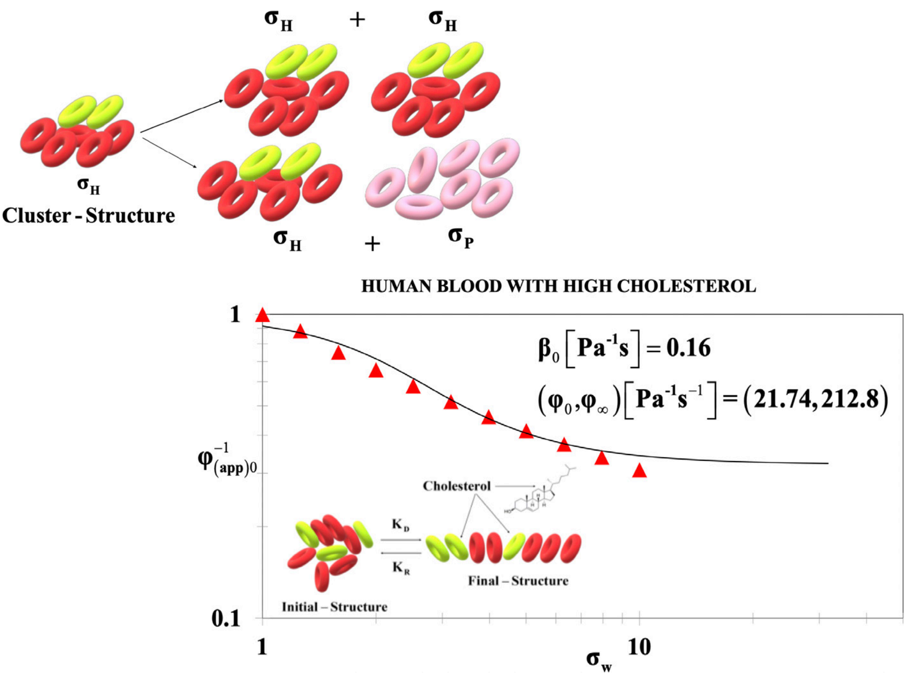
Métodos perturbativos aplicados a bioingeniería de fluidos no-newtonianos: flujo pulsátil no lineal de sangre humana con hipercolesterolemia

Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia
Dra. Mayra Luz Sánchez Villavicencio
Dra. Catalina Soriano Correa
I.Q. Aldo Fernando Varela Martínez
Dra. Linda Verónica Campos Fernández
Dr. Luis Alberto Verduzco Mora
Dr. Joaquín Flores Gerónimo
Dr. Joel Bucio Rodríguez
Dr. Gabriel Ascanio Gasca
Dr. Fausto Calderas García
Dr. Vicente Jesús Hernández Abad

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

Métodos pertubativos aplicados a bioingeniería de fluidos no-newtonianos: flujo pulsátil no lineal de sangre humana con hipercolesterolemia



Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia + Dra. Mayra Luz Sánchez Villavicencio
Dra. Catalina Soriano Correa + I.Q. Aldo Fernando Varela Martínez
Dra. Linda Verónica Campos Fernández + Dr. Luis Alberto Verduzco Mora
Dr. Joaquín Flores Gerónimo + Dr. Joel Bucio Rodríguez
Dr. Gabriel Ascanio Gasca + Dr. Fausto Calderas García
Dr. Vicente Jesús Hernández Abad

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza

Datos para catalogación bibliográfica

Autores: Edtson Emilio Herrera Valencia, Mayra Luz Sánchez Villavicencio, Catalina Soriano Correa, Aldo Fernando Varela Martínez, Linda Verónica Campos Fernández, Luis Alberto Verduzco Mora, Joaquín Flores Gerónimo, Joel Bucio Rodríguez, Gabriel Ascanio Gasca, Fausto Calderas García, Vicente Jesús Hernández Abad.

Autor de correspondencia: edtson_hv@comunidad.unam.mx

Métodos pertubativos aplicados a bioingeniería de fluidos no-newtonianos: flujo pulsátil no lineal de sangre humana con hipercolesterolemia.

