = \dfrac{13-5}{24} \end{cases} \qquad \begin{matrix} \boldsymbol{x_1 = \dfrac{3}{4}} \\ \boldsymbol{x_2 = \dfrac{1}{3}} \end{matrix}$$

Ejercicios de refuerzo 9.5

Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado utilizando la fórmula general.

55. $x^2 + 2x - 3 = 0$
56. $x^2 - 5x - 14 = 0$
57. $x^2 + 5x + 4 = 0$
58. $x^2 + 9x - 10 = 0$
59. $2x^2 - x - 1 = 0$
60. $3x^2 - 13x - 10 = 0$
61. $6x^2 - 5x + 1 = 0$
62. $25x^2 - 30x + 9 = 0$
63. $4x^2 + 21x - 18 = 0$
64. $10x^2 + 7x - 12 = 0$
65. $16x^2 - 24x + 9 = 0$
66. $6x^2 + x - 2 = 0$
67. $6x^2 + 13x - 5 = 0$
68. $12x^2 + 5x - 2 = 0$
69. $6x^2 - 5x + 1 = 0$
70. $x^2 - 21x + 108 = 0$

Un modelo cuadrático para crecimiento microbiano

Escrito por: Pablo Flores Jacinto
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM
pabloflores100@gmail.com

Los microorganismos son conquistadores del universo, se encuentran en cualquier rincón de nuestro planeta, no es extraño que nuestro cuerpo sea colonizado al exterior e interior, tan solo en el tracto gastrointestinal coexisten, en un delicado equilibrio entre 500 y 1000 diferentes especies [1].

Presentan ciertas características como: poseen la mayor diversidad genética y metabólica de los seres vivos aunada a su rápido crecimiento y su habilidad de intercambiar los genes logran adaptarse a cualquier ambiente, que les confiere un enorme potencial biotecnológico [2].

Los microorganismos son los responsables de la descomposición de la materia orgánica y del ciclaje de nutrientes (carbono, nitrógeno, fosforo, azufre, etc.). Su potencial ha sido aprovechado en la industria biotecnológica; se han producido grandes cantidades de penicilina sintetizada por hongos; bacterias como *Lactobacillus* son utilizadas para el enriquecimiento de vitamina B12 en el yogourt, la levadura *Sacchromyces cerevisiae* (Figura 1) se emplea para la producción de vino, tequila y cerveza. Además otras numerosas especies de los géneros *Candida, Kloeckera, Picha* y *Bacillus*, participan en la fermentación de bebidas de origen indígenas como aguamiel, pulque, tepache, colonche, tesgüino (cerveza de maíz) y de alimentos como el pozol [3].

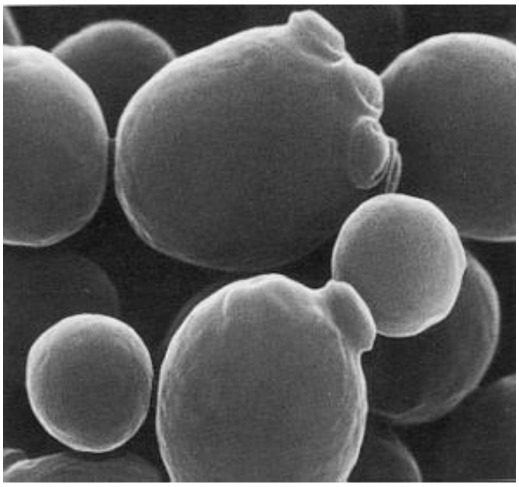


Figura 1. Levadura de *Sacchromyces cerevisiae. Fuente: Wordpress.com*

Los diferentes efectos benéficos por parte de los microorganismos al hombre, obligan a conocer a fondo los mecanismos biológicos de multiplicación. Por ejemplo se puede establecer la siguiente reacción [4]:

$$Hexosa + Lev. \rightarrow EtOH + CO_2 + Lev. + \Delta$$

Esta es una reacción de fermentación que no es más que un proceso (en ausencia de oxigeno) en el que los microorganismos descomponen los azucares para producir bióxido de carbono, nueva levadura, etanol (llamada fermentación alcohólica) o ácido láctico (fermentación láctica). Estas reacciones se desarrollan en fermentadores los cuales son reactores en donde se logra el crecimiento exponencial de los microorganismos, el diseño de estos se basa en los modelos matemáticos que sirven para simular el crecimiento microbiano.

Algunos modelos de crecimiento microbiano son: **Ecuación logística,** que describe el comportamiento de la biomasa en distintos procesos de la fermentación; **Modelo de Monod**, desarrollado en 1942, que describe la relación entre el crecimiento microbiano y el sustrato que limita el crecimiento sin ningún tipo de proceso de inhibición durante la fermentación; **Modelo de Moser**; es una modificación de Monod y considera el efecto de la propagación de especies mutantes en la población bacteriana y **Modelo de Haldane**, es utilizado para sistemas discontinuos y estudia la capacidad de adaptación de microorganismos al medio [5].

El modelo matemático más sencillo es el Haldane la solución de la ecuación tiene forma cuadrática. Planteado la ecuación en función de la concentración del Sustrato S se tiene:

$$KS^2 + S\left(1 - \frac{\mu_{max}}{\mu}\right) + K_m = 0$$

Donde:

K Constante de inhibición.
K_m Constante cinética de velocidad.
S Concentración de Sustrato (g/ml).
μ Velocidad de crecimiento especifica (h^{-1}).
μ_{max} Velocidad de crecimiento máxima (h^{-1}).

Recordemos la solución de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La solución cuadrática de la ecuación de Haldane es:

$$S = \frac{-\left(1 - \frac{\mu_{max}}{\mu}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\mu_{max}}{\mu}\right)^2 - 4KK_m}}{2K}$$

La función que está dentro del radical se define como discriminante dado por:

$$\Delta = \left(1 - \frac{\mu_{max}}{\mu}\right) - 4KK_m$$

Esta última ecuación tiene las siguientes posibilidades:

$\Delta > 0$ Se tiene dos raíces positivas que tienen significado físico.

$\Delta < 0$ Las raíces no tienen significado físico.

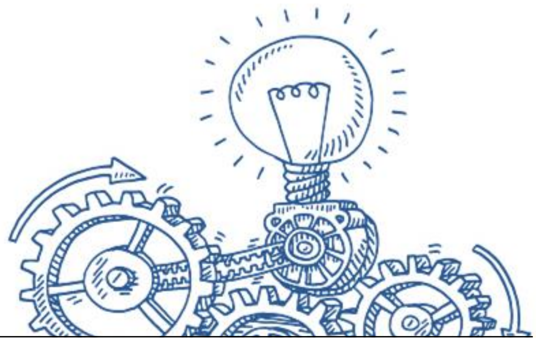
$\Delta = 0$ Existe una única solución que corresponde a la velocidad máxima de dilución [6].

Este discriminante proporciona información valiosa para el diseño de los fermentadores aunque existen otros criterios importantes como: el consumo de energía, temperatura, pH agitación, etc.

El aprovechamiento de los microorganismos ha sido posible gracias al diseño óptimo de los fermentadores, cuyas aplicaciones van desde la industria farmacéutica, la biofarmacéutica, la agricultura, la alimenticia, hasta la biorremediación de suelos contaminados. Se puede visualizar a los microorganismos como un recurso que debe de utilizarse para nuestro beneficio. Tal es la importancia de éstos que en nuestro país existe el Subsistema Nacional de Recursos Genéticos Microbianos (SUBNARGEM) cuyo objetivo es definir las estrategias para promover el conocimiento, manejo y aplicación de los recursos genéticos microbianos.

Referencias

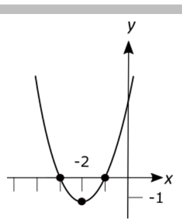
1. Del Coco, Valeria F., Los microorganismos desde una perspectiva de los beneficios para la salud Revista Argentina de Microbiología, vol. 47, núm. 3, 2015, pp. 171-173 Asociación Argentina de Microbiología Buenos Aires, Argentina.
2. Oliart-Ros, Rosa María; Manresa-Presas, Ángeles; Sánchez-Otero, María Guadalupe Utilización de microorganismos de ambientes extremos y sus productos en el desarrollo biotecnológico CienciaUAT, vol. 11, núm. 1, julio-diciembre, 2016, pp. 79-90, Universidad Autónoma de Tamaulipas Ciudad Victoria, México.
3. Montaño Arias, Noé Manuel; Sandoval Pérez, Ana Lidia; Camargo Ricalde, Sara Lucía; Sánchez Yáñez, Juan Manuel, Los microorganismos: pequeños gigantes Elementos: Ciencia y cultura, Vol. 17, Núm. 77, febrero-abril, 2010, pp. 15-23, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla México.
4. Suárez-Machín, Caridad; Garrido-Carralero, Norge Antonio; Guevara-Rodríguez, Carmen Amarilys Levadura Saccharomyces cerevisiae y la producción de alcohol. Revisión bibliográfica ICIDCA. Sobre los Derivados de la Caña de Azúcar, vol. 50, núm. 1, enero-abril, 2016, pp. 20-28 Instituto Cubano de Investigaciones de los Derivados de la Caña de Azúcar Ciudad de La Habana, Cuba.
5. Calderón Vargas Juan Fernando, Ajuste de un modelo cinético para el crecimiento de *lactobacillus acidophilus* en la fermentación de un sustrato complejo, 2017, pp. 1-78, Fundación Universidad de América, Facultad de Ingenierías, Departamento de Ingeniería Química Bogotá, Colombia.
6. Trejo, Víctor Manuel; Fontalvo Alzate, Javier; Gómez Garcia, Miguel Ángel, Descripción matemática y análisis de estabilidad de procesos fermentativos, Dyna, vol. 76, núm. 158, junio, 2009, pp. 111-121 Universidad Nacional de Colombia Medellín, Colombia.



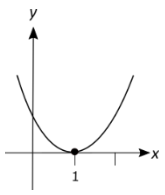
Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 9. Resolución de la ecuación cuadrática

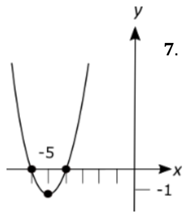
1.



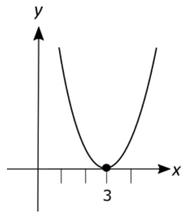
3.



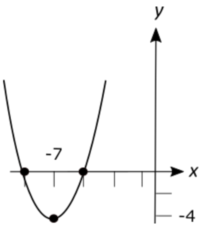
5.



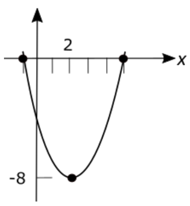
7.



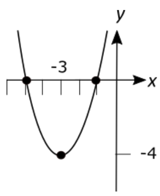
9.



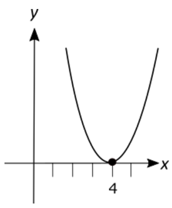
11.



13.



15.



17. $(x+1)(x-5)$ **19.** $(x+5)(x-7)$ **21.** $(x+4)(x-1)$ **23.** $x(x-8)$ **25.** $(x-5)(x-12)$ **27.** $(x+11)(x-9)$

29. $(3x+4)^2$ **31.** $(x+5)(x+9)$ **33.** $(x+3)(x+7)$ **35.** $(x+2)(x-4)$ **37.** $(x+5)(x+9)$ **39.** $(x-7)(x+10)$

41. $(x+10)(x+12)$ **43.** $(x-8)^2$ **45.** $(x-11)(x-5)$ **47.** $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

49. $(x+4)(x-4)\left(x+\frac{25}{3}\right)\left(x-\frac{25}{3}\right)$ **51.** $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$ **53.** $(x+1)(x-1)\left(x+\sqrt{7}\right)x-\left(x-\sqrt{7}\right)$

55. $(x-1)(x+3)$ **57.** $(x+1)(x+4)$ **59.** $(2x+1)(x-1)$ **61.** $(3x-1)(2x-1)$ **63.** $(4x-3)(x+6)$

65. $(4x-3)^2$ **67.** $(3x-1)(2x+5)$ **69.** $(3x-1)(2x-1)$

10

Métodos de Factorización

LO QUE APRENDERÁS. . .

10.1 Factor común.
10.2 Factorización por agrupación de términos.
10.3 Diferencia de cuadros perfectos.
10.4 Diferencia y suma de cubos.
10.5 Factorización de un trinomio cuadrado por ensayo y error.
10.6 Factorización de un trinomio cuadrático por fórmula general.
10.7 Complementación del trinomio cuadrado perfecto.
10.8 Factorización de polinomios utilizando división sintética.

10.1 Factor común

La factorización se puede considerar como una operación inversa a la multiplicación, que tiene como propósito encontrar el factor de un producto dado. Es decir **encontrar dos o más factores cuyos productos se igualan a la expresión presentada**.

Cuando se escribe una expresión factorizada se hace como un producto de un solo factor o varios, en la caricatura presentada se solicita una torta con factor común ¿Qué le prepararan al comensal?

El factor común se puede hallar por simple inspección, sólo se tiene que encontrar un número, monomio o binomio común.

FACTOR COMÚN MONOMIO

Para encontrar el factor común de un polinomio, se debe de encontrar un monomio frecuente. Cada término del polinomio debe de ser divisible entre dicho monomio, a este monomio se le llama factor común. El polinomio se factoriza, representando el monomio multiplicado por el resultado de la división del polinomio entre el factor común.

Ejemplo 1

Factorice los siguientes polinomios.

$a)\quad ax + ay + az = \boldsymbol{a(x + y + z)}$

$b)\quad 6x^3y + 3x^2y^2 = \boldsymbol{3x^2y(2x + y)}$

$c)\quad 8m^4n^2 + 4m^5n - 24m^2n^3 = \boldsymbol{4m^2n(2m^2n + m^3 - 6n^2)}$

$d)\quad 18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2 = \boldsymbol{18my^2(x - 3mx^2 + 2)}$

Ejercicios de refuerzo 10.1

Factorice las siguientes expresiones.

1. $a^2 + ab$
2. $4a^3 - a^2$
3. $ab - ac$
4. $x^2y + x^2z$
5. $15y^3 + 20y^2 - 5y$
6. $\frac{3}{5}x^4 - \frac{6}{5}x^3 + \frac{9}{5}$
7. $9x^2 - 12xy + 15x^3y^2 - 24xy^3$
8. $m^3n^2p^4 + m^4n^3p^5 + m^6n^4p^4 + m^2n^4p^3$
9. $93a^3x^2y - 62a^2x^3y^2 - 124a^2x$
10. $\frac{4}{35}x^2y - \frac{12}{5}xy + \frac{8}{15}x^2y^3 - \frac{16}{25}x^3y$

FACTOR COMÚN POLINOMIO

El factor común polinomio también se obtiene por inspección y los factores que se multiplican con éste son la suma de los términos no comunes. Por ejemplo sea el polinomio:

$$x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$$

Ejemplo 2

Factorice los siguientes polinomios.

$a)$ $2x(a+1)-y(a+1)=\boldsymbol{(a+1)(2x-y)}$

$b)$ $w(x-2)+3(x-2)=\boldsymbol{(x-2)(w+3)}$

$c)$ $a(x+y-1)-2b(x+y-1)=\boldsymbol{(x+y+1)(a-2b)}$

$d)$ $(x+2)(x-1)-(x-1)(x-3)=(x-1)[(x+2)-(x-3)]$

$$=(x-1)[x+2-x+3]=\boldsymbol{5(x-1)}$$

Ejercicios de refuerzo 10.2

Factorice los polinomios.

11. $x(a+1)-3(a+1)$
12. $2(x-1)+y(x-1)$
13. $x(a+q)-a-q$
14. $x(2a+b+c)-2a-b-c$
15. $(x+y)(n+1)-3(n+1)$
16. $3x(x-2)-2y(x-2)$
17. $(x+1)(x-1)-2(x-1)$
18. $(2x+3)(3-y)-(2x-5)(3-y)$
19. $m(2x+b)+p(2x+b)$
20. $3x^2y+6xy-5x^3y^2+8x^2ya+4xy^2m$
21. $(a+b-c)(x-3)-(c-b-a)(x-3)$
22. $(1+3a)(x+1)-2a(x+1)+3(x+1)$
23. $(3x+2)(x+y+z)-(1-3x)(x+y+z)$

10.2 Factorización por agrupación de términos

En ocasiones es posible agrupar los términos de un polinomio con el objetivo de que tenga un factor común, entonces el método de factores comunes se aplica. Por ejemplo sea el polinomio $ax + bx - ay - by$, en los dos primeros términos el factor comun es “x” y en el tercer y cuarto término el factor común es “y”, por lo tanto se agrupa de la siguiente manera:

$$(ax + bx) - (ay - by)$$

Lo que prosigue es obtener a cada miembro agrupado un factor común:

$$x(a + b) - y(a + b) = \boldsymbol{(a + b)(x - y)}$$

Ejemplo 3

Factorice los siguientes polinomios por agrupación de términos.

$a)$ $$\begin{aligned} 2x^2 + 10x - xy - 5y &= (2x^2 + 10x) - (xy + 5y) \\ &= 2x(x + 5) - y(x + 5) \\ &= \boldsymbol{(x + 5)(2x - y)} \end{aligned}$$

$b)$ $$\begin{aligned} 3x^2 - 6xy + 4x - 8y &= (3x^2 - 6xy) + (4x - 8y) \\ &= 3x(x - 2y) + 4(x - 2y) \\ &= \boldsymbol{(x - 2y)(3x + 4)} \end{aligned}$$

$c)$ $ax - ay + az + x - y + z$
$$\begin{aligned} &= (ax - ay + az) + (x - y + z) \\ &= a(x - y + z) + (x - y + z) \\ &= \boldsymbol{(x - y + z)(a + 1)} \end{aligned}$$

$d)$ $a^2x - ax^2 - 2a^2y + 2axy + x^3 - 2x^2y$
$$\begin{aligned} &= (a^2x - 2a^2y) - (ax^2 - 2axy) + (x^3 - 2x^2y) \\ &= a^2(x - 2y) - xa(x - 2y) + x^2(x - 2y) \\ &= \boldsymbol{(x - 2y)(a^2 - ax + x^2)} \end{aligned}$$

Ejercicios de refuerzo 10.3

Realice la factorización por agrupación de términos.

24. $a^2 + ab + ax + bx$
25. $ax - bx + ay - by$
26. $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$
27. $-3m - 2n + 2nx^4 + 3mx^4$
28. $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$
29. $6ax + 3a^2 + a + 2x$
30. $6m - 9n + 21nx - 14mx$
31. $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$
32. $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$
33. $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$
34. $1 + a + 3ab + 3b$
35. $4am^3 - 12amn - m^2 + 3n$
36. $20ax - 5bx - 2by + 8ay$
37. $3a^2 - 7b^2x + 3ax - 7ab^2$
38. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$
39. $a^3 + a + a^2 + 1 + y^2 + ay^2$
40. $3x^3 - 3x^2y + 9xy^2 - x^2 + xy - 3y$
41. $3x^3 + 2axy + 2ay^2 - 3xy^2 - 2ax^2 - 3x^2y$
42. $2x^3 - nx^2 + 2xz^2 - nz^2 - 3ny^2 + 6xy^2$
43. $\frac{15}{4}x^2 - \frac{21}{4}xz - \frac{10}{3}xy + \frac{14}{3}yz + 5x - 7z$
44. $\frac{2}{3}am - \frac{8}{3}an - \frac{4}{5}bm + \frac{16}{5}bn$

10.3 Diferencia de cuadrados perfectos

La diferencia de cuadrados perfectos es un binomio que tiene raíz cuadrada en cada miembro, recuerde que es la forma recíproca del producto de los binomios conjugados.

Definición

Diferencia de cuadrados.
Se extrae la raíz cuadrada del minuendo y del sustraendo y se multiplica la suma y resta de éstos.

$$(\boldsymbol{a^2 - b^2}) = (\boldsymbol{a + b})(\boldsymbol{a - b})$$

Ejemplo 4

Factorice los siguientes binomios.

$a)$ $4 - x^2 = \boldsymbol{(2 + x)(2 - x)}$

$b)$ $36x^2 - 25y^4 = \boldsymbol{(6x + 5y^2)(6x - 5y^2)}$

$c)$ $49x^2y^6z^{10} - a^{12} = \boldsymbol{(7xy^3z^5 + a^6)(7xy^3z^5 - a^6)}$

$d)$ $x^{2n} - 9y^{4m} = \boldsymbol{(x^n + 3y^{2m})(x^n - 3y^{2m})}$

$e)$ $\frac{1}{4} - 9a^2 = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2} + 3a\right)\left(\frac{1}{2} - 3a\right)}$

Ejercicios de refuerzo 10.4

Realice la factorización por agrupación de términos.

45. $x^2 - y^2$
46. $a^2 - 4$
47. $9 - b^2$
48. $16 - n^4$
49. $4x^2 - 81z^6$
50. $a^2b^8 - c^2$
51. $100 - x^2y^2$
52. $a^{10} - 49b^{12}$
53. $25x^2y^4 - 121$
54. $a^2m^4n^6 - 144$
55. $196x^2y^4 - 225z^{12}$
56. $1 - 9a^2b^4c^2d^8$
57. $361x^{14} - 1$
58. $\frac{1}{4} - 9a^2$
59. $1 - \frac{a^2}{25}$
60. $\frac{1}{16} - \frac{44}{49}x^2$
61. $100m^2n^4 - \frac{x^8}{16}$
62. $x^{2n} - y^{2n}$
63. $4a^{2x} - \frac{1}{9}$
64. $b^{4m} - 225b^4$
65. $2m - 3p^4$

10.4 Diferencia y suma de cubos

Una suma o diferencia de cubos perfectos son de la siguiente forma: (a^3+b^3) y (a^3-b^3). La factorización sigue la siguiente regla.

Definición

Suma y diferencia de cubos perfectos.

$$\boldsymbol{(a^3+b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$\boldsymbol{(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

Ejemplo 5

Factorice los siguientes cubos perfectos.

a) $(a^3+8)=\boldsymbol{(a+2)(a^2-2a+4)}$

b) $(27x^3-y^6)=\boldsymbol{(3x-y^2)(9x^2+3xy^2+y^4)}$

c) $(8a^3-125)=\boldsymbol{(2a-5)(4a^2+10a+25)}$

d) $(64m^3+n^9)=\boldsymbol{(4m+n^3)(16m^2-4mn^3+n^6)}$

e) $\left(\frac{1}{8}-8c^3\right)=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}-2c\right)\left(\frac{1}{4}+c+4c^2\right)}$

Ejercicios de refuerzo 10.5

Realice la factorización de los siguientes cubos perfectos.

66. x^3+y^3
67. $8x^3-1$
68. y^3-27
69. $64+x^3$
70. $8a^3+27b^6$
71. $512+27x^9$
72. x^6+8y^{12}
73. $1+729a^6$
74. $343x^3+512y^6$
75. $a^3b^3-y^6$
76. $125x^3-27$
77. b^9+8c^3
78. $512a^{3x^3}+216$
79. a^6+125b^{12}
80. $x^3y^6z^9-a^{12}b^3$
81. $8c^3+64$
82. $216m^{12}-1$
83. $\frac{x^3}{8}+\frac{y^3}{27}$
84. $(x-2y)^3-\frac{(2x-1)^3}{8}$
85. $8(x-1)^3+64(z^2+1)^3$

10.5 Factorización de un trinomio cuadrado por ensayo y error

El trinomio cuadrado no perfecto tiene dos variantes:

$$a)\quad x^2+bx+c$$
$$b)\quad ax^2+bx+c$$

FACTORIZACIÓN PARA EL CASO A

Para este trinomio cuadrado se ejemplificara resolviendo el siguiente polinomio:

$$x^2+8x+15$$

Primero se obtiene la raíz cuadrada del primer miembro, posteriormente se debe encontrar dos números que multiplicados sea 15 y sumados sea 8; de esta manera la factorización queda como sigue:

$$x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$$

Ejemplo 6

Factorice los siguientes trinomios cuadrados no perfectos.

$a)\quad x^2-7x+12=\boldsymbol{(x-3)(x-4)}$

$b)\quad x^2+2x-15=\boldsymbol{(x+5)(x-3)}$

$c)\quad x^2-13x+40=\boldsymbol{(x-5)(x-8)}$

$d)\quad y^2+28y-29=\boldsymbol{(y+29)(y-1)}$

En el caso que la prueba y error no sea sencilla de utilizar para encontrar los factores del trinomio cuadrado como es el caso del siguiente ejercicio:

$$m^2+6m-216$$

Se debe de encontrar dos números que sumados den 6 y multiplicados den -216, éste último se descompone en factores primos.

216	
108	2
54	2
27	2
9	3
3	3
1	3

Con estos números se debe de hacer la prueba y error

$$(2)(2)(3)=12 \qquad (2)(3)(3)=18$$

Con 12 y 18 se tiene lo que se busca, por lo tanto la factorización queda:

$$m^2+6m-216=\boldsymbol{(m+18)(m-12)}$$

FACTORIZACIÓN PARA EL CASO B

Para este trinomio cuadrado de la forma: $ax^2 + bx + c$

Se multiplica (a)(c), ahora se buscan dos números que multiplicados resulte el valor de ac y sumados sea b. Por ejemplo factorice el polinomio.

$$3x^2 + 7x - 6$$

Se tiene por tanto que:

$$ac = (3)(-6) = -18$$
$$b = 7$$

Se buscan dos numeros que multiplicados sea -18 y sumados sea 7, estos números son 9 y -2, ahora se descompone el trinomio de la siguiente manera:

$$3x^2 + 9x - 2x - 6$$

Se agrupan los términos de la siguiente manera:

$$(3x^2 + 9x) - (2x + 6)$$

Se factoriza:

$$3x(x + 3) - 2(x + 3)$$

Finalmente se tiene:

$$3x^2 + 7x - 6 = \boldsymbol{(x + 3)(3x - 2)}$$

Ejemplo 7

Factorice los siguientes trinomios cuadrados no perfectos.

$a)$ $10x^2 - x - 2 = 10x^2 - 5x + 4x - 2 = (10x^2 - 5x) + (4x - 2)$
$$= 5x(2x - 1) + 2(2x - 1) = \boldsymbol{(2x - 1)(5x + 2)}$$

$b)$ $7x^2 - 23x + 6 = 7x^2 - 21x - 2x + 6 = (7x^2 - 21x) - (2x - 6)$
$$= 7x(x - 3) - 2(x - 3) = \boldsymbol{(x - 3)(7x - 2)}$$

$c)$ $6y^2 - 7y - 3 = 6y^2 - 9y + 2y - 3 = (6y^2 + 2y) - (9y + 3)$
$$= 2y(3y + 1) - 3(3y + 1) = \boldsymbol{(3y + 1)(2y - 3)}$$

$d)$ $2y^2 + 11y + 5 = 2y^2 + 10y + y + 5 = (2y^2 + 10y) + (y + 5)$
$$= 2y(y + 5) + (y + 5) = \boldsymbol{(y + 5)(2y + 1)}$$

Ejercicios de refuerzo 10.6

Realice la factorización de los siguientes trinomios.

86. $2x^2+3x-2$
87. $4b^2+15b+9$
88. $10x^2+11x+3$
89. $16y+15y^2-15$
90. $44m+20m^2-15$
91. $30p^2+13p-10$
92. $2x^2+x-3$
93. $2n^2+9n+10$
94. $3x^2-x-4$
95. $4a^2-23a+15$
96. $4x^2+x-33$
97. $15x^2-8x-12$
98. $2a^2+29a+90$
99. $4x^2+3x-10$
100. $14p^2-19p+10$
101. $-4y^2+4y+3$
102. $\frac{3}{2}x^2+2x-2$
103. $\frac{1}{4}y^2-\frac{37}{12}y+1$
104. $\frac{1}{9}x^2+\frac{5}{9}x+\frac{1}{4}$
105. $6m^2-\frac{1}{4}m-\frac{1}{8}$

10.6 Factorización de un trinomio cuadrático por fórmula general

La fórmula general como se vio en el capítulo nueve, ésta se utiliza para trinomios del tipo ax^2+bx+c, recuerde su forma:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Lo que se encuentra son las raíces polinomiales que hace cero la función, por tal motivo, se debe de invertir el signo al escribir la forma factorizada del trinomio. Esto se puede ver si queremos factorizar el polinomio:

$$5x^2-14x-3$$

Los valores para alimentar la fórmula general son:

$$a=5 \qquad b=-14 \qquad c=-3$$

$$x=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4(5)(-3)}}{2(5)}$$

$$x=\frac{14\pm 16}{10}$$

Ahora las raíces son:

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -\frac{1}{5}$$

Por lo tanto el trinomio factorizado queda como:

$$5x^2 - 14x - 3 = (x-3)\left(x+\frac{1}{5}\right)$$

Ejemplo 8

Factorice las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula general.

$a)\quad 10x^2 - x - 2 \qquad b)\quad 7x^2 - 23x + 6$

Solución a)

Los valores para alimentar la fórmula general son: $a = 10 \quad b = -1 \quad c = -2$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(10)(-2)}}{2(10)} = \frac{1 \pm 9}{20}$$

Ahora las raíces son:

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -\frac{2}{5}$$

Por lo tanto el trinomio factorizado queda como:

$$10x^2 - x - 2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{2}{5}\right)$$

Solución b)

Los valores para alimentar la fórmula general son: $a = 7 \quad b = -23 \quad c = 6$

$$x = \frac{-(-23) \pm \sqrt{(-23)^2 - 4(7)(6)}}{2(7)} = \frac{23 \pm 19}{14}$$

Ahora las raíces son:

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = \frac{2}{7}$$

Por lo tanto el trinomio factorizado queda como:

$$7x^2 - 23x + 6 = (x-3)\left(x-\frac{2}{7}\right)$$

Ejercicios de refuerzo 10.7

Factorice los siguientes trinomios, utilizando la fórmula general.

106. $x^2 + 2x - 3$

107. $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

108. $x^2 - \frac{19}{9}x + \frac{2}{9}$

109. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{25}$

110. $\frac{11}{3}x - x^2 + \frac{4}{3}$

111. $\frac{1}{2} - \frac{7}{4}x - x^2$

112. $\frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{36}x - \frac{1}{6}$

113. $6x^2 - x - 12$

114. $2x^2 - \sqrt{2}x - 2$

115. $18x^2 + 5x - \frac{1}{3}$

116. $4x^2 - 50x - 84$

117. $2x^2 - \frac{109}{5}x - \frac{11}{5}$

118. $28x^2 - \frac{726}{5}x - \frac{242}{5}$

119. $-10x^2 + \frac{611}{11}x - 3$

10.7 Complementación del trinomio cuadrado perfecto

La complementación del cuadrado o complementación de cuadrados se utiliza para transformar una ecuación de segundo grado del tipo:

$$ax^2 + bx + c$$

El procedimiento se ejemplificará con la siguiente ecuación: $x^2 - 16x + 63$

1.- Se iguala la expresión a cero.

$$x^2 - 16x + 63 = 0$$

2.- El término constante se transpone del lado derecho de la ecuación.

$$x^2 - 16x = -63$$

3.- Se suma en cada miembro de la igualdad $(b/2)^2$.

$$x^2 - 16x + \left(\frac{16}{2}\right)^2 = -63 + \left(\frac{16}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 16x + 64 = 1$$

4.- El lado izquierdo de la ecuación se transforma en un trinomio cuadrado perfecto.

$$(x - 8)^2 = 1$$

5.- Se aplica raíz en cada miembro de la ecuación.

$$x - 8 = \pm 1$$

$$x_1 = 9 \qquad x_2 = 7$$

6.- Se obtiene el valor de x para expresar el polinomio factorizado.

$$x^2 - 16x + 63 = \boldsymbol{(x-9)(x-7)}$$

Ejemplo 9

Factorice las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la complementación del trinomio cuadrado.

$a)\quad 3x^2 - 5x + 2 \qquad\qquad b)\quad 2x^2 + \sqrt{2}x - 2$

Solución a)

Se divide toda la ecuación entre tres y se transpone el término constante del lado derecho de la igualdad.

$$x^2 - \frac{5}{3}x = -\frac{2}{3}$$

Se suma el cuadrado de la mitad del término lineal.

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{2}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = -\frac{2}{3} + \frac{25}{36}$$

Se obtiene el trinomio cuadrado perfecto.

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

Se aplica la raiz a cada miembro de la ecuación y se obtienen las raíces.

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6} \qquad\qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

La factorización es:

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \boldsymbol{(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right)}$$

Solución b)

Se iguala la ecuación a cero y se divide entre 2.

$$x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x-1=0$$

$$x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x=1$$

Se suma en cada miembro de la igualdad $(b/2)^2$.

$$x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=1+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{2}{16}=1+\frac{2}{16}$$

$$\left(x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{18}{16}$$

Se aplica la raíz a cada miembro de la ecuación.

$$x+\frac{\sqrt{2}}{4}=\pm\frac{\sqrt{18}}{4}$$

$$x_1=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{18}}{4} \qquad x_2=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{18}}{4}$$

Aplicando álgebra para operar los radicales.

$$x_1=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{18}}{4}=\frac{-\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{4} \qquad x_2=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{18}}{4}=\frac{-\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(-1+3)}{4}=\frac{2\sqrt{2}}{4} \qquad =\frac{\sqrt{2}(-1-3)}{4}=-\frac{4\sqrt{2}}{4}$$

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x_2=-\sqrt{2}$$

Finalmente la factorización queda como:

$$2x^2+\sqrt{2}x-2=\left(\boldsymbol{x}+\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\right)(\boldsymbol{x}-\sqrt{\mathbf{2}})$$

Ejercicios de refuerzo 10.8

Factorice las ecuaciones cuadráticas presentadas por el método de complementación.

120. $x^2 - 7x - 12$
121. $x^2 + 7x + 10$
122. $x^2 + 5x - 14$
123. $x^2 - 9x + 8$
124. $a^2 + 7a + 6$
125. $x^2 + 15x + 56$
126. $x^2 - 20x - 300$
127. $x^2 + 28x + 22$
128. $m^2 + 7x + 10$
129. $n^2 + 2n - 15$
130. $x^2 - 12x + 32$
131. $x^2 - 2xy - 24$
132. $x^2 - 10x + 9$
133. $x^2 - 2x + 1$
134. $x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$
135. $\frac{x^2}{3} - \frac{8}{3}x + 4$
136. $x^6 + 7x^3 - 44$
137. $x^4 - 5x^2 - 50$
138. $x^2 + 43x + 432$
139. $a^2x^2 - ax - 42$

10.8 Factorización de polinomios utilizando la división sintética

La factorización por división sintética, es un método en donde se utilizan sólo los coeficientes del polinomio de grado “n” dividido por un polinomio del tipo $(x \pm a)$, siendo x la variable del polinomio y a cualquier número real. El resultado son los coeficientes del nuevo polinomio disminuido en un grado del original.

El procedimiento para factorizar un polinomio se explica a continuación utilizando el siguiente ejemplo: $x^2 - 15 + 2x$.

1.- Se ordena el polinomio en orden decreciente respecto al grado..

$$x^2 + 2x - 15$$

2.- Se obtienen los divisores del término constante (15: $\pm 5, \pm 3, \pm 15$).
4.- Se inicia la división bajando el primer número.

$$(x^2 + 2x - 15) \div (x + 5)$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -15 & \\ & -5 & 15 & -5 \\ \hline \underbrace{1 \quad -3}_{\text{Coeficientes del polinomio}} & & \underbrace{0}_{\text{Residuo}} & \end{array}$$

5.- El polinomio reducido es $(x - 3)$

6.- La factorización del polinomio es $x^2 + 2x - 15 = \boldsymbol{(x + 5)(x - 3)}$

Ejemplo 10

Factorice el polinomio $x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12$

Solución

Primero verificamos que esta ordenado el polinomio, ahora los divisores de 12 son $(\pm1, \pm2, \pm4, \pm6, \pm12)$.

1	6	9	-4	-12	
	-2	-8	-2	12	-2
1	4	1	-6	0	

El residuo es cero, por tanto se continúa reduciendo el polinomio de grado.

1	4	1	-6	
	-2	-4	6	-2
1	2	-3	0	

Finalmente:

1	2	-3	
	1	3	1
1	3	0	

Por tanto queda la factorización como:

$$x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12 = \boldsymbol{(x+2)(x+2)(x-1)(x+3)}$$

Si el residuo no es cero aun así se puede expresar la factorización y si no existe algún término en el polinomio a dividir, se utiliza el cero en su lugar para desarrollar la división sintética.

Ejemplo 11

Exprese el resultado de la división de $x^4 + 7x + 5$ entre $(x + 2)$ como una factorización.

Solución

Se desarrolla la división sintética:

1	0	0	7	5	
	-2	4	-8	2	-2
1	-2	4	-1	7	

El residuo es 7, por tanto se puede expresar el resultado de la división como:

$$(x^4 + 7x + 5) \div (x + 2) = \boldsymbol{(x^3 - 2x^2 + 4x - 1)(x + 2) + 7}$$

Ejercicios de refuerzo 10.9

Factorice las ecuaciones cuadráticas utilizando la división sintética.

140. $x^3 - 7x - 6$
141. $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1$
142. $x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$
143. $2x^4 - 13x^3 + 23x^2 - 12x$
144. $3x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{1}{2}x$
145. $x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$
146. $144x^4 - 108x^3 - 16x^2 + 13x + 2$
147. $3x^4 - 3x^3 - 5x^2 - x - 2$
148. $x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{43}{3}x + 5$
149. $x^5 + 7x^4 + 15x^3 + 5x^2 - 16x - 12$
150. $x^5 + \frac{35}{3}x^4 - \frac{19}{4}x^3 - \frac{17}{2}x^2 + \frac{71}{12}x - 1$

Factorizando la salud

Escrito por: Mireya García Casas
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM
cgmireya@hotmail.com

La factorización se puede ver en diversos escenarios, pues al reducir los problemas complejos en pequeños, o bien, al identificar un factor que se repita en todos los términos será más fácil comprender el fenómeno.

Por ejemplo, en el área de la salud la reacción alérgica a medicamentos, una vez comercializados en población abierta, evidencia muchas cuestiones sobre seguridad que se deben notificar para medir el riesgo y proponer medidas de salud.

Hay que partir de que todo medicamento, además de presentar los efectos benéficos por lo que es utilizado, también puede presentar efectos no deseados, llamados propiamente reacciones adversas a medicamentos (RAM) que la Organización Mundial de la Salud (OMS) la define como una respuesta a un fármaco que es nociva y no intencionada en dosis utilizadas normalmente en seres humanos para la profilaxis, diagnóstico o tratamiento de una enfermedad o para la modificación de una función biológica (OMS, 2019). Se incluye en esta definición a la reacción alérgica cruzada como la reacción de sensibilidad a un medicamento (mediada por un mecanismo inmunológico) que predispone a una persona a reaccionar de una forma similar a un medicamento diferente, pero relacionado (Peláez, 2007)

Por lo tanto, la reacción alérgica cruzada a los antibióticos β-lactámicos que están conformados en el grupo de las penicilinas, cefalosporinas, carbapenems, monobactam e inhibidores de las β-lactamasas; son un claro ejemplo para identificar el factor común que es el anillo b-lactámico (ver figura 1) presente en la estructura química de cada grupo de antibióticos , siendo quien determina mecanismo de acción, espectro antibacteriano, propiedades farmacocinéticas así como el potencial para la reacción cruzada (Quetglas, 2004). Cabe mencionar que algunos pacientes no reaccionan al anillo, sino a la cadena lateral del grupo R, donde las cefalosporinas y carbapenems tienen 2, mientras que los monobactam tienen 1, resultando otra fuente de potencial a reacción alérgica cruzada (Har, 2017).

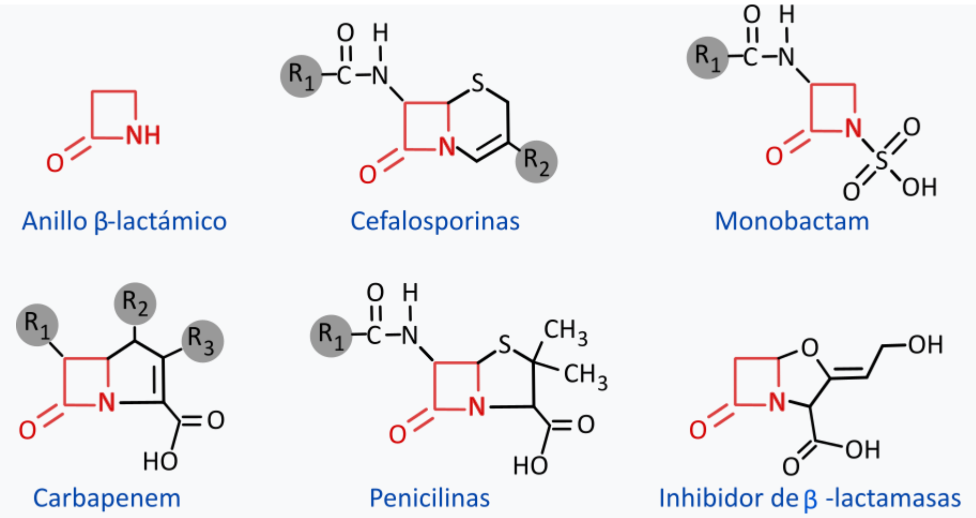


Figura 1. Estructura de los β-lactámicos y como factor común el anillo, que potencia la reacción alérgica cruzada Adaptado de (Devchand, 2019).

Se tiene con carbapenems (Campagna, 2012) y cefalosporinas en un 10 % de riesgo en presentarse la reacción cruzada para pacientes con historia de alergia a penicilinas. Sin embargo, el riesgo entre cefalosporinas, carbapenems y penicilinas puede estar por abajo del 1% (Devchand, 2019). Con el grupo monobactam el anillo no genera reacción y con inhibidores de β-lactamasas tampoco sucede (Har, 2017).

Ahora bien, las manifestaciones que pueden aparecer ante la reacción alérgica cruzada a antibióticos b-lactámicos se encuentran: exantema maculopapular, exantema urticariforme, fiebre, broncoespasmo, vasculitis, dermatitis exfoliativa, síndrome de Stevens-Johnson y anafilaxia (Quetglas, 2004).

El cuadro clínico se desencadena al romperse el anillo β-lactámico de las penicilinas, formándose varios productos de descomposición, el peniciloil principal determinante alergénico y como restantes el penicilinato y peniloato (ver figura 2), que inducen la formación de anticuerpos o ser la causa desencadenante de las reacciones anafilácticas (Har, 2017).

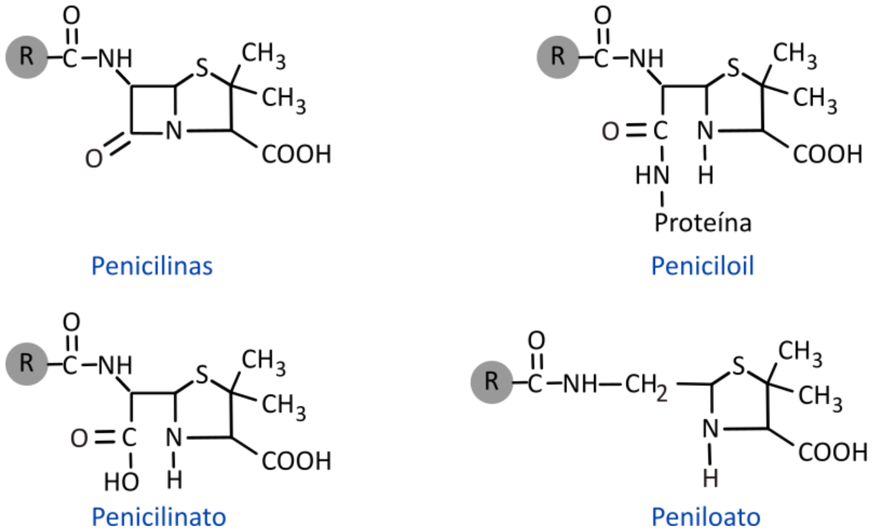


Figura 2. Productos de degradación al abrirse el anillo β-lactámico tras la administración de las penicilinas.

Es preciso decir que el grupo de las penicilinas resulta ser el más frecuente en causar reacción alérgica cruzada hasta en el 10% de pacientes hospitalizados. Solo el 10% de los sujetos con historia de alergia a penicilina tienen reacciones cruzadas cuando se vuelven a exponer. En pacientes con historia clara de alergia para cualquier tipo de β-lactámico, lo más recomendable es evitar el tratamiento con estos antibióticos sin embargo el aztreonam es bien tolerado por pacientes alérgicos a los β-lactámicos (Suárez, 2009).

Referencias

1. Campagna, J.D. Bond, M.C. (2012). The use of cephalosporins in penicillin-allergic patients: a literature review. *J Emerg Med* , 612-20.
2. Devchand, M. y Trubiano, J. (2019). Penicillin allergy: a practical approach to assessment and prescribing. *Aust Prescr*, 192-9.
3. Har, D. y Solensky, R. (2017). Penicillin and Beta-Lactam Hypersensitivity. *Immunol Allergy Clin N Am*, 643-662.
4. OMS. (2019). *Portal de Información-Medicamentos Esenciales y Productos de Salud.* Obtenido de https://apps.who.int/medicinedocs/es/d/Js5422s/4.4.html
5. Peláez, H. A. y Dávila, G.I. (2007). Tratado de alergología. Buenos Aires: Ergon.
6. Quetglas, E. A. (2004). Antibióticos β-lactámicos. En Velázquez. Farmacología Básica y Clínica. Madrid: Medica Panamericana.
7. Suárez, C.y Gudiol, F. (2009). Antibióticos betalactámicos. *Enferm Infecc Microbiol Clin*, 116-129.

Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 10. Métodos de factorización

1. $a(a+b)$ **3**. $a(b-c)$ **5**. $5y(3y^2+4y-1)$ **7**. $3x(3x-4y+5x^2y^2-8y^3)$

9. $31a^2x(3axy-2x^2y^2-4)$ **11**. $(x-3)(a+1)$ **13**. $(a+q)(x-1)$ **15**. $(n+1)(x+y-3)$

17. $(x-1)^2$ **19**. $(2x+b)(m+p)$ 21. $2(x-3)(a+b-c)$ **23**. $(x+y+z)(x+1)$

25. $(a-b)(x+y)$ **2 7**. $(x^4-1)(3m+2n)$ **29**. $(3a+1)(2x+a)$ **31**. $(3x^2-1)(x-3a)$

33. $(3-y^2)(n^2+5a^2)$ **35**. $(4am-1)(m^2-3n)$ **37**. $(a+x)(3a-7b^2)$

39. $(a+1)(a^2+y^2+1)$ **41**. $(3x-2a)(x^2-y^2-xy)$ **43**. $(5x-7z)\left(\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y+1\right)$

45. $(x+y)(x-y)$ **47**. $(3+b)(3-b)$ **49**. $(2x+9z^3)(2x-9^z3)$ **51**. $(10+xy)(10-xy)$

53. $(5x^2y^4+11)(5x^2y^4-11)$ **55**. $(14xy^2+15z^6)(14xy^2-15z^6)$ **57**. $(19x^7+1)(19x^7-1)$

59. $\left(1+\frac{a}{5}\right)\left(1-\frac{a}{5}\right)$ **61**. $\left(10mn^2+\frac{x^4}{4}\right)\left(10mn^2-\frac{x^4}{4}\right)$ **63**. $\left(2a^x+\frac{1}{3}\right)\left(2a^x-\frac{1}{3}\right)$

65. $(\sqrt{2m}+\sqrt{3}p^2)(\sqrt{2m}-\sqrt{3}p^2)$ **67**. $(2x-1)(4x^2+2x+1)$ **69**. $(4+x)(16-4x+x^2)$

71. $(x^2+2y^4)(x^4-2x^2y^4+4y^8)$ **73**. $(1+9a^2)(1-9a^2+81a^4)$

75. $(ab-y^2)(a^2b^2+aby^2+y^4)$ **77**. $(b^3+2c)(b^6-2b^3c+4c^2)$ **79**. $(a^2+5b^4)(a^4-5a^2b^4+25b^8)$

81. $(2c+4)(4c^2-8c+16)$ **83**. $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{9}\right)$

85. $[2(x-1)+4(z^2+1)][4(x-1)^2-8(x-1)(z^2+1)+16(z^2+1)^2]$ **87**. $(4x+3)(x+3)$

89. $(5y-3)(3y+5)$ **91**. $(5p-2)(6p+5)$ **93**. $(n+2)(2n+5)$ **95**. $(4a-3)(a-5)$

97. $(3x+2)(5x-6)$ **99**. $(4x-5)(x+2)$ **101**. $-(2y+1)(2y-3)$ **103**. $\left(\frac{1}{4}x-3\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$

105. $\left(3x-\frac{1}{2}\right)\left(2x+\frac{1}{4}\right)$ **107**. $\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1)$ **109**. $\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{5}\right)$ **111**. $-(x+2)\left(x+\frac{1}{4}\right)$

113. $(2x-3)(3x+4)$ **115**. $\left(6x-\frac{1}{3}\right)(3x+1)$ **117**. $\left(2x+\frac{1}{5}\right)(x-11)$ **119**. $-\left(5x-\frac{3}{11}\right)(2x-11)$

121. $(x+2)(x+5)$ **123**. $(x-1)(x-8)$ **125**. $(x+8)(x+7)$ **127**. $(x+6)(x+22)$

129. $(x-3)(x+5)$ **131**. $(x-6y)(x+4y)$ **133**. $(x-1)(x-1)$ **135**. $\boldsymbol{(x-2)\left(\frac{x}{3}-2\right)}$

137. $(x^2+5)(x^2-10)$ **139**. $(ax+6)(ax-7)$ **141**. $(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)$

143. $x(x-4)(x-1)(2x-3)$ **145**. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+1)$ **147**. $(3x^2+1)(x+1)(x-2)$

149. $(x+2)^2(x-1)(x+1)(x+3)$

11

Exponenciales y Logaritmos

LO QUE APRENDERÁS. . .

11.1 Expresiones logarítmicas y exponenciales.
11.2 Leyes de los logaritmos.
11.3 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.
11.4 Escalas log-log y semilog.

11.1 Expresiones logarítmicas y exponenciales

En la naturaleza existen muchos fenómenos de crecimiento poblacional y en sentido inverso el decaimiento radioactivo que explica la desintegración de sustancias, que pueden ser representados por una expresión exponencial.

Actualmente las expresiones exponenciales permean a casi todas las disciplinas y áreas de la química, como vemos en la caricatura que hace alusión la velocidad en la reproducción microbiana.

Las funciones exponenciales se denominan a aquellas en donde la **incógnita** aparece como **exponente**.

Definición

Una función exponencial con base a se define como:

$$\boldsymbol{y = a^x}$$

Donde $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $a \neq 1$ y x sea un número real.

Una función especial es $y = e^x$. En donde el número de Euler (e) es la base; esta función tiene mucho interés en química para describir muchos fenómenos; por ejemplo el crecimiento de bacterias, propagación de enfermedades por virus, velocidad de reacción, fechado radiactivo por carbono 14, entre otros.

Es importante ver la diferencia entre $\boldsymbol{y = x^a}$**,** en donde la base es x, cuyo comportamiento es muy distinto, observe la diferencia de éstas en la siguiente Tabla y Figura.

Tabla 11.1
Diferencia de una función Exponencial y una Polinomial

x	$f(x) = x^3$	$f(x) = 3^x$
-2	-8	0.111
-1	-3	0.333
0	0	1
1	3	3
2	8	9
3	27	27
4	64	81

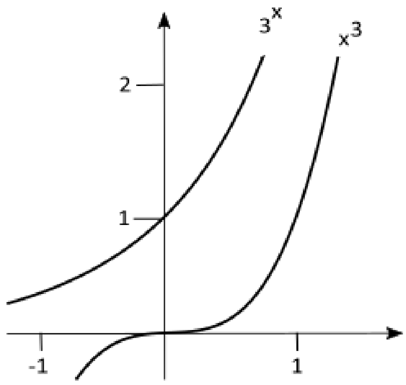


Figura 11.1 Graficas de una función exponencial y una polinomial.

Las propiedades de las funciones exponenciales se ilustran a continuación.

Las propiedades de la función exponencial son:

- La función con potencia de cero es siempre igual a 1:

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

- La función con potencia de 1 es igual a la base:

$$\boldsymbol{a^1 = a}$$

- La función con suma en la potencia es igual al producto de la base elevada a cada potencia:

$$\boldsymbol{a^{x+n} = a^x \cdot a^n}$$

- La función exponencial con resta en la potencia es igual al cociente de las bases elevadas a cada potencia:

$$\boldsymbol{a^{x-n} = \frac{a^x}{a^n}}$$

Ejemplo 1

Simplifica las siguientes expresiones:

$a)$ $3^{x+2} \cdot 9^{x-1} \cdot 3^2$ $\qquad$ $b)$ $\dfrac{4^x \cdot 2^{3-x}}{2^{x+1} + 2^{x-1}}$

Solución a)

$$3^{x+2} \cdot 9^{x-1} \cdot 3^2 = 3^{x+2} \cdot 3^{2x-2} \cdot 3^2$$

$$= 3^{x+2+2x-2+2}$$

$$= \boldsymbol{3^{3x+2}}$$

Solución b)

$$\frac{4^x \cdot 2^{3-x}}{2^{x+1} + 2^{x-1}} = \frac{2^{2x} \cdot 2^{3-x}}{2^x(2 + 2^{-1})}$$

$$= \frac{2^{2x+3-x}}{2^x(2 + 2^{-1})}$$

$$= \frac{2^{x+3}}{2^x(2 + 2^{-1})}$$

$$= \frac{2^x \cdot 2^3}{2^x(2 + 2^{-1})}$$

$$= \frac{2^3}{2 + \frac{1}{2}}$$

$$\frac{8}{5/2} = \boldsymbol{\frac{16}{5}}$$

Ejercicios de refuerzo 11.1

Simplifique las siguientes expresiones.

1. $2^{x+1} \cdot 4^{x+3} \cdot 2$
2. $3^{x-2} \cdot 9^{x} \cdot 27$
3. $4^{-x+3} \cdot 2^{3x-2} \cdot 2$
4. $81^{x} \cdot 3^{-x+1} \cdot 9^{x}$
5. $8^{-2x+1} \cdot 4$
6. $\dfrac{3^{x} \cdot 9^{x}}{3^{x+1}}$
7. $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot 2^{x+3}}{4^{-x+5}}$
8. $\dfrac{2^{x/2\,+3/4} \cdot 4^{2x-1/2}}{8^{x}}$
9. $\dfrac{\sqrt[x]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3x]{\frac{1}{4}}}{\sqrt[-x]{\frac{1}{8}}}$
10. $\dfrac{8^{x} \cdot 2^{5-2x}}{2^{x-1} + 2^{x-3}}$

La necesidad de realizar cálculos trigonométricos para investigaciones astronómicas utilizadas en la navegación y la acumulación de riqueza por interés compuesto; impulsaron el desarrollo de los **logaritmos** por John Napier y Jobst Bürgi. El 1631 Henry Briggs fue el primero en hacer las tablas de los logaritmos base 10, en su obra *Logarithmall Arithmetike* dice que los: “Logaritmos son números inventados para resolver más fácilmente los problemas de aritmética y geometría… Con ellos se evitan todas las molestias de las multiplicaciones y de las divisiones; de manera que, en lugar de multiplicaciones, se hacen solo adiciones, y en lugar de divisiones se hacen sustracciones. La laboriosa operación de extraer raíces, tan poco grata, se efectúa con suma facilidad… En una palabra, con los logaritmos se resuelven con sencillez y comodidad todos los problemas, no solo de aritmética, sino también de astronomía” (Tapia, 2003).

Figura 11.2 Imagen del *Lado izquierdo* John Napier y *lado derecho Jobst Bürgi.*

Fuente: wikimedia commons

La correspondencia de expresar una multiplicación de dos números como una suma se logra con la comparación de sucesiones aritméticas con las geométricas. Por ejemplo vea la siguiente tabla en donde se trabaja con una sucesión geométrica de base dos:

Tabla 11.2

Comparación de sucesiones

Aritmética	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Geométrica	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Por ejemplo si se requiere **multiplicar** 4 por 16, basta con sumar los números de la sucesión aritmética; es decir 2 con 4 que resulta 6, ahora se lee el valor de la sucesión geométrica que corresponde a la multiplicación, el cual es 64. Ahora se tiene la **división** de 128 entre 4, por tanto se resta 7 menos 2, el valor de 5 le corresponde el resultado de la división que es 32. Ahora si se requiere la operación de una **potencia**, por ejemplo 16 al cuadrado, multiplicamos 4 por 2 (potencia) que es ocho y se lee 256, que es el resultado de la operación. Esto se ejemplifica a continuación.

Ejemplo 2

Realice las operaciones que se piden utilizando la siguiente sucesión geométrica de base tres:

Aritmética	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Geométrica	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683

$a)\quad 27 \times 729 \qquad b)\quad \dfrac{2187}{9} \qquad c)\quad 9^4$

Solución a)

$$\begin{array}{ccccc} 3 & + & 6 & = & 9 \\ \hline \Uparrow & & \Uparrow & & \Downarrow \\ \hline 27 & \times & 729 & = & \mathbf{19683} \end{array}$$

Solución b)

$$\begin{array}{ccccc} 7 & - & 2 & = & 5 \\ \hline \Uparrow & & \Uparrow & & \Downarrow \\ \hline 2187 & \div & 9 & = & \mathbf{243} \end{array}$$

Solución c)

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & 4 & = & 8 \\ \hline & & \Uparrow & & \Downarrow \\ \hline & & 9^4 & = & \mathbf{6561} \end{array}$$

Ejercicios de refuerzo 11.2

Realice las operaciones que se indican con ayuda de las sucesiones.

Sucesión de base 2									
Aritmética	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Geométrica	2	4	8	16	32	64	128	256	512

11. 8×32 12. 4×128 13. $256 \div 16$ 14. $512 \div 64$

Sucesión de base 3									
Aritmética	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Geométrica	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683

15. 9×81 16. 27×243 17. 9×2187 18. $6561 \div 243$ 19. $729 \div 81$

Sucesión de base 4									
Aritmética	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Geométrica	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144

20. 64×1024 21. 16×64 22. $65536 \div 4096$ 23. $262144 \div 16384$

Los ejercicios anteriores proporcionan el ingreso de la reglas de los logaritmos que serán revisados más adelante.

Definición

Una función logarítmica con base a de un número y, con el exponente x se define como:

$$\boldsymbol{\log_a y = x}$$

Se lee: el logaritmo en base a del número y es x.

Recuerde la expresión $\boldsymbol{y = a^x}$, ahora se puede establecer la correspondencia:

$$\boldsymbol{a^x = y \quad \Rightarrow \quad \log_a y = x}$$

Observe que el logaritmo no es más que un exponente, algo que no debe de olvidar cuando se trabaje con ellos.

Ejemplo 3

Escriba las siguientes expresiones exponenciales en su forma logarítmica:

$a)$ $3^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\log_3 9 = 2}$

$b)$ $2^7 = 128 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\log_2 128 = 7}$

$c)$ $5^3 = 125 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\log_5 125 = 3}$

$d)$ $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{16}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4}$

$e)$ $a^3 = 27 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\log_a 27 = 3}$

Ahora se puede hacer la operación inversa, de tener una expresión logarítmica y escribirla en su forma exponencial.

$$\log_a y = x \qquad \Rightarrow \qquad a^x = y$$

En los siguientes ejemplos se muestra el proceso inverso.

Ejemplo 4

Exprese los siguientes logaritmos en su forma exponencial:

$a)$ $\log_5 25 = 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{5^2 = 25}$

$b)$ $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

$c)$ $\log_x 12 = -4 \quad \Longrightarrow \quad x^{-4} = 12$

$d)$ $\log_{16} 4 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{16} = 4$

$e)$ $\log_2 64 = 6 \quad \Longrightarrow \quad 2^6 = 64$

Ejercicios de refuerzo 11.3

Escriba las expresiones exponenciales en logarítmicas.

24. $2^3 = 8$
25. $6^3 = 216$
26. $9^{1/2} = 3$
27. $27^{1/7} = 3$
28. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$
29. $\sqrt{x^3} = 16$
30. $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
31. $\sqrt[3]{7} = b$
32. $6^{-2} = \frac{1}{36}$
33. $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 4$
34. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \sqrt{3}$
35. $\left(\frac{2}{y}\right)^z = k$
36. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
37. $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2y$
38. $\sqrt[3]{x} = 8$
39. $\left(\frac{1}{5}\right)^{e^x} = x$
40. $r^2 = \frac{A}{\pi}$
41. $e^{e^x} = lnx$

Exprese los siguientes logaritmos en su forma exponencial:

42. $\log_3 9 = 2$
43. $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$
44. $\log_2 \frac{1}{2} = -1$
45. $\log_a b = x$
46. $\log_4 64 = 3$
47. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$
48. $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$
49. $\log_a 2 = \frac{3}{2}$
50. $\log_4 \frac{1}{16} = -2$
51. $\log_e 3 = x$
52. $\log_5 \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
53. $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{3}$
54. $\log_{\frac{1}{x}} 2 = e^x$
55. $\log_{\frac{1}{x^2}} \sqrt{2} = -4$

La función logarítmica tiene las siguientes características:

- La función logarítmica sólo está definida sobre los números positivos.
- Logaritmo de 1 es cero.
- Los números negativos y el cero no tienen logaritmo.
- La función logarítmica es la inversa de la exponencial.

Los logaritmos pueden ser encontrados a partir de la función exponencial, como se ve a continuación en la siguiente tabla.

Tabla 11.3

Obtención de logaritmos

Número	Expresión exponencial	Expresión logarítmica
1	$1 = 10^0$	$\log_{10} 1 = \mathbf{0}$
2	$2^{10} = 1024$ $2^{10} \approx 1000$ $2^{10} \approx 10^3$ $2 \approx 10^{3/10}$ $2 \approx 10^{0.3}$	$\log_{10} 2 = \mathbf{0.3}$
3	$3^9 = 19683$ $3^9 \approx 20000$ $3^9 \approx 2 \cdot 10^4$ $3^9 \approx 10^{0.3} \cdot 10^4$ $3^9 \approx 10^{4.3}$ $3 \approx 10^{4.3/9}$ $3 \approx 10^{0.48}$	$\log_{10} 3 = \mathbf{0.48}$

El resultado de un logaritmo tiene una parte entera llamada "***característica***" y una parte decimal "***mantisa***".

$$\log N = \underbrace{\text{Entero}}_{\text{Característica}} + \underbrace{\text{Fracción decimal}}_{\text{Mantisa}}$$

Actualmente la determinación de logaritmos se hace con el uso de la calculadora, pero existen tablas de logaritmos para realizar el cálculo, en la Tabla 11.4 se presentan algunos logaritmos decimales.

Tabla 11.4

Logaritmos decimales

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0,00000	0,00432	0,00860	0,01284	0,01703	0,02119	0,02531	0,02938	0,03342	0,03743
11	0,04139	0,04532	0,04922	0,05308	0,05690	0,06070	0,06446	0,06819	0,07188	0,07555
12	0,07918	0,08279	0,08636	0,08991	0,09342	0,09691	0,10037	0,10380	0,10721	0,11059
13	0,11394	0,11727	0,12057	0,12385	0,12710	0,13033	0,13354	0,13672	0,13988	0,14301
14	0,14613	0,14922	0,15229	0,15534	0,15836	0,16137	0,16435	0,16732	0,17026	0,17319
15	0,17609	0,17898	0,18184	0,18469	0,18752	0,19033	0,19312	0,19590	0,19866	0,20140
16	0,20412	0,20683	0,20952	0,21219	0,21484	0,21748	0,22011	0,22272	0,22531	0,22789
17	0,23045	0,23300	0,23553	0,23805	0,24055	0,24304	0,24551	0,24797	0,25042	0,25285
18	0,25527	0,25768	0,26007	0,26245	0,26482	0,26717	0,26951	0,27184	0,27416	0,27646
19	0,27875	0,28103	0,28330	0,28556	0,28780	0,29003	0,29226	0,29447	0,29667	0,29885
20	0,30103	0,30320	0,30535	0,30750	0,30963	0,31175	0,31387	0,31597	0,31806	0,32015
21	0,32222	0,32428	0,32634	0,32838	0,33041	0,33244	0,33445	0,33646	0,33846	0,34044
22	0,34242	0,34439	0,34635	0,34830	0,35025	0,35218	0,35411	0,35603	0,35793	0,35984
23	0,36173	0,36361	0,36549	0,36736	0,36922	0,37107	0,37291	0,37475	0,37658	0,37840
24	0,38021	0,38202	0,38382	0,38561	0,38739	0,38917	0,39094	0,39270	0,39445	0,39620
25	0,39794	0,39967	0,40140	0,40312	0,40483	0,40654	0,40824	0,40993	0,41162	0,41330
26	0,41497	0,41664	0,41830	0,41996	0,42160	0,42325	0,42488	0,42651	0,42813	0,42975
27	0,43136	0,43297	0,43457	0,43616	0,43775	0,43933	0,44091	0,44248	0,44404	0,44560
28	0,44716	0,44871	0,45025	0,45179	0,45332	0,45484	0,45637	0,45788	0,45939	0,46090
29	0,46240	0,46389	0,46538	0,46687	0,46835	0,46982	0,47129	0,47276	0,47422	0,47567
30	0,47712	0,47857	0,48001	0,48144	0,48287	0,48430	0,48572	0,48714	0,48855	0,48996
31	0,49136	0,49276	0,49415	0,49554	0,49693	0,49831	0,49969	0,50106	0,50243	0,50379
32	0,50515	0,50651	0,50786	0,50920	0,51055	0,51188	0,51322	0,51455	0,51587	0,51720
33	0,51851	0,51983	0,52114	0,52244	0,52375	0,52504	0,52634	0,52763	0,52892	0,53020
34	0,53148	0,53275	0,53403	0,53529	0,53656	0,53782	0,53908	0,54033	0,54158	0,54283
35	0,54407	0,54531	0,54654	0,54777	0,54900	0,55023	0,55145	0,55267	0,55388	0,55509

Por ejemplo para hacer la lectura de logaritmo de 29.3, se ubica en la fila del 29 y la columna de 3, se obtiene la mantisa del logaritmo.

	0	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9
29	0,46240	0,46389	0,46538	**0,46687**	0,46835	0,46982	0,47129	0,47276	0,47422	0,47567

El entero del logaritmo (característica) se obtiene sabiendo que:

Logaritmo	Valor
$\log_{10} 10$	1
$\log_{10} 100$	2
$\log_{10} 1000$	3
$\log_{10} 10000$	4
$\log_{10} 100000$	5
$\vdots$	$\vdots$

Ahora como 29.3 es menor a 100 el valor entero es 1 (característica). Por tanto:

$$\mathbf{\log_{10} 29.3 = 1.46687}$$

Refuerce lo mostrado con los ejemplos que se ilustran a continuación.

Ejemplo 5

Obtenga el logaritmo, utilizando la Tabla 11.4.

		Característica	Lectura de tabla	Operación	Resultado
$a)$	$\log_{10} 17.8$	1	0.25042	0.2542+1	**1.2542**
$b)$	$\log_{10} 329$	2	0.5172	0.5172+2	**2.5172**
c)	$\log_{10} 0.25$	0	0.39794	0.39794-1	-**0.6020**

Ejercicios de refuerzo 11.4

Con ayuda de la tabla 11.4 obtenga el valor de los siguientes logaritmos.

56. $\log_{10} 11.1$
57. $\log_{10} 22$
58. $\log_{10} 15.5$
59. $\log_{10} 32.7$
60. $\log_{10} 301$
61. $\log_{10} 0.243$
62. $\log_{10} 225$
63. $\log_{10} 0.015$
64. $\log_{10} 2030$

11.2 Leyes de los logaritmos

Los logaritmos tienen leyes especiales que a continuación se enlistan:

Definición

Leyes de los logaritmos:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a u^n = n \log_a u$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n}\log_a u$$

Las leyes de los logaritmos se ilustran a continuación en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6

Evalúe las siguientes expresiones:

a) $\log_4 2 + \log_4 32$

b) $\log_2 80 - \log_2 5$

c) $\log_{10} \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$

d) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

e) $\log(\log 10^{10\,000})$

Solución a)

$$\begin{aligned} \log_4 2 + \log_4 32 &= \log_4 2 \cdot 32 \\ &= \log_4 64 \\ &= \log_4 4^3 = \mathbf{3} \end{aligned}$$

Solución b)

$$\begin{aligned} \log_2 80 - \log_2 5 &= \log_2 \frac{80}{5} \\ &= \log_2 16 \\ &= \log_2 2^4 = \mathbf{4} \end{aligned}$$

Solución c)

$$\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1000}} = \log_{10}1 - \log_{10}\sqrt{1000}$$
$$= 0 - \tfrac{1}{2}\log_{10}10^3 = -\tfrac{3}{2}$$

Solución d)

$$\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50 = \log_3 100 - (\log_3 18 + \log_3 50)$$
$$= \log_3 \frac{100}{18(50)}$$
$$= \log_3 \frac{1}{9}$$
$$= \log_3 3^{-2} = -2$$

Solución e)

$$\log(\log 10^{10\,000}) = \log 10000$$
$$= \log 10^4 = 4$$

Ejercicios de refuerzo 11.5

Utilice las leyes de los logaritmos para resolver los ejercicios.

65. $\log_2 4 - \log_2 2$
66. $\log_3 135 - \log_3 5$
67. $\log_3 \sqrt{127}$
68. $\log_2 160 - \log_2 5$
69. $\log_{10} 4 + \log_{10} 50 - \log_{10} 2$
70. $\log_4 192 - \log_4 3$
71. $\log_2 92 - \log_2 32$
72. $\log_3 6 - \log_3 15 + \log_3 22.5$
73. $\log_{12} 9 + \log_{12} 192$
74. $\log_4 64^{2.5}$
75. $\log_2 16^{\sqrt{2}}$
76. $\ln(ln e^{e^{50}})$
77. $\sqrt{\log_2 3.2 + \log_2 5}$
78. $\sqrt{\log_4 32 + \log_4 10 - \log_4 5}$
79. $\log_5 125 - \sqrt{2\log_2 4}$
80. $\log_2 128 + \log_4 320 - \log_2 4 - \log_4 5$
81. $\log_2 4 + 3\sqrt{2\log_4 8 + \log_{10} 10}$
82. $(\log_2 80 - \log_2 5)^{\log_3 54 - \log_3 6}$
83. $(\log_3 162 - \log_3 6)^{\sqrt{\log_2 48 - \log_2 3}}$
84. $\sqrt{\dfrac{\log_3 162 + \log_4 8 - \log_3 2 + \log_3 162}{(\log_5 75 - \log_5 3)^{\log_2 28 - \log_2 7}}}$

El **cambio de base** se utiliza en las operaciones en donde la base es distinta, expresándose en logaritmos base 10 (común) o natural.

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

Para conocer el resultado del cociente se recomienda usar una calculadora, sin embargo, el propósito del libro es desarrollar habilidades sin el uso de ella, por lo que solo expresará el cociente del cambio de base.

Ejemplo 7

Realice el cambio de base para las siguientes operaciones:

a) $\log_3 2 = \frac{\mathbf{log\,2}}{\mathbf{log\,3}}$

b) $\log_2 6 = \frac{\mathbf{ln\,6}}{\mathbf{ln\,2}}$

c) $\log_2 4 \log_6 2 = \frac{\ln 4}{\ln 2} \cdot \frac{\ln 2}{\ln 6} = \frac{\mathbf{ln\,4}}{\mathbf{ln\,6}}$

Ejercicios de refuerzo 11.6

Efectúe el cambio de base y realicé las operaciones:

85. $\log_2 6$
86. $\log_{\frac{1}{3}} 15$
87. $\log_3 \sqrt{2}$
88. $\frac{\log_3 4}{\log_5 3}$
89. $\log_3 12 \log_4 3$
90. $\frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{3}}$
91. $\frac{\log_3 4 \log_5 3}{\log_2 4}$
92. $\frac{\log_6 5 \log_3 6}{\log_4 5 \log_6 4}$

El desarrollo de expresiones logarítmicas, permiten escribir el producto de un logaritmo en suma, el cociente en resta y la potencia como una constante que antecede al logaritmo. Este proceso es conocido como e**xpansión de expresiones logarítmicas**, en el siguiente ejemplo se ilustra dicha expansión.

Ejemplo 8

Desarrolle las siguientes expresiones:

a) $\log\sqrt{\dfrac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-1)^2}}$ b) $\log\sqrt[3]{x\sqrt{y\sqrt[3]{z}}}$

Solución a)

$$\log\sqrt{\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-1)^2}}=\frac{1}{2}\log(x^2+4)-\frac{1}{2}\log(x^2+1)(x^3-1)^2$$

$$=\frac{1}{2}\log(x^2+4)-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-\frac{1}{2}\log(x^3-1)^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log(x^2+4)-\frac{1}{2}\log(x^2+1)-\log(x^3-1)}$$

Solución b)

$$\log\sqrt[3]{x\sqrt{y\sqrt[3]{z}}}=\frac{1}{3}\log\left(x\sqrt{y\sqrt[3]{z}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\log x+\frac{1}{3}\log\sqrt{y\sqrt[3]{z}}$$

$$=\frac{1}{3}\log x+\frac{1}{6}\log y+\frac{1}{6}\log\sqrt[3]{z}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}\log x+\frac{1}{6}\log y+\frac{1}{18}\log z}$$

Ejercicios de refuerzo 11.7

Desarrolle las expresiones logarítmicas.

93. $\log(AB^3)$
94. $\log_2\dfrac{x^2}{5}$
95. $\ln\sqrt{x}$
96. $\log\sqrt[5]{x^2y^3}$
97. $\log_2[x(x+2)]$
98. $\log_5(x\sqrt[3]{6})$
99. $\log_5\sqrt[3]{x^2+x-1}$
100. $ln\sqrt{ab}$
101. $\log\left(\dfrac{x^4y^3}{z^5}\right)$
102. $\log\left[\dfrac{x(x^2-1)}{\sqrt{x^1+1}}\right]$
103. $\ln x^2\sqrt{\dfrac{2y}{z}}$
104. $\log\sqrt[4]{y\sqrt{2x}}$

105. $\ln\sqrt[3]{5x^2y}$

106. $\log\dfrac{x^2}{y^2\sqrt{z}}$

107. $\log\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

108. $\ln\dfrac{\sqrt{2}x^2}{(x+1)^5}$

109. $\log\left(\dfrac{x}{y\sqrt{1-x}}\right)$

110. $\log\dfrac{\sqrt{x\sqrt{y}}}{\sqrt{z}}$

111. $\log\sqrt{\dfrac{x+2}{(x^2-1)\sqrt{x^3+3}}}$

112. $\ln\left(\dfrac{x^a\sqrt{x+1}}{x^2}\right)^b$

113. $\log\dfrac{\sqrt{\log\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{y^2}}$

114. $\log\left(\dfrac{2^x}{\dfrac{x\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{y}}\right)$

La **combinación de expresiones** logarítmicas en un solo logaritmo es el proceso inverso del desarrollo de los logaritmos. Es decir, las sumas y diferencias de logaritmos se pueden escribir en un solo logaritmo, esto se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9

Combine las siguientes expresiones logarítmicas en un solo logaritmo.

$a)\quad 3\log x+\dfrac{1}{2}\log(x+1) \qquad b)\quad 3lna+\dfrac{1}{2}lnb-4\ln(b^2-1)$

Solución a)

$$3\log x+\frac{1}{2}\log(x+1)=\log x^3+\log(x+1)^{1/2}$$
$$=\log x^3(x+1)^{1/2}$$
$$=\mathbf{\log x^3\sqrt{x+1}}$$

Solución b)

$$3lna+\frac{1}{2}lnb-4\ln(b^2-1)=\ln a^3+\ln b^{\frac{1}{2}}-\ln(b^2-1)^4$$
$$=\ln a^3b^{\frac{1}{2}}-\ln(b^2-1)^4$$
$$=\mathbf{\ln\left[\frac{a^3\sqrt{b}}{(b^2-1)^4}\right]}$$

Ejercicios de refuerzo 11.8

Simplifique las expresiones en un solo logaritmo.

115. $\ln 2 + \ln x$

116. $2\log x - \log y$

117. $\frac{1}{2}\log x - \log y - \log z$

118. $\frac{1}{4}\ln x + \ln y - \frac{1}{4}\ln z$

119. $4\log x + \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{2}\log y$

120. $\frac{1}{2}\log x + \frac{1}{4}\log y$

121. $\frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{3}{2}\log x$

122. $\frac{4}{3}\log x - \log 2 - \frac{1}{2}\log y$

123. $3(\mathrm{a}+\mathrm{b})\ln x - \frac{1}{3}\ln(b^2+1)$

124. $\frac{4}{3}\log x + \frac{1}{6}\log y - \log z - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log m$

125. $2alog\, x + \frac{1}{2}\log(x-3) - 3a\log y$

126. $\frac{3}{b}lnx + \frac{a}{b}\ln(y-1) - \frac{1}{b}\ln z$

11.3 Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Se le nombra **ecuación exponencial** en donde la incógnita aparece como exponente y se requiere conocerla para ello se pueden utilizar dos métodos:

Igualación de la base. Se utilizan las propiedades de los exponentes para lograr que en ambos miembros de la ecuación aparezca la misma base, tomando la igualdad solo de los exponentes.

Cambio de variable. Consiste en sustituir en cada término cuya base esta elevada a una potencia por una nueva variable, para establecer una nueva ecuación más fácil de resolver.

Para resolver las ecuaciones exponenciales se debe de **homologar la base** en los dos términos de la igualdad. Por ejemplo para resolver la siguiente igualdad:

$$3^{x+2} = 27$$

El 27 se expresa como el resultado del 3 elevado a un número, que es 3, se puede escribir $3^{x+2} = 3^3$, las cantidades de las potencias se igualan cuando las bases son iguales, por tanto: $x+2=3$, resolviendo la ecuación se tiene $x=1$. Observe los siguientes ejemplos para reforzar el procedimiento.

Ejemplo 10

Encuentre el valor de x:

$a)\quad 3^{x-3} = 81$ $\qquad c)\quad 3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^{x} = \frac{13}{9}$

$b)\quad \left(\frac{1}{10}\right)^{x} = 100$ $\qquad d)\quad \sqrt[1+x]{4} = 2^{x}$

Solución a)

$$3^{x-3} = 3^{4}$$

$$x - 3 = 4$$

Por tanto

$$\boldsymbol{x = 7}$$

Solución b)

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{x} = 10^{2}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{x} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2}$$

Por tanto

$$\boldsymbol{x = -2}$$

Solución c)

Para este caso se utilizan las leyes, se tiene:

$$3^{x} \cdot 3^{2} + 3^{x} \cdot 3 + 3^{x} = \frac{13}{9}$$

Se factoriza 3^{x}

$$3^{x}(3^{2} + 3 + 1) = \frac{13}{9}$$

$$13 \cdot 3^{x} = \frac{13}{9}$$

$$3^{x} = \frac{1}{9}$$

Se expresa como potencia de base 3.

$$3^{x} = 3^{-2}$$

Ahora las cantidades de las potencias se igualan debido a que las bases son iguales.

$$\boldsymbol{x = -2}$$

Solución d)

Se expresa la raíz como potencia.

$$4^{\frac{1}{1+x}} = 2^x$$

El 4 se expresa como 2 al cuadrado.

$$2^{2\left(\frac{1}{1+x}\right)} = 2^x$$

Se igualan las potencias.

$$2\left(\frac{1}{1+x}\right) = x$$

Se aplica álgebra.

$$2 = x(x+1)$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Ahora se factoriza.

$$(x-1)(x+2) = 0$$

Las raíces son:

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -2$$

La respuesta es $\boldsymbol{x_1 = 1}$

El cambio de variable se realiza cuando las bases son distintas o que existe una operación de suma o sustracción, por ejemplo se requiere resolver la siguiente ecuación:

$$3^{2x} - 3 \cdot 3^x = -2$$

Por tanto se puede sustituir $\boldsymbol{3^x}$ por $\boldsymbol{p}$**,** quedando la ecuación como sigue:

$$p^2 - 3p + 2 = 0$$

Esta ecuación se resuelve por algún método como factorización, fórmula general división sintética. Teniendo:

$$p^2 - 3p + 2 = (p-1)(p-2)$$

Si $\boldsymbol{p = 3^x}$

$$\boldsymbol{3^x = 1} \qquad \text{ó} \qquad \boldsymbol{3^x = 2}$$

$$xlog3 = log1 \qquad xlog3 = log2$$

$$x_1 = \frac{log1}{log3} \qquad x_2 = \frac{log2}{log3}$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0.6$$

Ejercicios de refuerzo 11.9

Obtenga el valor de la incógnita de las siguientes expresiones exponenciales.

127. $32^x = 2$
128. $3^{2x} = 27$
129. $10^x = 0.01$
130. $3^x = 9^{x+2}$
131. $2^{2x} = 64$
132. $3^{\frac{x+1}{x-2}} = \frac{1}{9}$
133. $4^{x+1} = 2^{x-3}$
134. $5^{3x+2} = 5^4$
135. $a^{2x-3} = \sqrt[3]{a}$
136. $32^x = 2$
137. $3^{x+1} \cdot 3^x = \frac{1}{27}$
138. $\left(\frac{9}{4}\right)^x \left(\frac{8}{27}\right)^x = \frac{2}{3}$
139. $2^{x-1} + 2^x - 2^{x+1} = -4$
140. $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$
141. $3^{x+2} + 2 \cdot 3^x - 33 = 0$
142. $2^{x-1} - 3 \cdot 2^x + 2^{-1} = -2$
143. $2^x \cdot 2^{3-2x} + 4 = 8$
144. $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$
145. $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$
146. $5^{2x-1} - 30 \cdot 5^x + 625 = 0$

Existe también un **método gráfico** para conocer el valor de la potencia (incógnita) en una función exponencial, el procedimiento es el siguiente (Figura 11.3):

1. Se gráfica función,
2. Se identifica el valor de y y se interpola en la gráfica.
3. Se lee el valor de x correspondiente.

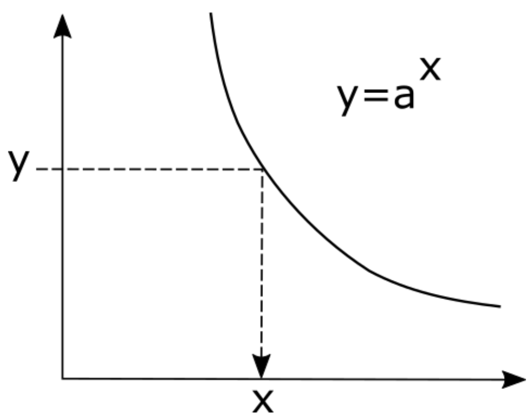


Figura 11.3 Método para encontrar el valor de la potencia de una función exponencial.

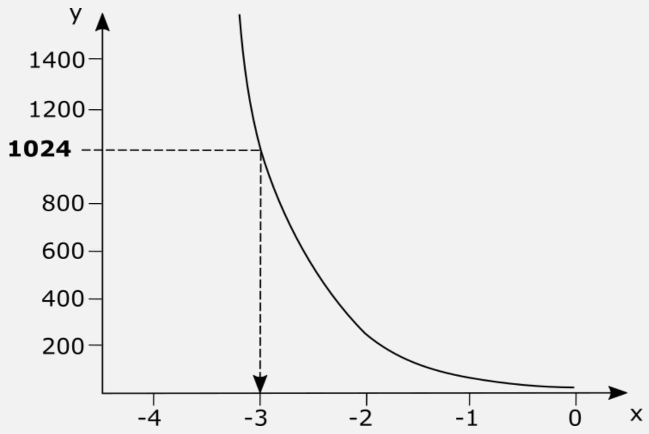
El procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11

Encuentre gráficamente el valor de "X" de la función $\mathbf{1024 = 4^{2-x}}$

Solución

Se grafica la función y se ubica el valor de 1024, se interpola y se lee el valor de x.



El valor leído corresponde a $\boldsymbol{x = -3}$;

Se comprueba la igualdad.

$$1024 = 4^{2-x}$$

$$1024 = 4^{2-(-3)}$$

$$1024 = 4^{5}$$

$$1024 = 1024$$

Ejercicios de refuerzo 11.10

Utilice el método gráfico para encontrar el valor de la incógnita.

147. $2^x = 16$
148. $3^x = 243$
149. $5^{x-1} = 625$
150. $2^{x+2} = 1024$
151. $\left(\frac{5}{2}\right)^x = 0.0256$
152. $\left(\frac{9}{4}\right)^{x-2} = 2.25$
153. $5^{\frac{2-x}{2}} = 625$
154. $10^{\frac{x}{2}} = 10{,}000$
155. $\frac{27^{x+2}}{95^{x+3}} = 20$
156. $\frac{4^{x+2}}{9^{2x}} = 2690420$

Las **ecuaciones exponenciales** también pueden presentarse en un **sistema de ecuaciones**, el procedimiento normal exige cambio de variable para presentarla de una forma polinomial y resolverla por algún método ya tratado con anterioridad (sustitución, igualación, reducción, etc.). El ejemplo siguiente ilustra tal procedimiento.

Ejemplo 12

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones exponenciales.

$$\begin{cases} 2^x - 5^{2y} = -1 \\ 2^{2x-3} + 5^{4y-1} = 7 \end{cases}$$

Solución

Primero se separan las potencias constantes de las incógnitas.

$$2^{2x-3} = 2^{2x} \cdot 2^{-3}$$
$$5^{4y-1} = 5^{4y} \cdot 5^{-1}$$
$$2^{2x} \cdot 2^{-3} = \frac{1}{8}2^{2x}$$

$$5^{4y} \cdot 5^{-1} = \frac{1}{5}5^{4y}$$

$$\begin{cases} 2^x - 5^{2y} = -1 \\ \frac{1}{8}2^{2x} + \frac{1}{5}5^{4y} = 7 \end{cases}$$

Debido a que las bases son distintas se hará cambio de variable.

$$2^x = t \qquad 5^{2y} = p$$

Ahora el nuevo sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} t - p = -1 & \dots ① \\ \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{5}p^2 = 7 & \dots ② \end{cases}$$

$$Se\ despeja\ \ de\ \ ①\quad t = p - 1\ y\ se\ sustituye\ en\ ②$$

$$\frac{1}{8}(p-1)^2 + \frac{1}{5}p^2 = 7$$

$$40\left[\frac{1}{8}(p-1)^2 + \frac{1}{5}p^2 = 7\right]$$

$$5(p-1)^2 + 8p^2 = 280$$

$$5p^2 - 10p + 5 + 8p^2 = 280$$

$$13p^2 - 10p - 275 = 0$$

Se obtienen las raíces con la fórmula general:

$$p_1 = 5 \qquad p_2 = -\frac{55}{13}$$

$$t_1 = 4 \qquad t_2 = -\frac{68}{13}$$

Las soluciones para el par ordenado $(p_1 = 5\ ,\ t_1 = 4)$ serán:

$$2^x = 4 \qquad 5^{2y} = 5$$

Por tanto:

$$2^x = 2^2 \qquad 5^{2y} = 5^1$$

Finalmente las cantidades de las potencias se igualan ya que las bases son iguales.

$$\boldsymbol{x = 2 \qquad y = \frac{1}{2}}$$

Ejercicios de refuerzo 11.11

Resuelva los sistemas de ecuaciones.

157. $\begin{cases} 4^x = 16y \\ 2^{x+1} = 4y \end{cases}$

158. $\begin{cases} 2^{2x-y} = 32 \\ 3^{x-2y} = 3 \end{cases}$

159. $\begin{cases} 3^{y-x} = 9 \\ 3^{x+y} = 81 \end{cases}$

160. $\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{y-x} = 3 \end{cases}$

161. $\begin{cases} 3^{x+y} = 27 \\ 2^{3x-2y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

162. $\begin{cases} 2^{x/2} \cdot 8^y = 2 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$

163. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 20 \\ 2^{x+y} = 64 \end{cases}$

164. $\begin{cases} 3^{2x} \cdot 3^{2y} = 81^2 \\ 5^x \cdot 25^{2x} = 5^{2y} \end{cases}$

165. $\begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3^{y-2} = 5 \\ 3^x \cdot 3^y = 27 \end{cases}$

166. $\begin{cases} 3^x \cdot 3^{2y} = 3^8 \\ 2^{x-1} \cdot 2^{y+1} = 2^6 \end{cases}$

167. $\begin{cases} 3^x + 2^y = 7 \\ 3^x + 2^{2y} = 19 \end{cases}$

168. $\begin{cases} 2^x + 3^y = 5 \\ 2^x - 3^y = 3 \end{cases}$

169. $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 41 \end{cases}$

170. $\begin{cases} 2^x - 3^y = 1 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}$

171. $\begin{cases} 3^x - 2^{y+1} = 235 \\ 3^{x-1} - 2^{y-1} = 79 \end{cases}$

172. $\begin{cases} 3^{x-1} - 3^{-y} = \dfrac{2}{9} \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

173. $\begin{cases} 2^{x} - 2^{y} = 24 \\ x + y = 8 \end{cases}$

174. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2^{x} - 2^{y} = 2 \end{cases}$

175. $\begin{cases} 2^{x} + 2^{y} = 20 \\ 2^{x+y} = 64 \end{cases}$

176. $\begin{cases} 3^{x+1} - 2^{y+1} = -3 \\ 2^{y} - 2 \cdot 3^{x+2} = -4 \end{cases}$

177. $\begin{cases} 3 \cdot 2^{x+1} - 2 \cdot 3^{y+1} = 10 \\ 2^{x} - 3 \cdot 3^{y} = 1 \end{cases}$

178. $\begin{cases} 3 \cdot 2^{x} - 2 \cdot 3^{y} = 21 \\ 3^{y+2} - 2 \cdot 2^{x-1} = 80 \end{cases}$

179. $\begin{cases} 2 \cdot 3^{x} - 8^{y-1} + 2^{z+5} = 70 \\ 3x + y + 2z = 10 \\ 2^{x+3} + 2 \cdot 3^{y} - 3 \cdot 2^{z+1} = 46 \end{cases}$

180. $\begin{cases} 2^{x} + 3^{y} + 2^{z} = 9 \\ 3^{x} + 2^{y+1} - 3 \cdot 2^{z-1} = 7 \\ 2^{x-1} + 3^{y-1} + 2^{3z-1} = 35 \end{cases}$

Una ecuación logarítmica es donde **la incógnita** se encuentra en el **argumento de logaritmos o en la base**, recuerde las leyes de los logaritmos para la resolución de los ejercicios.