UNAM, FES Zaragoza, junio de 2025.

Peso: 25.1 MB.

ISBN: 978-607-587-512-5.

Diseño de portada: Carlos Raziel Leaños Castillo.
Formación de interiores: Claudia Ahumada Ballesteros.

Este libro fue dictaminado a través del Comité Editorial de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza y se aprobó en marzo de 2025.

Métodos pertubativos aplicados a bioingeniería de fluidos no-newtonianos: flujo pulsátil no lineal de sangre humana con hipercolesterolemia.

Índice de contenido

Índice de figuras

Índice de tablas

Prólogo

Este libro se presenta el estudio del efecto del gradiente de presión pulsátil en el flujo volumétrico de un líquido incompresible no-newtoniano comparado respecto a aquel correspondiente a un gradiente de presión constante, en donde se encuentra una diferencia importante: el aumento del flujo volumétrico, lo cuál puede ser una explicación de por qué el corazón trabaja de forma pulsátil y no de forma continua. El estudio del sistema se lleva a cabo en una geometría cilíndrica de radio r = a y longitud z = L. Suponiendo efectos inerciales despreciables, proceso isotérmico, flujo unidireccional, fuerzas gravitacionales despreciables, fluido incompresible y fluido no-newtoniano, se obtienen expresiones analíticas para la función viscosidad aparente, flujo volumétrico y aumento en el flujo. El flujo y la reología del sistema son caracterizados con la ecuación constitutiva de Reinner-Philippoff (RF) el cual es un modelo que posee tres propiedades materiales: (i) dos fluideces a bajo y alto corte y (ii) un parámetro de transición que describe los procesos no newtonianos de estados de mayor a menor viscosidad por efecto del flujo. A partir de los resultados obtenidos con el modelo de RF, se propone una aproximación para obtener el aumento en el flujo volumétrico a través de la rapidez de deformación en estado estacionario y no homogéneo del modelo de Reiner-Philippoff. Finalmente, las predicciones y bondades del modelo son utilizados para describir el comportamiento reológico de sangre con alto contenido de colesterol en un régimen de flujo pulsátil en una vena rígida modelada como un cilindro. Los resultados muestran que el flujo pulsátil tiene un efecto de aumento sobre el flujo volumétrico de la sangre comparado con el flujo continuo no pulsátil, este efecto se ve incrementado cuando la sangre tiene un alto contenido de colesterol. Esto puede estar relacionado con un mecanismo de defensa natural del sistema circulatorio ante un incremento en la viscoelasticidad de la sangre por el alto contenido de colesterol y que a la larga puede resultar contraproducente pues el corazón tendría que latir con mayor frecuencia para lograr este aumento y que crónicamente podría ser la causa de arritmias y finalmente una falla sistémica del corazón (paro cardiaco).

Distribución del material

Este documento está organizado de la siguiente manera: la Sección 1 contiene la introducción al problema y los antecedentes. La Sección 2 discute el marco teórico en donde se ven los elementos básicos de fenómenos de transporte, reología de fluidos complejos y las ecuaciones de continuidad y transporte básicas. El modelo teórico, la variable adimensional y los grupos y las propiedades estocásticas de la serie aleatoria de Fourier n(t) utilizada para describir el ruido en el sistema acoplado. En la sección 3, se discute el problema físico, y el modelo constitutivo empleado junto con las restricciones matemáticas, físicas y biológicas del sistema de trabajo. En la sección 4, se presenta el modelado matemático en estado estacionario, en el régimen viscoso, mientras que, en el régimen de viscoelasticidad, son analizados el lineal (bajas deformaciones) y no lineal (altas deformaciones. En el régimen de viscoelasticidad lineal, la ecuación diferencial lineal se resuelve por transformada de Fourier, obteniéndose la función de transferencia, mientras que a deformaciones altas (viscoelasticidad no-lineal) por un método perturbativo a ordenes: primero y segundo respectivamente. En todos los casos, se obtiene soluciones analíticas para la fluidez, flujo volumétrico, aumento de fluidez y potencia pulsátil. En el capítulo cinco, se presentan las predicciones de los modelos teóricos desarrollados y se obtiene las predicciones de estos, variando los grupos adimensionales correspondientes. En el capítulo 6, se describe el análisis de resultados, conclusiones y trabajo futuro. Los apéndices al final de este libro muestran los resultados matemáticos más importantes. Por otro lado, y debido a las aplicaciones científicas y tecnológicas actuales y potenciales de los líquidos no-newtonianos, así como la ausencia de resultados analíticos simples que permitan contrastar las predicciones numéricas y las observaciones experimentales, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de tesis de licenciatura. Para este efecto, la distribución y el contenido del material de la presente tesis se muestran en la Fig. 2, posterior a eso, se plantea el objetivo general, los objetivos particulares y la hipótesis de trabajo.