Solución de una ecuación logarítmica. Se expresa la ecuación como logaritmos (aplicando las leyes de forma conveniente) y luego se igualan los argumentos, para encontrar la solución.

Se debe de expresar al utilizar las leyes de los logaritmos:

$$\log_a x = \log_a y$$

Luego se igualan los argumentos, debido a que se utiliza la función inversa

$$a^{\log_a x} = a^{\log_a x}$$

Por tanto:

$$x = y$$

El procedimiento se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 13

Encuentre el valor de la incógnita:

$a)$ $\ln(4x-1)-\ln(x-2)=\ln 5$ $\qquad$ $b)$ $2\log_3 x^3 = \log_3 8 + 3\log_3 x$

Solución a)

Se utilizan las leyes de los logaritmos:

$$\ln\frac{(4x-1)}{(x-2)} = \ln\ 5$$

Se aplica función inversa del logaritmo natural.

$$e^{\ln\frac{4x-1}{x-2}} = e^{\ln 5}$$

Se igualan los argumentos:

$$\frac{4x-1}{x-2} = 5$$

Se realiza algebra.

$$4x-1 = 5(x-2)$$

$$5x-4x = -1+10$$

$$\boldsymbol{x = 9}$$

Solución b)

$$2\log_3 x^3 = \log_3 8 + 3\log_3 x$$

Se utilizan las leyes de los logaritmos:

$$2\log_3 x^3 = \log_3 8 + \log_3 x^3$$

$$2\log_3 x^3 - \log_3 x^3 = \log_3 8$$

$$\log_3 x^3 = \log_3 8$$

Se utiliza una base de 3.

$$3^{\log_3 x^3} = 3^{\log_3 8}$$

Se igualan los argumentos:

$$x^3 = 8$$

$$\boldsymbol{x = 2}$$

Ejercicios de refuerzo 11.12

Calcule el valor de la incógnita en las siguientes ecuaciones logarítmicas.

181. $\ln x = 2\ln 3$

182. $\log x + \log 30 = 1$

183. $\log x^3 = \log 6 + 2\log x$

184. $1 + 2\log x = 3$

185. $\ln 2x = \log 32 - logx$

186. $\log\dfrac{2x+1}{x-1} = 0$

187. $2\ln(x-1) = 2\ln 2$

188. $\log(x-1) - \log(x^2-1) = \log\dfrac{1}{3}$

189. $\log(2x-3) - \log(x-1) = \log 5$

190. $\log x + \log(x+2) = \log(4x-1)$

191. $\log\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \log 2 = \log(x+3)$

192. $2\log(2x-2) = 1$

193. $\log_7(x^3 - 9x^2 + 14 + 1) = 0$

194. $2\log x = 3 + \log\dfrac{x}{10}$

195. $3\log_2 x = 3\log_2 5 + \log_2 16 - 2\log_2 2$

196. $\log\sqrt{x+4} - \log 3x + 2\log 3 = 0$

197. $\log x - \log(x-2) = \log(4x-3) - \log 3$

198. $3\log x - 2\log 2 = \log x^2 - \log 2$

199. $\ln(x+1) - \ln\sqrt{x-1} = \ln(x-2)$

200. $\log(x^2+2) - \log(x+1) = \log(2-x)$

201. $\log_3 x + \log_9 x - \log_{81} x = \dfrac{5}{2}$

Nota: Para resolver el ejercicio 201 utilice el cambio de base.

De igual forma las **ecuaciones logarítmicas** pueden conformar un **sistema de ecuaciones**, lo primero que se debe hacer para resolverlas es expresar todos los componentes de cada ecuación a la misma base, para trasladarla por medio de la igualación de argumentos a un sistema de ecuaciones y ser resuelta por algún método. El ejemplo siguiente ilustra tal procedimiento.

Ejemplo 14

Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \log_5 y + \log_5(x-2) = 1 \\ \log_3 3x - \log_3(y-2) = 1 \end{cases}$$

Solución

Primero se expresa el valor de 1 en su forma logarítmica.

$$1 = \log_5 5^1$$

$$1 = \log_3 3^1$$

Ahora el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} \log_5 y + \log_5(x-2) = \log_5 5^1 \\ \log_3 3x - \log_3(y-2) = \log_3 3^1 \end{cases}$$

Se utilizan las leyes de los logaritmos:

$$\begin{cases} \log_5 y(x-2) = \log_5 5^1 \\ \log_3 \dfrac{3x}{y-2} = \log_3 3^1 \end{cases}$$

Ahora se igualan los argumentos:

$$y(x-2) = 5 \quad \ldots ①$$

$$\frac{3x}{y-2} = 3 \quad \ldots ②$$

De la ecuación ② se despeja a x.

$$3x = 3y - 6$$

$$x = y - 2 \quad \ldots ③$$

Se sustituye la ecuación ③ en la Ec. ①.

$$y(y-4) = 5$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0$$

Se factoriza

$$(y+1)(y-5) = 0$$

Las raíces son:

$$y_1 = -1 \qquad y_2 = 5$$

Ahora con la ecuación ③.

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$$

La solución es:

$$\boldsymbol{x = 3} \qquad \boldsymbol{y = 5}$$

Ejercicios de refuerzo 11.13

Resuelva los sistemas de ecuaciones.

202. $\begin{cases} x+y=110 \\ \log x+\log y=3 \end{cases}$

203. $\begin{cases} y-3y=70 \\ \log y-2\log x=0 \end{cases}$

204. $\begin{cases} \log x+\log y=4 \\ x-4y=0 \end{cases}$

205. $\begin{cases} \log x+\log y=5 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

206. $\begin{cases} \log_2 x-3\log_2 y=-3 \\ x+y=12 \end{cases}$

207. $\begin{cases} \log x-\log y=1 \\ 3x+2y=64 \end{cases}$

208. $\begin{cases} logx+\log y=2 \\ x-y=21 \end{cases}$

209. $\begin{cases} \ln x+\ln y=\ln 8 \\ e^{x-y}=e^2 \end{cases}$

210. $\begin{cases} 2\log x+\log y=4 \\ \dfrac{\log x}{\log y}=2^{-1} \end{cases}$

211. $\begin{cases} \log x-\log y=1 \\ x^2-y^2=11 \end{cases}$

212. $\begin{cases} \log x+3\log y=5 \\ logx-\log y=3 \end{cases}$

213. $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=\log 33 \\ e^x=\dfrac{e^{11}}{e^y} \end{cases}$

214. $\begin{cases} \log x-\log y=\log 56-\log 20 \\ \log 7+1=\log x+\log y \end{cases}$

215. $\begin{cases} \log_x(9+y)=2^{-1} \\ \log_y(9-x)=2 \end{cases}$

216. $\begin{cases} \log x=\log 2y+\log 6-\log 3 \\ 2\log x=3\log y-2\log y \end{cases}$

217. $\begin{cases} 3\log x+\log y=3 \\ \log\left(\dfrac{x}{y}\right)=1 \end{cases}$

218. $\begin{cases} \log(x+y)=2\log 3 \\ x\log 2+y\log 3=\log 2592 \end{cases}$

219. $\begin{cases} \log(x+y)+\log(x-y)=2\log 4 \\ 2^x\cdot 2^y=2^8 \end{cases}$

220. $\begin{cases} \log_2(x-y)=2 \\ \log_2 x-\log_2 y=1 \end{cases}$

221. $\begin{cases} 2\log_2 x-\log_3 y=2 \\ \log_2 x+\log_3 y=4 \end{cases}$

11.4 Escalas log-log y semilog

En las ciencias químico biológicas como en otras disciplinas experimentales, los datos se representan en una gráfica, a la cual se le relaciona una ecuación que representa tal comportamiento, en el gráfico de ejes cartesianos se debe escoger de manera adecuada la escala que permita una lectura sencilla.

Las escalas deben de ser números sencillos, estos pueden ser múltiplos de 2, 5 o 10, si los valores de algún eje no son proporcionales, se puede simplificar realizando cambio de variable para que sea un recta, pues ésta es fácilmente distinguible. Los cambios de variables por lo general son utilizando los logaritmos.

Primero se analizará una **gráfica con escalas lineales usando un eje logarítmico**, por lo tanto, suponga que se tiene una función exponencial del tipo:

$$y = na^x$$

Se aplican logaritmos a la expresión.

$$\log y = x \log a + \log n$$

Se hace cambio de variable, considerando que n es una constante y $\log n$, también lo será; ahora a es la base del logaritmo cuyo valor es también una constante por tanto:

$$\log n = b$$

$$\log a = m$$

Se puede reescribir como la ecuación de la línea recta:

$$\boldsymbol{\log y = mx + b}$$

DOnde:

$$Ordenada\ al\ origen\ es\ \log n \qquad Pendiente\ es\ m = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 15

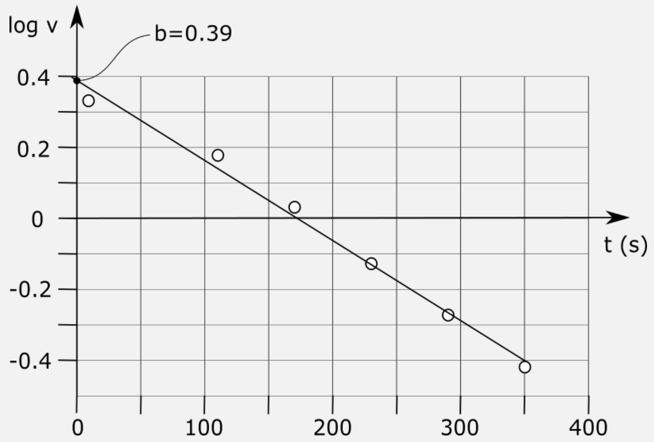
Se tienen los siguientes datos de velocidad en función del tiempo, represente los siguientes datos de velocidad, en función del tiempo, utilizando una escala lineal con un eje logarítmico y obtenga la ecuación lineal

$t\ (s)$	$v\ \left(\frac{m}{s}\right)$
10	2.13
110	1.49
170	1.07
230	0.74
290	0.53
350	0.38

Solución

La variable dependiente es la velocidad por tanto se aplican los logaritmos y se grafican los datos:

$t\ (s)$	$logv$
10	0.328
110	0.173
170	0.029
230	-0.13
290	-0.275
350	-0.42



Ahora para la pendiente se seleccionan dos puntos:

$$m = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-0.13 + 0.275}{230 - 290} = -0.0024$$

La ecuación de la línea es:

$$\mathbf{\log v = -0.0024x + 0.39}$$

Para trazar un gráfico con un eje cuya escala sea logarítmica y el otro con escala lineal, se utiliza una hoja semilogarítmica. Para la construcción se colocan en lugar de logaritmos "1", "2", "3",... los valores de "1", "2", "3",...; esto produce una escala no lineal en donde la distancia entre 1 y 10 es la misma para 10 y 100 (llamados ciclos) vea la siguiente figura:

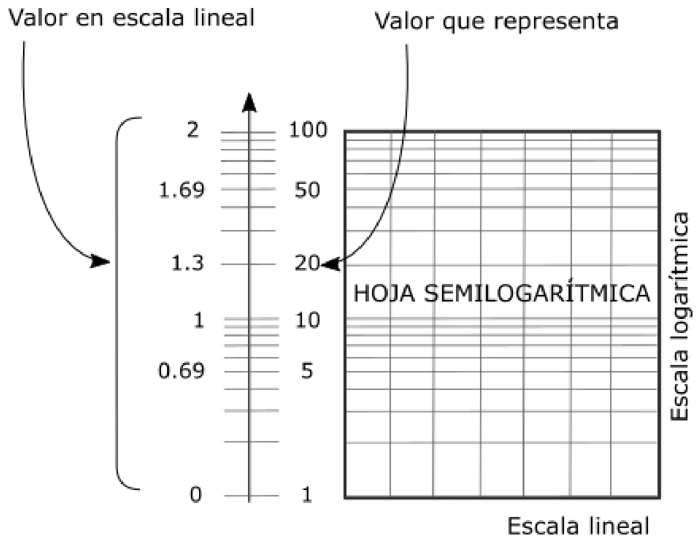


Figura 11.4 Explicación de la escala no lineal de una hoja semilogarítmica

Ahora directamente se puede graficar el ejemplo anterior en una hoja semiligarítmica con dos ciclos en el eje de la variable dependiente.

t(s)	v $\left(\frac{m}{s}\right)$
50	2.13
110	1.49
170	1.07
230	0.74
290	0.53
350	0.38

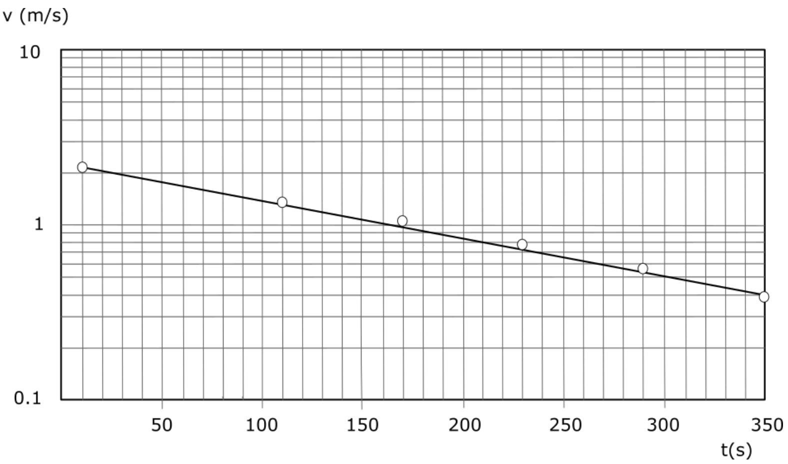


Figura 11.5 Uso de una hoja logarítmica.

En la literatura se utilizan con frecuencia las gráficas en hojas semilogarítmicas en la figura 11.4 se presenta el cambio de la viscosidad absoluta de algunas sustancias en función de la temperatura a 1 atmósfera de presión; debido a que en el eje de la variable dependiente tiene grandes incrementos de la viscosidad que va desde 0.000,000,1 hasta 0.001 donde es más fácil la representación con este tipo de hojas.

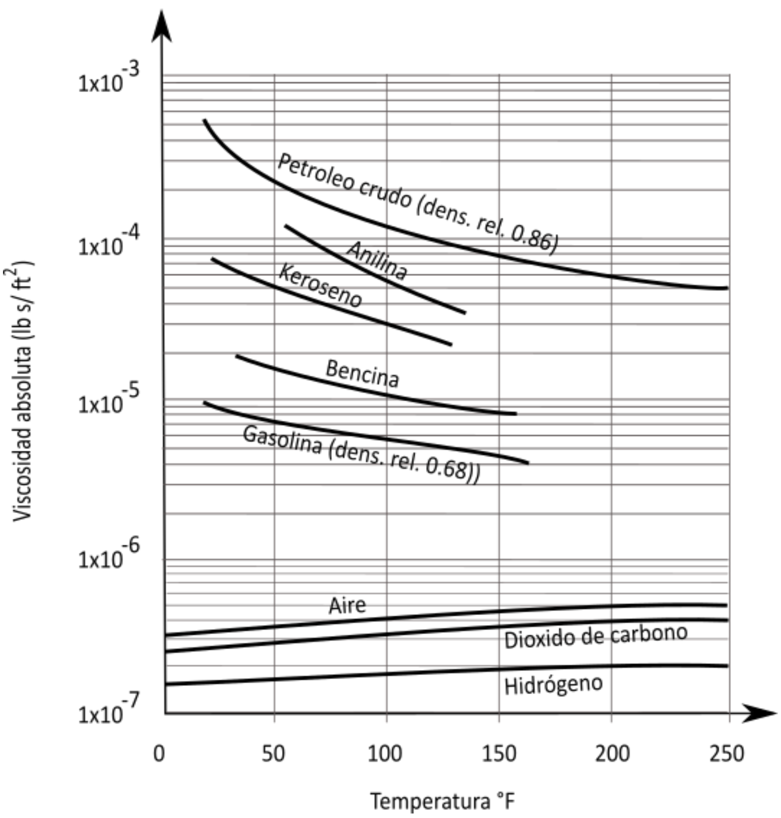


Figura 11.6 Viscosidad absoluta de algunos fluidos a 1 atmósfera.

Fuente: Adaptado de White, 2003

Ahora se analiza una **gráfica con escalas lineales usando dos ejes logarítmicos**, por tanto suponga que se tiene una función del tipo:

$$y = ax^n$$

Se puede expresar como:

$$\log y = \log ax^n$$

Es decir:

$$\log y = \log a + n \log x$$

Se hace el cambio de variable:

$$Y = logy$$

y

$$X = \log x$$

Por tanto queda:

$$Y = \log a + nX$$

Recuerde que la ecuación de la línea recta es: $y = mx + b$, por tanto se tiene lo siguiente:

$Ordenada\ al\ origen\ es\ \log a$ $\quad$ $Pendiente\ es{:}\ \ m = \dfrac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$

Ejemplo 16

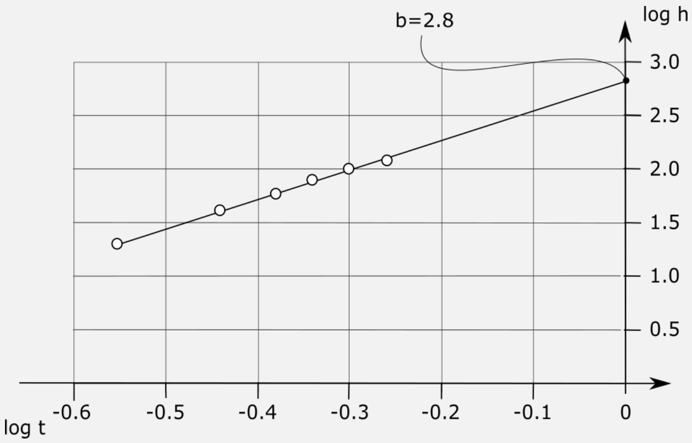
Se tienen los siguientes datos de la altura en función del tiempo, utilice una escala lineal con dos ejes logarítmicos y obtenga la ecuación lineal.

$t\ (s)$	h (m)
0.54	120
0.50	100
0.45	80
0.41	60
0.36	40
0.28	20

Solución

Se aplican logaritmos en ambas variables, quedando:

$\log t$	$\log h$
-0.26	2.08
-0.30	2.00
-0.34	1.90
-0.38	1.77
-0.44	1.60
-0.55	1.30



La pendiente se calcula tomando los puntos:

$$m = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} \qquad m = \frac{1.3 - 2}{-0.55 - (-0.3)} = 2.8$$

La ecuación de la línea es:

$$\boldsymbol{Y = 2.8X + 2.8}$$

De la misma forma el ejemplo anterior se puede graficar con una hoja log-log, escogiendo un ciclo en el eje de la variable independiente (tiempo) y tres ciclos en la variable dependiente (h).

t(s)	h(m)
0.54	120
0.50	100
0.45	80
0.41	60
0.36	40
0.28	20

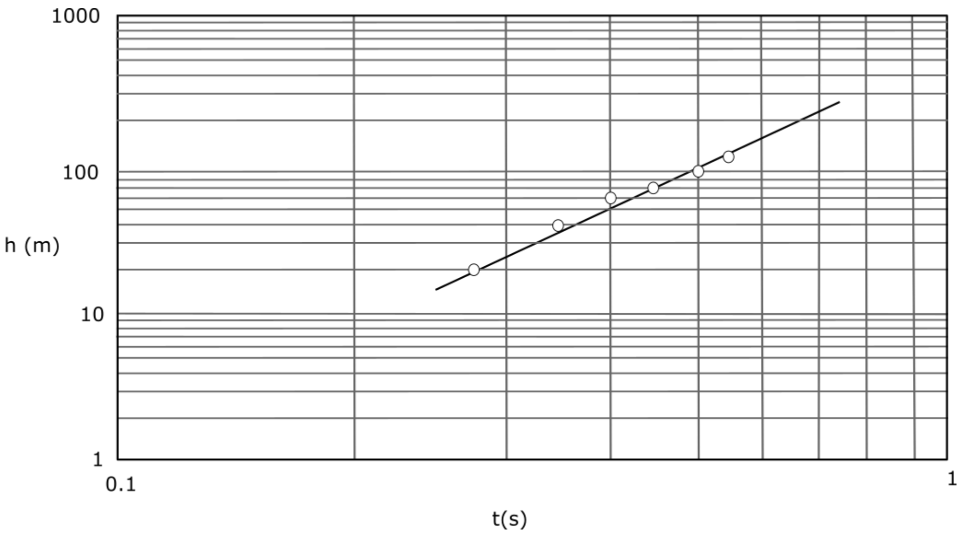


Figura 11.6 Uso de una hoja log-log

Ejercicios de refuerzo 11.14

Obtenga la ecuación lineal de las siguientes tablas:

222.

X	3	5	6	8	10	12	14
Y	0.400	0.250	0.175	0.100	0.050	0.030	0.015

223.

X	4	6	8	12	30	80
Y	1.2	1.3	1.44	1.73	3.98	39.8

224.

X	4	15	50	100	200	250
Y	11	14	32	100	1000	3162

225.

X	6	5	4	3	2	1
Y	2	4	9	16	31	126

226.

X	-1	0	1	2	3	4
Y	30	70	130	250	530	1030

227.

X	60	136	180	270	340	600
Y	3.4	2.5	2.1	1.7	1.5	1.2

228.

X	0.84	0.8	0.75	0.71	0.66	0.55
Y	120	85	56	42	25	7

229.

Distancia Tierra al Sol (Km)	1	1.5	5.22	9.57	19.255
Tiempo (días)	365.2	686.98	4332.59	10759.2	30685.93

Quimática

Logaritmos y pH

Escrito por: Adriana Hernández Reyes
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM
qfbadriaher@gmail.com

La acidez de una disolución está determinada por la concentración de H^+, en la mayoría de las sustancias comunes está concentración es muy baja y expresarla en forma exponencial o decimal no es práctico debido a que puede provocar errores. En el año de 1909 Sören Sörensen propuso la transformación logarítmica de la concentración molar de protones a la que nombro pH y definió como:

$$pH = log\frac{1}{[H^+]}$$

$$pH = -log\,[H^+]$$

Actualmente el pH es la forma más común de reportar acidez y alcalinidad porque mediante la aplicación de logaritmos se expresa en números enteros, puede medirse directamente y reportarse en moles/litro, no obstante en la mayoría de los laboratorios se deduce la cantidad de H^+ por comparación con un estándar de concentración conocida y el resultado se expresa en unidades de pH que a menor valor, mayor concentración de H^+.

Así mismo el uso de logaritmos y el conocimiento del comportamiento ácido-base del agua pura, permitieron establecer la escala de pH, con el cálculo de la constante de disociación del agua a partir de la siguiente reacción:

$$H_2O_{(l)} + H_2O_{(l)} \rightarrow H_3O^+_{(aq)} + OH^-_{(aq)}$$

A 25°C la constante de disociación del agua se expresa como:

$$K_d = \frac{[H^+][OH^-]}{[H_2O]} = 1.8 \times 10^{-16}$$

Se considera que el agua pura no reacciona como ácido o base debido a que se disocia muy poco y la neutralidad se determina con la cantidad de iones H^+ y OH^- presentes en ella, por lo que el K_d se transforma en Kw productico iónico del agua.

$$K_w = K_d[H_2O] = [H^+][OH^-]$$

$$K_w = 1.8 \times 10^{-16}[H_2O]$$

Para calcular la concentración molar en 1L de agua (1000g) se realiza el siguiente cociente:

$$[H_2O] = \frac{1000\frac{g}{L}}{\left(18\frac{g}{mol}\right)} = 55.556\frac{mol}{L}$$

Se tiene entonces que:

$$K_w = 1.8 \times 10^{-16}\left(55.556\frac{mol}{L}\right)$$

$$K_w = [H^+][OH^-] = 1 \times 10^{-14}$$

Debido a que en el agua pura por cada ion hidrogeno existe un ion hidroxilo, entonces:

$$[H^+] = [OH^-]$$

Se puede escribir $K_w = [H^+]^2$

La concentración $[H^+]$ es:

$$[H^+] = \sqrt{1 \times 10^{-14}} = 1 \times 10^{-7}$$

Para el agua pura $pH = -log\,[H^+] = 7$

De forma semejante se puede definir el valor de pOH para hidroxilos en neutralidad de 7 y a partir del producto iónico del agua.

$$K_w = [H^+][OH^-] = 1 \times 10^{-14}$$

Para calcular $[H^+]$.

$$[H^+] = \frac{1 \times 10^{-14}}{[OH^-]}$$

Aplicando la ecuación de Sörensen a estas ecuaciones se tiene:

$$Kw = pH + pOH = 14$$

$$pH = 14 - pOH$$

En la Figura 1 se muestra la escala de pH que puede encontrarse en la literatura que representa el efecto de la lluvia ácida en la vida acuática lo que ilustra una de sus aplicaciones prácticas.

La escala de pH:

- Varía en forma inversa a la concentración de protones, a mayor concentración mayor acidez, pero menor valor de pH.
- Es logarítmica, por tanto, un cambio de una unidad de pH, representa un cambio de diez veces en la concentración de protones.
- El pH y el pOH son complementarios y en soluciones acuosas suman 14.

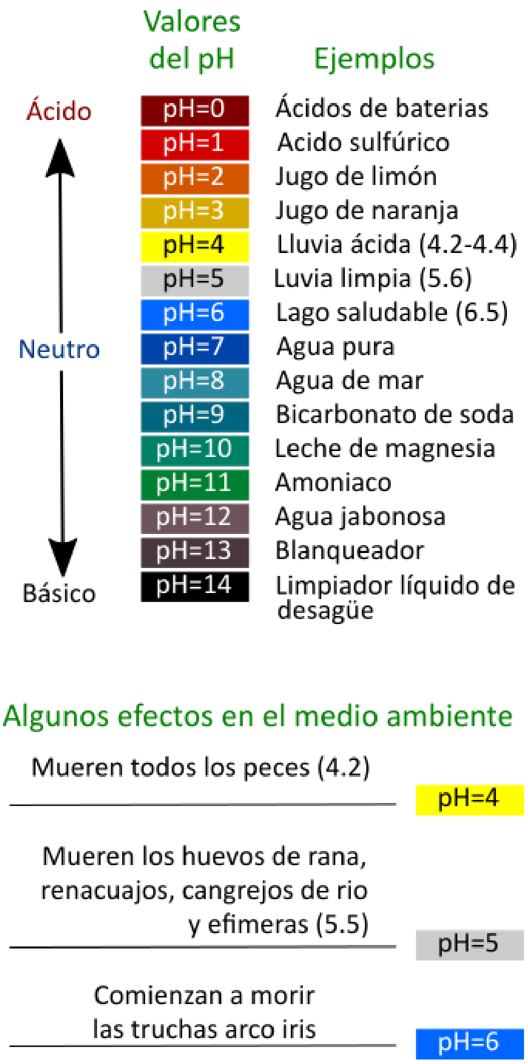


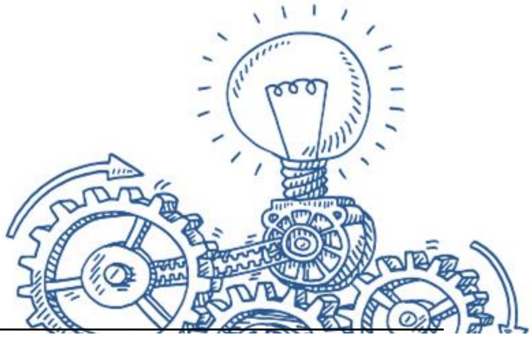
Figura 1. Escala de pH, ejemplos y efectos en el medio ambiente.

Imagen tomada y modificada de: https://www3.epa.gov/acidrain/education/site_students_spanish/phscale.html.

Referencias

1. Brown, T. L., LeMay, H. E., Bursten, B.E., & (2009). Química la ciencia central. (11a ed.) Pearson

2. Phillips, S. J., Strozac, S.V., & Wistrom C. (2008). Química conceptos y aplicaciones. McGraw-Hill.



Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 11. Exponentes y logaritmos

1. 2^{3x+8} **3.** 2^{x-7} **5.** 2^{-6x+5} **7.** 2^{2x-7} **9.** $2^{-\frac{x}{2}}$ **11.** 256 **13.** 16 **15.** 729

17. 19683 **19.** 9 **21.** 1024 **23.** 16 **25.** $\log_6 216 = 3$ **27.** $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$

29. $\log_a 16 = \frac{3}{2}$ **31.** $\log_7 b = \frac{1}{3}$ **33.** $\log_{1/5} 4 = -x$ **35.** $\log_{2/y} k = z$ **37.** $\log_{1/3} 2x = \sqrt{x}$

39. $\log_{\frac{1}{5}} x = e^x$ **41.** $\log_e lnx = e^x$ **43.** $\sqrt{25} = 5$ **45.** $a^x = b$ **47.** $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

49. $\sqrt{a^3} = 2$ **51.** $e^x = 3$ **53.** $\sqrt[\frac{1}{\sqrt{3}}]{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **55.** $\left(\frac{1}{x^2}\right)^{-4} = \sqrt{2}$ **57.** 1.34242

59. 1.51455 **61.** -0.61439 **63.** -1.8239 **65.** 1 **67.** 1 **69.** 2 **71.** 5 **73.** 3

75. $4\sqrt{2}$ **77.** 2 **79.** 1 **81.** 8 **83.** 9 **85.** $\frac{\log 6}{\log 2}$ ó $\frac{\ln 6}{\ln 2}$ **87.** $\frac{1}{2}\frac{\log 2}{\log 3}$ ó $\frac{1}{2}\frac{\ln 2}{\ln 3}$

89. $\frac{\log 12}{\log 4}$ ó $\frac{\ln 12}{\ln 4}$ **91.** $\frac{\log 2}{\log 5}$ ó $\frac{\ln 2}{\ln 5}$ **93.** $\log A + 3\log B$ **95.** $\frac{1}{2}\ln x$

97. $\log_2 x + \log_2(x+2)$ **99.** $\frac{1}{3}\log_5(x^2+x-1)$ **101.** $4\log x + 3\log y - 5\log z$

103. $2\ln x + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln y - \frac{1}{2\ln z}$ **105.** $\frac{1}{3}\ln 5 + \frac{2}{3}\ln x + \frac{1}{3}\ln y$

107. $\frac{1}{3}\log(x-1) - \frac{1}{3}\log(x+1)$ **109.** $\log x - \log y - \frac{1}{2}\log(1-x)$

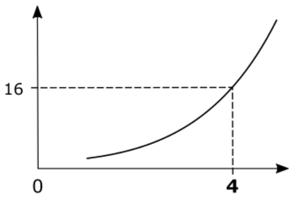
111. $\frac{1}{2}\log(x+2) - \frac{1}{2}\log(x^2-1) - \frac{1}{4}\log(x^3+3)$ **113.** $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\log x\right) - \frac{2}{3}y$

115. $\ln 2x$ **117.** $\log\frac{\sqrt{x}}{yz}$ **119.** $\log x^4\sqrt{3y}$ **121.** $\log\sqrt{\frac{x-1}{x^3(x+1)}}$ **123.** $\ln\frac{(x^{a+b})^3}{\sqrt[3]{b^2+1}}$

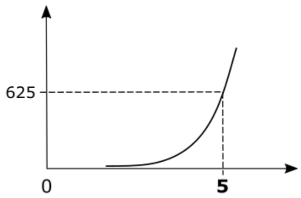
125. $\log\left(\frac{x^2\sqrt{x}-3}{y^3}\right)^a$ **127.** $x = \frac{1}{5}$ **129.** $x = -2$ **131.** $x = 3$ **133.** $x = -5$

135. $x = \frac{5}{3}$ **137**. $x = -2$ **139**. $x = 3$ **141**. $x = 1$ **143**. $x = 1$ **145**. $x = 2$

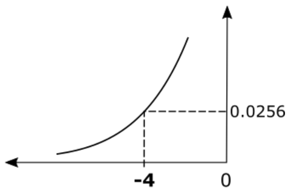
147.



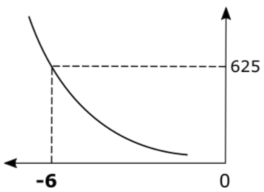
149.



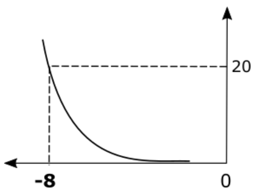
151.



153.



155.



157. $x = 3$ $y = 4$ **159**. $x = 1$ $y = 3$ **161**. $x = 1$ $y = 2$ **163**. $x = 4$ $y = 2$

165. $x = 1$ $y = 2$ **167**. $x = 1$ $y = 2$ **169**. $x = 2$ $y = 1$ **171**. $x = 5$ $y = 2$
173. $x = 5$ $y = 3$ **175**. $x = 4$ $y = 2$ **177**. $x = 1$ $y = -1$ **179**. $x = 2$ $y = 3$ $z = 2$

181. $x = 9$ **183**. $x = 6$ **185**. $x = 4$ **187**. $x = 3$ **189**. $x = \frac{2}{3}$ **191**. $x_1 = 1$ $x_2 = -2$

193. $x_1 = 0$ $x_2 = 2$ $x_3 = 7$ **195**. $x = 20$ **197**. $x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = 3$ **199**. $x = 5$ **201**. $x = 9$

203. $x = 10$ $y = 100$ **205**. $x = 100$ $y = 1000$ **207**. $x = 20$ $y = 2$ **209**. $x_1 = 4$ $y_1 = 2$

$x_2 = -2$ $y_2 = -4$ **211**. $x = \frac{10}{3}$ $y = \frac{1}{3}$ **213**. $x = 7$ $y = 4$ **215**. $x = 5$ $y = 16$

217. $x = 10$ $y = 1$ **219**. $x = 5$ $y = 3$ **221**. $x = 4$ $y = 9$ **223**. $\log y = 0.02x$

225. $\log y = -0.3x + 2.3$ **227**. $Y = -0.5x + 1.3$ **229**. $Y = 0.127x + 0.09$

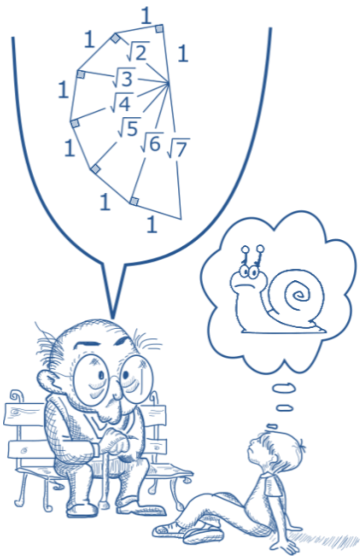
12

Triángulos

LO QUE APRENDERÁS. . .

12.1 Triángulos semejantes y resolución de éstos.
12.2 Triángulos rectángulos.
12.3 Teorema de Pitágoras.
12.4 Razones trigonométricas e identidades pitagóricas.

12.1 Triángulos semejantes y resolución de éstos



Un triángulo o trígono es una figura geométrica plana contenida por tres lados, las propiedades son:

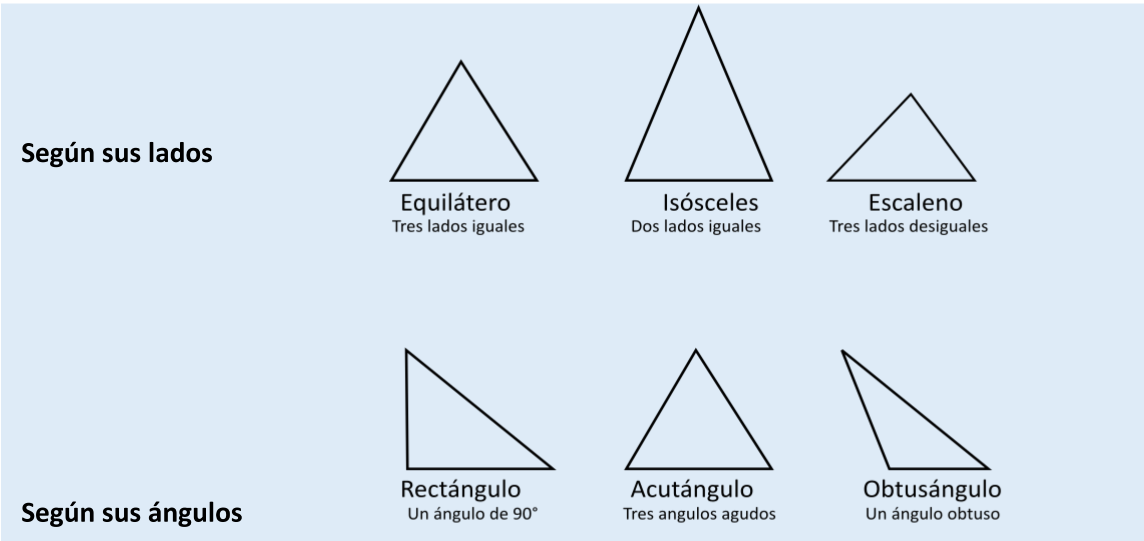
1. La suma de los ángulos interiores es 180°.

2. Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto u obtuso.

3. Cualquier lado de un triángulo siempre es menor a la suma de los otros dos lados pero mayor que su diferencia.

La caricatura presentada en este capítulo se muestra al abuelo explicando una sucesión de triángulos, y la idea generada del niño.

Los triángulos se pueden clasificar por sus lados o por sus ángulos:



La nomenclatura para dibujar un triángulo es la siguiente: los vértices se identifican con letras mayúsculas y se escriben en sentido contrario a las manecillas del reloj y los lados se escriben en minúsculas del vértice opuesto.

Dos **triángulos son semejantes cuando sus ángulos son iguales**, por ello sus lados son proporcionales.

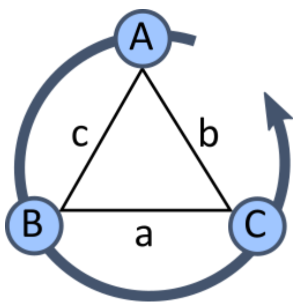
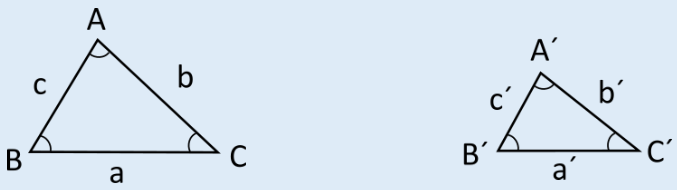


Figura 12.1 Nomenclatura de un triángulo

Definición

Razones de los triángulos semejantes:

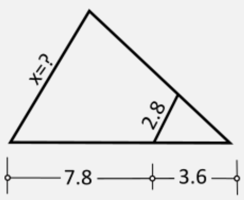
Lados	Ángulos	Perímetros	Áreas
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	$A=A' \quad B=B' \quad C=C'$	$\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}=\frac{p}{p'}$	$\frac{A_1}{A_2}=r^2$



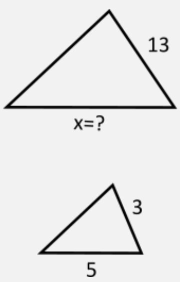
Ejemplo 1

De los siguientes triángulos encuentra la incógnita:

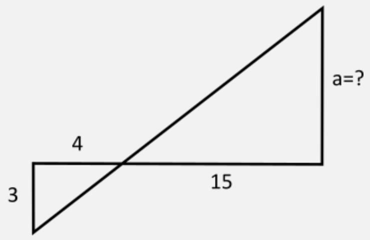
a)



b)



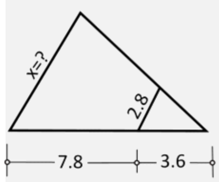
c)



Solución

Primero se establece la relación para cada inciso.

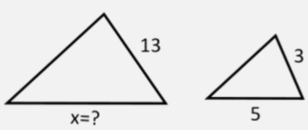
a)



$$\frac{x}{2.8}=\frac{7.8+3.6}{3.6}$$

$$\boldsymbol{x=8.8}$$

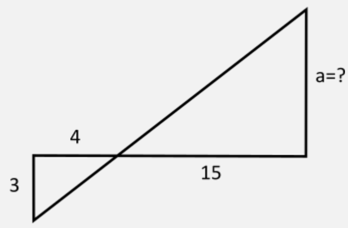
b)



$$\frac{x}{5}=\frac{13}{3}$$

$$\boldsymbol{x=21.6}$$

c)

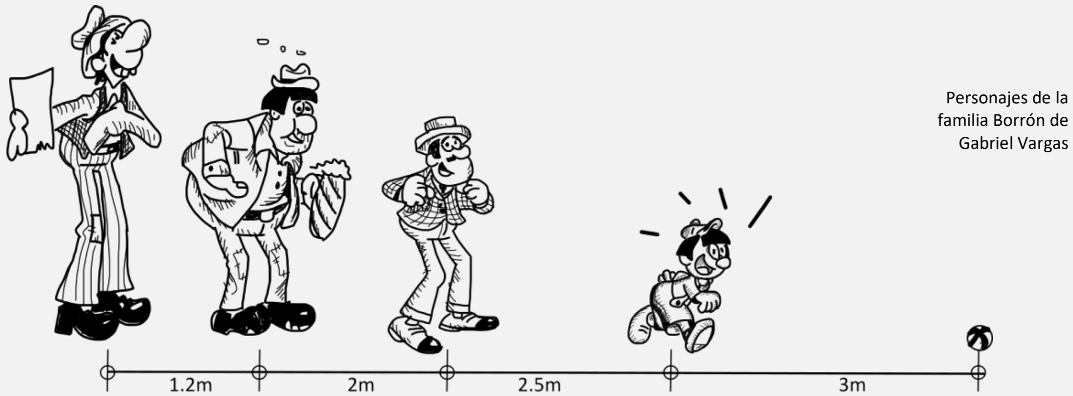


$$\frac{a}{3}=\frac{15}{4}$$

$$\boldsymbol{a=11.25}$$

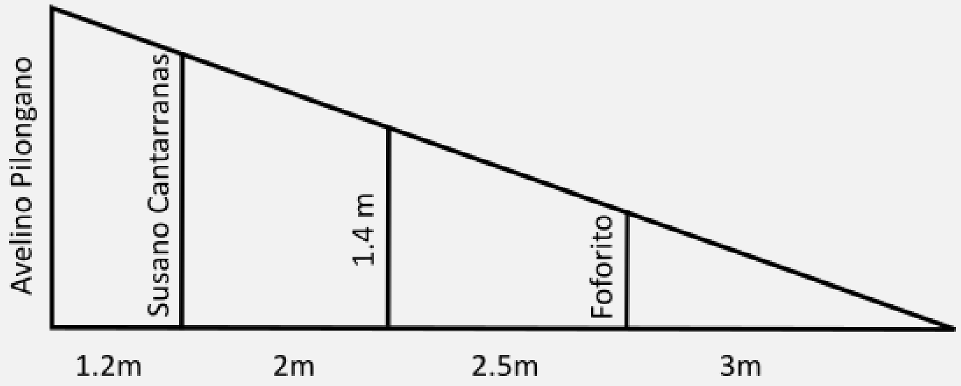
Ejemplo 2

Si Don Regino mide 1.4 metros de altura ¿Cuál es la altura del resto los personajes de la familia Burrón? Nota: desprecie la altura de la pelota.



Solución

Se dibuja el triángulo semejante que corresponde a la distribución de los personajes y se establecen las relaciones para obtener las alturas.



$$\frac{Avelino}{1.4} = \frac{8.7}{5.5} \qquad \boldsymbol{Avelino = 2.2\ m}$$

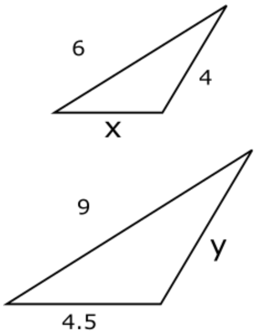
$$\frac{Susano}{1.4} = \frac{7.5}{5.5} \qquad \boldsymbol{Susano = 1.9\ m}$$

$$\frac{Foforito}{1.4} = \frac{3}{5.5} \qquad \boldsymbol{Foforito = 0.7\ m}$$

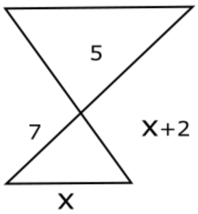
Ejercicios de refuerzo 12.1

Determine las dimensiones de las incógnitas presentadas de los siguientes triángulos semejantes:

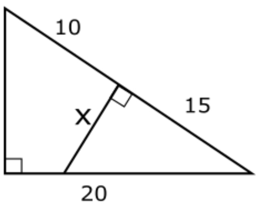
1.



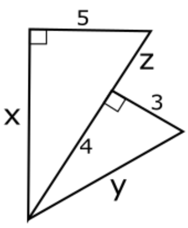
2.



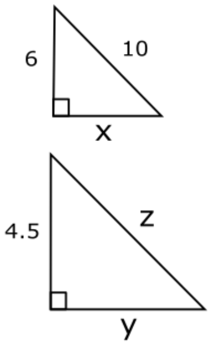
3.



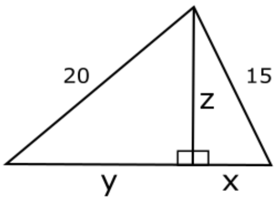
4.



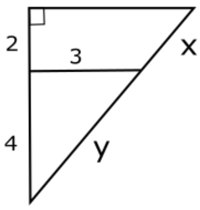
5.



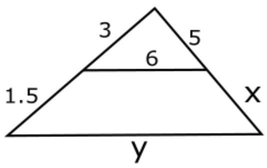
6.



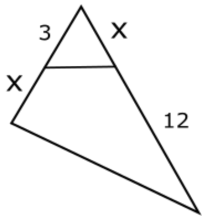
7.



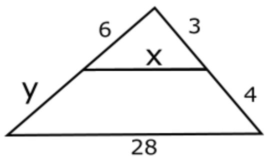
8.



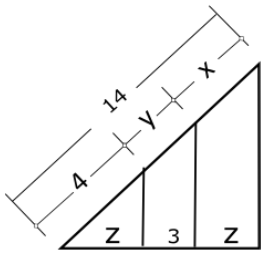
9.



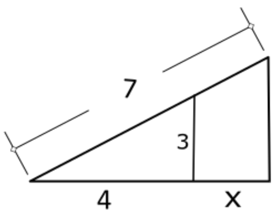
10.



11.



12.



12.2 Triángulos rectángulos

El triángulo rectángulo tiene un **ángulo recto** (90°) y dos lados contiguos al ángulo recto conocidos como **catetos** y un lado mayor opuesto al ángulo recto llamado **hipotenusa** (Figura 12.2).

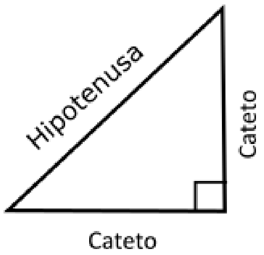
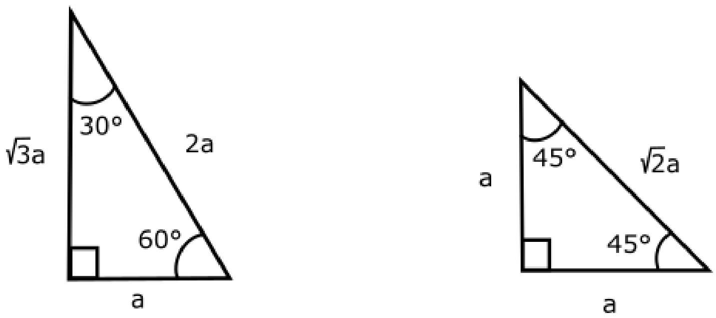


Figura 12.2 Triángulo rectángulo

Existen dos tipos de triángulos rectángulos característicos los cuales son: **Triangulo rectángulo escaleno,** que posee un ángulo recto y los otros dos de 30 y 60 grados, por lo que sus tres lados son distintos y el **Triángulo rectángulo isósceles**, tiene un ángulo recto y los otros dos ángulos son iguales de 45 grados, por lo que sus lados también son iguales (Figura 12.3).



a) Triangulo Rectángulo Escaleno b) Triangulo Rectángulo Isósceles

Figura 12.3 Triángulos rectángulos

Piense ahora que se tiene un triángulo y para su resolución debe de encontrar la altura, para ello se utiliza el **teorema de la altura** (h), el cual relaciona a los catetos de dos triángulos (ADC y ADB) semejantes al principal (ABC). La altura se obtiene dividiendo el triángulo en **dos triángulos rectángulos** utilizando la media geométrica.

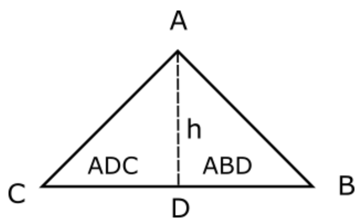


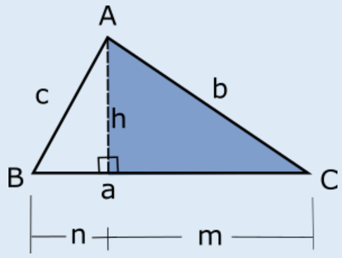
Figura 12.4 Triángulo rectángulo.

Definición

Teorema de la altura. En un triángulo rectángulo la altura ($\boldsymbol{h}$) relativa a la hipotenusa es la media geométrica de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa ($\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{m}$).

$$\frac{b}{c} = \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \quad \Longrightarrow \quad h^2 = mn$$

$$\boldsymbol{h = \sqrt{mn}}$$

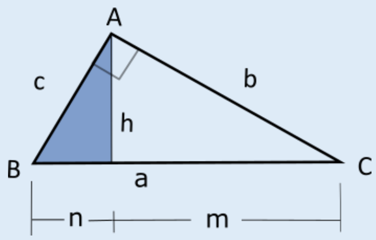


Recuerda

Teorema del cateto. Se utiliza para calcular los catetos (a y b) del triángulo rectángulo a partir de la hipotenusa y de la proyecciones de los catetos.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \quad \Longrightarrow \quad b^2 = a \cdot m$$

$$\boldsymbol{b = \sqrt{a \cdot m}}$$



Ahora del teorema del cateto se despeja las proyecciones de los catetos (m y n),

$$m = \frac{b^2}{a} \qquad\qquad n = \frac{c^2}{a}$$

Se sustituye en el teorema de la altura.

$$h = \sqrt{\left(\frac{b^2}{a}\right)\left(\frac{c^2}{a}\right)}$$

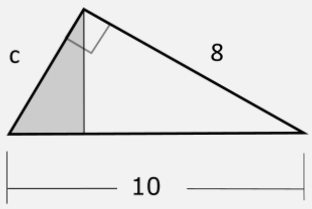
$$h = \sqrt{\frac{b^2 c^2}{a^2}}$$

$$\boldsymbol{h = \frac{bc}{a}}$$

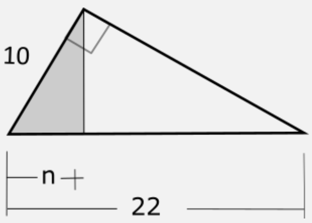
Ejemplo 3

Calcule las incógnitas de los siguientes triángulos:

a)

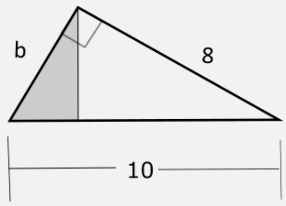


b)



Solución a)

Se utiliza la ecuación del teorema de los catetos:



$$b^2 = a \cdot m \quad \Longrightarrow \quad m = \frac{b^2}{a}$$

$$m = \frac{8^2}{10} \qquad\qquad \boldsymbol{m = \frac{32}{5}}$$

Se sabe que:

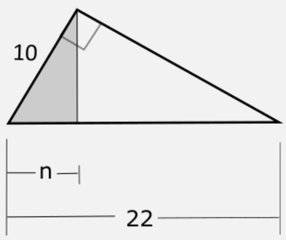
$$a = m + n = 10$$

$$n = 10 - \frac{32}{5} \qquad n = \frac{18}{5}$$

Ahora

$$c = \sqrt{a \cdot n} \qquad c = \sqrt{10\left(\frac{18}{5}\right)} \qquad \boldsymbol{c = 6}$$

Solución b)



Con el teorema del cateto se tiene:

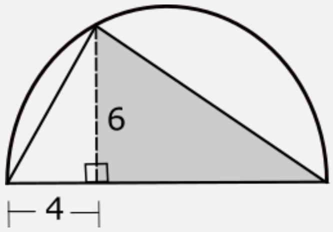
$$c^2 = a \cdot n \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{c^2}{a}$$

Finalmente:

$$n = \frac{10^2}{22} \qquad \boldsymbol{n = \frac{50}{11}}$$

Ejemplo 4

Calcule el radio de la semicircunferencia siguiente:



Solución

Se utiliza el teorema de la altura $h^2 = mn$

$$\boldsymbol{mn = 6^2}$$

Ahora se sabe que $n = 4$.

$$m = \frac{6^2}{4} \qquad \boldsymbol{m = 9}$$

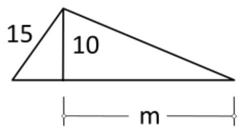
El radio será la mitad de la base del triángulo es decir:

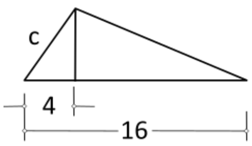
$$r = \frac{m+n}{2}$$

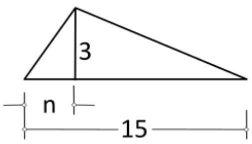
$$r = \frac{9+4}{2} \qquad \boldsymbol{r = \frac{13}{2}}$$

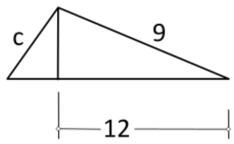
Ejercicios de refuerzo 12.2

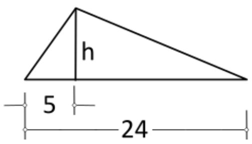
Obtenga el valor de la incógnita de los siguientes triángulos semejantes:

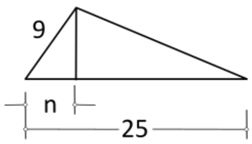
13. 

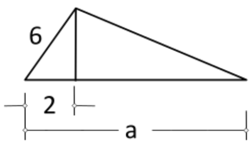
14. 

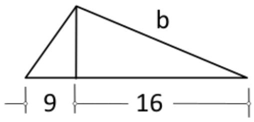
15. 

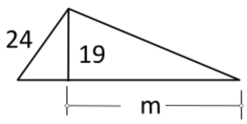
16. 

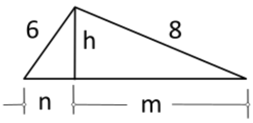
17. 

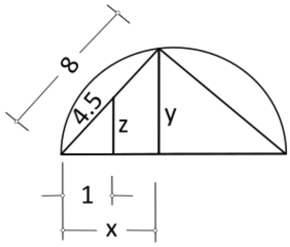
18. 

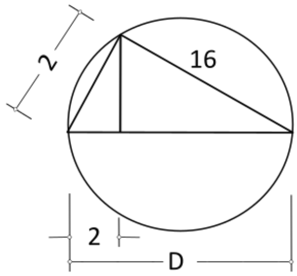
19. 

20. 

21. 

22. 

23. 

24. 

12.3 Teorema de Pitágoras

Imagine que tiene un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 unidades y 4 y la hipotenusa 5 unidades, los cuadrados desarrollados tienen un área de 9, 16 y 25 unidades cuadradas (Figura 12.5).

Lo que se tiene es:

$$9 + 16 = 25$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Pitágoras estableció que al conocer **dos lados de un triángulo rectángulo se puede encontrar el tercer lado**, es decir:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

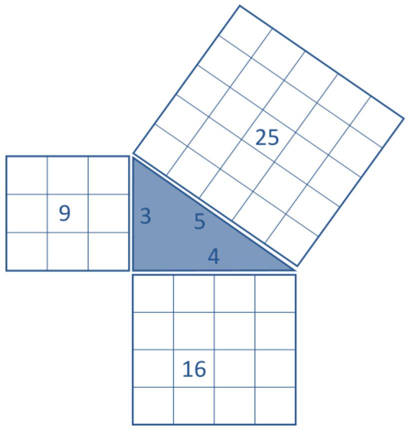
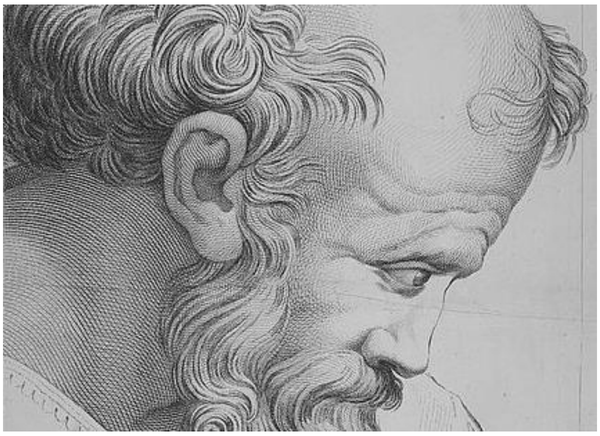


Figura 12.5 Triangulo Pitagórico

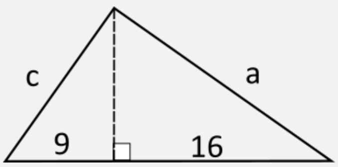


Para Pitágoras, destacado filósofo y matemático del siglo VI a. c., los números eran el principio de toda proporción, orden y armonía en el universo (González Recio 2007).

Imagen 12.1. Pintura del Rostro de Pitágoras hecha por Anton Raphael Mengs, dibujado en 1782.

Ejemplo 5

Calcule el perímetro del siguiente triángulo.

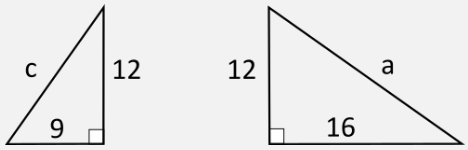


Solución

Se utiliza el teorema de la altura $h = \sqrt{mn}.$

$$h = \sqrt{9 \cdot 16} \qquad \Longrightarrow \qquad h = 12$$

Ahora se utiliza el teorema de Pitágoras para encontrar las hipotenusas de cada triángulo:



$$c = \sqrt{9^2 + 12^2} \qquad\qquad a = \sqrt{16^2 + 12^2}$$

$$c = 15 \qquad\qquad a = 20$$

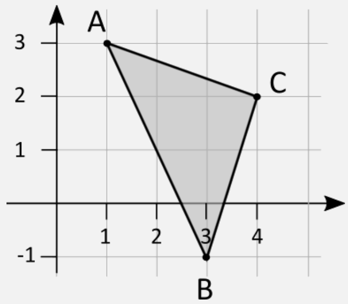
Finalmente el perímetro es:

$$P = 15 + 20 + 9 + 16$$

$$\boldsymbol{P = 60}$$

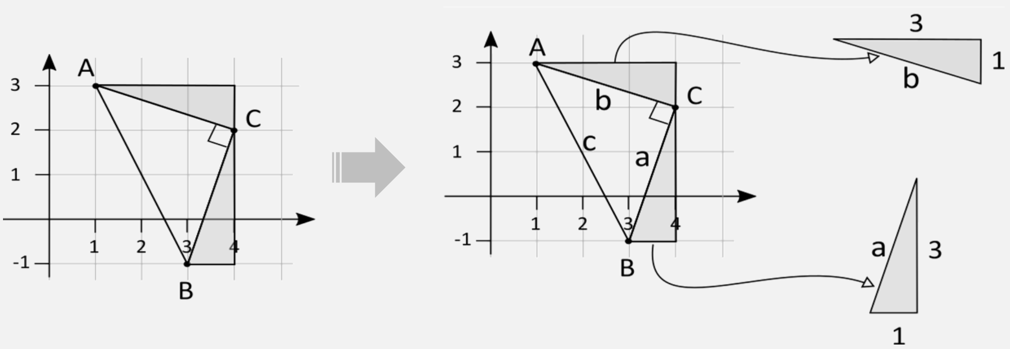
Ejemplo 6

Calcule el área del triángulo cuyas coordenadas de sus vértices son: A(1,3); B(-1,3) y C(4, 2).



Solución

Primero se grafican los puntos que conforman los lados del triángulo, para identificar que existe un ángulo recto entre el segmento AC y BC. Con esto se determinan las longitudes de los segmentos AC (altura) y BC (base).



El cálculo de la hipotenusa para ambos, es empleando el teorema de Pitágoras.

$$b = \sqrt{3^2 + 1^2} \qquad\qquad a = \sqrt{1^2 + 3^2}$$

$$b = a = \sqrt{10}$$

Ahora el área del triángulo es:

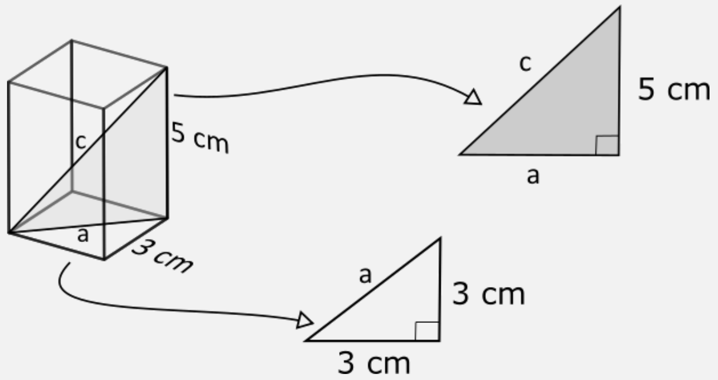
$$A = \frac{\sqrt{10}\sqrt{10}}{2} \qquad\qquad \boldsymbol{A = 5\ u^2}$$

Ejemplo 7

Calcule la diagonal de un prisma cuadrangular 3 centímetros de base y 5 centímetros de altura.

Solución

Primero se dibuja el prisma cuadrangular y se identifican los triángulos rectángulos.



Se obtiene la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma en la base del prisma:

$$a = \sqrt{3^2 + 3^2} \qquad \boldsymbol{a = \sqrt{18}}$$

Ahora se obtiene la diagonal del prisma:

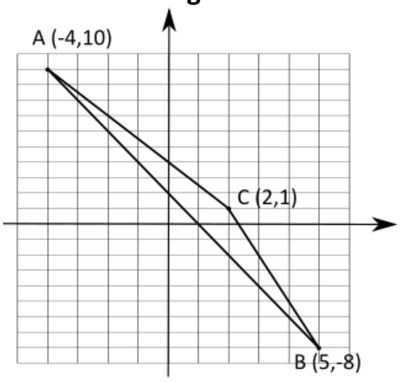
$$c = \sqrt{\left(\sqrt{18}\right)^2 + 5^2}$$

$$\boldsymbol{c = 6.5\ cm}$$

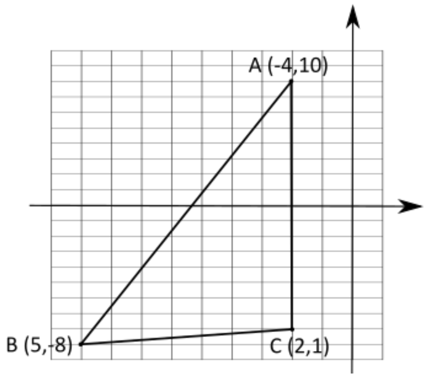
Ejercicios de refuerzo 12.3

De los ejercicios 25 a 33 obtenga el área de los triángulos correspondientes. De los ejercicios 34 a 36 calcule las diagonales indicadas.

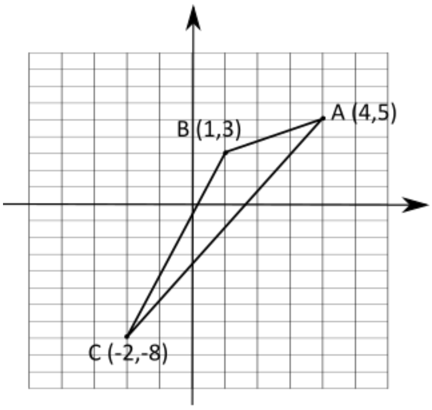
25.



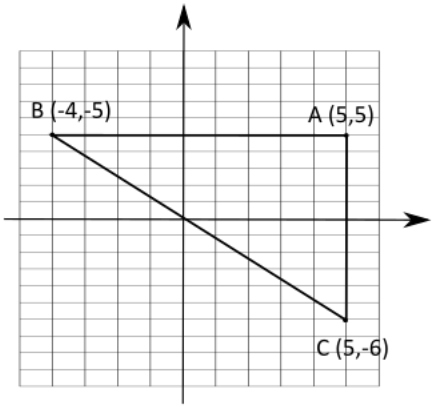
26.



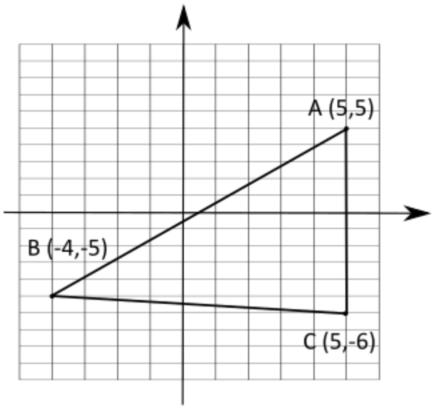
27.



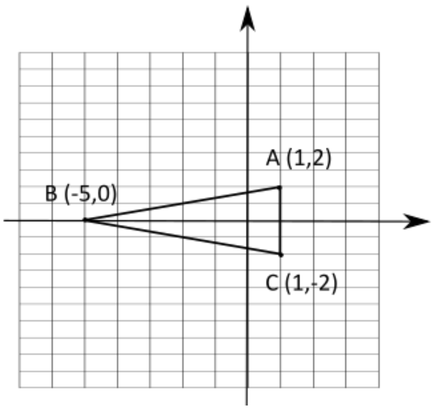
28.



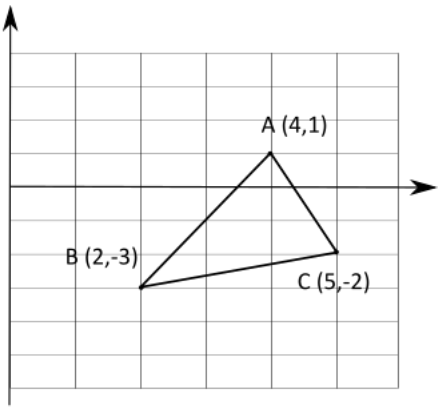
29.



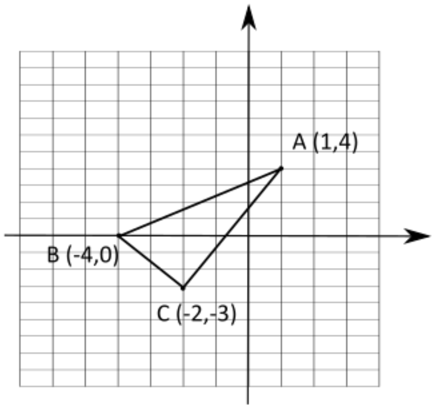
30.



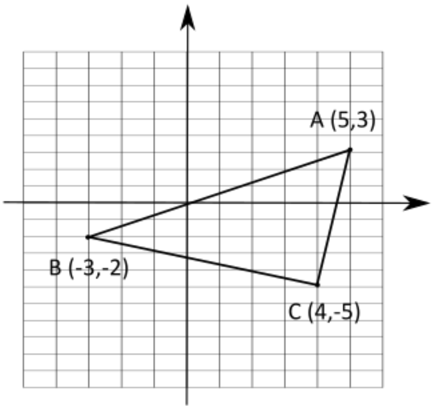
31.



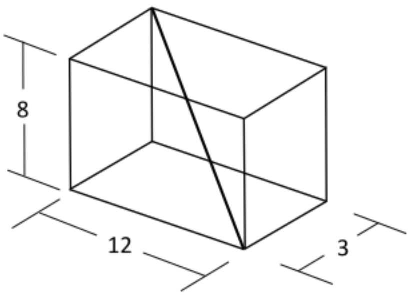
32.



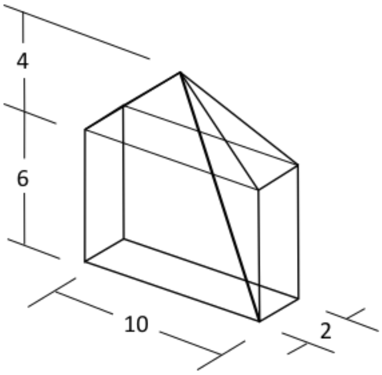
33.



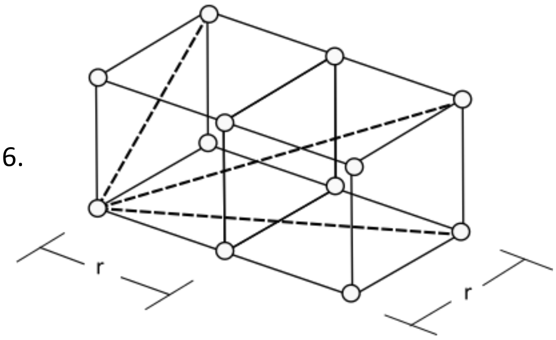
34.



35.



36.



Nota: El ejercicio 36 representa dos celdas unitarias de cloruro de sodio.

12.4 Razones trigonométricas e identidades Pitagóricas

Para establecer las razones trigonométricas primero se establecen los catetos respecto a un vértice, por ejemplo para el **B** (Figura 12.6) se tiene:

c Hipotenusa.
a Cateto adyacente al ángulo B.
b Cateto opuesto al ángulo B.

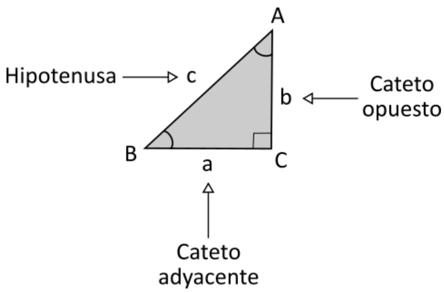


Figura 12.6 Catetos del Triángulo rectángulo, respecto al vértice B

Las razones o funciones trigonometricas se definen como:

Definición

Razones trigonométricas. Considerando un ángulo agudo, por ejemplo para el triángulo presentado en la figura 12.6, se definen como:

$$\boldsymbol{seno\ de\ B} = \frac{cateto\ opuesto\ a\ B}{hipotenusa} \qquad \boldsymbol{coseno\ de\ B} = \frac{cateto\ adyacente\ a\ B}{hipotenusa}$$

$$\boldsymbol{tangente\ de\ B} = \frac{cateto\ opuesto\ a\ B}{cateto\ adyacente\ a\ B} \qquad \boldsymbol{cotangente\ de\ B} = \frac{cateto\ adyacente\ a\ B}{cateto\ opuesto\ a\ B}$$

$$\boldsymbol{secante\ de\ B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente\ a\ B} \qquad \boldsymbol{cosecante\ de\ B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto\ a\ B}$$

Las funciones trigonométricas de ángulos agudos con referencia ahora con el ángulo del vértice **A** (Figura 12.7) se tiene:

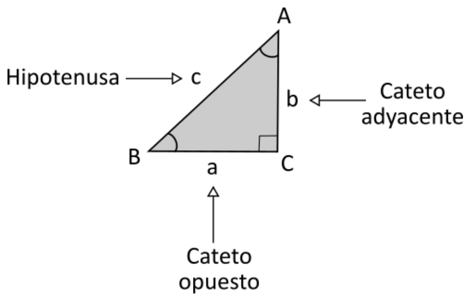


Figura 12.7 Catetos del Triángulo rectángulo, respecto al vértice A

c   Hipotenusa.
a   Cateto opuesto al ángulo A.
b   Cateto adyacente al ángulo A.

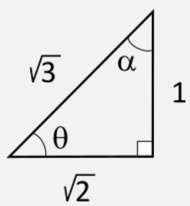
Considerando la definición de razón trigonométrica y el triángulo que se presenta, las seis funciones trigonométricas para el vértice A y el B se ven en la Tabla 12.1.

Tabla 12.1

Funciones trigonométricas de ángulos	
Función del ∡ A	Función del ∡ B
$senA = \frac{a}{c}$	$senB = \frac{b}{c}$
$cosA = \frac{b}{c}$	$cosB = \frac{a}{c}$
$tanA = \frac{a}{b}$	$tanB = \frac{b}{a}$
$cotA = \frac{b}{a}$	$cotB = \frac{a}{b}$
$secA = \frac{c}{b}$	$secB = \frac{c}{a}$
$cscA = \frac{c}{a}$	$cscB = \frac{c}{b}$

Ejemplo 8

Obtenga las seis relaciones trigonométricas del siguiente triangulo:



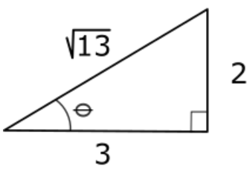
Solución

α	θ
$sen \propto = \sqrt{\frac{2}{3}}$	$sen\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$cos \propto = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$
$tan \propto = \sqrt{2}$	$tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$cot \propto = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$cot\theta = \sqrt{2}$
$sec \propto = \sqrt{3}$	$sec\theta = \sqrt{\frac{3}{2}}$
$csc \propto = \sqrt{\frac{3}{2}}$	$csc\theta = \sqrt{3}$

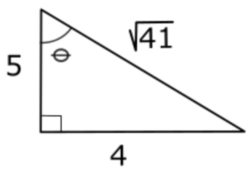
Ejercicios de refuerzo 12.4

Obtenga las seis relaciones trigonométricas de los siguientes triángulos.

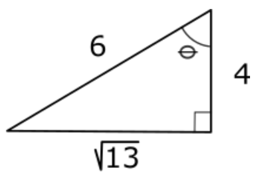
37.



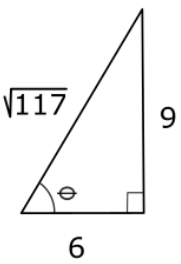
40.



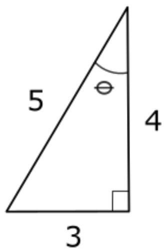
43.



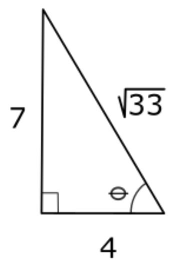
38.



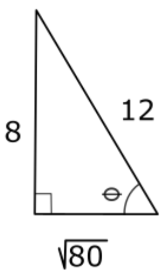
41.



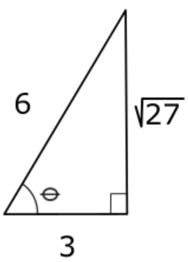
44.



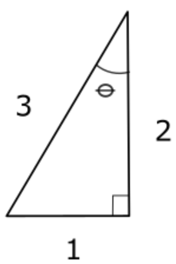
39.



42.



45.



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades trigonométricas son igualdades entre las razones trigonométricas, útiles para simplificar expresiones.

Definición

Identidades trigonométricas reciprocas

$$sen\theta = \frac{1}{csc\theta} \qquad cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$$

$$tan\theta = \frac{1}{cot\theta} \qquad csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$$

$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta} \qquad cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$$

$$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} \qquad cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

Identidades Pitagóricas

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$1 + tan^2\theta = sec^2\theta$$

$$1 + cot^2\theta = csc^2\theta$$

Las identidades trigonométricas reciprocas tienen el valor de uno al ser multiplicadas, por ejemplo, si multiplicamos:

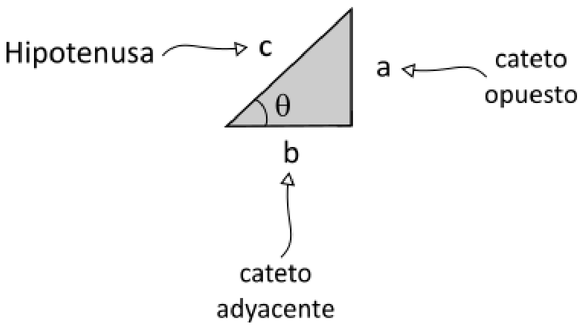
$$(sen\theta)\,(csc\theta) = \left(\frac{cateto\ opuesto\ a\ \theta}{hipotenusa}\right)\left(\frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto\ a\ \theta}\right)$$

$$(sen\theta)\,(csc\theta) = 1$$

Se transpone $sen\theta$:

$$(sen\theta) = \frac{1}{csc\theta}$$

En cuanto a las identidades Pitagóricas, recuerde el triángulo rectángulo:



Se escribe el teorema de Pitágoras.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Se divide entre c^2.

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

Se utilizan las propiedades de las potencias.

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$$

Ahora recuerde que:

$$\boldsymbol{sen\theta} = \frac{cateto\ opuesto\ a\ \theta}{hipotenusa} \qquad \boldsymbol{cos\ \theta} = \frac{cateto\ adyacente\ a\ \theta}{hipotenusa}$$

$$(sen\theta)^2 + (cos\theta)^2 = 1$$

Finalmente se escribe.

$$\boldsymbol{sen^2\theta + cos^2\theta = 1}$$

De manera similar se obtienen las otras dos identidades Pitagóricas.

Ejemplo 9

Simplifique las siguientes operaciones trigonométricas:

$a)$ $\dfrac{cot^2\theta - 1}{cot^2\theta + 1}$

$b)$ $\dfrac{1 + cos\theta}{sen\theta} + \dfrac{sen\theta}{1 + cos\theta}$

$c)$ $sen^4\theta(3 - 2sen^2\theta) + cos^4\theta(3 - 2cos^2\theta)$

Solución a)

$$\frac{cot^2\theta - 1}{cot^2\theta + 1} = \frac{\left(\frac{cos\theta}{sen\theta}\right)^2 - 1}{\left(\frac{cos\theta}{sen\theta}\right)^2 - 1}$$

Primero se desarrolla el numerador.

$$\left(\frac{cos\theta}{sen\theta}\right)^2 - 1 = \frac{cos^2\theta - sen^2\theta}{sen^2\theta}$$

Ahora el denominador.

$$\left(\frac{cos\theta}{sen\theta}\right)^2 + 1 = \frac{cos^2\theta + sen^2\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{sen^2\theta}$$

Posteriormente se realiza el cociente.

$$\frac{\frac{cos^2\theta - sen^2\theta}{sen^2\theta}}{\frac{1}{sen^2\theta}} = \frac{sen^2\theta(cos^2\theta - sen^2\theta)}{sen^2\theta} = cos^2\theta - sen^2\theta$$

Finalmente $cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$.

$$1 - sen^2\theta - sen^2\theta$$

$$\boldsymbol{1 - 2sen^2\theta}$$

Solución b)

$$\frac{1 + cos\theta}{sen\theta} + \frac{sen\theta}{1 + cos\theta} = \frac{(1 + cos\theta)^2 + (sen\theta)^2}{sen\theta(1 + cos\theta)}$$

Se desarrolla el binomio al cuadrado.

$$\frac{(1 + cos\theta)^2 + (sen\theta)^2}{sen\theta(1 + cos\theta)} = \frac{1 + 2cos\theta + cos^2\theta + sen^2\theta}{sen\theta(1 + cos\theta)}$$

Se utiliza la identidad pitagórica de $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$

$$\frac{1 + 2cos\theta + 1}{sen\theta(1 + cos\theta)}$$

Se factoriza el 2.

$$\frac{2(1 + cos\theta)}{sen\theta(1 + cos\theta)}$$

Se emplea la razón recíproca de cosecante.

$$\frac{2}{sen\theta}$$

$$\boldsymbol{2csc\theta}$$

Solución c)

$$sen^4\theta(3-2sen^2\theta)+cos^4\theta(3-2cos^2\theta)$$

Se emplea la identidad pitagórica de $sen^2\theta+cos^2\theta=1$

$$sen^4\theta[3-2(1-cos^2\theta)]+cos^4\theta[3-2(1-sen^2\theta)]$$

Se desarrollan las operaciones.

$$sen^4\theta[3-2+2cos^2\theta]+cos^4\theta[3-2+2sen^2\theta]$$

$$sen^4\theta[1+2cos^2\theta]+cos^4\theta[1+2sen^2\theta]$$

$$sen^4\theta+2sen^4\theta cos^2\theta+cos^4\theta+2sen^2\theta cos^4\theta$$

Se agrupan términos.

$$sen^4\theta+cos^4\theta+2sen^4\theta cos^2\theta+2sen^2\theta cos^4\theta$$

Se factoriza $2\,sen^2\theta cos^2\theta$

$$sen^4\theta+cos^4\theta+2\,sen^2\theta cos^2\theta(sen^2\theta+cos^2\theta)$$

Nuevamente se recurre a la identidad pitagórica $sen^2\theta+cos^2\theta=1$

$$sen^4\theta+cos^4\theta+2\,sen^2\theta cos^2\theta(1)$$

Es necesario conocer el valor de $sen^4\theta+cos^4\theta$, por tanto se hace uso de la identidad $sen^2\theta+cos^2\theta=1$ elevada al cuadrado.

$$(sen^2\theta+cos^2\theta)^2=1^2$$

$$sen^4\theta+2sen^2\theta cos^2\theta+cos^4\theta=1$$

Se agrupa $sen^4\theta+cos^4\theta$ para ser despejado.

$$sen^4\theta+cos^4\theta+2sen^2\theta cos^2\theta=1$$

$$sen^4\theta+cos^4\theta=1-2sen^2\theta cos^2\theta$$

Se sustituye en:

$$sen^4\theta+cos^4\theta+2\,sen^2\theta cos^2\theta$$

$$1-2sen^2\theta cos^2\theta+2\,sen^2\theta cos^2\theta$$

Finalmente el resultado es 1.

$$\boldsymbol{sen^4\theta\left(3-2sen^2\theta\right)+cos^4\theta\left(3-2cos^2\theta\right)=1}$$

Ejercicios de refuerzo 12.5

Simplifique las siguientes expresiones trigonométricas:

46. $\dfrac{sen\theta}{cos^2\theta}$

47. $\dfrac{cos^2\theta}{tan^2\theta}sec\theta$

48. $\dfrac{cos\theta - 1}{sen\theta} + \dfrac{sen\theta}{cos\theta - 1}$

49. $\dfrac{cot\theta}{sen\theta}tan^2\theta$

50. $cot\theta cos\theta sen\theta$

51. $(sec\theta - cos\theta)(csc\theta - sen\theta)$

52. $(sec\theta + tan\theta - 1)(sec\theta - tan\theta + 1)$

53. $cos^2\theta(tan\theta + cot\theta)$

54. $\dfrac{cos\theta}{1 - sen\theta} - tan\theta$

55. $\dfrac{2}{tan\theta + cot\theta}$

56. $\dfrac{cot^2\theta}{1 - csc\theta} + 1$

57. $(1 - sen^2\theta\ )\,(1 + tan^2\theta) + (1 - cos^2\theta)(1 + cot^2\theta)$

58. $tan\theta cos\theta - \dfrac{1}{csc\theta}$

59. $\dfrac{cot^4\theta - 1}{csc^2\theta} + 1$

60. $\left(\dfrac{sec\theta + sen\theta}{csc\theta + cos\theta}\right)cot\theta$

61. $(3sen\theta + 2cos\theta)^2 + (2sen\theta - 3cos\theta)^2$

62. $\dfrac{sen^2\theta - sen^6\theta}{1 - sen^2\theta}$

63. $\dfrac{cos\theta + sen\theta tan\theta}{sen\theta sec\theta}$

64. $\dfrac{(csc\theta + cot\theta)(csc\theta - cot\theta)}{(sec\theta - tan\theta)(sec\theta + tan\theta)}$

65. $\dfrac{sen^2\theta(1 - sen^2\theta) + cos^2\theta(1 + cos^2\theta)}{sen^2\theta cos^2\theta}$

66. $\dfrac{sec\theta + tan\theta - 1}{csc\theta - cot\theta + 1}$

67. $\dfrac{sec^4\theta - tan^4\theta - 1}{sec^2\theta tan^2\theta}$

68. $\dfrac{tan\theta + tan^3\theta}{cot\theta + cot^3\theta}$

69. $\left(\dfrac{1 + sen\theta + cos\theta}{1 + sen\theta - cos\theta}\right)^2(1 - cos\theta) - 1$

70. $\sqrt{\dfrac{sec\theta}{cos\theta} - \dfrac{tan\theta}{cot\theta} + \dfrac{cot\theta}{tan\theta}}$

ÁNGULOS NOTABLES

Los ángulos notables son aquellos ángulos que corresponden a triángulos rectángulos cuyos valores se pueden obtener fácilmente; considere un cuadrado unitario al cual se le obtiene la diagonal (hipotenusa).

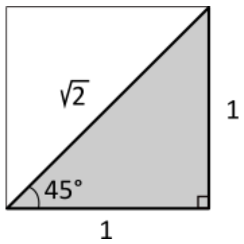


Figura 12.8 Triángulo rectángulo con catetos unitarios

Ahora:

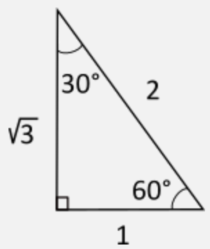
$$sen\ 45° = \frac{cateto\ opuesto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Generalizando para las demás funciones trigonométricas para 45° se tiene:

$$cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad tan45° = 1 \qquad cot45° = 1 \qquad sec45° = \sqrt{2} \qquad csc45° = \sqrt{2}$$

Ejemplo 10

Obtenga el valor de los ángulos notables para 30° y 60°, utilizando el siguiente triángulo:



Solución

$$sen30° = \frac{1}{2} \qquad sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad cos\ 60° = \frac{1}{2}$$

$$tan30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad tan60° = \sqrt{3}$$

$$cot30° = \sqrt{3} \qquad cot60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$sec30° = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad sec60° = 2$$

$$csc30° = 2 \qquad csc60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

El procedimiento para encontrar el resto de los ángulos notables es similar, en la Tabla 12.2, se presentan los valores de los ángulos de las funciones trigonométricas.

Tabla 12.2 Ángulos notables

Grados	Radianes	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0°	0	0	1	0	No existe	1	No existe
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	No existe	0	No existe	1
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
180°	π	0	-1	0	No existe	-1	No existe
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
270°	$\frac{2\pi}{3}$	-1	0	No existe	2	No existe	-1
300°	$\frac{10\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2}}$
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	-2
360°	2π	0	1	0	No existe	1	No existe

Ejemplo 11

Encuentre el valor de las siguientes expresiones:

$a)\quad (sen60°)(cos45°) + (sen90°)(sec30°) - \left(\frac{1}{2}sen30°\right)(cot30°)$

$b)\quad \frac{cos0° + cos45°}{sen60° - cot45°} + \frac{cos^2 30°}{sen30° + sen90°}$

Solución a)

Recuerde primero que:

$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta} \qquad\qquad cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

Ahora se utilizan los valores de la Tabla 12.2.

$(sen60°)(cos45°) + (sen90°)(sec30°) - \left(\frac{1}{2}sen30°\right)(cot30°)$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (1)\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4}\right) + (1)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{4} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{3\sqrt{3}\sqrt{2} + 8\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{12}$$

$$\mathbf{\frac{3\sqrt{3}\sqrt{2} + 5\sqrt{3}}{12}}$$

Solución b)

Recuerde primero que:

$$cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2} + 1}$$

$$\frac{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3} - 2}{2}} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1 + 2}{2}}$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2}+\frac{6}{12}$$

$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2}+\frac{1}{2}$$

Recuerde las propiedades de los radicales.

$$\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-2}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2}\right)=\frac{4+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3}}{-1}$$

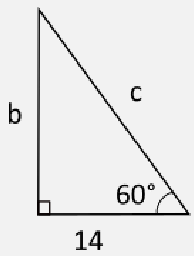
Finalmente:

$$\mathbf{-4-\sqrt{8}-\sqrt{12}-\sqrt{6}+\frac{1}{2}}$$

Con estos ángulos notables se pueden resolver ya algunos triángulos rectángulos que tengan como dato el valor de algún ángulo.