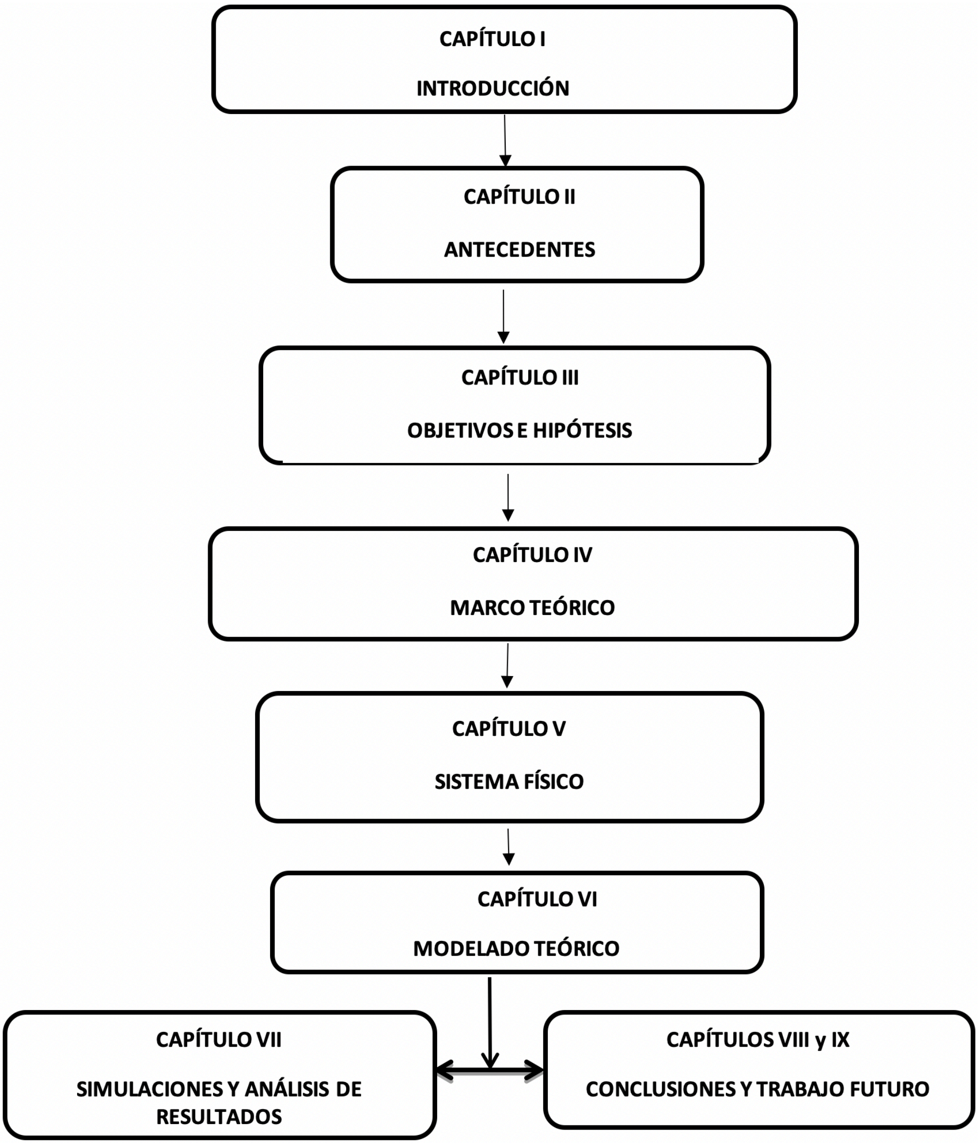


Figura 0.1. Organización de la información de esta obra.