Ejemplo 12

Resuelva el siguiente triángulo rectángulo:



Solución

Se selecciona una función trigonométrica que tenga el cateto adyacente.

$$cos60° = \frac{14}{c}$$

Se despeja a c:

$$c = \frac{14}{cos60°}$$

$$c = \frac{14}{1/2} \qquad \boldsymbol{c = 28}$$

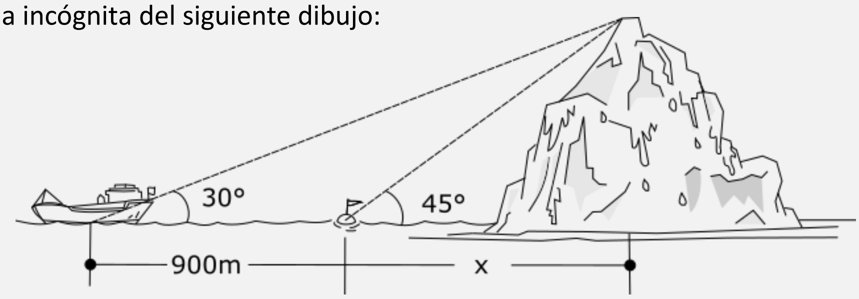
Ahora una función trigonométrica que relacione el cateto adyacente y el opuesto.

$$tan60° = \frac{b}{14}$$

$$b = 14tan60° \qquad \boldsymbol{b = 14(\sqrt{3})}$$

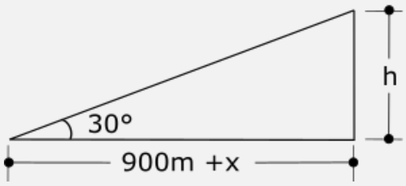
Ejemplo 13

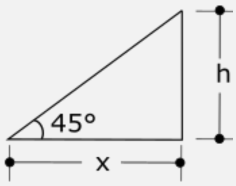
Calcule el valor de la incógnita del siguiente dibujo:



Solución

Se dibujan los triángulos y los datos, para plantear las ecuaciones:





$$\frac{h}{x+900} = tan30°$$

$$\frac{h}{x} = tan45°$$

Se despeja la altura debido a que es la misma, y se despeja la incógnita.

$$h = (x+900)\ tan30° \qquad\qquad h = xtan45°$$

$$(x+900)\ tan30° = xtan45°$$

$$xtan30° + 900tan30° = xtan45°$$

Se agrupa.

$$xtan45° - xtan30° = 900tan30°$$

$$x(tan45° - tan30°) = 900tan30°$$

Se despeja la incógnita.

$$x = \frac{900tan30°}{tan45° - tan30°}$$

Se sustituye el valor de la tangente (ver Tabla 12.2).

$$x = \frac{900\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$x = \frac{\frac{900}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}\cdot 900}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}$$

$$x = \frac{900}{\sqrt{3}-1}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{900}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$\boldsymbol{x = 450(\sqrt{3}+1)}$$

La incógnita tiene un valor aproximado de **1230 metros.**

Ejercicios de refuerzo 12.6

Utilice los ángulos notables para resolver los siguientes ejercicios:

71. $\dfrac{sen30°(sen30° + cos30° - 1)}{sen45° - tan45° + sec60° - 1}$

72. $\dfrac{sec120°}{cos120°} - \dfrac{tan30°}{cot60°} - \dfrac{sen60°}{csc45°}$

73. $\dfrac{cos45° + sen60°tan120°}{sen30°sec135°}$

74. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

75. $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) sen^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

76. $\left(\dfrac{1 - sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 - cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right) tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$

77. $\dfrac{sec45°csc60° - tan30°}{cos60°}$

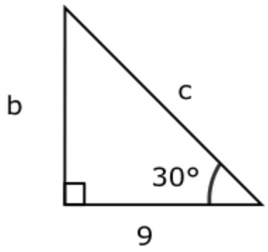
78. $\dfrac{tan^2 60° - sen^2 120°}{cot^2 60° - cos^2 45°}$

79. $\dfrac{(cos45° - sen90°)(sec120° + csc45°)}{tan60° + cot150°}$

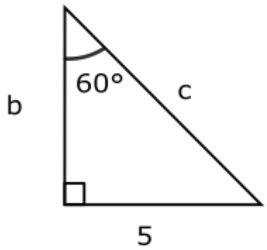
80. $sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) + cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Calcule las incógnitas de los siguientes triángulos utilizando los ángulos notables.

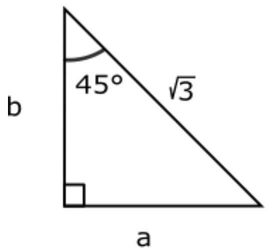
81.



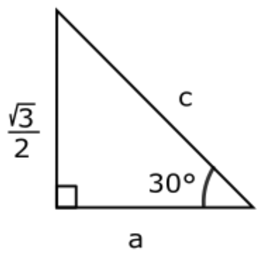
82.



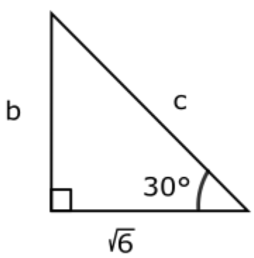
83.



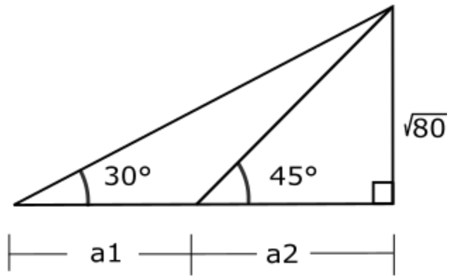
84.



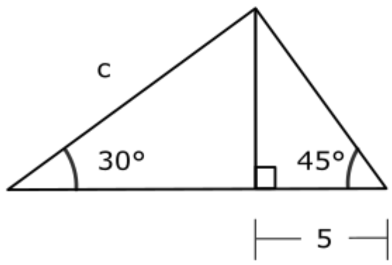
85.



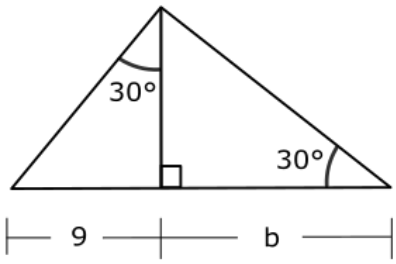
86.



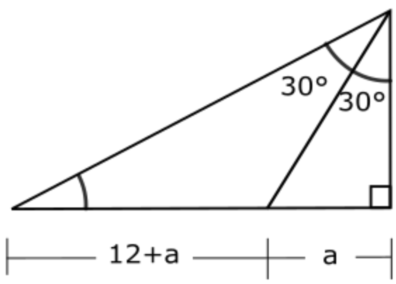
87.



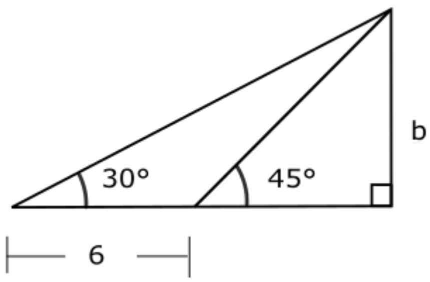
88.



89.



90.



LEY DE SENOS

La ley de los senos es una generalización que se utiliza para resolver triángulos de cualquier tipo. Piense en un triángulo que se divide en dos, la altura será la misma, por tanto las ecuaciones en cada triángulo son:

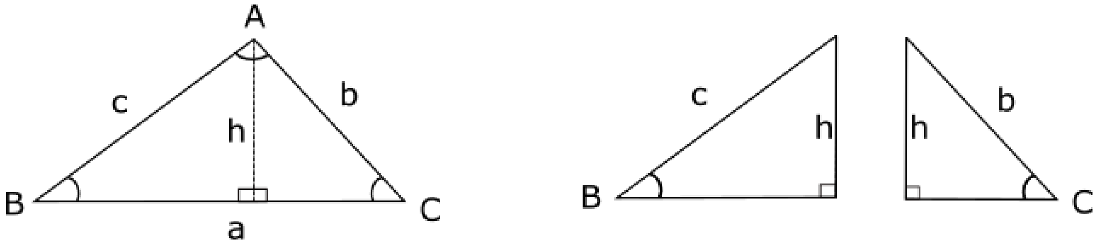


Figura 12.9 Triángulo dividido para obtener dos triángulos rectángulos en el análisis para la ley de los senos.

$$h = csenA \qquad\qquad h = asenC$$

Estas ecuaciones se igualan:

$$csenA = asenC$$

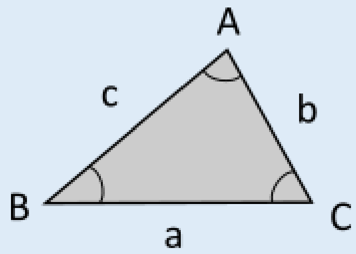
Se reagrupan los términos.

$$\frac{c}{senC} = \frac{a}{senA}$$

Definición

Ley de los senos

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

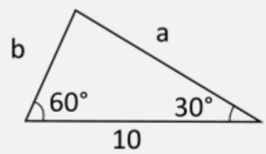


La ley de los senos se usa cuando se tiene

- Dos ángulos y un lado.
- Dos lados y el ángulo opuesto a estos lados.

Ejemplo 14

Encuentre las incógnitas del siguiente triángulo:



Solución

Se establece la ley de los senos para las incógnitas.

$$\frac{b}{sen30°} = \frac{10}{sen90°}$$

$$b = 10\frac{sen30°}{sen90°}$$

$$b = 10\frac{1/2}{1}$$

$$b = 10\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$b = 5$$

$$\frac{a}{sen60°} = \frac{10}{sen90°}$$

$$a = 10\frac{sen60°}{sen90°}$$

$$a = 10\frac{\sqrt{3}/2}{1}$$

$$a = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$a = 5\sqrt{3}$$

LEY DE COSENOS

Para esta ley considere que se tiene un triángulo cualquiera del cual sabemos las longitudes a y c y el ángulo del vértice B, con ello se requiere calcular la longitud b.

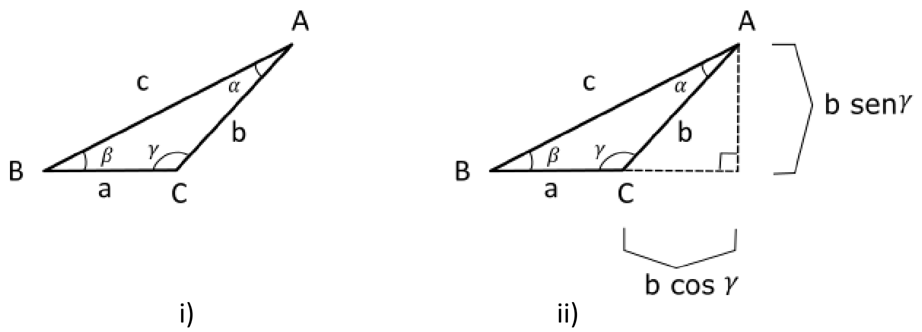


Figura 12.10 En el inciso i) se presenta un triángulo cualquiera, a partir del cual se forma un triángulo rectángulo, apreciado en el inciso ii) utilizado para el análisis del primero.

Usando el teorema de Pitágoras se puede obtener la longitud del lado c.

$$c^2 = (a - bcos\gamma)^2 + (bsen\gamma)^2$$

Se desarrolla el binomio.

$$c^2 = a^2 - 2abcos\gamma + b^2cos^2\gamma + b^2sen^2\gamma$$

Se factoriza a b^2

$$c^2 = a^2 + b^2(cos^2\gamma + sen^2\gamma) - 2abcos\gamma$$

Recuerde que $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$, llegando a la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma}$$

Definición

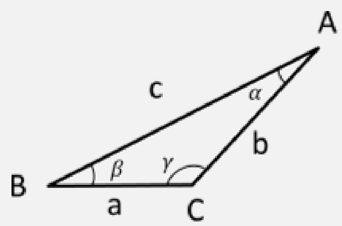
La ley de cosenos también se utiliza para triángulos en los que se conocen los tres lados y se desea obtener algún ángulo interior.

Ley de cosenos

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$
$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$
$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\propto}$$

Ejemplo 15

Calcule las incógnitas indicadas del triángulo utilizando la ley de los cosenos.



a) $a = 4, \quad b = 9 \quad \gamma = 60° \qquad c = ?$

b) $a = 5, \qquad b = 8, \ c = 7 \qquad \gamma = ?$

Solución a)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

$$c = \sqrt{16 + 81 - 2(4)(9)\cos 60°}$$

$$\boldsymbol{c = \sqrt{61}}$$

Solución b)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Se despeja la función trigonométrica.

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Se sustituyen los valores de los lados.

$$\cos\theta = \frac{(5)^2 + (8)^2 - (7)^2}{2(5)(8)}$$

$$\cos\theta = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

De la tabla 12.2 se sabe que:

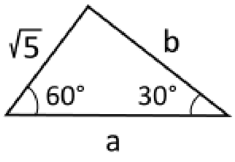
$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

Por tanto el ángulo $\boldsymbol{\theta = 60°}$

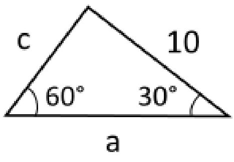
Ejercicios de refuerzo 12.7

Utilice la ley de los senos para encontrar las incógnitas de los siguientes triángulos.

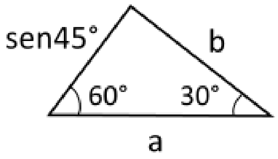
91.



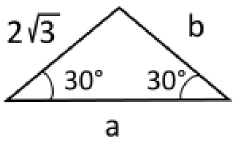
94.



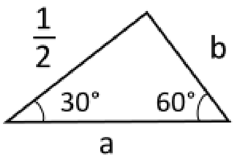
97.



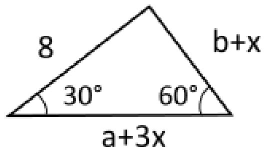
92.



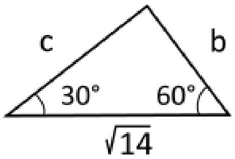
95.



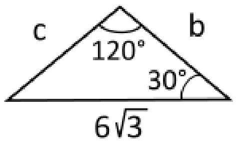
98.



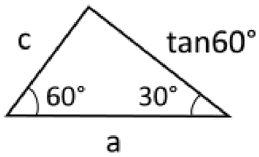
93.



96.



99.



Utilice la ley de los cosenos para resolver los siguientes triángulos:

100. $\gamma = 60°$ $\quad a = 5,$ $\quad b = 8,$ $\quad c = ?$

101. $\beta = 60°$ $\quad a = 9$ $\quad c = 12$ $\quad b = ?$

102. $\propto = 120$ $\quad b = 4$ $\quad c = 6$ $\quad a = ?$

103. $\gamma = 30°$ $\quad a = 2\sqrt{2}$ $\quad b = 4$ $\quad c = ?$

104. $\gamma = 90°$ $\quad a = \sqrt{12}$ $\quad b = \sqrt{6}$ $\quad c = ?$

105. $\propto = 30°$ $\quad b = 2\sqrt{3}$ $\quad c = 5$ $\quad a = ?$

106. $a = 1$ $\quad b = 2$ $\quad c = \sqrt{3}$ $\quad \gamma = ?$

107. $a = 18$ $\quad b = 9\sqrt{3}$ $\quad c = 9$ $\quad \beta = ?$

108. $a = 16\sqrt{2}$ $\quad b = 8\sqrt{6}$ $\quad c = 8\sqrt{2}$ $\quad \gamma = ?$

Quimática

El triángulo, herramienta valiosa para el análisis de tres componentes

M. en F. Leticia Huerta Flores
Dr. José Ángel Rojas Zamorano
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM

El triángulo, figura geométrica que es algo más que tres ángulos y tres lados. Es una herramienta valiosa en el análisis gráfico para el cálculo de la proporción en la que se pueden combinar un sistema de tres componentes. Tal recurso, es de gran utilidad en el estudio de equilibrio de fases, de la probabilidad de formar piedras en la vesícula biliar, de la determinación de la solubilidad en función de las interacciones intermoleculares, entre otros ejemplos más que revisaremos.

Aplicación del triángulo en ejemplos prácticos.

¿Cómo se puede preparar una crema?[1]

Una crema de uso común, que sea utilizada como una forma farmacéutica o con fines cosméticos, es una emulsión, en la que se combinan dos líquidos que son prácticamente inmiscibles, gracias a la acción de un agente que se conoce como **tensoactivo** (para fines prácticos es una sustancia que actúa como jabón o detergente).

Un diagrama de fases de la solubilización de un sistema formado por agua, aceite mineral y el tensoactivo (**Brij 97** [$C_{18}H_{35}(OCH_2CH_2)_{10}OH$]), lo muestra la siguiente figura.

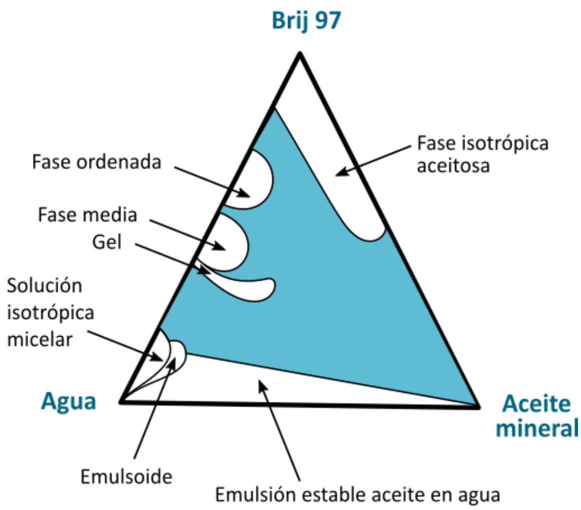


Figura 1. *Diagrama de fase parcial del Brij97-Agua-Aceite mineral. En los vértices del triángulo (que corresponde al 100 % del componente en cuestión) están: en el superior, el tensoactivo **Brij 97**; en el inferior izquierdo el agua; y en el inferior derecho el aceite mineral. Como se mencionó en el texto, el lado opuesto al vértice es el 0 % del componente.*
*La única región de interés para producir la crema, es en el intervalo de porcentajes de los componentes, que se localicen en la región inferior: **Emulsión estable aceite en agua**[3].*

Cuando se tienen a estos dos disolventes y el tensoactivo, y con combinaciones adecuadas de cada componente, se puede dispersar una fase en otra, formando una

[1] *Florence AT and Attwood D. Physicochemical Principles of Pharmacy. Chapter 5. Pharmaceutical Press, 2011. ProQuest Ebook Central, pp: 186-239. Fig 5.40..*

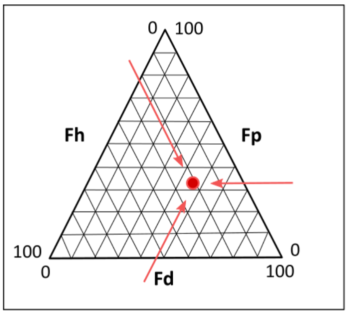
emulsión que tendrá la consistencia deseada de la crema. Es importante por lo tanto el cálculo de masa para evitar caer fuera de los límites de la región a la que se desee llegar, de otra manera, se producirá una transición de fases no deseada. En la figura 1**,** se revelan diferentes regiones producidas por diversos porcentajes de los componentes agua/aceite mineral/Brij 97:

¿Cómo saber si un soluto es afín a un disolvente?[2]

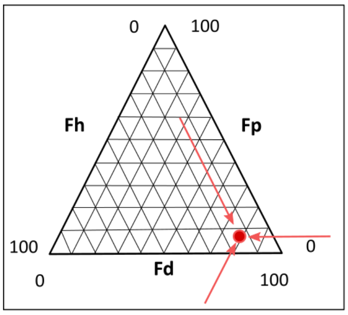
Los disolventes son capaces de dispersar en su fase a un soluto, siempre y cuando éste le sea afín. Deben tener coincidencia en alguna de sus propiedades físicas, por ejemplo, la polaridad (es decir si la molécula del soluto y disolvente tienen una distribución asimétrica de su nube electrónica, de manera que se forma un dipolo).

Particularmente en el disolvente es importante qué fuerzas de interacción intermoleculares manifiesta, entre ellas su capacidad para producir fuerzas entre dos dipolos (**Fp**); si es capaz de formar puentes de hidrógeno (**Fh**), o si es una molécula que no forme dipolos y la única atracción entre sus moléculas sean las débiles **Fuerzas de Dispersión de Lóndon** (**Fd**). De muchos disolventes se han calculado estas tres fuerzas, y existen tablas en las que registran las magnitudes de estas[3].

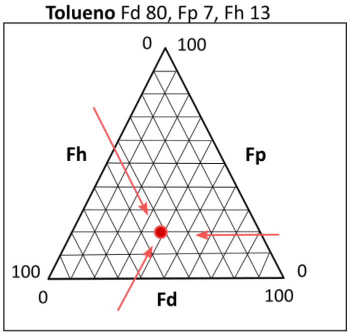
Un ejemplo donde ha sido de gran utilidad es en la restauración de obras de arte, en la que se recopilaron los datos mencionados, se tabularon, y a partir de éstos, se construyen los diagramas triangulares que se aplican, con el fin de saber qué disolvente es más adecuado para la limpieza o recuperación de una obra de arte, sin que dañe los pigmentos o materiales de la pieza.



Acetona Fd 47, Fp 32, Fh 21



Tolueno Fd 80, Fp 7, Fh 13



Alcohol etílico Fd 36, Fp 18, Fh 46

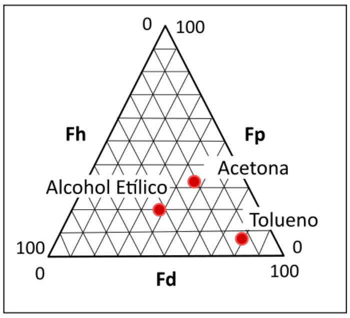


Figura 2. Se localizaron los parámetros de cada disolvente, con base en la tabla ***1.*** *En los triángulos se localiza la ubicación de cada disolvente: acetona, etanol y tolueno. Y acorde a estas propiedades, como se ven en los tres primeros triángulos las coordenadas de cada uno. Y en el último, se ubican a los tres[4, 5].*

[2] *Zalbidea MA. Cómo utilizar el triángulo de solubilidad o triángulo de Teas. Universitat Politècnica de València. Octubre 19 2017. [Citado: 2020 julio 31]. Disponible en: https://youtu.be/Z75Gc5na0QU.*

[3] *Jouyban A (editor). Handbook of Solubility Data for Pharmaceuticals. Boca Ratón, CRC Press, 2010. Table 1.7, pp: 22.*

Tabla 1. Parámetros de solubilidad.

Disolvente	Fd	Fp	Fh
Etanol	36	18	46
Ligroína	97	2	1
Acetona	47	32	21
Tolueno	80	7	13
Mineral Sprit	90	4	6

Se resumen los parámetros descritos relativos a las fuerzas de interacción intermole-culares: de Dispersión (**Fd**), dipolo-dipolo (**Fp**) y formación de puentes de hidrógeno (**Fh**). Las magnitudes se expresaron de tal manera que la suma para cualquier disolvente es 100.

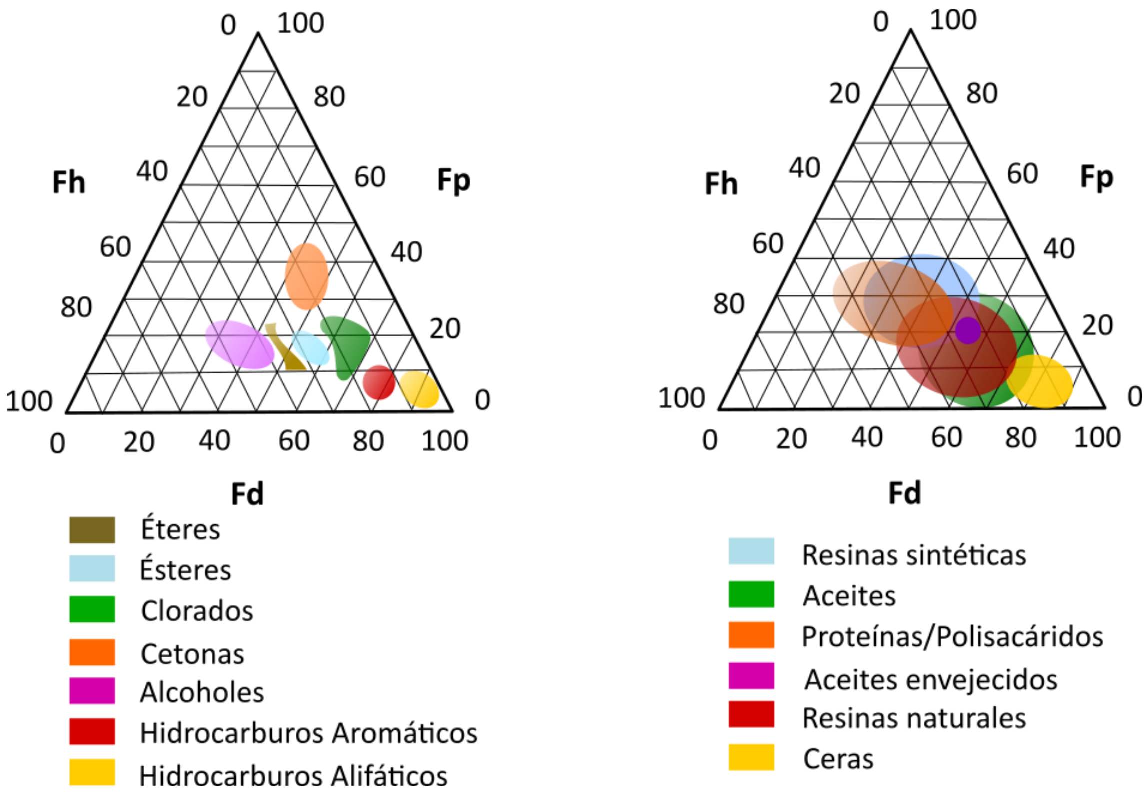


Figura 3. El diagrama de la izquierda localiza a los disolventes, en función de su grupo funcional, en tanto que el de la derecha corresponde, tomando en cuenta los parámetros descritos, con los materiales con los que se construyen las obras de arte. De manera que, si no se quiere disolver a algún pigmento o material, no deben de coincidir con la región del disolvente que se pretende utilizar[4, 4].

[4] *Zalbidea MA. EL TRIÁNGULO DE SOLUBILIDAD. Una herraienta básica. Departamento de Conservación y Restauració de Bienes Culturales. Facultad de Bellas Artes.*

En cuanto a los cálculos de la vesícula biliar ¿cómo se puede saber cuál es el riesgo de formarlos?[7]

El colesterol en la bilis es transportado en micelas que se forman por la mezcla con lecitina y sales biliares. Un cambio en la proporción de estos tres componentes lleva a que se precipiten cristales el colesterol, responsables de los **cálculos biliares** debido a una alta concentración de la bilis en la vesícula biliar.

En el triángulo de la figura 4 se advierten dos puntos: el verde se localiza en la única región del diagrama en la que se forman las micelas que impiden que la suspensión de la mezcla no precipite en tales cristales. En cambio, el punto rojo, se localiza en una región, muy amplia, en la que existe el riesgo de producir estos cálculos biliares. El vértice superior del triángulo le corresponde al colesterol 100 % puro; el inferior izquierdo a las sales biliares y el derecho a la lecitina[5].

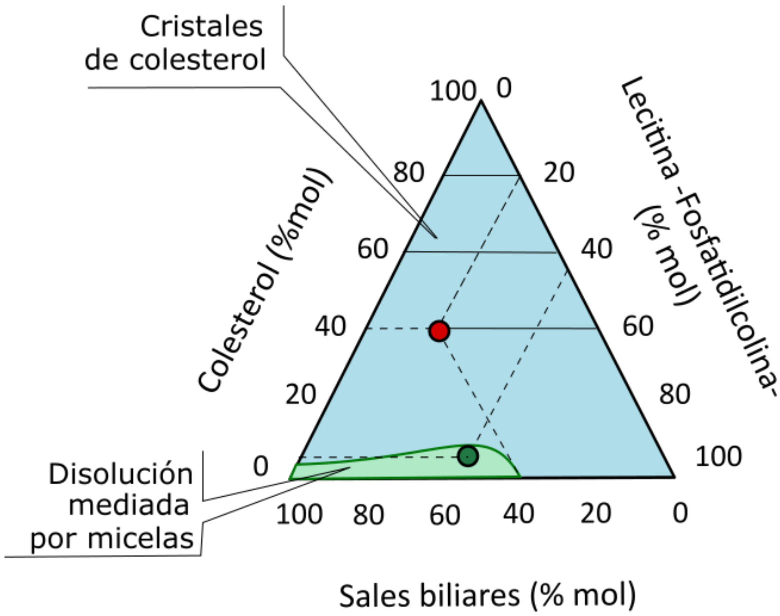


Figura 4. *Disolución mediada por micelias en colesterol y bilis. El diagrama muestra el sistema para la formación de bilis. Los vértices, en el sentido inferior izquierdo, superior y inferior derecho, corresponden al 100 % de: las sales biliares, el colesterol y la lecitina, respectivamente. La única región que reúne el intervalo de la proporción adecuada para que no se formen cálculos biliares, es la iluminada en verde*[7].

[5] *Despopoulos A and Silbernagl S. Color Atlas of Physiology. 5th ed. Stuttgart, Georg Thieme Verlag, 2003. Chap 10. figure E; pp: 248-149*

¿Qué puede ocurrir si a una mezcla de dos disolventes totalmente miscibles, se les añade una sal? El efecto de la "salificación"[6]

Es un procedimiento común en la práctica, cuando se tiene una mezcla de dos disolventes totalmente miscibles, como, por ejemplo, agua/etanol o agua/metanol, añadirles una sal para poder separarlos, limitando su característica de miscibilidad.

En la siguiente figura se describe un sistema entre agua, etanol y la sal K_2CO_3.

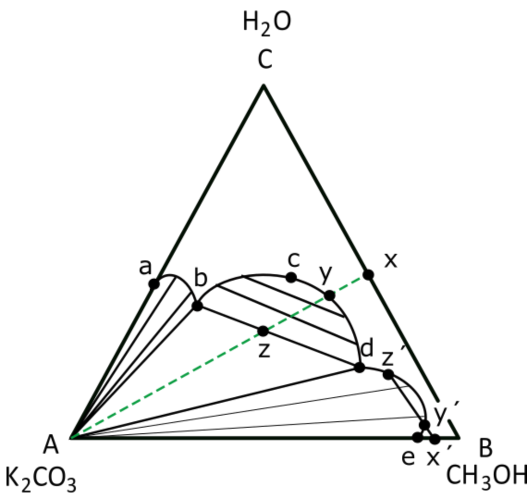


Figura 5. *El diagrama corresponde a: $H_2O/CH_3OH/K_2CO_3$, En el que se describen 5 regiones de equilibrio de fases:*

$\widehat{Aab}$: K_2CO_3 $_{(s)}$/disolución acuosa; $\widehat{Ade}$: K_2CO_3 $_{(s)}$/disolución orgánica (en la que el disolvente es el CH_3OH);

$\widehat{bcdz}$: disoluciones líquidas orgánica/acuosa;

$\widehat{Abzd}$: K_2CO_3 $_{(s)}$/orgánica/acuosa;

$a\widehat{CBedcb}$: región homogénea de una sola fase.

En esta última se produce una miscibilidad total entre los 3 componentes[8].

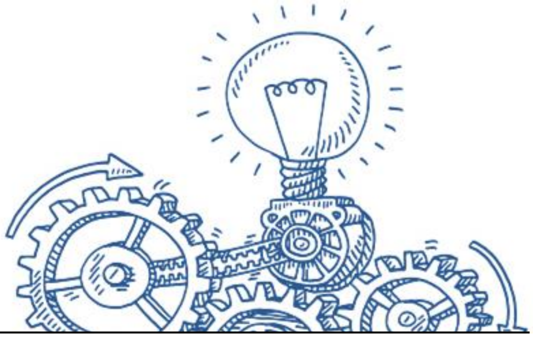
[6] *Castellan GW. Fisicoquímica. Cap.15. 2ª ed. México, Pearson Educación, 1987, figura 15.30, pp: 364-365.*

En la línea punteada $\overline{Ax}$ ***"x"*** es una mezcla ***H_2O/CH_3OH*** aproximada de 50% de cada disolvente, en ausencia de la sal ***K_2CO_3*** (0 % A), de manera que, se tiene una sola fase líquida. Si se recorre la línea, desde ***"x"*** hacia ***"A"***, describe el proceso de añadir paulatinamente la sal a la mezcla original. Al llegar al punto ***"y"*** aparece pequeñas cantidades de un segundo líquido. En la figura, la zona descrita por la línea $\widehat{bcdz}$, región de líquidos: una fase acuosa y otra orgánica. Si se continúa añadiendo más sal, se llegará al punto ***"z"*** en el que la sal iniciará su precipitación, primero en pequeña cantidad, justamente en el punto ***"z"***. En la medida que se avanza hacia el vértice ***"A"***, la cantidad de la sal precipitada, y la proporción con respecto a los líquidos descritos, aumentarán.

Referencias

1. Florence AT and Attwood D. Physicochemical Principles of Pharmacy. Chapter 5. Pharmaceutical Press, 2011. ProQuest Ebook Central, pp: 186-239. Fig 5.40. [Citado: 2020 julio 31]. Disponible en: https://ebookcentral.proquest.com/lib/unam/reader.action?docID=765802&ppg=216.
2. Lachampt R, Vila RM. Am Perfum Cosmet, 1967; 82-89.
3. Zalbidea MA. EL TRIÁNGULO DE SOLUBILIDAD. Una herraienta básica. Departamento de Conservación y Restauració de Bienes Culturales. Facultad de Bellas Artes. Universidad Politécnica de Valencia. Disoponible en: https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/78228/Zalbidea%20-%20EL%20TRIÁNGULO%20DE%20SOLUBILIDAD.%20Una%20herramienta%20básica..pdf?sequence=1.
4. Zalbidea MA. Cómo utilizar el triángulo de solubilidad o triángulo de Teas. Universitat Politècnica de València. Octubre 19 2017. [Citado: 2020 julio

31]. Disponible en: https://youtu.be/Z75Gc5na0QU.
5. Jouyban A (editor). Handbook of Solubility Data for Pharmaceuticals. Boca Ratón, CRC Press, 2010. Table 1.7, pp: 22. [Citado: 2020 julio 31]. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/235663778_Handbook_of_Solubility_Data_for_Pharmaceuticals.
6. Despopoulos A and Silbernagl S. Color Atlas of Physiology. 5th ed. Stuttgart, Georg Thieme Verlag, 2003. Chap 10. figure E; pp: 248-149.
7. Díaz M y Muntaner AR. Química Física. Volumen II. Capítulo 21. Madrid, Editorial Alhambra, 1978, pp: 880-916.
8. Castellan GW. Fisicoquímica. Cap.15. 2ª ed. México, Pearson Educación, 1987, pp: 340-367.
9. Atkins PW. Química Física. Cap 8. 6ª ed. Barcelona, Ediciones Omega SA, 1999, pp: 193-216.
10. Maron SH y Prutton CF. Fundamentos de Fisicoquímica. Cap. 10. México, Limusa Noriega Editores, 2001, pp: 351-406.
11. Kemp MK. Physical Chemistry. A Step by Step Approach. Chap 13. New York, Marcel Dekker Inc. 1979, pp: 755-801.



Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 12. Triángulos

1. $x = 3 \quad y = 6$ **3**. $x = \frac{45}{4}$ **5**. $x = 8 \quad y = 6 \quad z = \frac{15}{2}$ **7**. $x = 5 \quad y = \frac{5}{2}$

9. $x = 6$ **11**. $x = 4 \quad y = 6 \quad z = 2$ **13**. $\sqrt{405} - \sqrt{125}$ **15**. $c = 8$ 17. $h = \sqrt{95}$

19. $m = 16$ **21**. $m = \frac{361}{\sqrt{215}}$ **23**. $x = \frac{8}{9}\sqrt{77} \quad y = \frac{16}{9} \quad z = \sqrt{\frac{77}{4}}$ **25**. $13.5\, u^2$

27. $28.5\, u^2$ **29**. $5\sqrt{82}\; u^2$ **31**. $\sqrt{50}\, u^2$ **33**. $\frac{\sqrt{65}\sqrt{58}}{2}$ **35**. $\sqrt{77}\, u$

37. $sen\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $tan\theta = \frac{2}{3}$, $cot\theta = \frac{3}{2}$, $sec\theta = \frac{\sqrt{13}}{3}$, $csc\theta = \frac{\sqrt{13}}{2}$

39. $sen\theta = \frac{8}{12}$, $cos\theta = \frac{\sqrt{80}}{12}$, $tan\theta = \frac{8}{\sqrt{80}}$, $cot\theta = \frac{\sqrt{80}}{8}$, $sec\theta = \frac{12}{\sqrt{80}}$, $csc\theta = \frac{12}{8}$

41. $sen\theta = \frac{3}{5}$, $cos\theta = \frac{4}{5}$, $tan\theta = \frac{3}{4}$, $cot\theta = \frac{4}{3}$, $sec\theta = \frac{5}{4}$, $csc\theta = \frac{5}{3}$

43. $sen\theta = \frac{\sqrt{13}}{6}$, $cos\theta = \frac{2}{63}$, $tan\theta = \frac{\sqrt{13}}{4}$, $cot\theta = \frac{4}{\sqrt{13}}$, $sec\theta = \frac{3}{2}$, $csc\theta = \frac{6}{\sqrt{13}}$

45. $sen\theta = \frac{1}{3}$, $cos\theta = \frac{2}{3}$, $tan\theta = \frac{1}{2}$, $cot\theta = 2$, $sec\theta = \frac{3}{2}$, $csc\theta = 3$

47. $cot^2\theta cos\theta$ **49**. $sec\theta csc\theta$ **51**. $sen\theta cos\theta$ **53**. $cot\theta$ **55**. $2sen\theta cos\theta$

57. 2 **59**. $cot^2\theta$ **61**. 13 **63**. $csc\theta$ **65**. $2csc^2\theta$ **67**. $2cos^2\theta$ **69**. $cos\theta$

71. $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ **73**. $-\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$ **75**. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **77**. $\frac{\sqrt{6}}{12}\left(4-\sqrt{2}\right)$ **79**. $\frac{1}{3}\sqrt{3}+1$

81. $b = 3\sqrt{3},\ c = 6\sqrt{3}$ **83**. $a = \frac{3}{2},\ b = \sqrt{3}$ **85**. $b = \sqrt{2},\ c = 2\sqrt{2}$ **87**. 10 **89**. $a = 12$

91. $a = 2\sqrt{5} \quad b = \sqrt{15}$ **93**. $b = \frac{\sqrt{14}}{2} \quad c = \frac{\sqrt{42}}{2}$ **95**. $a = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{6}$

97. $a = \sqrt{2} \quad b = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad c = \frac{\sqrt{6}}{2}$ **99**. $a = 2 \quad b = \sqrt{3} \quad c = 1$ **101**. $b = 3\sqrt{13}$

103. $c = 2\sqrt{6-\sqrt{6}}$ **105**. $a = \sqrt{7}$ **107**. $\beta = 30°$

13

Figura Plana y sólido

LO QUE APRENDERÁS. . .

13.1 Cálculo de perímetros, áreas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares y círculos.
13.2 Cálculo de áreas superficiales y volúmenes de cubos, paralelepípedos, prismas, cono, cilindro y esfera.

13.1 Cálculo de perímetros, áreas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares y círculo

Las culturas antiguas resolvieron problemas geométricos de perímetros y áreas, aunque el primer uso geométrico se le atribuye a Egipto por la necesidad del calcular la parte proporcional de su tierra que había sido inundado por el Rio Nilo para deducirla de su impuesto.

Esto lo podemos ver por el significado de la palabra geometría que proviene del griego "*geo*" que significa tierra y "*metrein*" que significa medir, por lo tanto la **geometría** es la rama de las matemáticas que se ocupa de las **propiedades del espacio,** esperando que nuestros amigos cavernícolas de la caricatura encuentren la utilidad a la rueda.

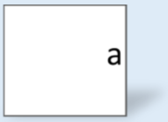
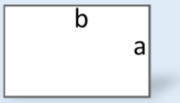
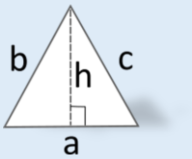
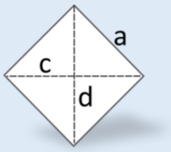
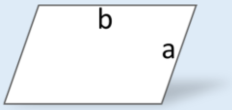
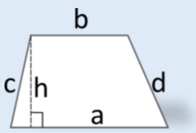
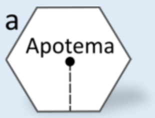
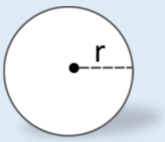
Para describir el espacio se utilizan rectas unidimensionales (una sola dimensión de longitud) que pueden describir o delimitar un plano conocido como superficie o área (la unidad utilizada para medir se llama unidad cuadrada). Si la región limitada presenta algún lado curvo, el área puede ser calculada por geometría diferencial.

Definición

El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados. Y el **área** de un polígono es la suma de las áreas de los triángulos inscritos.

Si bien se define el área como la suma de triángulos, se puede encontrar utilizando las siguientes fórmulas:

Figura 13.1 Perímetro y área de algunas figuras geométricas

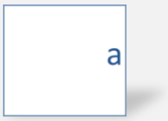
Nombre	Figura	Perímetro	Área
Cuadrado		$4a$	a^2
Rectángulo		$2a + 2b$	ab
Triangulo		$a + b + c$	$\frac{ah}{2}$
Rombo		$4a$	$\frac{dc}{2}$
Paralelogramo		$2a + 2b$	ah
Trapecio		$a + b + c + d$	$\left(\frac{a+b}{2}\right)h$
Polígono regular		na n-número de lados del polígono	$\frac{(Perimetro)(apoten}{2}$
Circulo		$2\pi r$	πr^2

Ejemplo 1

a) Encuentre el área de un cuadrado, cuyo perímetro mide 34 cm
b) La diagonal de un cuadrado mide 15 cm, ¿Cuál es el área del cuadrado?
c) El área de un rectángulo es 600 cm^2, si la base mide 12 cm, ¿Cuánto mide la altura? y ¿Cuál es el valor de su perímetro?

Solución a)

Se sabe que para un cuadrado se tiene:



	Perímetro	Área
	$4a$	a^2

$$34\ cm = 4a$$

$$a = \frac{34}{4} \qquad a = 8.5\ cm$$

Ahora el área

$$A = (8.5\ cm)^2 \qquad \boldsymbol{A = 72.25\ cm^2}$$

Solución b)

Se usa el triángulo rectángulo, conociendo la hipotenusa y que los lados son iguales, se tiene:

$$c^2 = a^2 + a^2$$

$$2a^2 = c^2$$

$$a = \sqrt{\frac{(15)^2}{2}}$$

Ahora el área

$$\boldsymbol{A} = \left(\sqrt{\frac{(15)^2}{2}}\right)^2 \qquad A = \frac{(15)^2}{2} \qquad \boldsymbol{A = 112.5\ cm^2}$$

Solución c)

Para un rectángulo**,** se conoce el área y un lado, por lo que sólo se despeja la altura.

$$a = \frac{600\ cm^2}{12\ cm} \qquad a = 50\ cm$$

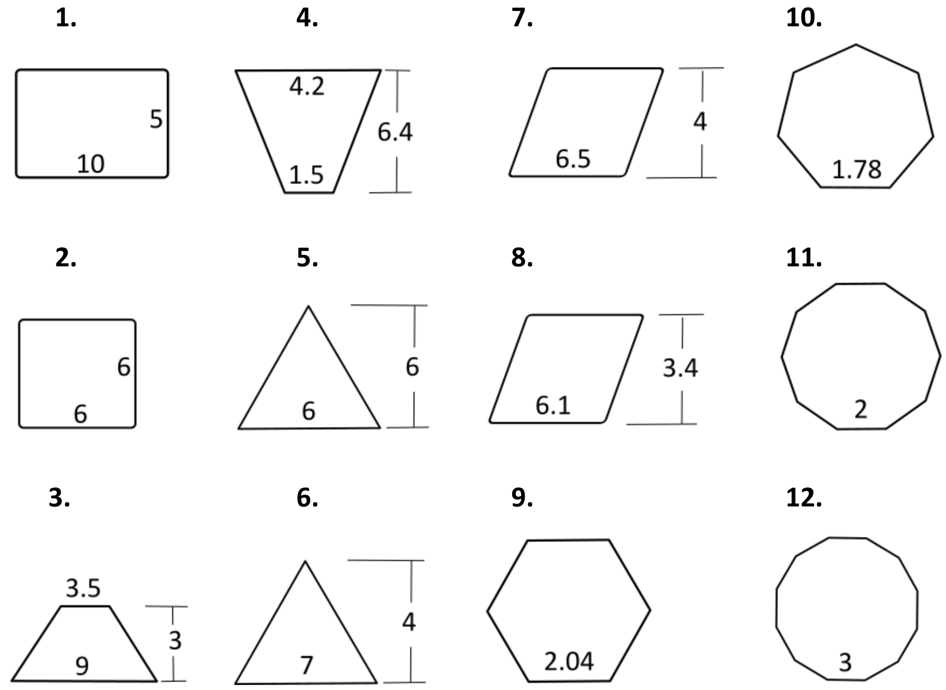
El perímetro es:

$$P = 2a + 2b$$

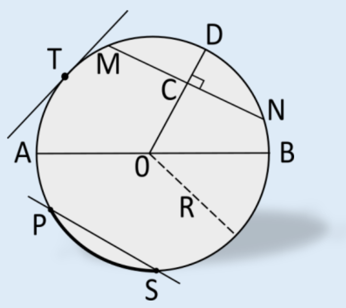
$$P = 2(50) + 2(12) \qquad \boldsymbol{P = 124\ cm}$$

Ejercicios de refuerzo 13.1

Calcule el área de las siguientes figuras geométricas.



La **circunferencia** es un elemento geométrico presente en muchos cálculos en casi todas las disciplinas, por ello es imprescindible la solución de ejercicios que hablen de la circunferencia. Para ello primero se establecen las siguientes definiciones:



Centro: (0) Centro de circunferencia.

Radio: (R) Distancia del centro c en cualquier punto de la circunferencia.

Diámetro: (AB) Divide la circunferencia en dos parte iguales.

Tangente: (T) Recta que intersecta a la circunferencia en un punto.

Secante: (PS) Recta que intersecta a la circunferencia en dos puntos.

Arco: ($\widehat{PS}$) Es una porción de la circunferencia.

Cuerda: (MN) Segmento que intercepta en dos puntos a la circunferencia.