Dedicatoria

A mi amada familia:
Mayra Luz Sánchez Villavicencio, Camila Isabella Herrera Sánchez

A mi amada hermana
Gabriela Yolanda Herrera Valencia

Te amamos Camila y estamos orgullosos de ti

우리는 당신을 카밀라를 사랑하고 우리는 당신을 자랑스럽게 생각합니다

Te amamos Camila y estamos orgullosos de ti

우리는 당신을 카밀라를 사랑하고 우리는 당신을 자랑스럽게 생각합니다

A nuestra amada Irma Concepción Villavicencio Cordero

Tus hijos Mayra, Jaime, Mabel, Edna
Siempre te extrañarán, y donde quiera que estes:
“Vuela alto MITOS”

A mis amados padres
Emilio Herrera Caballero y Yolanda Valencia Cortés

Porque siempre han sido mi ejemplo y pilares en mi vida.
Este libro es un testigo del amor que les tengo.

A mi amado padre
Emilio Herrera Caballero

Este libro está dedicado a mi padre Emilio Herrera Caballero. Muchas veces, me presionaste hasta el límite, me decías que nunca era suficiente lo que hacía. Me constaste muchas anécdotas de tu vida, como cuando te dejaron de hablar en tu trabajo por mantener tus ideales. No te entendía, pero ahora después de tu partida comprendo que nunca te fuiste por el camino fácil, siempre luchaste por lo que tu considerabas justo y nunca cambiaste. Hoy entiendo que eso, se llama congruencia, hoy celebro que lo único que querías, es que yo fuera diferente. En estos días, puedo decir que tuve al mejor padre del mundo y que celebro el ser hijo del "Ave de las tempestades- Emilio Herrera Caballero". Algún día nos encontraremos de nuevo padre mío y me seguirás contando tus historias a un después de tu partida. Gracias por todo y por que nos volvamos a encontrar en algún momento.

Te extraño mucho Edtson, Gabriela, Yolanda y Camila

Agradecimientos

- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<**IN102823**>> <<Modelado Matemático y Simulación Computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bio-Ingeniería >>.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para Innovar y mejorar la Educación (PAPIME) de la UNAM <<**PE106224**>> << Material didáctico para la asignatura de transferencia de masa usando COMSOL-MULTIPHYSICS Y WOLFRAM MATHEMATICA >>.
- Investigacion realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e innovación Tecnológica DGAPA-PAPIIT de la UNAM <<**IT-200323>> <<** Efectividad anti hiperglucemiante de las matrices monolíticas de silicio que contiene glibenclamida preparadas por el método del sol-gel.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<**IN210023**>> <<Estudio computacional, síntesis, evaluación biológica y toxicológica de moléculas antichágasicas derivadas del imidazol >>.
- Al laboratorio de Reología y Fenómenos de Transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación de Reología y Fenómenos de Transporte de Fluidos Complejos.
- A la carrera de Ingeniería Química de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Agradecimiento a la Licenciada en Administración y Licenciada en Comunicación Gabriela Y. Herrera Valencia por las sugerencias para la edición de esta obra.

Participantes

Unidades de investigación participantes:

- Unidad de investigación en bioingeniería: UI-FESZ-2023.

Líneas de investigación participantes:

- Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos: LUI-FESZ-420415.
- Reología teórica y experimental de fluidos estructurados: LUI-FESZ-570619.
- Estructura electrónica de sistemas de interés biológico: LUI-FESZ-671122.
- Ciencias farmacéuticas: LI-FESZ-210506.

Laboratorios participantes:

- Laboratorio de reología y fenómenos de transporte, Unidad de Investigación Multidisciplinaria de Investigación Experimental Zaragoza (UMIEZ), p/l-7, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.
- Laboratorio de investigación farmacéutica. ET-PA-16, Planta piloto, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.