Apotema: (OC) Segmento perpendicular del centro hacia la cuerda.

Flecha sagita: (CD) Segmento prolongado del apotema que intercepta a la circunferencia.

Ejemplo 2

a) Calcule el radio de una circunferencia cuya área es 30 cm^2.
b) Calcule el área sombreada de una circunferencia de 3 cm de radio circunscrito en un cuadrodo de 4 cm de lado.
c) Calcule el área de un hexágono circunscrito en una circunferencia cuyo radio es 5 cm.

Solución a)

Se sabe para una circunferencia:

$$A = 30\ cm^2$$

$$A = \pi r^2$$

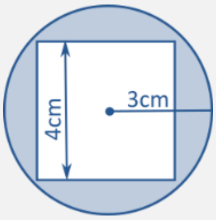
Se despeja el radio

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \qquad r = \sqrt{\frac{30}{\pi}}$$

$$\boldsymbol{r = 3.09\ cm}$$

Solución b)

Según lo descrito se tiene:



Por lo tanto:

$$A_{Sombreada} = A_{Circunferencia} - A_{Cuadrado}$$

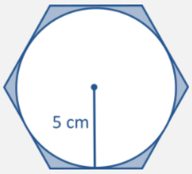
$$A_S = \pi r^2 - a^2$$

$$A_S = \pi(3cm)^2 - (4cm)^2$$

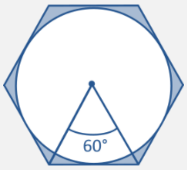
$$\boldsymbol{A_S = 12.27\ cm^2}$$

Solución c)

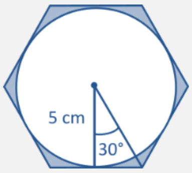
Según lo descrito se tiene que, la apotema es de 5 cm:



Se sabe que el ángulo de una porción del hexágono es 360°/6=60°.



Ahora se puede plantear el siguiente triángulo rectángulo:



El triángulo a resolver es:

$$\tan 30° = \frac{cateto\ opuesto}{5\ cm}$$

$$cateto\ opuesto = 5\ cm(\tan 30°)$$

$$cateto\ opuesto = 2.88\ cm$$

El lado del polígono es dos veces el cateto opuesto del triángulo.

$$a = 2(2.88\ cm)$$

$$a = 5.77\ cm$$

El perímetro del hexágono será:

$$P = 6(a)$$

$$P = 6(5.77\ cm) \qquad P = 36.64\ cm$$

El área del polígono es:

$$A = \frac{(Perimetro)(apotema)}{2}$$

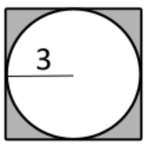
$$A = \frac{(36.64\ cm)(5cm)}{2}$$

$$\boldsymbol{A = 86.6\ cm^2}$$

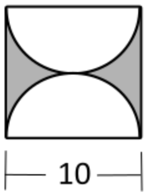
Ejercicios de refuerzo 13.2

Calcule el área sombreada de las siguientes figuras.

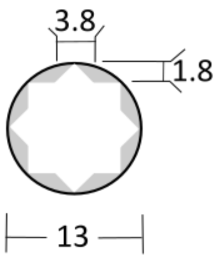
13.



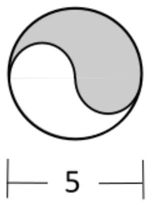
15.



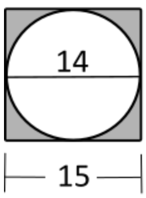
17.



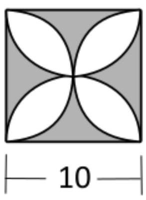
19.



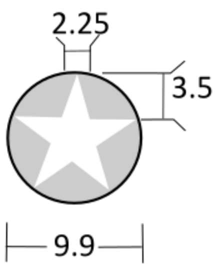
14.



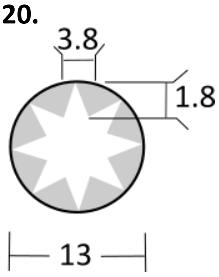
16.



18.



20.



La **arandela circular** es una superficie comprendida entre dos circunferencias concéntricas, las cuales comparten el mismo centro. Esta área sombreada es conocida comúnmente como corona, rondana o anillo.

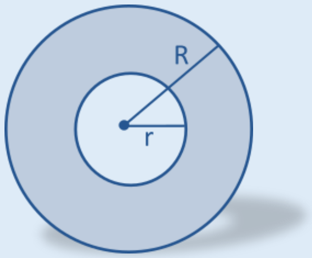
Definición

El **área** de la arandela circular está definido como:

$A = \pi(R^2 - r^2)$

El **perímetro** de toda la arandela es:

$P = 2\pi(R + r)$



Ejemplo 3

Calcule el área y perímetro de la siguiente arandela:

Solución

Para el área se tiene:

$A = \pi[(9cm)^2 - (6\ cm)^2]$

$\boldsymbol{A = 141.4\ cm^2}$

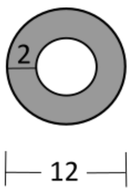
El perímetro es:

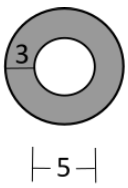
$P = 2\pi(9cm + 6cm)$

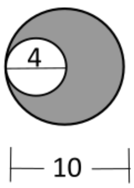
$\boldsymbol{P = 94.2\ cm}$

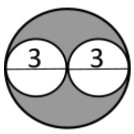
Ejercicios de refuerzo 13.3

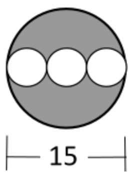
Calcule el área sombreada de las siguientes figuras y perímetro.

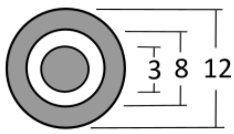
21.


23.


25.


22.


2 4.


26.


El **sector circular** es una superficie comprendida entre dos radios, generando una “rebanada de pastel”.

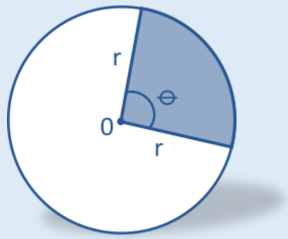
Definición

El **área** de un sector circular:

$$A = \pi r^2 \left(\frac{\theta}{360}\right)$$

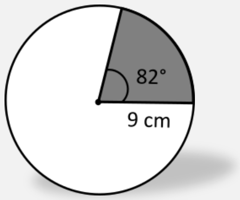
El **perímetro** de un sector circular:

$$P = r\left(2 + \frac{\pi\theta}{180}\right)$$



Ejemplo 4

Calcule el área y perímetro del siguiente sector circular:



Solución

Para el área se tiene:

$$A = \pi(9cm)^2\left(\frac{82}{360}\right)$$

$$\boldsymbol{A = 57.9\ cm^2}$$

El perímetro es:

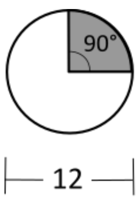
$$P = 9\ cm\left(2 + \frac{\pi \times 82}{180}\right)$$

$$\boldsymbol{P = 30.8\ cm}$$

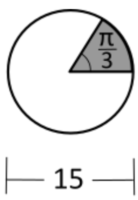
Ejercicios de refuerzo 13.3

Calcule el área y perímetro de los sectores circulares.

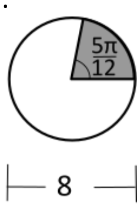
27.



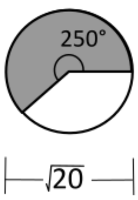
29.



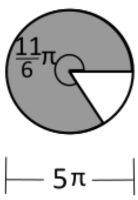
31.



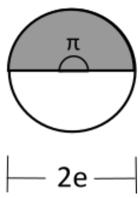
28.



30.



32.

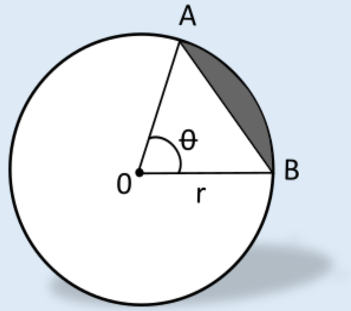


El **segmento circular** es la región del círculo comprendida entre una cuerda y uno de los arcos, el cual resulta de restar un sector circular con el triángulo que se forma.

Definición

El **segmento circular** de un círculo:

$$A = \pi r^2\left(\frac{\theta}{360}\right) - área\ \Delta 0AB$$



Se puede tener tres posibilidades para el área del triángulo dependiendo del tipo (equilátero, isósceles y triángulo rectángulo).

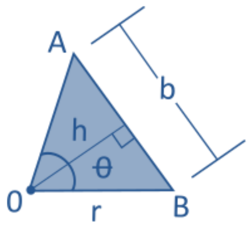
EQUILÁTERO

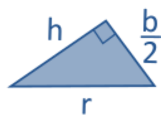
Para ello el ángulo del triángulo es de 60°. En tal caso la medida de sus lados son iguales, por lo que la base es igual al radio, logrando plantear lo siguiente:

Utilizando Pitágoras en el triángulo $\mathbf{0AB}$

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$r^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}$$





$$h^2 = \frac{4r^2 - b^2}{4}$$

Pero la base es igual al radio por ser equilátero, por lo que:

$$h^2 = \frac{4r^2 - r^2}{4} \qquad h^2 = \frac{3r^2}{4}$$

Se aplica la raíz en ambos miembros:

$$h = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} \qquad h = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

Finalmente el área del triángulo es:

$$A = \frac{bh}{2}$$

$$A = \frac{r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)}{2}$$

$$A = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

Para el segmento se tiene:

$$A = \pi r^2\left(\frac{60°}{360°}\right) - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\boldsymbol{A = r^2\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right]}$$

De manera similar se puede hacer el análisis para áreas del segmento para diversos ángulos (Tabla13.1).

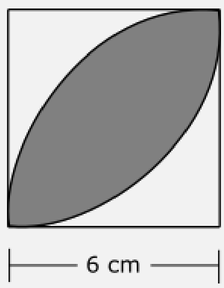
Tabla 13.1

Ecuaciones del área para segmentos de circunferencias

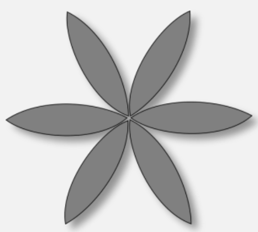
Ángulo (°)	Formula del área del triángulo	Área del segmento
30	$\frac{r^2\sqrt{1}}{4}$	$\frac{r^2}{2}\left[\pi - \frac{1}{2}\right]$
45	$\frac{r^2\sqrt{2}}{4}$	$\frac{r^2}{4}\left[3\pi - \sqrt{2}\right]$
60	$\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
90	$\frac{r^2}{2}$	$\frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$

Ejemplo 5

a) Calcule el área sombreada de la siguiente figura:



b) Encuentre la expresión matemática para calcular el área de la flor de seis pétalos y obtenga el área para una longitud de pétalo de 5 cm.



Solución a)

El área sombreada corresponde a dos segmentos circulares, de la tabla 13.1 la fila que indica 90° (por corresponder un ángulo de 90°).

$$A = \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$$

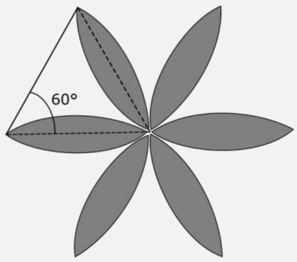
$$A = \frac{(6)^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] = 10.27\ cm^2$$

Para dos segmentos será:

$$\boldsymbol{A = 20.54\ cm^2}$$

Solución b)

El ángulo que separa a cada pétalo es de 60 grados (360°/ 6 pétalos)



De la tabla 13.1 la fila que indica 60° se tiene el área de medio pétalo.

$$A = \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

Para la flor será:

$$A = 12\left\{\frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right\}$$

$$A = 6r^2\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$A = r^2\left[2\pi - 3\sqrt{3}\right]$$

El área será:

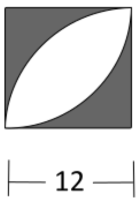
$$A = 5^2\left[2\pi - 3\sqrt{3}\right]$$

$$\boldsymbol{A = 27.17\ cm^2}$$

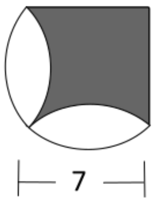
Ejercicios de refuerzo 13.5

Calcule el área sombreada de las siguientes figuras.

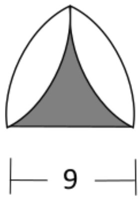
33.



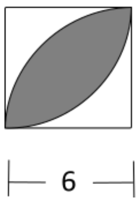
35.



37.

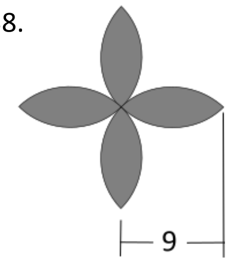


34.



36.

38.



13.2 Cálculo de áreas superficiales y volúmenes de cubos, paralelepípedo, prismas, cono, cilindro y esfera

El cálculo de áreas superficiales es mejor conocido como cálculo de áreas de envolventes, se puede pensar en ello como una una plantilla que se despliega de la cual se obtiene el área (Figura 13.2).

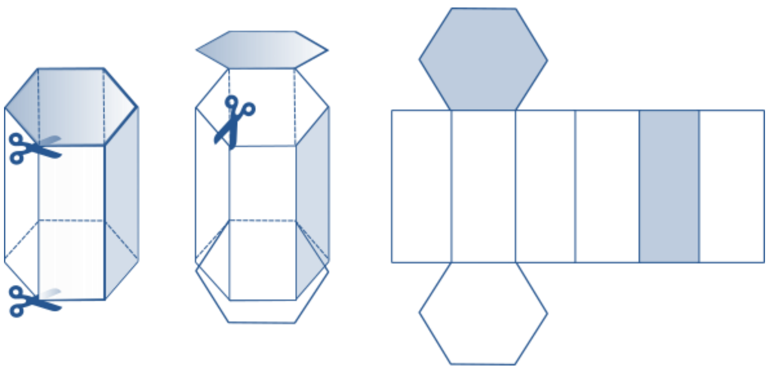


Figura 13.2 Plantilla de un prisma hexagonal.

Se puede ver que el area del envolvente del prisma hexagonal es la suma del área de **seis rectángulos** con el área de **dos hexágonos**. Para resolver ejercicios de envolventes se debe de lograr visualizar todas las caras que conforman una figura geométrica para calcular el área de la envolvente (Figura 13.2).

La superficie de la envolvente es un concepto que se utiliza para la catálisis de reacciones químicas, en donde los reactivos están en diferentes fases, esto hace que la reacción se lleve a cabo en la superficie de contacto de los reactivos y la necesidad de esa superficie de contacto.

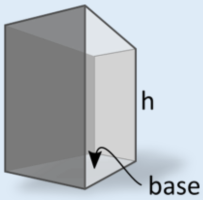
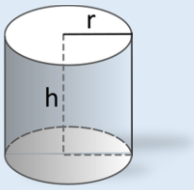
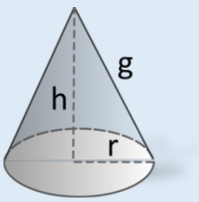
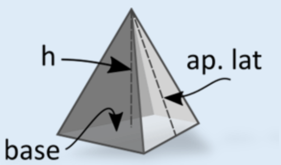
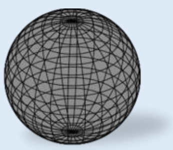
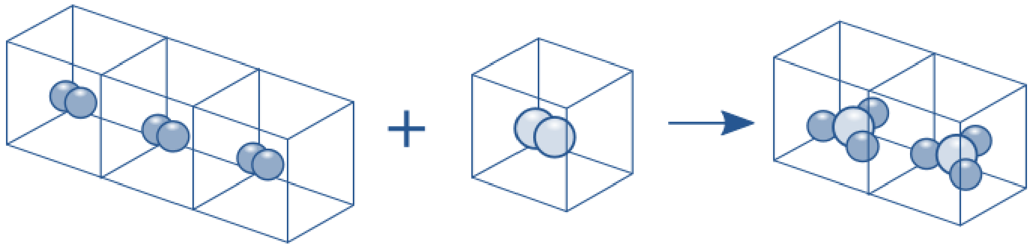
Nombre	Figura	Área de la envolvente	Volumen
Cubo		$6a^2$	a^3
Prisma		$(perimetro \times h) + 2\ área\ base$	$Base \times h$
Cilindro		$2\pi r(h + r)$	$\pi r^2 h$
Cono		$\pi r^2 + \pi r g$	$\frac{\pi r^2 h}{3}$
Pirámide		$\frac{perimetro\ base \times ap\ lat}{2} + área\ base$	$\frac{area\ base \times h}{3}$
Esfera		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

Figura 13.3 Área de envolventes de algunos cuerpos geométricos

El volumen desde el punto de vista químico tiene un sin fín de vertientes y usos,por ejemplo en reacciones gaseosas y en la forma geométrica de las moléculas.

Para conocer la cantidad de sustancia en los gases se utiliza la Ley de Avogadro de los volúmenes. Por ejemplo en la Figura 13.4 se ilustra la reacción química de 3 moles de Hidrógeno con 1 mol de Nitrógeno para proporcionar 2 moles de Amoniaco.

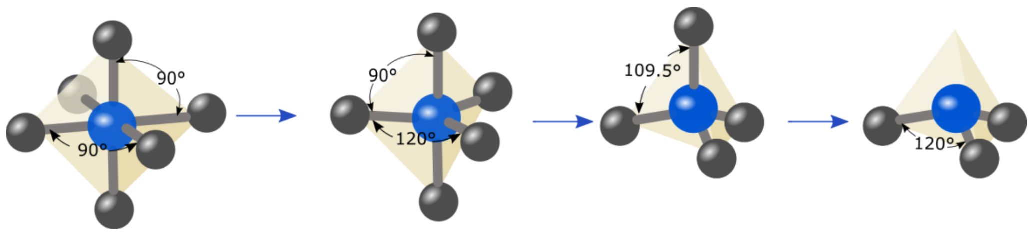


$$3H_{2(g)} \quad + \quad N_{2(g)} \quad \rightarrow \quad 2NH_{3(g)}$$

3 volúmenes + 1 volumen → 2 volúmenes

Figura 13.4 Relación de volúmenes de gases en una reacción química.

Ahora bien la forma general de una molécula esta determinada por sus ángulos y longitud de enlace; en las moléculas o iones que tienen un solo átomo central enlazado a dos o más átomos del mismo tipo, se puede predecir la geometría de las moléculas, usando el modelo de Repulsión de los Pares de Electrones de la Capa de Valencia (RPECV), vea la figura 13.5 en donde se ilustra lo mencionado.



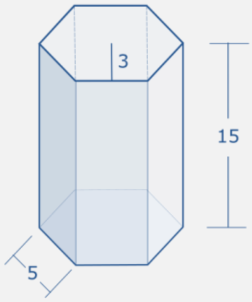
Octaédrica Bipiramidal trigonal Tetraédrica Pirámide trigonal

Figura 13.5 Formas moleculares que se obtienen eliminando los átomos de los vértices de las formas básicas.

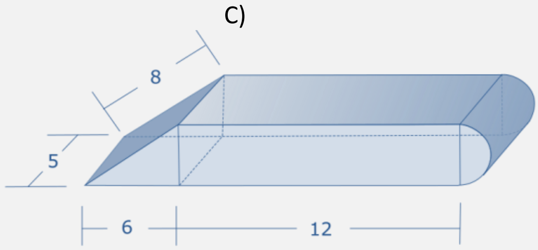
Ejemplo 6

Calcule los volúmenes y áreas superficiales de los siguientes cuerpos geométricos.

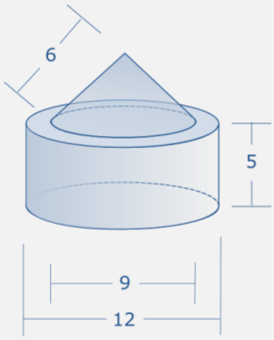
a)



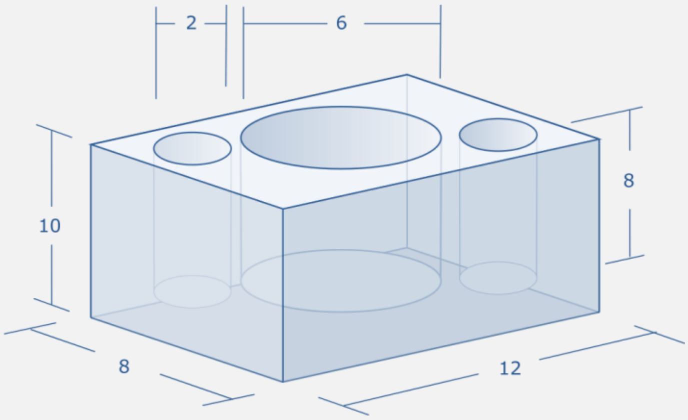
C)



b)



d)



Solución a)

Apotema $a = 3$
Altura $h = 15$

$$V = \frac{(Perímetro)(Apotema)(Altura)}{2}$$

$$V = \frac{(6)(5)(3)(15)}{2}$$

$$\boldsymbol{V = 675\ u^3}$$

Área superficial

$$A_S = 2A_{HEXAGONOS} + 6A_{RECTÁNGULOS}$$

$$A_S = \frac{2(Perimetro)(Apotema)}{2} + 6(Lado)(Lado)$$

$$A_S = \frac{2(6)(5)(3)}{2} + 6(5)(15) \qquad \boldsymbol{A_S = 540\ u^2}$$

Solución b)

Volumen

$V = V_{CILINDRO} + V_{CONO}$

$V_{CILINDRO}$

Diámetro $D = 12$
Altura $h = 5$

$V_{CILINDRO} = \pi r^2 h$

$V_{CILINDRO} = \pi \left(\frac{12}{2}\right)^2 (5)$

$V_{CILINDRO} = 565.5\, u^3$

V_{CONO}

Diámetro $D = 9$
Altura $h = 3.9$ (Teorema de Pitágoras)

$V_{CONO} = \frac{\pi r^2 h}{3}$

$V_{CONO} = \frac{\pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 (3.9)}{3}$

$V_{CONO} = 82.7\, u^3$

$V = 565.5\, u^3 + 82.7\, u^3$ $\boldsymbol{V = 648.2\ u^3}$

Área superficial

$A_S = A_{CILINDRO} + A_{CONO}$

$A_S = 2\pi r(h + r) + \pi r^2 + \pi r g$

$A_S = 2\pi 6(5 + 6) + \pi(4.5)^2 + \pi(4.5)(6)$ $\boldsymbol{A_S = 563.1\ u^2}$

Solución c)

Volumen

$V = V_{PRISMA\ TRIÁNGULAR} + V_{PRISMA\ RECTÁNGULAR} + V_{SEMICILINDRO}$

$V_{PRISMA\ TRIÁNGULAR}$

$A = \frac{bh}{2}$ $A = \frac{6(5.29)}{2}$

$A = 15.8\, u^2$

$V = 15.8\, u^2\ (5u)$

$V = 79.3\, u^3$

$V_{PRISMA\ RECTÁNGULAR}$

$A = bh$ $A = (12)(2.29)$

$A = 27.48\, u^2$

$V = 27.48\, u^2\ (5\ u)$

$V = 137.4\, u^3$

$V_{SEMICILINDRO}$

$A = \frac{\pi r^2}{2}$ $A = \frac{\pi(2.29/2)^2}{2}$

$A = 2.06\, u^2$

$V = 2.06\, u^2\ (5\ u)$

$V = 10.3\, u^3$

$V = 79.3\, u^3 + 137.4\, u^3 + 10.3\, u^3$ $\boldsymbol{V = 227\, u^3}$

Área superficial

$$A_S = A_{PRISMA\ TRIÁNGULAR} + A_{PRISMA\ RECTÁNGULAR} + A_{SEMICILINDRO}$$

$A_{PRISMA\ TRIÁNGULAR}$

$$A = 2Rectángulos + 2\ triángulos$$

$$A = 2(L)(L) + 2\frac{bh}{2}$$

$$A = (2)(5)(8) + (6)(2.29)$$

$$A = 93.74\ u^2$$

$A_{PRISMA\ RECTÁNGULAR}$

$$A = 2Rectángulos + 2\ Rectángulos$$

$$A = 2(12)(5) + 2(12)(2.29)$$

$$A = 174.96\ u^2$$

$A_{SEMICILINDRO}$

$$A = \frac{2\pi r(h+r)}{2} \qquad A = \pi\left(\frac{2.29}{2}\right)\left(5 + \frac{2.29}{2}\right) \qquad A = 22.1\ u^2$$

$$A_S = 93.7\ u^2 + 174.9\ u^2 + 22.1\ u^2 \qquad \boldsymbol{A_S = 290.8\ u^2}$$

Solución d)

Volumen

$$V = V_{PRISMA\ RECTÁNGULAR} - V_{CILINDRO\ MAYOR} - 2V_{CILINDRO\ MENOR}$$

$V_{PRISMA\ RECTÁNGULAR}$

$$V = (L)(L)(L)$$

$$V = (8)(12)(10)$$

$$V = 960\ u^3$$

$- V_{CILINDRO\ MAYOR}$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi\left(\frac{6}{2}\right)^2 (8)$$

$$V = 226.19\ u^3$$

$- 2V_{CILINDRO\ MENOR}$

$$V = 2\pi r^2 h$$

$$V = 2\pi\left(\frac{2}{2}\right)^2 (8)$$

$$V = 50.26\ u^3$$

$$V = 960\ u^3 - 226.19\ u^3 - 50.26\ u^3$$

$$\boldsymbol{V = 683.5\ u^3}$$

Área superficial

$$A_s = A_{RECTÁNGULO} + A_{CILINDRO\ MAYOR} + 2A_{CILINDRO\ MENOR} - A_{CIRCUNFERENCIA\ MAYOR} - 2A_{CIRCUNFERENCIA\ MENOR}$$

$$A_{RECTÁNGULO} = 2Rectángulos\ mayores + 2\ rectángulos\ menores$$

$$A_{RECTÁNGULO} = 2(12)(10) + 2(8)(10)$$

$$A_{RECTÁNGULO} = 400\ u^2$$

$A_{CILINDRO\ MAYOR} = 2\pi r(h + r)$

$A = 2\pi 3(8 + 3)$

$$A_{CILINDRO\ MAYOR} = 207.34\ u^2$$

$2A_{CILINDRO\ MENOR} = 4\pi r(h + r)$

$2A_{CILINDRO\ MENOR} = 4\pi 1(8 + 1)$

$$2A_{CILINDRO\ MENOR} = 113.09\ u^2$$

$A_{CIRCUNFERENCIA\ MAYOR} = \pi r^2$

$A_{CIRCUNFERENCIA\ MAYOR} = \pi(3)^2$

$$A_{CIRCUNFERENCIA\ MAYOR} = 28.27\ u^2$$

$2A_{CIRCUNFERENCIA\ MENOR} = 2\pi r^2$

$2A_{CIRCUNFERENCIA\ MENOR} = 2\pi(1)^2$

$$2A_{CIRCUNFERENCIA\ MENOR} = 6.28\ u^2$$

Finalmente

$$A_s = A_{RECTÁNGULO} + A_{CILINDRO\ MAYOR} + 2A_{CILINDRO\ MENOR} - A_{CIRCUNFERENCIA\ MAYOR} - 2A_{CIRCUNFERENCIA\ MENOR}$$

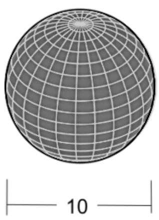
$$A_s = 400\ u^2 + 207.34\ u^2 + 113.09\ u^2 - 28.27\ u^2 - 6.28\ u^2$$

$$\boldsymbol{A_s = 685.9\ \ u^2}$$

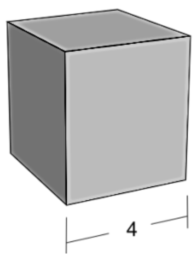
Ejercicios de refuerzo 13.6

Calcule el volumen y área superficial de los siguientes cuerpos geométricos.

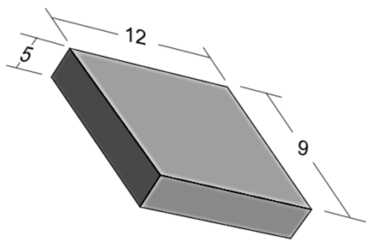
39.



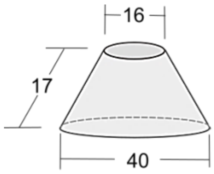
40.



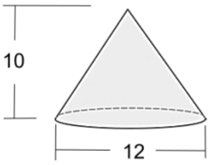
41.



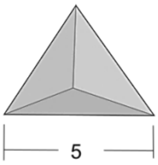
42.



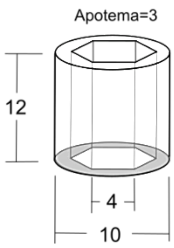
43.



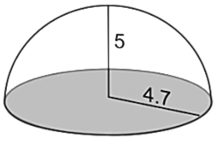
44.



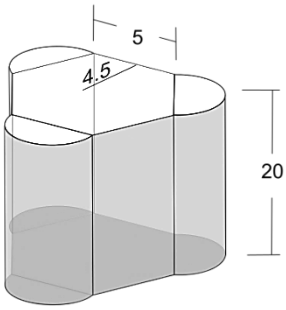
45.



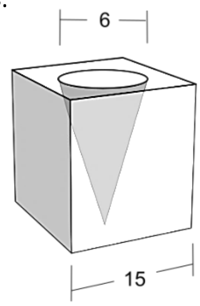
46.



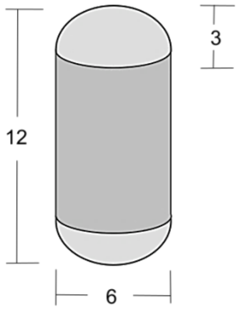
47.



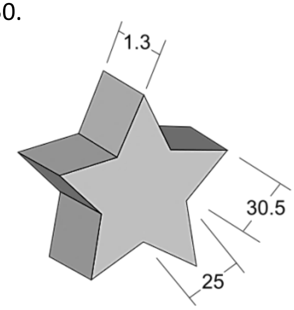
48.



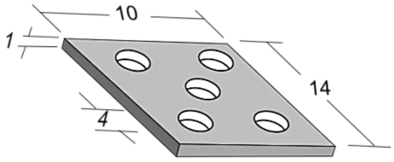
49.



50.



51.



El tema de volumen en la industria farmacéutica tiene una gran aplicación, por ejemplo en el diseño de comprimidos, cápsulas entre otros.

Los comprimidos tienen un sin fín de presentaciones. El tamaño suele oscilar entre 5 y 17 mm y el peso entre 0.1 y 1 g (Vila Jato, 2001), lo cual depende de la cantidad del principio activo. Los comprimidos pueden llevar divisiones para facilitar su partición. La figura 13.6 muestra solo algunas formas geométricas de las tantas que existen en el mercado.

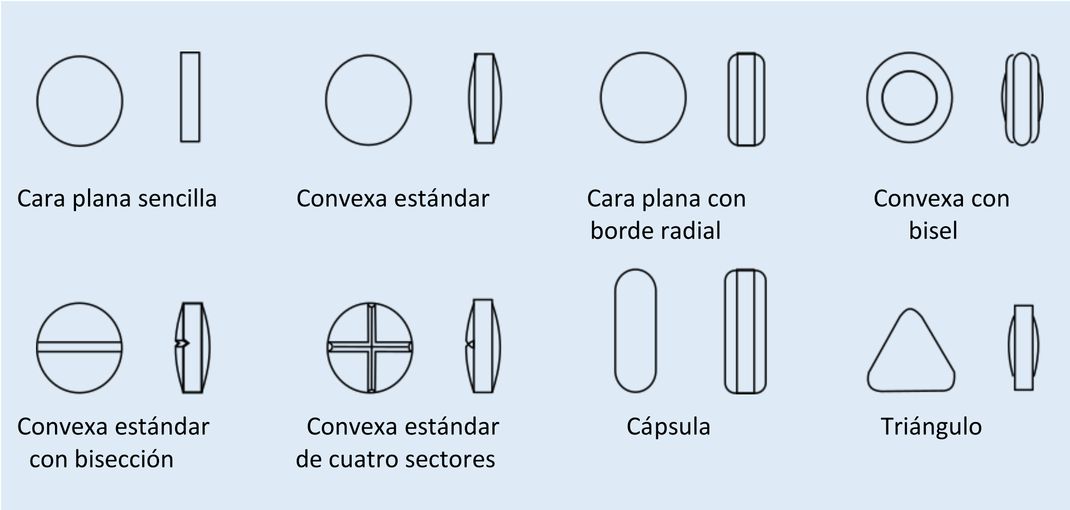


Figura 13.6 Algunas formas geométricas de comprimidos

Las cápsulas son cilindros redondeados en donde se aloja el principio activo y excipiente, pueden ser rellenos con polvos, comprimidos pasta, cápsulas o pellets. El llenado de cápsulas es un medio seguro para manejar fármacos muy poderosos.

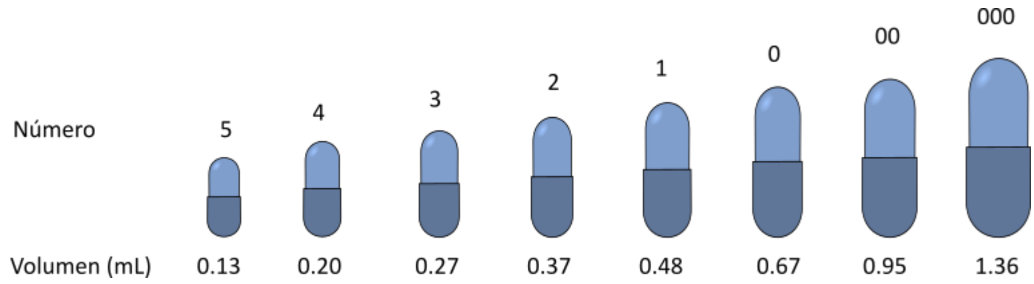


Figura 13.6 Tamaño de cápsula y capacidad

Ejemplo 7

a) Se requiere hacer un Tetrabrik de base rectangular, el largo y alto miden el doble que del ancho. También se requiere que contenga 364.4 mL ¿Cúanto cartón se necesita? Nota desprecie las uniones del Tetrabrik.

b) Calcule el tiempo que tardara en llenarse un depósito cilíndrico cuyo radio mide 0.5 cm y posee una altura de 1 metro, si fluyen al depósito 40 litros por minuto.

c) Calcule las dimensiones de un frasco cilíndrico para contener 30 cápsulas del numero 0, el frasco debe poseer el triple del volumen de las cápsulas y en su diseño éste debe poseer el doble de altura respecto al diámetro.

Solución a)

El volumen es 364.4 mL que eqivale a 364.4 cm^3

El volumen $V = A_{base}h$

$364.4\ cm^3 = x \cdot 2x \cdot 2x$

$$364.4\ cm^3 = 4x^3$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{364.4}{4}}$$

$$x = \sqrt[3]{91.125}$$

$$x = 4.5\ cm$$

El área superficial que se necesita será:

$$A = 4(9 \cdot 4.5) + 2(9 \cdot 9)$$

$$\boldsymbol{A = 324\ cm^2}$$

Nota: Esta área no consideró las uniones entre cartón.

Solución b)

El flujo es 40 litros por minuto

El volumen es: $V = \pi r^2 h$

$$V = \pi(0.5/2)^2 2$$

$$V = 0.3926\, m^3$$

Recuerde que 1 metro cúbico contiene 100 litros.

$$V = 392.7\ litros$$

Ahora el flujo

$$F = \frac{V}{t}$$

Se tiene que el tiempo es:

$$t = \frac{V}{F}$$

$$t = \frac{392.7\ litros}{40\ litros\ /min} \qquad \boldsymbol{t = 9.8\ min}$$

Solución c)

Volumen de una cápsula del número cero 0.67 mL.

Volumen de 30 cápsulas. $V = 30(0.67\ mL)$

$$V = 20.1\ mL$$

Volumen del frasco: $V = 3(20.1\ mL)$

$$V = 60.03\ mL$$

Recuerde que 1 mL es 1 cm^3

$$V = 60.03\ cm^3$$

$$60.03\ cm^3 = \pi r^2 h$$

Dimensiones: $h = 2D$

$$60.03\ cm^3 = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 2D$$

$$60.03\ cm^3 = \pi\frac{D^2}{4}2D$$

$$60.03\ cm^3 = \pi\frac{D^3}{2}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{60.03\ cm^3\ (2)}{\pi}}$$

$$\boldsymbol{D = 3.37\ cm}$$

La altura será entonces:

$$\boldsymbol{h = 6.7\ cm}$$

Ejercicios de refuerzo 13.7

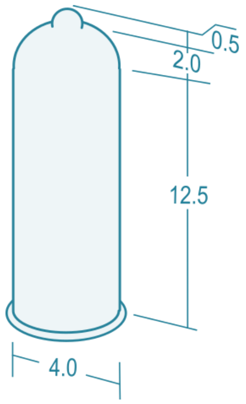
Calcule lo que se pide en los siguientes ejercicios.

52. Un alfarero desea construir un juego de tazas para café cada una debe tener una capacidad de 550 ml, diámetro superior de 10 cm y una base circular con un diámetro de 8 cm.

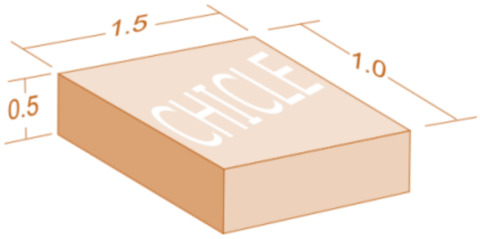
   a) Calcular la generatriz,
   b) Calcular la altura y
   c) Esbozar la forma de la taza.

53. Se desea diseñar un tanque de almacenamiento de agua contra incendio el cual debe tener una capacidad de 50,000 galones americanos. De acuerdo con la norma de la NFPA (National Fire Prevention Asociation) éste debe tener un diseño esférico. Calcular; a) el diámetro del tanque, b) el área que ocuparía el tanque. Expresar los resultados en unidad de metros).

54. Hoy en día el uso de preservativos a aumentado en especial el condón para varones, existiendo 6 tallas. En una farmacéutica se quiere implementar el proceso de fabricación de este tipo de anticonceptivos y se tienen las siguientes dimensiones en centímetros, como se muestra en el dibujo ¿Calcular el volumen del condón de látex?



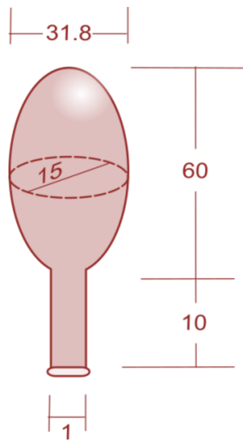
55. Se desea diseñar un blíster en el cual se colocarán 6 piezas de chicles con un arreglo de 2 filas, los chicles tienen las siguientes dimensiones:



Además, entre cada pastilla debe existir una separación de 1 cm por cada lado. Calcular el área y el volumen total del blíster.

56. Una fábrica de globos pretende meter un nuevo diseño de estos, el molde tiene las siguientes dimensiones en centímetros.

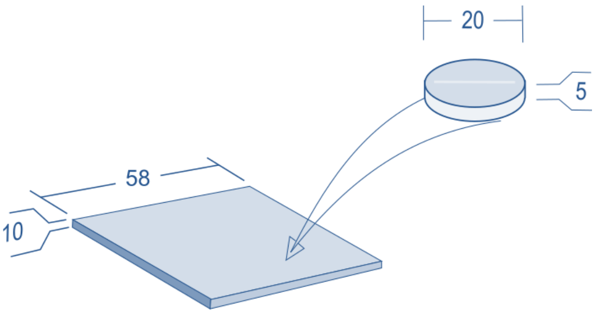
Calcular el volumen del globo en litros.



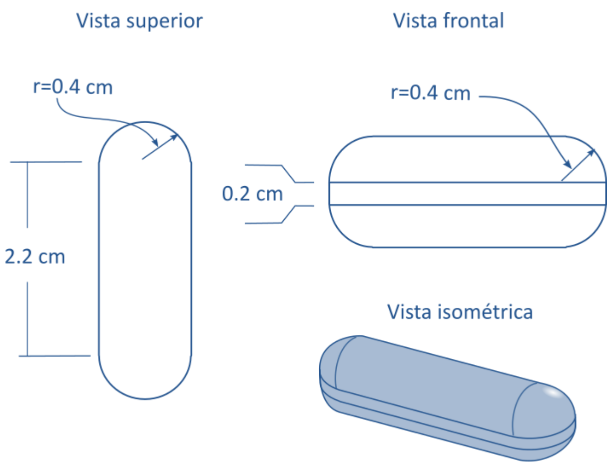
57. Se desea comercializar metformina en una presentación en cápsulas estas tienen una capacidad de 0.95 mL. Dentro de la planta se cuenta con un equipo que hace partículas esféricas de diámetro de 5.66 milímetros. a) ¿Cuántos pellets deben colocarse dentro de cada cápsula? b) ¿Cuál es la dosis en gramos por cápsulas? Considere que la densidad de la metformina es de 1.41 g/mL.

58. Se tiene un blíster el cual posee las siguientes dimensiones en milímetros:

    ¿Cuántas tabletas de las siguientes dimensiones se pueden colocar dentro de este blíster?



59. ¿Cuántos gramos de un polvo de densidad 1.3 g/cm^3 se requieren para hacer una tableta de la siguiente forma?



La importancia de las áreas y su relación con la catálisis

Escrito por: Dra. Eugenia Josefina Aldeco Pérez
Centro de Investigación y Desarrollo Tecnológico, CIDETEQ-CONACYT
ealdeco@cideteq.mx

Un catalizador es un sistema que acelera la velocidad de una reacción y existen tanto en los sistemas biológicos (enzimas), como en los industriales (refinación de petróleo).

Particularmente, la catálisis heterogénea (que implica la presencia de dos o más fases), involucra un contacto del catalizador sólido, con las materias primas de un proceso, que pueden estar en estado líquido o gaseoso. Uno de los ejemplos más comunes, son los convertidores catalíticos de los vehículos de combustión, donde superficies metálicas de platino, rodio o paladio se fijan en los escapes de los autos, con el fin de transformar las emisiones de gases contaminantes en otros gases menos tóxicos, mediante las reacciones especificadas en las **Ecuaciones 1 y 2:**

$$2\,CO_2 + O_2 \rightarrow 2CO_2 \qquad \textbf{Ec...}\ ①$$

$$2NO_x \rightarrow xO_2 + N_2 \qquad \textbf{Ec...}\ ②$$

Una imagen que representa la metodología de uso de un catalizador heterogéneo es la de la **Figura 1**, donde las partículas del catalizador en estado sólido realizan la reacción de transformación de reactivos(R) a productos (P), fenómeno que ocurre únicamente en la superficie del catalizador[1].

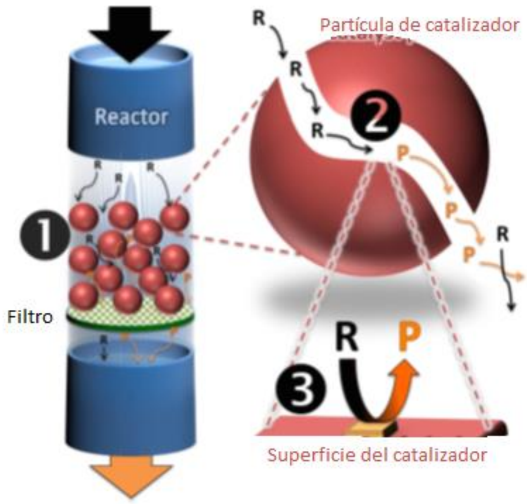


Figura 1. Reactor con catalizador heterogéneo, donde se muestra como se separan de las moléculas de reactivos (R) y productos (P), además de un acercamiento a la superficie y a la partícula del catalizador (Imagen tomada de la referencia 1.

Para explicar el fenómeno de la catálisis heterogénea, se utilizan varias teorías, una de ellas es la teoría geométrica, que consiste en hacer una correspondencia de tipo geométrica entre los átomos activos en la superficie del catalizador y los átomos de la molécula (o sólo la parte que será modificada).

Para ejemplificar este concepto, se hace uso de la reacción de adición de hidrógenos al benceno, la cual es catalizada por metales como el platino. Pensando en un arreglo hexagonal, como el que posee el benceno, para poder hidrogenarlo con átomos de platino, se requieren siete átomos de metal por cada molécula de benceno, para que tengan ambas el máximo contacto y se pueda llevar a cabo la reacción. La disposición espacial es un átomo de platino en cada una de las aristas del hexágono y uno en el centro de éste. **Figura 2.**

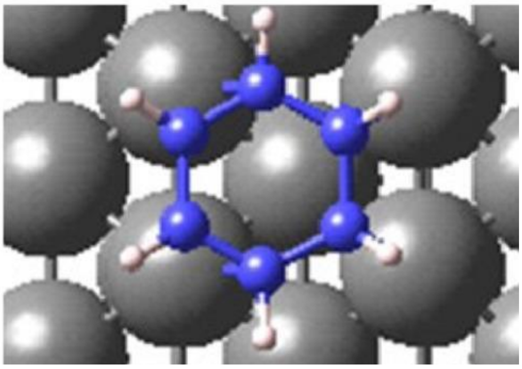


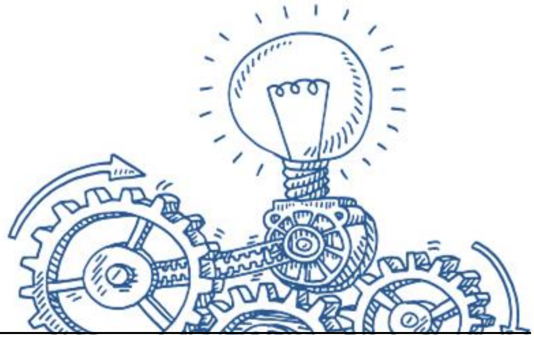
Figura 2. Modelo de adsorción de benceno (molécula en azul) en una superficie de átomos de platino (en gris) [2].

Es así como, las superficies, y también los perímetros, se vuelven dos parámetros de importancia para poder estimar el número de sitios activos catalíticos para una reacción: es posible estimar su número y se calcula que en los metales es del orden de 10^{15} átomos por centímetro cuadrado y en los catalizadores ácidos de 10^{11} átomos por centímetro cuadrado. También podemos hablar de una relación geométrica de conversión y de eficiencia del catalizador, o sea: por cada molécula de benceno a transformar, necesito siete átomos de platino, de acuerdo a las áreas asociadas con las especies involucradas.

La definición de la actividad catalítica es: velocidad de reacción en moles transformados por segundo y por gramo de catalizador, la cual podemos también expresar en número de átomos de catalizador[3].

Referencias

1. Dumeignil, F.; Paul, J.; Paul, S. Heterogeneous Catalysis with Renewed Attention: Principles, Theories and Concepts. J. Chem. Ed., 2017, 94, 675.
2. Ayishabi, P.K.; Chatanathodi, R. Adsorption of benzene on low index surfaces of platinum in the presence of van der Waals interactions, Surface Science, 2017, 664, 8.
3. Fuentes, S.; Díaz, G. Catalizadores ¿La piedra filosofal del siglo XX?, 1997, Colección la ciencia desde México, 1997, Fondo de Cultura Económica.



Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 13. Figura plana y sólidos

1. $50\ u^2$ **3**. $18.7\ u^2$ **5**. $18\ u^2$ **7**. $26\ u^2$ **9**. $10.8\ u^2$ **11**. $198.6\ u^2$ **13**. $7.7\ u^2$ **15**. $21.4\ u^2$

17. $32.5\ u^2$ **19**. $9.8\ u^2$ **21**. $62.8\ u^2$ $62.8\ u$ **23**. $75.4\ u^2$ $50.2\ u$ **25**. $65.9\ u^2$ $50.2\ u$

27. $28.2\ u^2$ $21.42\ u$ **29**. $29.4\ u^2$ $22.8\ u$ **31**. $10.4\ u^2$ $13.2\ u$ **33**. $102.9\ u^2$ **35**. $35\ u^2$

37. $27.7\ u^2$ **39**. $523.6\ u^3$ $314.16\ u^2$ **41**. $54\ u^3$ $10.8\ u^2$ **43**. $377\ u^3$ $333.6\ u^2$ **45**. $510.5\ u^3$ $822\ u^2$

47. $1939\ u^3$ $1130.1\ u^2$ **49**. $282.7\ u^3$ $282.7\ u^2$ **51**. $77.1\ u^3$ $265.1\ u^2$ **53**. $D = 3.3\ m$ $A = 34.3\ m^2$

55. $A = 42.5\ cm^2$ $V = 21.25\ cm^3$ **57**. $a)$ 10 $b)$ $1.34\ g\ de\ metformina$ **59**. $2.37\ g$

14

Organización de la Información

LO QUE APRENDERÁS. . .

14.1 Elementos estructurales de un gráfico

La organización de la información se presenta desde los albores de la humanidad, cuya finalidad es controlar y coordinar las tareas comunes que nos han llevado a perdurar como especie.

Se dice que en 1644 se realizó la primera representación de datos estadísticos (gráfica), al mostrar las variaciones en la determinación de la longitud entre la ciudad de Toledo (España) y Roma (Italia). La importancia de la organización de la información se dio paulatinamente, fue hasta 1765 que se utilizó por primera vez la "línea del tiempo", para representar los acontecimientos cronológicos, estas gráficas requerían la distribución exacta de las longitudes así como el acomodo de los años, por lo que el uso de escalas para representar las variables independientes.

Fue en el año de 1794 que se comercializó el primer papel cuadriculado en Inglaterra con la finalidad de hacer gráficos estadísticos en menor tiempo. Se considera que el inventor de las gráficas de líneas barras es el inglés Wiliam Playfair en 1786 y en 1801 introdujo la gráfica de sectores (INEI, 2009).

De esta forma se inventó el lenguaje visual aplicable a cualquier ciencia, con lo que el punto de vista de explicar datos e información. Por lo que a lo largo del tiempo los gráficos han sido expuestos de diversas maneras, en la actualidad el software comercial para elaborar una gráfica es Excel®, aunque existe un sin fín de programas potentes que cumplen con esta función.

Lo primero antes de graficar es clasificar los datos que se tienen para tomar la decisión del tipo de gráfico a utilizar. Los **datos** en una gráfica pueden ser **cualitativos** que se refieren a cualidades o naturaleza de éstos por lo que no se puede representar con números, tal es el caso de los meses del año o el abecedario. Si los datos siguen un orden o secuencia se les conoce como **ordinales**, pero si no lo hacen se llaman **categóricos**.

Por otro lado los datos también pueden ser **cuantitativos**, en éstos si se utilizan valores numéricos y pueden emplearse enteros; por ejemplo el número de tubo de ensayo o cajas Petri, a éstos se les conocen como datos **discretos** si se utilizan fracciones (o decimales) como la temperatura de reacción los datos son de tipo continuos.

Una vez que se elige el gráfico por sus características, éste debe de contener lo siguiente:

- Número de gráfico
- Título
- Cuerpo
  - Figura
  - Escala o eje de valores
  - Leyenda
  - Eje de conceptos
- Pie de gráfico
  - Nota
  - Fuente

NÚMERO DE GRÁFICO

El **número de gráfico**, es la clasificación que se le da al gráfico para su identificación, se constituye por dos números separados por un punto; el primer número corresponde al capítulo en donde se ubica y el segundo a la orden de aparición. Por ejemplo si queremos colocar el número de gráfico en el **capítulo dos** y es la **quinta gráfica** se tiene que es:

Gráfica 2.5

Si se tiene un capítulo único en un trabajo se recomienda sólo numerar en forma consecutiva el número de gráfico.

TÍTULO

El **título** es la descripción que se coloca después del número de gráfico, con el objetivo de dar a conocer las variables y sus características de forma clara y ordenada, evitando el exceso de información. Respondiendo las preguntas:

¿Qué? Se refiere a la variable dependiente medida o característica principal que se quiere mostrar, por ejemplo:

- **% Absorbancia de polímeros de alto peso molecular**
- **Curva de calibración**

¿Cómo? Se especifica cómo se obtuvo la información (**método o técnica**), también se puede hacer referencia al concepto del eje de la variable independiente colocando la palabra "**en función de**". Por ejemplo:

- **Por el método de SDS-page**
- **En función de la temperatura**

¿Cuándo? Se indica el periodo o momento en que se realizó la medición o se obtuvieron los datos experimentales tanto de laboratorio como de campo. Por ejemplo:

- **En el año 2018**
- **2018**

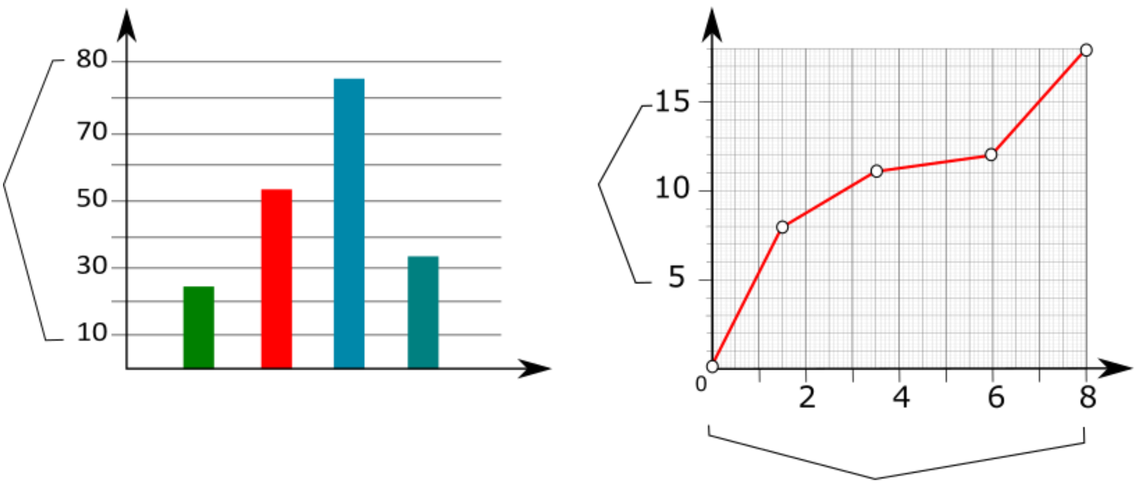
Veamos un ejemplo de título de gráfico que responda las preguntas planteadas.

Grafica 3.6 % Transmitancia de polímeros de baja densidad por la técnica de infrarrojo, 2018

CUERPO

El cuerpo del gráfico está compuesto por la imagen donde se representan los valores asociados a los datos y los elementos que lo constituyen son: figura, escala de ejes, leyenda y eje de conceptos.

Figura, las cuales pueden ser líneas, rectángulos, circunferencias y polígonos. Normalmente cuando se utiliza como figura a la línea recta, se debe de utilizar **escala** en ambos ejes de valores; pero si se utilizan rectángulos por ejemplo, basta con escalar la variable dependiente Figura 14.1.

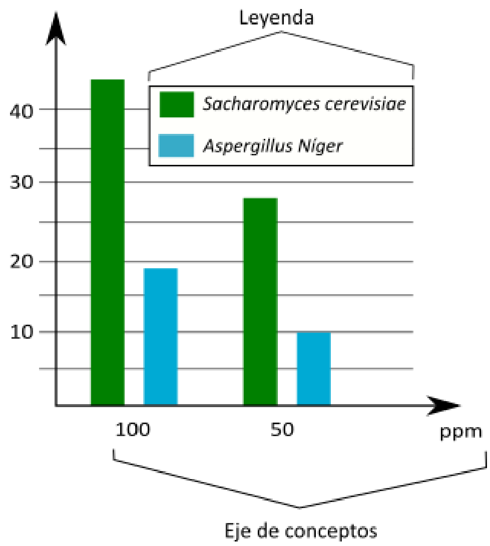


a) Escala numérica en el eje "y"   b) Escala numérica en el eje "x" y "y"

Figura 14.1 Escalas en los ejes de gráficas

La **leyenda** es una descripción de la simbología utilizada (colores, densidad de color, sombreado, etc.), con la cual se comparan valores para la misma variable, veamos la Figura 14.2 en donde se compara el crecimiento de dos bacterias para una determinada concentración de sustrato.

Figura 14.2 Uso de leyenda y eje de conceptos en una gráfica



El **eje de conceptos** describe las categorías o nombre de la variable independiente (la cual no es numérica). Ésta debe de escribirse en minúscula excepto la primera letra, a menos que este eje de concepto éste supeditado a que no sea una palabra, sino la abreviación de una concentración como es el caso que se presenta en la Figura 14.2. Si el eje de concepto tiene mucha información o el texto es largo se puede utilizar una orientación de 45 o 90° (Figura 14.3).

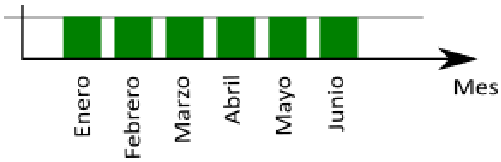


Figura 14.3 Rotación del eje de conceptos

El rótulo de datos se puede o no utilizar, depende si esta información es necesaria para una toma de decisión para algún proceso por lo que lo que se puede incluir (se recomienda ocultar la escala de los valores dependientes), veamos la figura 14.4.

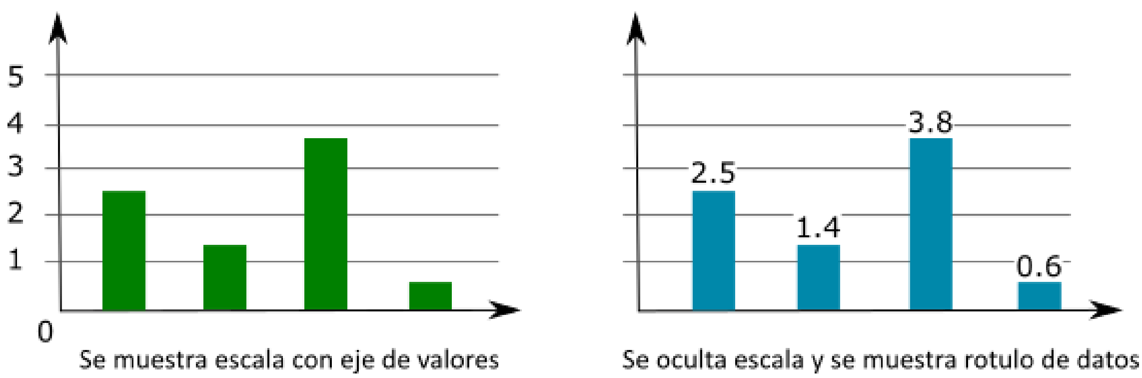


Figura 14.4 Rotulación de datos

PIE DEL GRÁFICO

El pie de gráfico se ubica en el inferior del gráfico y puede ser una nota o fuente. Son comúnmente anotaciones o señalamientos que se hacen para aclarar o destacar alguna característica de la información.

La **nota** es una aclaración de alguna característica de una variable, por ejemplo alguna característica termodinámica particular de experimentación como temperatura, presión, volumen.

Por otro lado la **llamada** es una aclaración de interpretación conceptual que indica lo que significa alguna abreviatura utilizada en el gráfico. Para ello se utilizan por lo general dos puntos y seguido precedido de su significado.

La **fuente** de un gráfico es la referencia de donde se ha obtenido la información e indica mediante quien es el autor y año en que se generó la información, con el fin de orientar al lector para la consulta directa. La fuente se escribe en la parte inferior del gráfico alineada al margen izquierdo después de una nota o llamada (si tiene), puede ser institucional o de un autor. Si es una institución se escribirá el nombre o siglas de la institución o departamento, después un guión para anotar el nombre del documento, finalmente una coma para escribir el año del mismo.

Fuente: SEMARNAT- Estadística marina, 2018

Si la fuente es un autor, se escribirá el primer apellido de éste, después una coma para colocar el año de la publicación.

Fuente: Hernández, 2018

Ahora si la fuente es una publicación efectuada por dos autores, se separan los apellidos de éstos con una "&", por ejemplo:

Fuente: Hernández & Ramírez, 2018

Finalmente si son más de dos autores, se escribe el apellido del autor principal después la palabra en cursivas "et al" que significa "y otros" seguido de una coma para escribir el año, por ejemplo:

Fuente: Hernández *et al*, 2018

Los elementos estructurales de un gráfico se pueden observar en la figura 14.5.

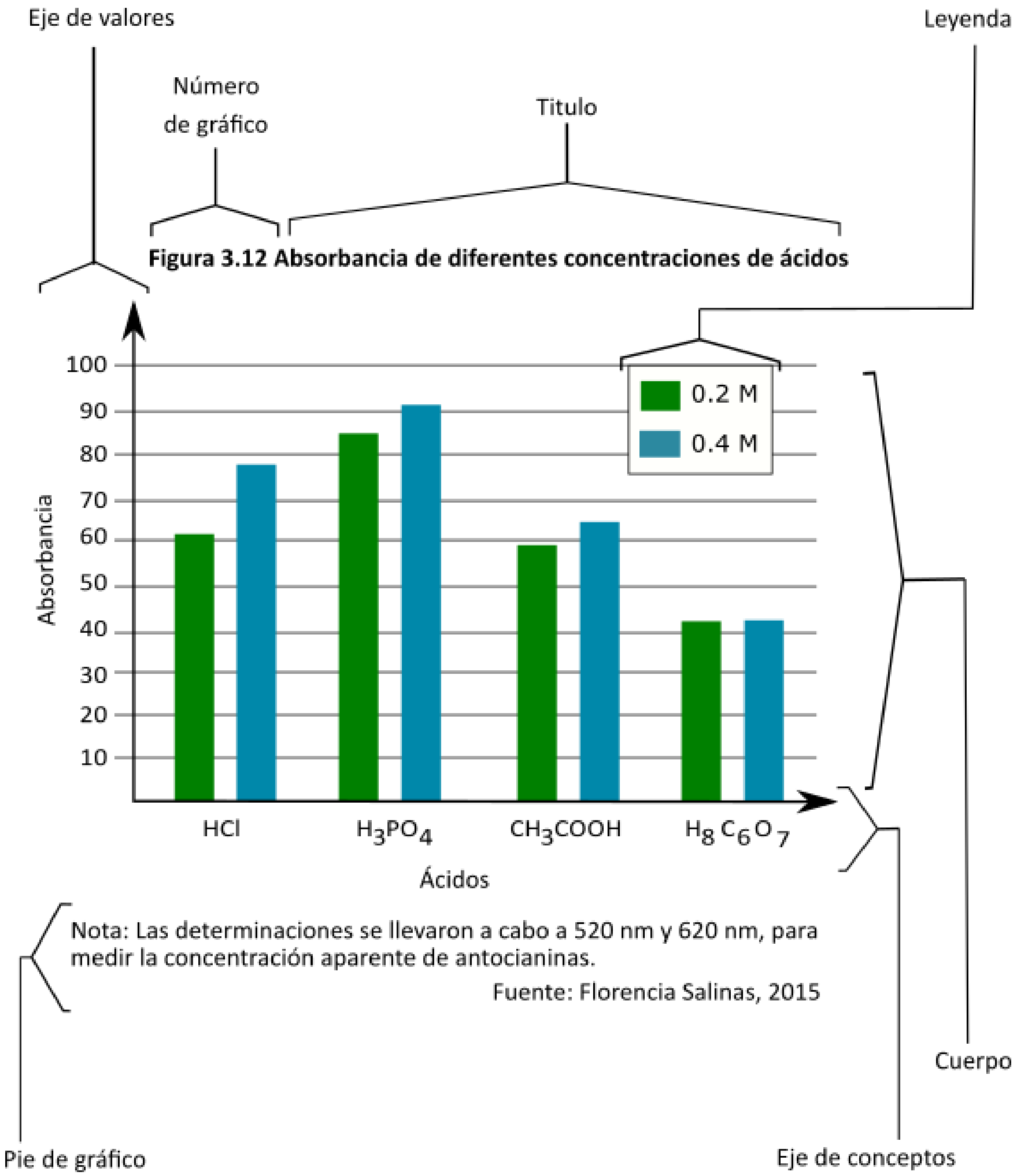


Figura 14.5 Esquema de un gráfico

14.2 Gráficas de líneas, selección de la escala adecuada

La escala de una gráfica se coloca sobre los ejes iniciando en cero, aunque se pueden mover estos ejes al valor de la frontera inferior (Figura 14.6), por la inexistencia de pares ordenados que graficar.

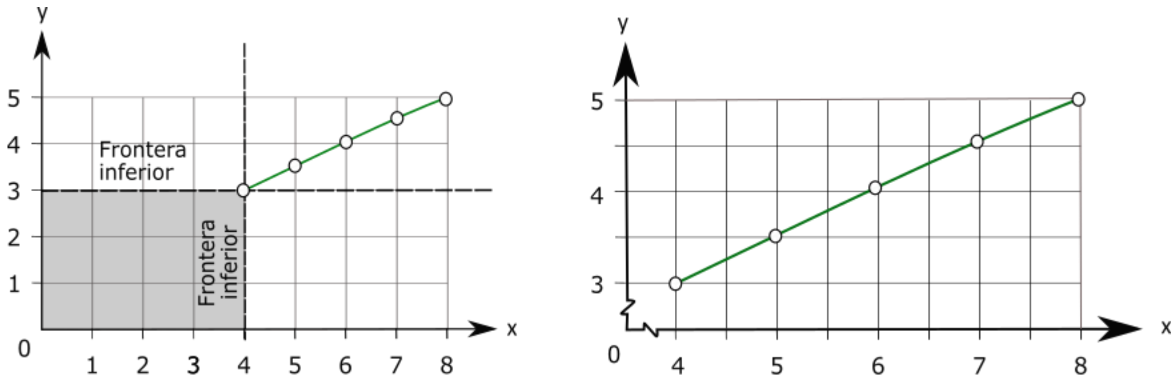


Figura 14.6 Desplazamiento de los ejes hacia las fronteras inferiores

Muchas veces requerimos por conveniencia ajustar la escala de alguno de los ejes, en la mayoría de los Software de graficación lo hace, seleccionado la gráfica y "aumentando" o "contrayendo" ésta, dimensionándose directamente la graduación.

También se puede graficar datos en donde una variable independiente tenga dos variables dependientes; como es el caso de la Figura 14.7 en donde se registraron valores para la evolución de cambio de color se representan los máximos de absorción (eje izquierdo) y las longitudes de onda (eje derecho), para los diferentes valores de pH. Nótese que en la gráfica existen flechas indicadoras que señalan la dependencia de la curva con el eje.

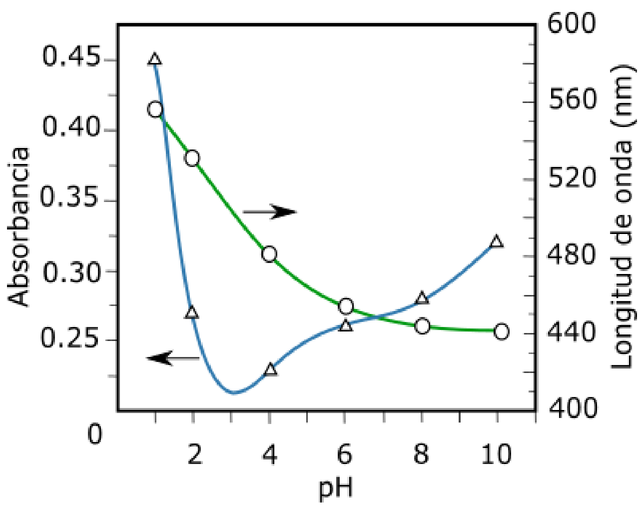
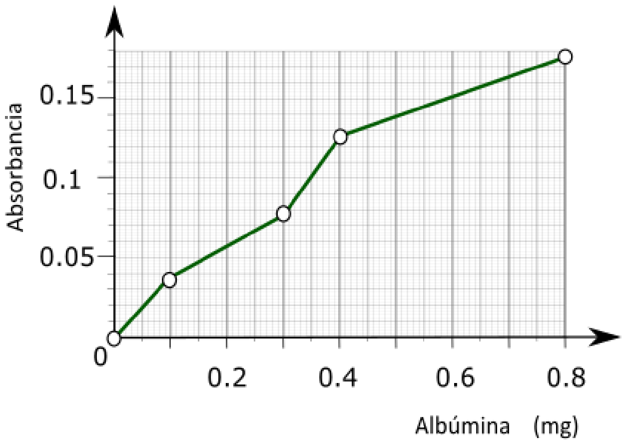


Figura 14.7 Gráfico con dos escalas diferentes en el eje "y" utilizado para la variación de la absorbancia y la longitud de onda

GRÁFICO DE LÍNEA SIMPLE

Un gráfico de líneas es una representación en un eje cartesiano de la relación que existe entre las variables (independiente "x" y la dependiente "y"), reflejando claramente los **cambios producidos**, es decir, se puede ver una tendencia en la información.



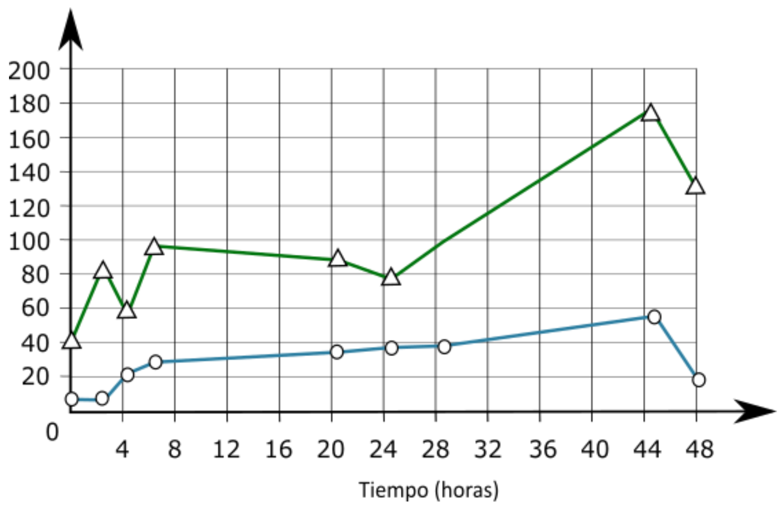
Nota: Datos proporcionados por el Laboratorio de Biología Celular y de los Tejidos (BCT), FES Zaragoza, UNAM, 2018.

En este tipo de gráfico se presenta el **cambio de una sola variable**, respecto a la variable independiente; por ejemplo la absorbancia[1] de un analito (concentración de albúmina en suero, fósforo en yema de huevo, glucosa en sangre entre otros) la podemos ver en la Figura 14.8 en la cual se observa la tendencia del aumento de ésta respecto de la cantidad de albúmina.

Figura 14.8 Gráfico de línea simple utilizado para la absorbancia de la albúmina de huevo

GRÁFICO DE LINEA MÚLTIPLE

En este gráfico se presenta el **cambio de más de una variable** mediante líneas, con el objetivo de comparar las tendencias, por ejemplo en la comparación de aditivos enzimáticos que se ve en la Figura 14.9.



Fuente: Bertsch *et al*, 2010

Figura 14.9 Gráfico con dos variables dependientes, para representar la actividad enzimática en glucoamilasas en cocultivo (línea verde) y monocultivo (línea azul) durante un proceso de fermentación microbiana

GRÁFICO DE ÁREAS O FRANJAS

A esta gráfica también se le conoce como de **componentes,** se usa para mostrar las áreas que componen la serie de datos. Esta se puede utilizar en volúmenes de reacción o para comparar la cantidad de tiempo que se requiere para una reacción con un reactivo frente a otro reactivo. Por ejemplo en la Figura 14.10 se tiene una gráfica de área en la que se visualizan los cambios de fase desde el hielo (sólido) hasta la evaporación, el área representa el calor necesario para ello.

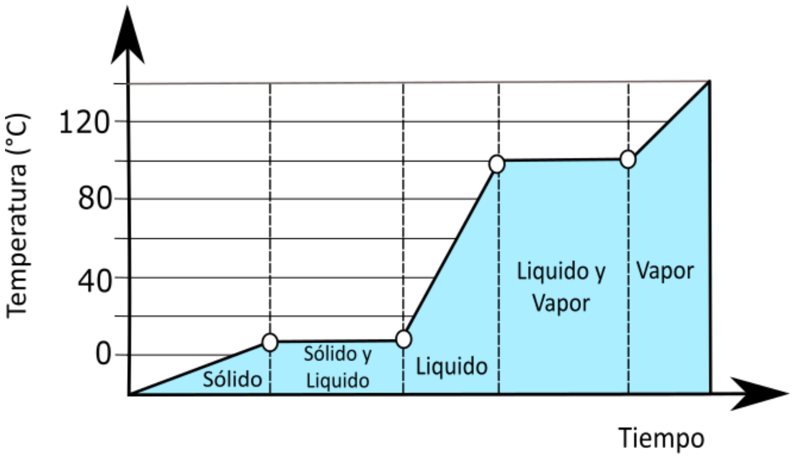
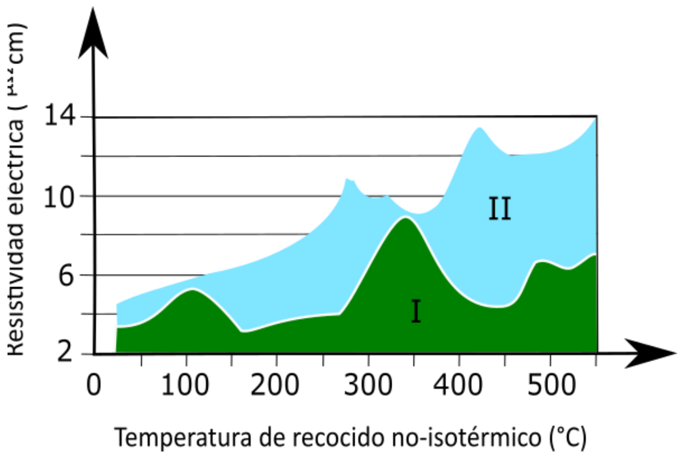


Figura 14.10 Gráfico de área que representa la curva de calentamiento del agua a presión atmosférica

En la Figura 14.11 se tiene una **gráfica de área apilada**, en donde se compara la variación de la resistividad eléctrica para dos regiones de trasformación de una aleación de aluminio.



Fuente: Ochoa *et al*, 2008

Figura 14.11 Gráfico de área apilada utilizado para la variación de la resistividad eléctrica con la temperatura en el aluminio AA-6061 para velocidades de calentamientos variables

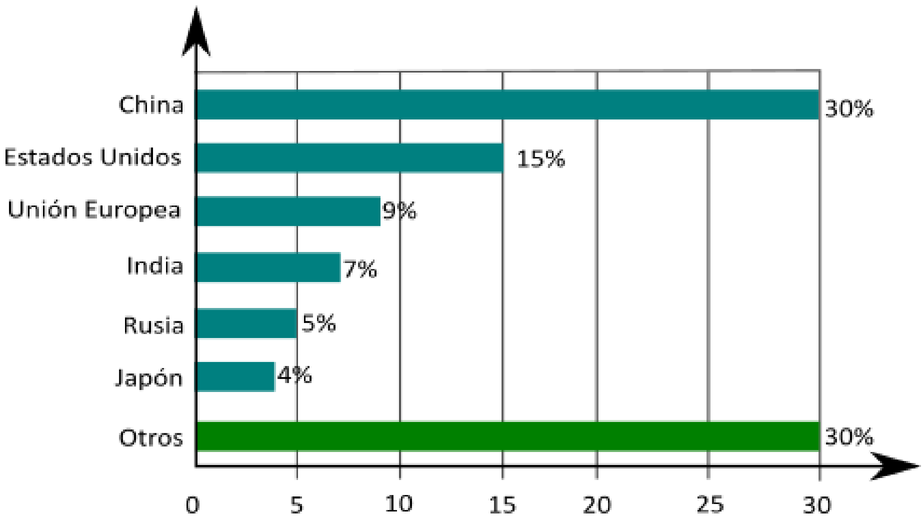
14.3 Gráficas de barras

En estas gráficas los datos se representan con **rectángulos,** sobre el eje de conceptos; también se utilizan cilindros y pirámides rectangulares; la altura o longitud de éstas representan el valor de los datos, se recomienda un **máximo de 15 barras**. Las características de este tipo de gráficos, los cuales son:

a) El ancho de la barra debe ser uniforme en todas las barras.
b) La separación entre las barras debe ser igual.
c) La longitud de las barras debe ser proporcional a la cantidad que representa.
d) La disposición de las barras puede ser horizontal o vertical.
e) Las barras se colocan de acuerdo a la frecuencia o al valor asociados a él (de mayor a menor).
f) En gráficas de barras múltiples (horizontales o verticales) se deben usar como máximo cinco categorías.

GRÁFICO DE BARRAS HORIZONTALES

Estas gráficas son idénticas a las verticales en cuanto a sus características, a diferencia que el uso de ésta se recomienda cuando los textos del eje de conceptos son extensos. Aunque cuando sea necesario colocar las barras en un orden específico (por ejemplo colocar las barras por meses) se puede hacer la excepción a la regla mencionada en el inciso e).

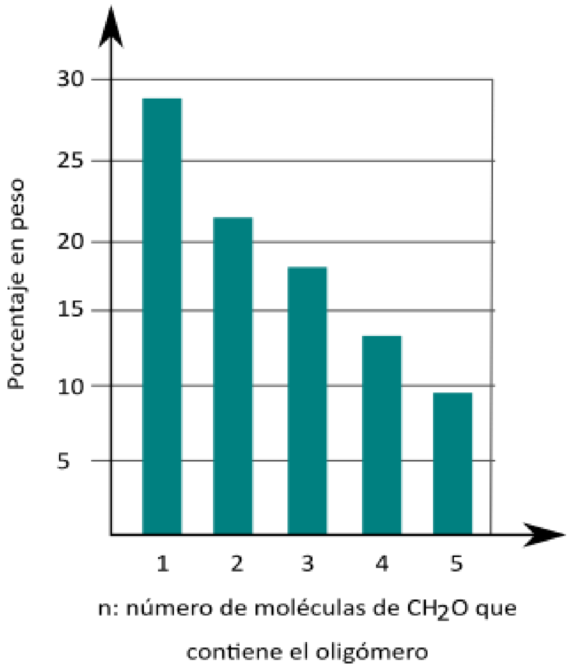


Fuente: United States Environment Protection Agency, 2017

Figura 14.12 Gráfico de barras horizontales utilizado para representar a los países más contaminantes del mundo por bióxido de carbono

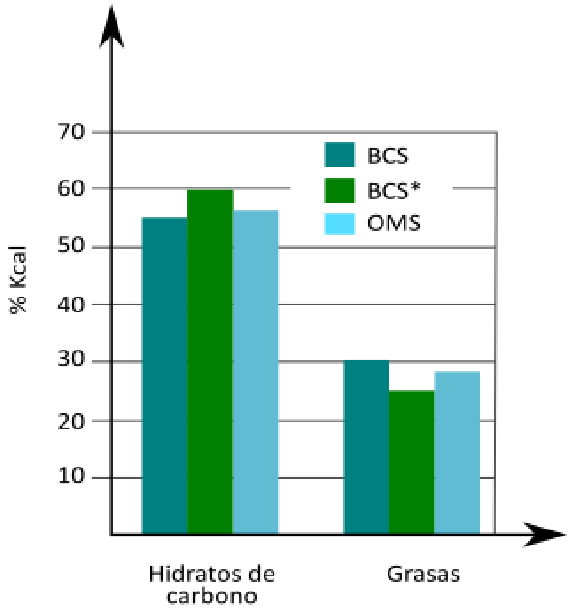
GRÁFICO DE BARRAS VERTICALES

Este tipo de gráfica se le conoce como de **"columnas"**, las bases de los rectángulos se distribuyen en el eje "x", y la altura representa el valor del dato. Existen dos tipos de graficas de barras las simples y las comparativas (de dos o más series de datos). En la Figura 14.13 se presentan estos dos tipos.



Distribución de los oligómeros de metilenglycol en solución acuosa 40% en peso de CH_2O a 35 °C

Fuente: www.textos cienctificos.com, 2018



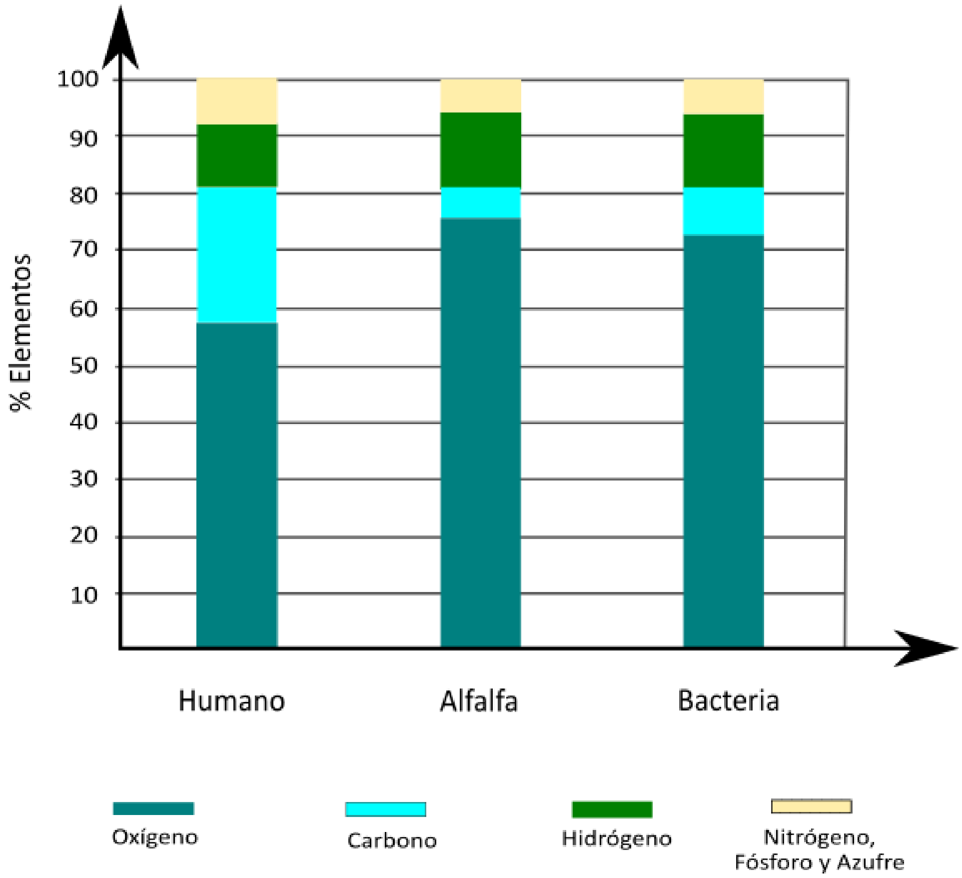
Comparación de la distribución energética de los macronutrientes en barras de cereales seca con las recomendaciones de la OMS

Fuente: Olivera *et al*, 2012

Figura 14. 13 Gráficos de barras comparativas

GRÁFICO DE BARRAS APILADAS

Las gráficas de barras apiladas o superpuestas (horizontales o verticales) tienen el objetivo de **comparar dos o más variables sobre una sola barra**, mostrando cifras absolutas o relativas (Figura 14.14).



Fuente: http://quimica-de-los-seres-vivos-gard.blogspot.com

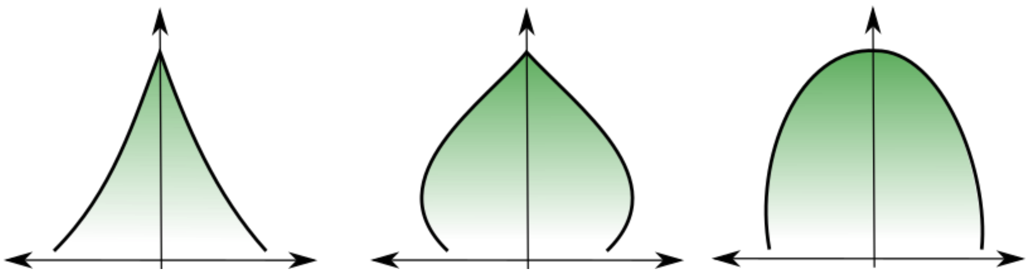
Figura 14.14 Gráfico de barras apilada que explica la distribución de Oxigeno, Carbono, Hidrógeno, Nitrógeno, Fósforo y Azufre en tres organismos

De la misma forma la altura de cada categoría representa la contribución de cada componente.

GRÁFICO DE BARRAS CON EJE CENTRAL

Este tipo de gráfica se le conoce mejor como **poblacional** y se representa como una pirámide en donde las barras se acomodan de forma horizontal comparándose entre ellas (una categoría del lado derecho y la otra del izquierdo) separándose por un eje central; se pueden utilizar valores absolutos y en porcentajes. Cada barra representa un grupo contenido en un intervalo de valores, por ejemplo el grupo de edad entre 0 y 4 años en la categoría de hombres.

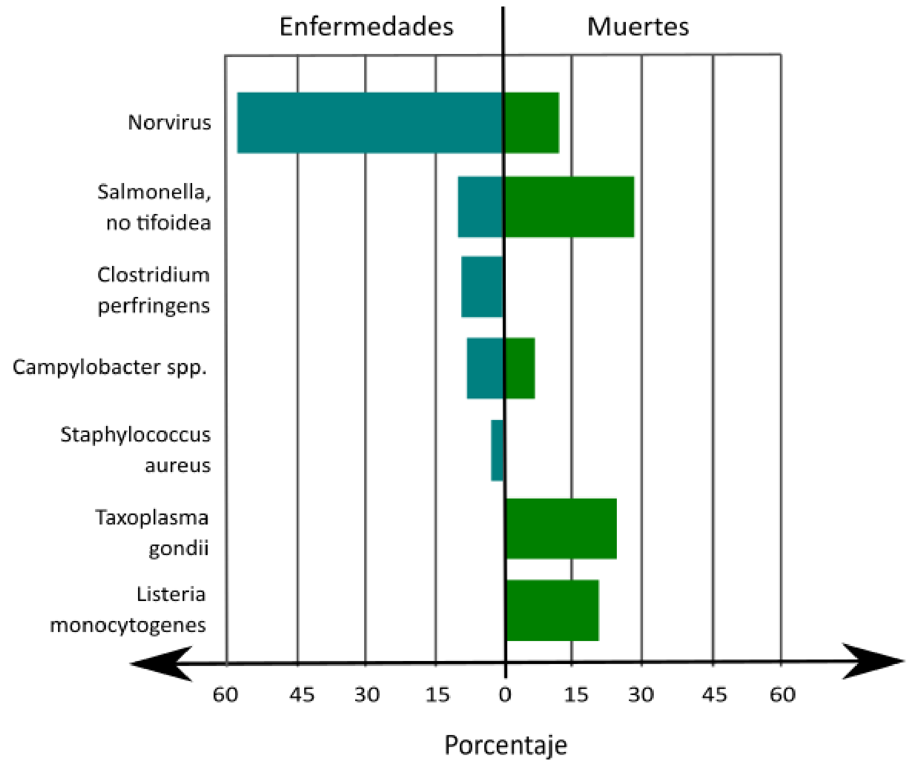
Las pirámides pueden ser progresivas; es decir, que muestran un crecimiento o pueden ser estancadas o regresivas; esto es, que explican un envejecimiento (Figura 14.15), aunque es normal que existan gráficas desequilibradas en las cuales no se exhibe una tendencia.



a) Tipo Progresiva b) Tipo estancada c) Tipo regresiva

Figura 14.15 Tipos de gráficas poblacionales

Estas gráficas no son exclusivas de poblaciones y se pueden utilizar para contrastar dos categorías, por ejemplo en la Figura 14.16 se presenta una estimación sobre las enfermedades transmitidas por alimentos en Estados Unidos en el 2011; con dos categorías que son enfermedades y muertes y en los grupos se encuentran a los microorganismos.



Fuente: CDC, 2011

Figura 14.16 Gráfico de barras comparativas utilizada para los principales patógenos que contribuye al contagio de enfermedades por alimentos y muertes

GRÁFICO DE BARRAS DE ERROR

Las barras de error se utilizan para indicar el error de una medición, es decir la incertidumbre de un valor, la cual da idea de cuan precisa es una medición. Dependiendo de la disposición de las barras, el error se puede representar de modo vertical u horizontal.

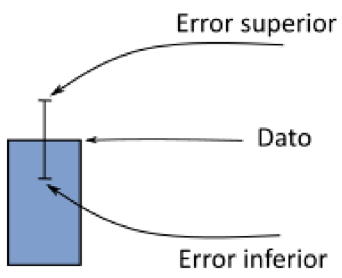
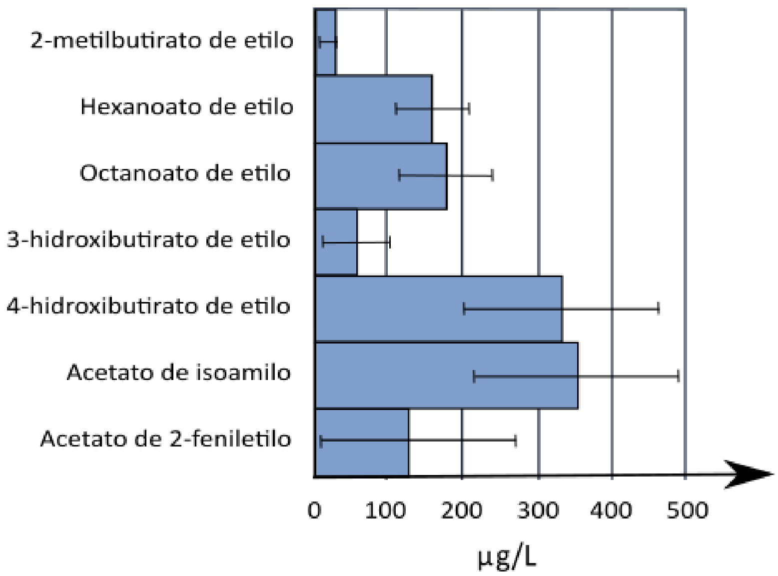


Figura 14.17 Error en una barra vertical

Las barras de error se utilizan para **la desviación estándar, error estándar e intervalos de confianza.** Si la línea de error es pequeña indica que el valor promedio trazado es más probable, mientras que una barra larga indica que los valores están más dispersos y que son menos confiables. La longitud de cada par de error debe de ser igual en ambos lados (Figura 14.18).