Resumen

En este trabajo se estudia el flujo pulsátil de un sistema que presenta estructura tomando en cuenta los efectos inerciales de la ecuación de movimiento. Para caracterizar el fluido se utiliza el modelo constitutivo de Tanner acoplado con el de Reiner-Phillippoff el cual, describe toda la curva de flujo en estado estacionario, i.e. dos mesetas a bajo y alto corte y una zona de transición tipo ley de potencia. Para describir el efecto pulsátil y vibrátil se supone que la presión y el término inercial de la ecuación de movimiento se modifican mediante una presión estocástica que representa las variaciones del gradiente de presión con el tiempo. El sistema de estudio es un capilar de radio $r = a$ y longitud $z = L$. El proceso es isotérmico y se lleva a cabo en estado no estacionario, i.e la velocidad depende del tiempo en la ecuación de movimiento. El problema se divide en dos casos principales a bajas deformaciones y altas deformaciones. Para el primero, la función viscosidad es independiente de la rapidez de deformación, y por lo tanto se tiene una ecuación diferencial lineal parcial que incluye mecanismos inerciales-viscoelásticos y que satisface las premisas del formalismo de Fourier, por lo tanto, es soluble bajo esta transformada. Se obtiene la función de transferencia del sistema lineal que relaciona el flujo volumétrico con el gradiente de presión pulsátil y se obtienen las respectivas curvas resonantes. Para resolver el conjunto de ecuaciones no-lineales acopladas se propone un esquema perturbativo en términos de un parámetro de pequeñez ε que describe las variaciones de la amplitud del gradiente de presión estocástico. Las variables perturbadas son la velocidad axial, el esfuerzo y la función fluidez. A orden cero, se obtienen las expresiones correspondientes al estado estacionario y homogéneo del modelo Tanner-Reiner-Philippoff, se calculan las expresiones correspondientes a los perfiles de velocidad y flujo volumétrico a diferentes condiciones de flujo (Adelgazamiento al corte y tixotropía). A primer orden se obtiene la contribución por efecto del flujo pulsátil en el aumento de fluidez, se observa que este, produce un mínimo en la curva de fluidez a rapidez de deformación y esta es proporcional con la primera derivada de la fluidez a orden cero con el esfuerzo en la pared. A segundo orden, se observa que el aumento en la fluidez es proporcional a la segunda derivada de la fluidez con respecto al esfuerzo en la pared, ponderado por el cuadrado del esfuerzo rz evaluado en la pared.

Palabras claves: Flujo pulsátil, sangre humana, colesterol, ecuación constitutiva, modelo de Tanner-Reiner-Phillippoff, transformada de Fourier, métodos perturbativos.

Abstract

In this paper we study the flow of elements of the system that presents structure taking into account the inertial effects of the movement equation. To paracaterize the fluid, the constitutive model of Tanner coupled with that of Reiner-Phillippoff is used, which describes the entire steady-state flow curve, that is, two plateaus at low and high cut and a power-law transition zone. Click on the image to enlarge it. The secondary effect and the vibration are due to the fact that the pressure and the inertial term of the equation of movement are modified through a pressure that is present in time. The study system is a capillary with radius r = a and length z = L. The process is isothermal and takes place in a non-stationary state, that is, the speed depends on the time in the equation of motion. The problem is divided into two main cases at low deformations and high deformations. For the former, the viscosity function is independent of the fast deformation, and therefore has a partial linear differential equation that includes inertial-viscoelastic mechanisms and that satisfies the premises of Fourier formalism, therefore, it is soluble under this transformed Se obtains the transfer function of the linear system that relates the volumetric flow with the pulsating pressure gradient and obtains the respective resonant curves. To solve the set of coupled nonlinear equations, a perturbation scheme is proposed in a small size parameter that describes the variations of the stochastic pressure gradient amplitude. The disturbed variables are the axial velcoidad, the effort and the fluidity function. At zero order, the expressions corresponding to the steady and homogeneous state of the Tanner-Reiner-Philippoff model were used, the expressions corresponding to the velocity and volume flow flow to the flow conditions are calculated (Shear Thinning and thixotropy). A primer can help to increase the fluidity, it is observed that this, produces a minimum in the curve of fluidity to the fast deformation and this is proportional to the first derivative of the fluidity at zero order with the esfueroz in the wall. At second order, it was observed that the increase in the fluidity is proportional to the second derivative of the fluidity with respect to the stress in the wall, weighted by the square of the stress evaluated in the wall.