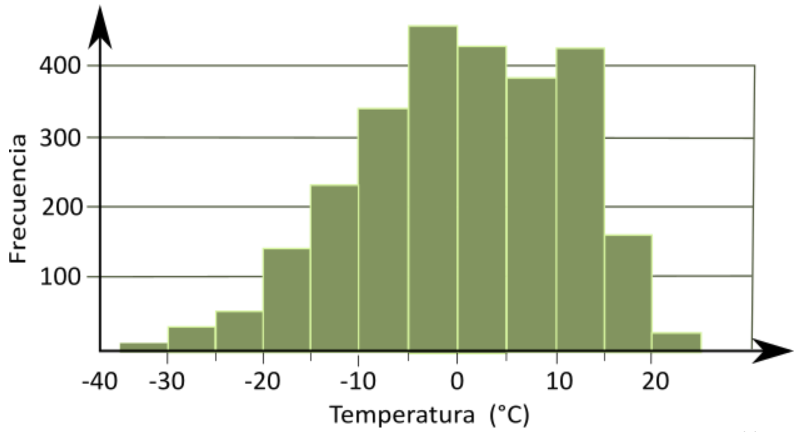


Fuente SERIDA, 2011

Figura 14.18 Gráfica de barra de error parea la concentraciones promedio y desviación estándar de algunos compuestos volátiles en la sidra

14.4 Histograma

La gráfica de barras se utiliza para representar datos cuantitativos (discretos) o datos cualitativos, se utiliza para organizar grandes cantidades de datos, por ejemplo en la Figura 14.19 se observa la distribución de frecuencias de las mediciones de la temperatura ambiental y podemos ver que la mayoría de los días la temperatura se encuentra entre -5 y 15 °C.



Fuente: Qlik Data Martket, 2017

Figura 14.19 Histograma de la temperatura promedio diario en el norte de Suecia de 2010 a 2017

La frecuencia que aparece en esta gráfica hace referencia la cantidad de días que tuvieron una temperatura promedio indicada en la escala; por ejemplo para la barra de -10 Celsius, se tuvieron poco más de trescientos días que presentaron esta temperatura promedio. El intervalo de la categoría puede ser calculado para establecer una tendencia.

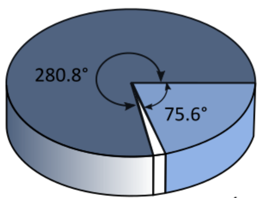
14.5 Gráfica circular

Este gráfico nos permite ver la distribución interna de los datos de manera porcentual. Consiste en **dividir en una circunferencia un circuito de sectores** cuyas superficies sean proporcionales (respecto a 360°) a los porcentajes de los datos.

Éstas gráficas nos resalta la magnitud relativa de los datos respecto al total. Por ejemplo en la Figura 14.20 Se observa la relación del porcentaje de los gases que constituyen el aire con el ángulo correspondiente; es decir que 78% le corresponden 280° y para 21% 75.6°.

Nitrógeno

78%

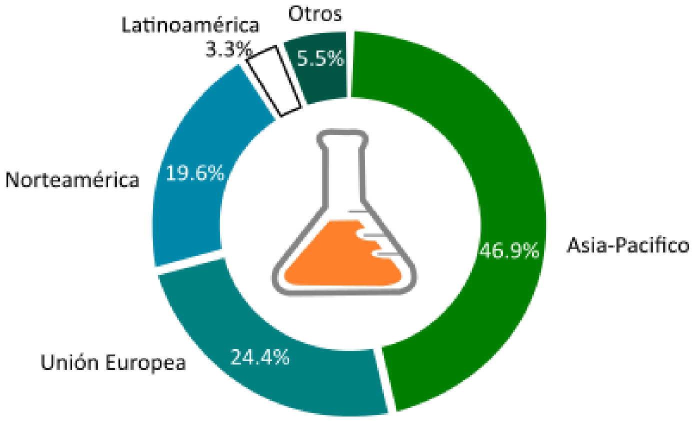


Oxígeno

21%

Figura 14.20 Relación del ángulo-porcentaje en una gráfica circular

Existe también una variante de esta gráfica, conocida como **gráfica de anillos**, la ventaja que presenta sobre una gráfica circular es que se puede presentar información en el espacio en blanco del centro como una imagen (Figura 14.21) u otra categoría de datos.

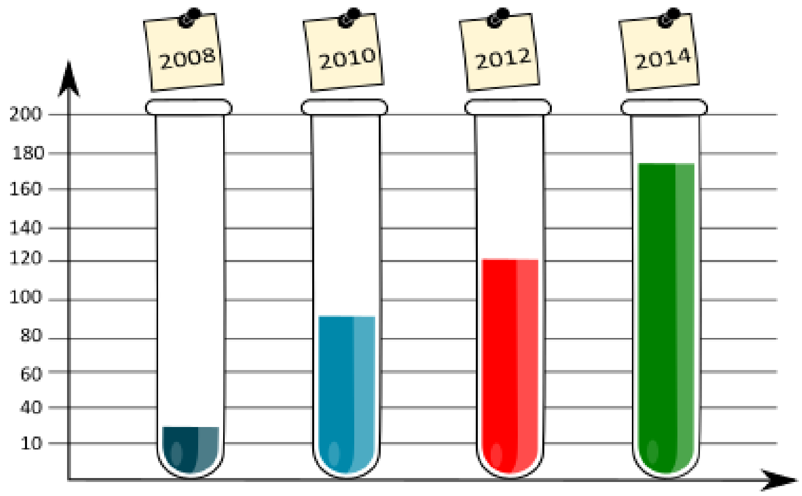


Fuente: Secretaría de Economía, 2013

Figura 14.21 Gráfica de anillos utilizado para explicar la participación regional de producción farmacéutica mundial en el año 2012

14.6 Pictograma

En una gráfica de pictograma, se sustituyen los elementos abstractos por imágenes relativos al tema; por ejemplo si se habla de la producción de etanol en México, se puede sustituir las barras por tubos de ensayo y las categorías (año) por el dibujo de una nota (ver Figura 14.22), también se pueden apilar o agrupar dibujos para indicar de manera proporcional el valor de cada categoría.

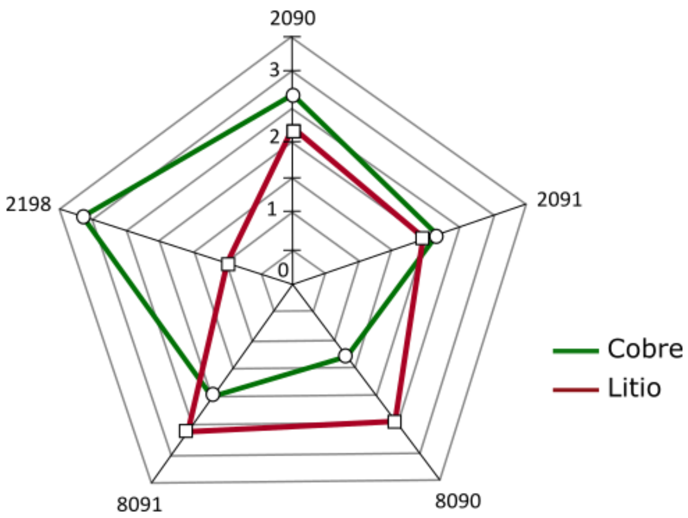


Fuente: Pérez, 2017

Figura 14.22 Pictograma de la producción de etanol en México

14.7 Gráfica radial

El tipo de gráfico radial también es conocido como telaraña y se utiliza para comparar el comportamiento de los datos, éste gráfico puede representarse mediante un polígono (número de lados corresponde al número de categorías) o mediante una circunferencia en donde cada una representa la escala, veamos el trazado para una composición química de las aleaciones de Al-Li en las que el elemento aleante principal es el cobre y el litio (ver Figura 14.23) y pequeñas cantidades de zirconio y otros elementos (Zinc, Magnesio, plata y manganeso), para el desarrollo de materiales metálicos en aeronáutica.

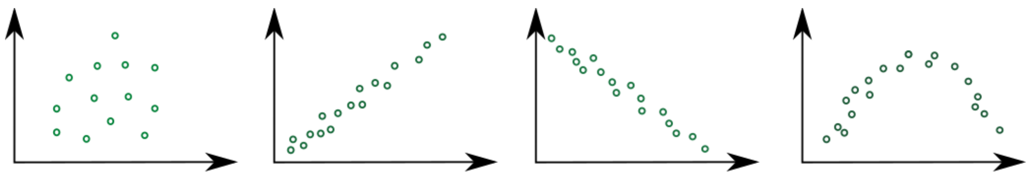


Fuente: www.interempresas.net, 2012

Figura 14.23 Gráfico radial que representa la composición química de las aleaciones Al-Li

14.8 Gráfica de dispersión de puntos

La gráfica de dispersión de puntos permite ver si existe o no un **grado de correlación** entre dos variables; si no existe se dice que es nula, si la hay entonces puede ser lineal positiva o negativa o no lineal (Figura 14.24). Se dice que es **nula** cuando las variables son independientes entre sí y no presenta ninguna tendencia; cuando es **lineal positiva** se tiene en el aumento del valor de “x” un incremento en el valor de “y”; pero cuando es una **lineal negativa** se tiene en el aumento del valor de “x” un decremento en el valor de “y” y finalmente cunado existe una correlación que no muestra una línea se dice que **no lineal.**



a) Nula b) Dispersión positiva c) Dispersión negativa d) No lineal

Figura 14.24 Tipos de dispersiones en una gráfica de puntos

Para las gráficas de dispersión lineal, se puede dibujar una **recta de regresión lineal simple**, obtenida por un ajuste matemático, cuya ecuación es:

$$Y = A + BX \qquad Ec \ldots (1)$$

Dónde:

Y Es la variable dependiente.
A Es el valor de la ordenada, donde la línea de regresión se intercepta con el eje y.
B Es el coeficiente de regresión (pendiente de la línea recta).
X Es la variable independiente.

Para encontrar la recta que ajuste a la dispersión de puntos se puede utilizar el método de **mínimos cuadrados**, cuyas ecuaciones son:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \qquad Ec \ldots (2)$$

$$A = \overline{y} - B\overline{x} \qquad Ec \ldots (3)$$

Donde:

xi Valor de la variable independiente para la observación i-ésima.
yi Valor de la variable dependiente para la observación i-ésima.
$\overline{x}$ Valor promedio de la variable independiente.
$\overline{y}$ Valor promedio de la variable dependiente.

Una vez que esta la línea de tendencia, se calcula el coeficiente de **correlación de Pearson** (**r**), que toma valores de -1 a 1, el cual es un indicativo del grado de correlación, en términos generales:

Definición

Si $-1 < r < -0.7$ se determina que existe correlación negativa.
Si $-0.7 < r < 0.7$ se determina que no existe correlación.
Si $0.7 < r < 1$ se determina que existe correlación positiva

La forma de calcular el valor de r es mediante la siguiente ecuación:

$$r = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x \sum y)}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right)\left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}} \qquad Ec \ldots.④$$

También se obtiene el **coeficiente de determinación** conocido como **R^2**, que de la misma manera nos permite evaluar el ajuste de la línea de tendencia y toma valores entre 0 y 1, un R^2 cercano a 1 indica un buen ajuste

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y - \overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2} \qquad Ec \ldots.⑤$$

Donde Y es la estimada por la regresión lineal de la ecuación ①

Desde Excel® se puede obtener tanto las regresiones para una dispersión de puntos como el coeficiente de determinación, basta con activas el formato de línea de tendencia y activar las dos últimas casillas a que se hacen referencia en la imagen.

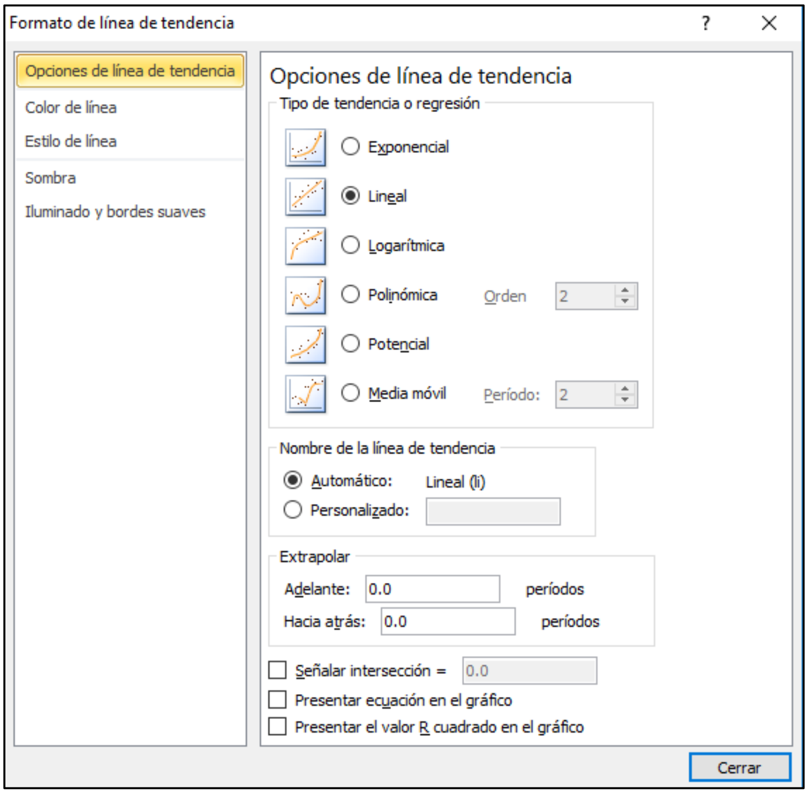
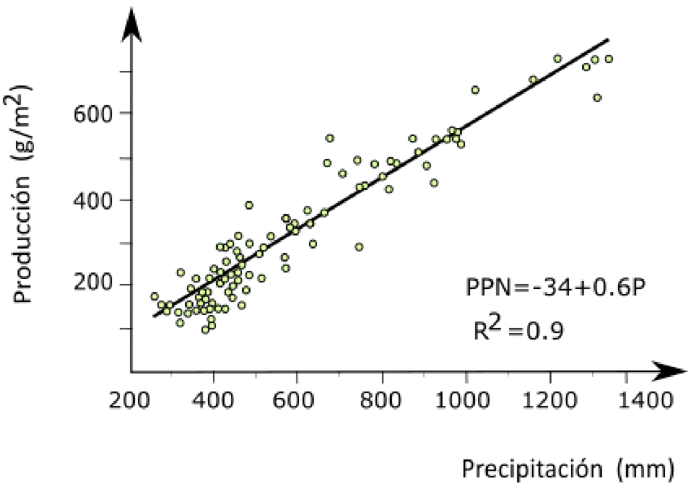


Imagen 14.1 Opciones en una gráfica de dispersión de puntos para obtener la regresión lineal y el coeficiente de determinación en Excel®

Por ejemplo en la Figura 14.25 se representa la productividad primaria neta respecto a la precipitación pluvial en milímetros de agua, en los pastizales de Estados Unidos. Se realizó un análisis de regresión lineal simple obteniéndose los estimadores puntuales, con una ordenada al origen de -34 y una pendiente positiva de 0.6, finalmente el coeficiente de determinación es 0.9.

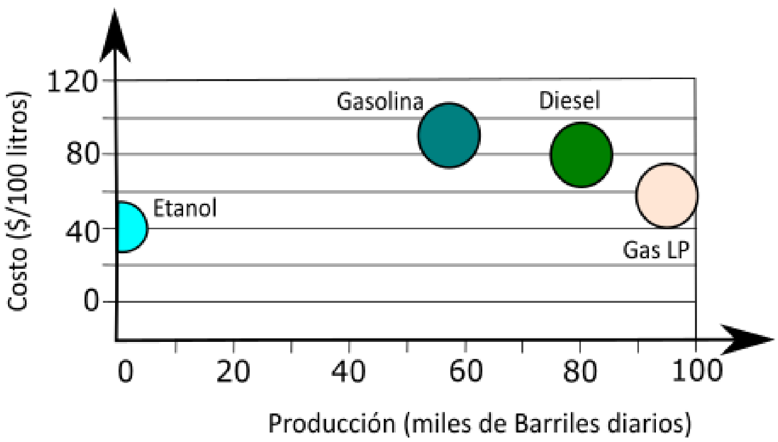


Fuente: www.agro, 2015

Figura 14.25 Gráfica con regresión lineal para la relación de la productividad primaria neta y la precipitación pluvial en Estados Unidos en 1988

14.9 Gráfica de burbujas

La gráfica de burbujas, muestra las series como un conjunto de símbolos (normalmente circunferencias, aunque puede ser alguna variante de estos, como gotas, esferas, etc.). Veamos la producción de algunos energéticos (Barriles diarios) en México en el año 2007 y su costo, así como el poder calórico que aporta cada uno (tamaño de la burbuja).



Fuente: Eurostat, AIE y Resolución de la Secretaría de Estado de Energía, 2013.

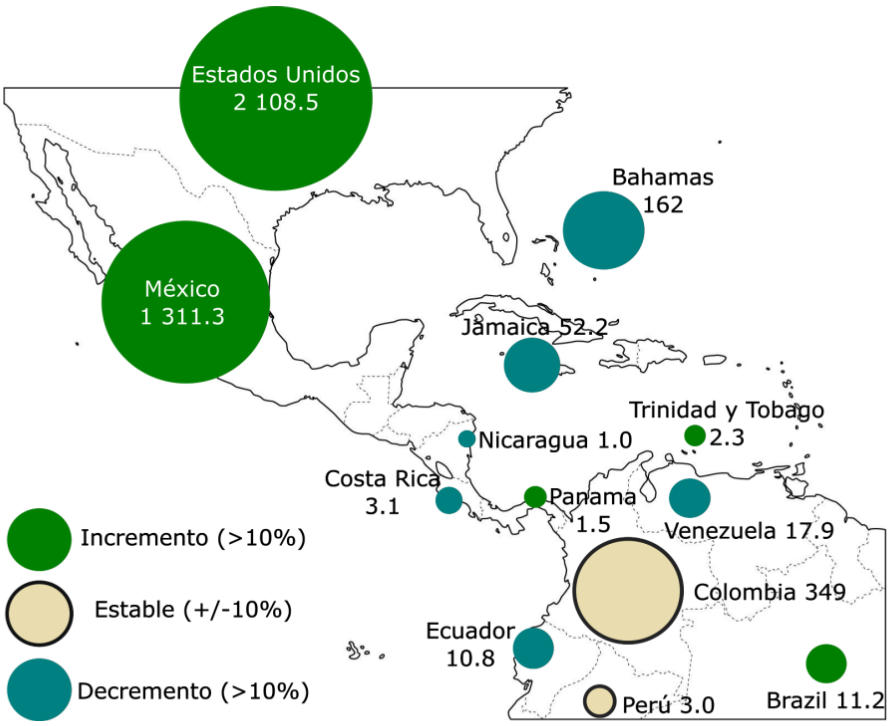
Figura 14.26 Gráfica de burbujas que representa el costo de los principales combustibles en México en 2007

14.10 Gráfico temático de mapa

Un gráfico de mapa temático es una **cartografía** en donde se plasma un **fenómeno geográfico**, el cual puede ser representado con datos cualitativos o cuantitativos, para este último se pueden utilizar encima del mapa con división territorial otro tipo de gráficos, las variantes son:

1. Trama. Es aquel que **utiliza colores** (también llamado coroplético) a los cuales se les asigna un rango definido.
2. Símbolos proporcionales. Se le **asigna un símbolo** (una circunferencia por ejemplo) y el tamaño de este es proporcional al valor a representar.
3. Tramas y símbolos proporcionales. Es una **combinación de las dos anteriores**, se le asigna a un signo un color.
4. Barras. Se colocan **barras** proporcionales al valor a representar.
5. Gráfico circular. Se utilizan en el mapa **gráficos circulares**, con su código de colores.
6. De Flujo. Se utilizan **flechas** para indicar salida y llegada, con código de colores para indicar el valor asignado, éste es muy utilizado para explicar fenómenos de migración poblacional.

En la siguiente gráfica (de tipo símbolos proporcionales), se muestra las incautaciones de marihuana en algunos países de América, observándose que los incrementos de más de 10% están en México y Estados Unidos.



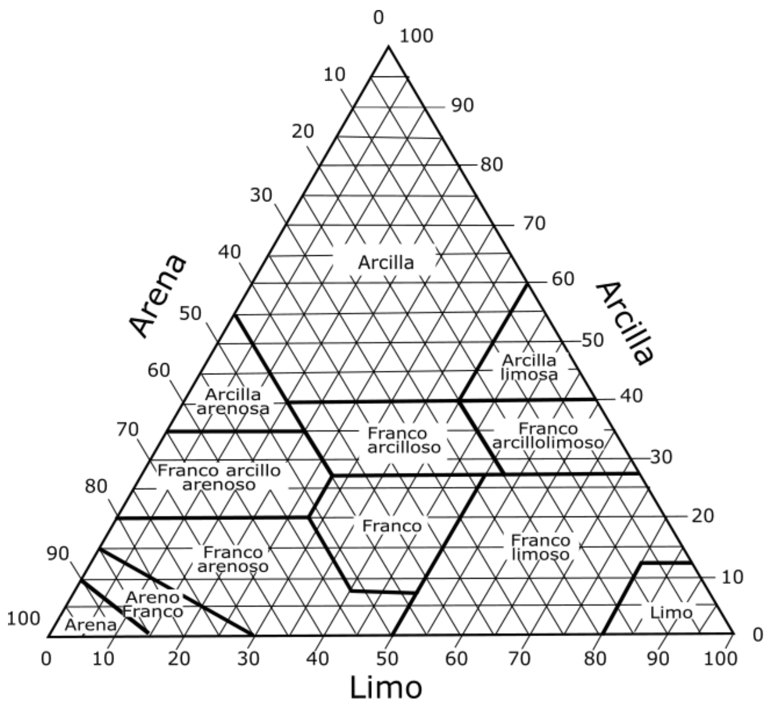
Fuente: Tomado de UNODC, 2012

Figura 14.27 Gráfica temático de mapa utilizado en las Incautaciones de Cannabis 2008-1012

14.11 Gráfico triangular

Un gráfico triangular es comúnmente utilizado para representar tres variables los cuales suman un valor constante; como la composición porcentual o fraccionaria, estos son comúnmente llamados **diagramas ternarios**, son utilizados en fisicoquímica, metalurgia, geología, mineralogía, genética de poblaciones (diagrama de Finnetti) o en teoría de juegos (diagrama simplex).

Veamos un ejemplo de en donde se representa la textura del suelo, utilizando los tamaños de partículas de arena, arcilla y limo (Figura 14. 28).



Nota; USDA (Departamento de Agricultura de Estados Unidos)

Figura 14.28 Gráfico triangular utilizado para representar la textura de suelo según la USDA, en función de arena, limo y arcilla

14.12 Criterios para seleccionar el tipo de gráfica

Se presentan algunas sugerencias para seleccionar un gráfico según sea el caso:

1.- **Gráfica de barra vertical**: Son apropiados para presentar información a lo largo del tiempo.

2.- **Gráfica de barra horizontal**: Es mejor que las barras verticales por la facilidad de lectura de las etiquetas.

3.- **Gráfica de barra superpuesta**: Permite comparar varias series de datos.

4.- **Gráfica piramidal**: Es la indicada para analizar poblaciones.

5.- **Gráfica de líneas**: Se utiliza para encontrar tendencias en los datos.

6.- **Gráfica de circular**: Se emplea para mostrar el porcentaje o fracción de un total (apropiado para cinco o seis partes).

7.- **Gráfico logarítmico**: Usado para graficar valores con escala muy grande.

8.- **Gráfica radial**: Compara varios elementos al mismo tiempo, mediante el uso de polígonos o circunferencias.

9.- **Gráfico de barras de error**: Permite analizar el error en una medición.

10.- **Pictograma**. Es una variación de la gráfica de barras (vertical u horizontal) en donde la barra se sustituye por un dibujo.

11.- **Gráfico de burbujas**. Muestra una dispersión de puntos, adicionando un dato que le infiere un tamaño proporcional al tamaño de burbuja.

12.- **Gráfico temático**. Es una combinación entre el gráfico de burbuja y un mapa geográfico.

13.- **Gráfico triangular**: Utilizado para analizar componentes ternarios.

Existen algunos errores que se deben de evitar para la presentación de un gráfico, los cuales son:

a) Ejes sin identificación y sin unidades.
b) Títulos extremadamente extensos.
c) Gráfico muy complejo de interpretar.
d) Un gráfico con más de 15 barras.
e) Un gráfico circular con más de 6 componentes.
f) Seleccionar mal la escala (se recomienda siempre partir de cero, aunque existe sus excepciones).
g) Omisión de la leyenda cuando es necesario.
h) Uso excesivo de líneas secundarias en los ejes.

LOS PRINCIPIOS BÁSICOS PARA CONSTRUIR UN GRÁFICO

Las siguientes recomendaciones darán una manera sencilla de iniciar la construcción de un gráfico, como se sabe actualmente el trazado de un gráfico se hace uso algún software como Excel®, por lo que antes se debe de cerciorar de lo siguiente:

1.- **Orden**: Las variables cuantitativas deben de ordenarse, a menos que siga un orden de manera natural (los meses del año por ejemplo). El orden preferible será de mayor a menor.

2.- **Homogeneidad**: Es preferible presentar varios gráficos cuando se tiene un conjunto con varias variables.

3.- **Autosuficiencia**: El gráfico debe de tener lo suficiente para interpretar la información, es decir, el usuario debe de entender de manera inmediata el gráfico; esto implica que debe de tener un título comprensible, los ejes identificados y una selección adecuada del tipo del gráfico y el uso de leyenda si es necesario.

4.- **Densidad**: Debe evitarse un gráfico muy cargado, normalmente esto ocurre en los gráficos temáticos.

5.- **Énfasis**: Debe de destacarse los elementos centrales de una gráfica, como las barras o la línea de tendencia, los demás elementos como contornos, o líneas de los ejes deben de tener un trazo más tenue. En un histograma solo deben de utilizarse líneas de referencia para evaluar correctamente las cantidades.

6.- **Contraste**: Se deben utilizar colores que contrasten si se requiere comparar varias categorías. O en su defecto tramas para crear una diferencia (no utilizar más de 6). También se pueden combinar las ramas con los colores aunque no es muy recomendable.

Existe una gran variedad de tipos de gráficos y para el interés del lector se preparó la siguiente tabla.

Tabla 14.1

Tipos de gráficos	
1. Diagrama de Arco	31. Rosa de Nightingale
2. Gráfico de área	32. Diagrama de acordes sin cintas
3. Gráfico de barras	33. Gráfico OHLC
4. Diagrama de cajas y bigotes	34. Gráfico de coordenadas paralelas
5. Nube de ideas o mapas mentales	35. Gráficos de conjuntos paralelos
6. Gráfico de burbujas	36. Pictogramas
7. Mapa de burbujas	37. Gráficos de sectores circulares
8. Gráfico de bala	38. Gráfico de punto y figura
9. Calendario	39. Pirámide de población
10. Gráfico de velas	40. Gráfico proporcional de área
11. Diagrama de cuerdas	41. Gráfico radial
12. Mapa coroplético	42. Gráfico de barras radiales
13. Mapa de árbol circular	43. Gráfico de columnas radiales
14. Mapa de conexión	44. Diagrama de Sankey
15. Gráficos de densidad	45. Gráfico de dispersión
16. Gráfico de anillos	46. Gráfico de rango
17. Mapa de puntos	47. Diagrama en espiral
18. Gráfico de matriz de puntos	48. Gráfico de áreas apiladas
19. Barras de error	49. Gráfico de barras apiladas
20. Diagrama de flujo	50. Diagrama de tallo y hoja
21. Mapa de flujo	51. Gráfico de torrente
22. Diagrama de gantt	52. Diagrama de rayos de sol
23. Mapa de calor con matriz	53. Tabla de conteo
24. Histograma	54. Línea de tiempo
25. Gráfico ilustrativo	55. Tabla de tiempos
26. Gráfico de Kagi	56. Diagrama de árbol
27. Gráfico de líneas	57. Mapa de árbol
28. Gráfico de Marimekko	58. Diagrama de Venn
29. Gráfico de barras múltiples	59. Diagrama de violín
30. Diagrama de red	60. Nube de palabras

Fuente: www.ingeniovirtual.com

Punto de equilibrio y desarrollo. Un brevísimo esbozo

Lic. José Luis Valdes Ayala
jvaldes1963@yahoo.com.mx

Imagino, y constato en lo que vivo y experimento a diario, cómo desde la antigüedad se viene sistematizando información, datos, construyendo en el imaginario y en la práctica, lo que hoy somos, tenemos, destruimos, transformamos… como Humanidad. La comprobación de lo que afirmo está en las propias culturas, milenarias algunas y tan diversas, otras extintas, pero cuyos rastros y signos han dejado, que van dando forma, contenido y sustento, para que el Hombre siga viviendo en este planeta y tratando de explicarse muchas interrogantes. Me planto sobre algo que en mi cotidianeidad se presenta y que tiene que ver con aspectos de finanzas, desarrollo rural, producción y productividad agropecuaria y, sobre todo, bienestar, y constantemente me cuestiono en el concepto y definición sobre qué es el punto de equilibrio y para qué sirve. Y las matemáticas siempre aparecen, algunas veces en operaciones aritméticas, de sumar y restar, otras más complejas como en el manejo de escenarios y sensibilidad en cuanto a riesgos (hay dinero en medio) en cuanto a preguntas como ¿qué pasaría en la tasa de rentabilidad si *muevo* tal o cual variable?, ¿es factible que el productor que necesita crédito logre pagar lo que la institución le presta? O, más aún ¿en qué momento de la vida del proyecto el solicitante no gana ni pierde, es decir, logra el punto de equilibrio y sigue siendo productor?

En términos de contabilidad de costos, el punto de equilibrio es aquel punto de actividad (volumen de ventas) donde los ingresos totales son iguales a los costos totales, es decir, el punto de actividad donde no existe utilidad ni pérdida. Hallar el punto de equilibrio es hallar el número de unidades a vender, de modo que se cumpla con lo anterior (que las ventas sean iguales a los costos)[7].

En términos llanos, el punto de equilibrio es el sitio en donde no se pierde ni se gana; es como pensar en donde el ying y el yang, la noche y el día, el hombre y la mujer, mi consumo y gasto, entre muchas otras cosas, encuentran el punto exacto en el que la armonía es tal, que no pierdo ni gano; o, si se quiere, por poner un ejemplo más popular, imaginar una cancha de futbol, donde el centro de ese espacio de juego, en el que se coloca el balón en el primer segundo de iniciado un partido, en el momento exacto en el que el árbitro

1 http://www.fadu.edu.uy/marketing/files/2013/04/punto_equilibrio.pdf

hace uso del silbato y en donde, por fortuna para uno de los equipos, la pelota no ha tocado el interior de la red de una de las porterías, o lesionado o expulsado algún jugador. Las matemáticas también están allí con algunos ingredientes más: la probabilidad y el tiempo.

En la agricultura mexicana y las instituciones que operan para favorecer el desarrollo rural sucede algo muy parecido a lo que a grandes rasgos comento en el párrafo anterior. Se presentan una diversidad de actores, empezando por los sujetos del desarrollo, agricultores (campesinos y agroempresarios) con capacidades tan disímbolas que para cada uno de ellos, sobre todo para los más débiles en términos de condiciones de vida y producción, el significado de ganar o perder, de ganar más o perder más, se entiende desde diferentes espacios como: qué política agrícola formula el Estado, qué incentivos como productor tengo para impulsar mi unidad productiva y en el mejor de los casos vender a un buen precio mi producto (en donde mi punto de equilibrio dé para tener una utilidad y por lo tanto no pierda), qué tantos competidores me rodean o participan en el mercado al que aspiro llegar (no sólo en el espacio local sino hasta en el internacional) y, algo fundamental y que en ocasiones a quienes vivimos en las ciudades se nos olvida: las condiciones del tiempo y clima que son elementos que al productor en los espacios rurales a diario los sujeta, los domina, los controla hasta el grado de, bajo un sincretismo religioso y ancestral, se encomiendan para que su punto de equilibrio no se desbalancee hacia la obtención de pérdidas.

Para una institución cuyo patrimonio se integra de recursos públicos y cuyo objeto es financiar el desarrollo a través del crédito, también es difícil la operación; por un lado, porque su mandato es orientar esos recursos hacia unidades productivas cuyos proyectos deben demostrar no sólo viabilidad económica sino también factibilidad financiera; es decir, que asegure su éxito en cuanto a que los *números* que arroje su balance le den lugar a pagar (devolver) el crédito más los intereses pactados y que además le asegure una permanencia en el tiempo, para impactar en el desarrollo y bienestar de quienes integran esas unidades productivas y más, cuando se abarcan circuitos que rebasan la autosuficiencia de alimentos para la familia y para la sociedad entera. Y es difícil para esa institución porque ésta también tiene que cuidar de ese patrimonio que la haga viable a través del tiempo, de tal forma que su punto de equilibrio siempre esté en positivo (para no hablar de ganancias pues su lógica es la de ser una entidad pública cuyo fin está lejos de la de lucrar como lo haría cualquier empresa privada); la institución, por lo tanto, también está inmersa en la lógica de esa tipología diversa de productores que tienen presencia en el campo mexicano. Si las condiciones climáticas son adversas entonces también las condiciones para recuperar los préstamos serán difíciles y el punto de equilibrio –dependiendo los índices de cartera vencida que se vayan proyectando- se verá impactado y por lo tanto en riesgo el patrimonio de la institución. El punto de equilibrio está, por lo tanto, inmerso en círculos virtuosos o círculos viciosos en donde la unidad más pequeña hasta la más grande, tendrán un efecto en el ganar o perder de una sociedad, en donde todas las unidades económicas –ya no sólo las agropecuarias- convergen, dependiendo la actividad a la que se dediquen y el control que éstas tengan de la mayor parte de las variables que las afectan.

El avance técnico y tecnológico favorece la manera como se evalúa todo el bagaje de datos que se logran sistematizar en la formulación y propuesta de un proyecto productivo, de inversión (no sólo en el reflejo de los estados financieros, balance, proyecciones de producción, tasa interna de retorno, entre otros datos fundamentales, que son el reflejo de un pleno dominio de la actividad productiva, a través de la experiencia en el manejo de los ciclos agrícolas), que aspira a ser aprobado por una institución que se dedica a financiar dichas iniciativas, no sólo por demostrar una rentabilidad positiva –cuando esto sucede- sino porque, cuando está bien formulado y éticamente planteado, existe la probabilidad mayor de que la entidad financie dicho proyecto, lo que significa que en la mayoría de los casos se demuestra un estadio por arriba del punto de equilibrio y el retorno del recurso prestado. El reto de unas décadas a la actualidad, está en introducir variables que favorezcan un equilibrio también con los recursos -sobre todo los naturales-, para que haya un pleno punto de equilibrio entre lo que nos da la Naturaleza, lo que extraemos de ella, y lo que podemos *regresarle*, para que siga garantizando nuestra permanencia y de todas las otras especies sobre la Tierra; en este sentido, el punto de equilibrio siempre debe estar a favor de que la Naturaleza también gane y no pierda.

Podría concluir en que el punto de equilibrio lo es también, el punto donde convergen el plano de la felicidad e infelicidad de todas y todos, en donde la aspiración, idealista, al fin y al cabo, debería ser en donde la Humanidad completa, con su complejidad y diversidad, uniera fuerzas para poder hacer de ese magno punto de equilibrio, el espacio en donde el cuadrante de pérdidas fuera un mínimo espacio y el cuadrante de ganancias fuera el más amplio posible y en donde cupiéramos tod@s bajo la perspectiva de un largo aliento y alcance en el tiempo, pensar en que la era Antropocéntrica –así denominado el actual momento en la Historia por el gran impacto de la especie Homo sapiens sobre la Tierra y sus condiciones- sea de florecimiento y no de destrucción.

Índice alfabético

T

V

Formularios

Leyes de potencias y radicales

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{c^{n-m}}}{\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \cdot c}$$

Conjugado de un binomio $\boldsymbol{a^2 - b^2}$

$$(a+b)(a-b)$$

$$(-a+b)(-a-b)$$

$$(a-b)(a+b)$$

$$(-a-b)(-a+b)$$

Productos notables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Potencias iguales pares o impares.

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}$$

Potencias iguales par.

$$\frac{a^m - b^m}{a + b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} - b^{m-1}$$

Potencias iguales impares.

$$\frac{a^m + b^m}{a + b} = a^{m-1} - a^{m-2}b + \cdots + a^2b^{m-3} - ab^{m-2} + b^{m-1}$$

Potencias par o impar que no sea cociente notable.

$$\frac{a^m + b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \cdots + b^{m-1}$$

Genera un residuo de $\boldsymbol{2b^n}$.

Línea recta: $Ax + By + C = 0$

Pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuaciones

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Puntos de intersección

$\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ abscisa al origen

$\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ ordenada al origen

Rectas perpendiculares

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Función exponencial

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{x+n} = a^x \cdot a^n$$

$$a^{x-n} = \frac{a^x}{a^n}$$

Logaritmos

$$\log_a y = x$$

$$a^x = y \quad \Rightarrow \quad \log_a y = x$$

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

Propiedades de los logaritmos

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a u^n = n \log_a u$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$$

Semejanza en triángulos

Lados

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Ángulos

$$A = A' \quad B = B' \quad C = C'$$

Perímetros

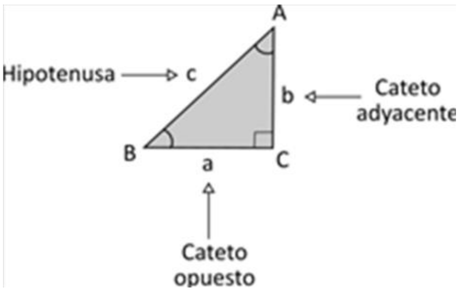
$$\frac{a + b + c}{a' + b' + c'} = \frac{p}{p'}$$

Áreas

$$\frac{A_1}{A_2} = r^2$$

Razones trigonométricas

Identidades



$$\boldsymbol{Seno\ de\ B} = \frac{cateto\ opuesto\ a\ B}{hipotenusa}$$

$$\boldsymbol{coseno\ de\ B} = \frac{cateto\ adyacente\ a\ B}{hipotenusa}$$

$$\boldsymbol{tangente\ de\ B} = \frac{cateto\ opuesto\ a\ B}{cateto\ adyacente\ a\ B}$$

$$\boldsymbol{cotangente\ de\ B} = \frac{cateto\ adyacente\ a\ B}{cateto\ opuesto\ a\ B}$$

$$\boldsymbol{secante\ de\ B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente\ a\ B}$$

$$\boldsymbol{cosecante\ de\ B} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto\ a\ B}$$

Trigonométricas

$$sen\theta = \frac{1}{csc\theta} \qquad cos\theta = \frac{1}{sec\theta}$$

$$tan\theta = \frac{1}{cot\theta} \qquad csc\theta = \frac{1}{sen\theta}$$

$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta} \qquad cot\theta = \frac{1}{tan\theta}$$

$$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta} \qquad cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$$

Pitagóricas

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$1 + tan^2\theta = sec^2\theta$$

$$1 + cot^2\theta = csc^2\theta$$

Ley de senos y cosenos

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\gamma}$$

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\beta}$$

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos \propto}$$

Referencias

Vila Jato José Luis, Tecnología Farmacéutica, Vol. II: Formas farmacéuticas, Universidad de Santiago de Compostela, Madrid, Editorial Síntesis S. A. 2001.

González López Alfonso, Ejercicio de áreas y volúmenes 3º ESO, Departamento de Matemáticas. I.E.S. Fernando de Mena, octubre 2013.

Pérez Zazueta Giselle, Secretaria de Economía, Industria Farmacéutica, Primera Edición, 2013.

Manzur Guzmán Ángel, Análisis grafico Parte I, Departamento de Física, 26 noviembre 2009.

Martel Moreno, Formulas generales para la determinación de áreas y volúmenes, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Revista El Guiniguada No. 8/9, 2000.

Oliver C. Margarita, Ferreyra D. Verónica, Giacomno M. Silvia, Curia C. Ana, Pellegrino G. Néstor, Fournier U. Martín, Apro C. Nicolás, Desarrollo de barras de cereales nutritivos y efecto del procesado en la calidad proteica. Revista Chil Nutr Vol, 39, No. 3 Septiembre 2012.

Barreto Villanueva Adán, El progreso de la estadística y su utilidad en la evaluación del desarrollo, Consejo de Investigación y Evaluación de la Política Social, Universidad Autónoma del Estado de México, Vol. 18, No. 73 julio-septiembre 2012.

Corbacho Castro Guillermo, Círculos y circunferencias, áreas y perímetros, Universidad Católica de Chile, Agosto 2012.

Manfredi Verónica, Funciones matemáticas… ¿Para qué se utilizan? La realidad de la función de las funciones lineales, Instituto Superior Fundación Suzuki, Buenos Aires Argentina, 10 mayo 2018.

Pinto Gabriel, Martínez Sánchez Manuela, Martínez Sánchez María Teresa, Sistema Internacional de Unidades: Resumen histórico y últimas propuestas, Enseñanza de la Química, Real Sociedad Española de Química, Vol. 108, No, 3, 2012.

Kenneth Alexander, Pharmacology: Principles and Practice, Elesevier, 2009.

Casanova H., Graficación estadística y visualización de datos, Ingeniería vol. 21 no. 3, Universidad Autónoma de Yucatán, 2017.

Centro de Investigación y Desarrollo, Guía para la presentación de gráficos estadísticos, Lima Perú, 2009.

Tapia Moreno Francisco Javier, Historia de los logaritmos, Vol. 2 No. 2, Mayo 2003.

International Energy Agency (iea), Indicadores de Eficiencia Energética: Fundamentos Estadísticos, 2016.

Becerra Espinoza José Manuel, Función exponencial y logarítmica, Colegio de Matemáticas de la ENEP-UNAM, diciembre 2007.

Bellereti Silvia, Godino María Eugenia, Blesio German, Mediciones, Instituto Politecico de la Universidad Nacional de Rosario de Argentina, Departamento de Física, Agosto 2016.

Gallardo Aurora, Basurto Eduardo, La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros. Revista Latinoamericana de Investigación Matemática, Vol. 13, No. 4, 2010.

Páginas web visitadas

United States Envioroment Protection Agency (2017), “Los países más contaminantes del mundo”, descargado de https://es.statista.com/grafico/9662/los-paises-mas-contaminantes-del-mundo, de fecha 20 de noviembre de 2018.

SERIDA, La naturaleza química del aroma de la sidra, descargado de http://www.serida.org/publicacionesdetalle.php?id=4865, 20 de noviembre de 2018.

Química de los seres vivos, descargado de http://quimica-de-los-seres-vivos-gard.blogspot.com/2015/08/composicion-quimica-de-los-seres-vivos.html. 21 de noviembre de 2018.

Centro para el Control y Prevención de Enfermedades CDC, Estimaciones sobre enfermedades transmitidas por alimentos en los EE.UU. en el 2011, descargado de https://www.cdc.gov/spanish/Datos/EnfermedadesAlimentos/. 21 de noviembre de 2018.

QlikSense 2017, cuando utilizar un histograma, descargado de https://help.qlik.com/es-ES/sense/September2017/Subsystems/Hub/Content/Visualizations/Histogram/when-to-use-histogram.htm. 23 de noviembre de 2018.

Interempresasnet, MetalWorking 2012, Materiales metálicos de uso frecuente en aeronáutica: aleaciones ligeras Al-Li, descargado de ttps://www.interempresas.net/MetalMecanica/Articulos/101138-Materiales-metalicos-de-uso-frecuente-en-aeronautica-aleaciones-ligeras-Al-Li.html 06 de diciembre de 2018.

Curso de estadística general, Primer cuatrimestre 2015, https://www.agro.uba.ar/users/batista/EG/tpreg14.htm 06 de diciembre de 2018.

Estos son los países que más drogas consumen, 2014, https://www.semana.com/vida-moderna/articulo/informe-de-la-onu-revela-consumo-de-drogas-en-el-mundo/395174-3. 07 de diciembre de 2018.

Poder calorífico de los principales combustibles https://ingemecanica.com/tutoriales/poder_calorifico.html#tabla1. 29 de enero de 2019.

Diario Oficial de la Federación. Programa Nacional de Infraestructura, 2014-2018, http://dof.gob.mx/nota_detalle_popup.php?codigo=5342547. 29 de enero de 2019.

Lección 4. Propiedades físicas, http://www.edafologia.net/index.htm. 29 de enero de 2019.

Tipos de gráficos y diagramas para la visualización de datos, http://www.ingeniovirtual.com 05 de febrero de 2019.

Graficas de barras, http://www.fescuatitlan.com.mx 05 de febrero de 2020.