Keywords: Pulsatile flow, human blood, cholesterol, constitutive equation, Tanner-Reiner-Phillippoff model, Fourier transform, perturbative methods.

Sobre los autores

Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia

El **Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia es profesor Titular B de Carrera Definitivo de la Carrera de Ingeniería Química.** Es Ingeniero Químico por la Facultad de Química de la UNAM. Tiene una licenciatura en Matemáticas Aplicadas por la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (UAM-I). Es maestro en Ingeniería por la Facultad de Química, UNAM con el mejor promedio de generación y postulado a la medalla Alfonso Caso. Posee Estudios de Maestría en Física con especialidad en Física Estadística por parte de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa. Es doctor en Ingeniería Química por la Facultad de Química, UNAM con mención honorífica. Por sus estudios doctorales fue postulado a la Medalla Alfonso Caso por parte de la Facultad de Química de la UNAM. Realizó una estancia de Investigación de un año en el Centro de Investigación en Polímeros (COMEX) mediante una generosa beca del Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal. Realizó tres estancias postdoctorales de dos años cada una en la universidad de McGill en Montreal Quebec Canadá en el departamento de Ingeniería Química. La primera de ella debido a una generosa beca de Gobierno de México (CONACYT), la segunda de ellas por parte del Gobierno Federal de Canadá y la tercera por parte de la provincia de Quebec, en Canadá. Su experiencia en la docencia incluye Fenómenos de Transporte Momento, Energía y Masa, Mecánica, Electromagnetismo y Matemáticas. Sus áreas de investigación son: Fenómenos de Transporte: (i) Momento, (ii) Energía, (iii) Masa, (iv) Reología de Fluidos Complejos con énfasis en cristales Líquidos Biológicos, (v) Flujo Pulsátil Sanguíneo y (vi) Membranas Biológicas. Es autor de 40 artículos de investigación indexados en el JCR, tres capítulos en libros publicadas en Wiley, Springer, Elsevier, 4 Libros especializados en flujo pulsátil, fenómenos de transporte de fluidos estructurados, membranas flexo-eléctricas aplicadas al oído humano y flujo pulsátil no-lineal de sangre con colesterol.
Sus trabajos de investigación han sido citados más de 800 veces. Ha impartido pláticas en congresos en Italia, Canadá (Ontario, Alberta y Quebec) sobre Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos. Ha dirigido 60 servicios sociales, 50 tesis

de licenciatura y co-asesor de dos tesis de maestría y una de doctorado. Actualmente es responsable del curso de Bio-Matemáticas del Posgrado en Ciencias Biológicas de la UNAM, es tutor del posgrado en ciencias biológicas y ciencias químicas de la UNAM. Dos de sus alumnos se encuentran haciendo su doctorado en el departamento de Ingeniería Química de la Universidad de McGill, Montreal, Quebec, Canadá. Ha participado como jurado en exámenes de Licenciatura, Maestría y Doctorado.
Actualmente es responsable de la Unidad de Investigación en Bio-Ingeniería **UI-FESZ-110323** y de la Línea de Investigación en Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos **(LUI-FESZ-420415)** ubicadas en el laboratorio de Reología y Fenómenos de Transporte de Fluidos Complejos de la Unidad Multidisciplinaria de Investigación Experimental Zaragoza (UMIEZ) de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza. Consejero Técnico de la Carrera de Ingeniería Química por el periodo **(2022-2026)**. Presidente de la subcomisión de lineas y unidades de investigación del comité de Investigación de la FESZ-UNAM **(2022-2026)**. Es miembro del Sistema Nacional de Investigador Nivel I por el periodo (2022-2026) y Nivel PRIDE D del sistema de estímulos de la Universidad Nacional Autónoma de México. Es editor asociado de la revista internacional Frontiers in Soft Matter y arbitro de varias revistas internacionales. Es miembro del consejo técnico por la Carrera de Ingeniería Química (2022-2026) y del comité de evaluación de lineas y unidades de investigación del comité de Investigación de la FESZ-UNAM. Actualmente es miembro del comité editorial de la revista internacional Frontiers in Soft Matter y arbitro de la revistas Physics of Fluids, Journal of Non-Newtonian Fluids Mechancis, Polymer Enginering Science, Rheologica Acta, Journal of Rheology, y Revisor de Proyectos a Nivel DGAPA-UNAM, PAPIIT y de proyectos de CONAHCYT. Actualmente se encuentra co-dirigiendo dos tesis de maestría de posgrado, 10 alumnos graduados del grupo, se encuentran estudiando el doctorado en diversas instituciones y dos de ellos hacienda el Doctorado en el departamento de Ingeniería Química de la Universidad de McGill, Montreal, Provincia Quebec, Canadá.

Dra. Mayra Luz Sánchez Villavicencio

La **Dra. Mayra Luz Sánchez Villavicencio** es Bióloga Experimental por la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (UAM-I). Maestra y Doctora en Biología Experimental por la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (UAM-I). Áreas de especialización: Ecología: tratamiento de aguas de uso secundario. Farmacología: técnicas de biología molecular, plantas medicinales, diabetes, obesidad. Ha publicado 11 artículos como primera autora y en colaboración en revistas nacionales e internacionales con factor de impacto. Realizó una estancia internacional en la Universidad de Montreal, en Montreal, QC Canadá. Colabora con diferentes grupos interdisciplinarios tanto en el área de etnobotánica y productos naturales para la salud del departamento de biología de la Universidad de Ottawa, así como en el área de Ingeniería Química y Materiales de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza del departamento de Ingeniería Química de la UNAM. Fue miembro del sistema Nacional de Investigadores por el periodo 2016-2019. Asistente de investigación en el laboratorio de productos naturales y enfermedades metabólicas en el departamento de fisiología y farmacología en la Facultad de Medicina de la Universidad de Montreal de Agosto 2017 a Mayo 2019 fue profesora de tiempo parcial del departamento de Hidrobiología de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa de 2005 a 2007. Temas actuales de interés: enfermedades metabólicas, vías de señalización de Resistencia a la insulina, diabetes, obesidad y modelado matemáticos de sistemas biológicos de interés para ciencias exactas e ingeniería.

Dra. Catalina Soriano Correa

La **Dra. Catalina Soriano Correa** posee una licenciatura en Química por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, BUAP. Tiene una Maestría en Química por la Universidad Autónoma Metropolitana- Iztapalapa (UAM-I), es Doctora en Ciencias por la UAM-Iztapalapa. Actualmente es profesora de Carrera Titular C de tiempo completo. Es responsable de la línea de investigación: "estructura electrónica de sistema de interés biológico", que tiene como objetivos la formación de recursos humanos, así como generar conocimiento en las áreas químico-biológicas básicas y aplicadas, que aporta información que permite explicar la relación existente entre las propiedades fisicoquímicas, electrónicas, estructurales, moleculares y de reactividad química de moléculas de interés biológico, para el desarrollo y diseño de moléculas con potencial farmacológico en el contexto de los postulados de la mecánica cuántica y de la Teoría de la Información. Los proyectos que conforman la línea de investigación contribuyen en la resolución de problemas de salud pública, tales como: cáncer, enfermedades infecciosas, antibacteriales, crónico-degenerativas y enfermedades olvidadas (Chagas y Leishmania), así como el estudio de la liberación de fármacos. Algunos de los proyectos comprenden también estudios experimentales, que corroboran las predicciones teóricas en el diseño de nuevas moléculas; lo que permite el intercambio académico y la vinculación con otros grupos de trabajo nacionales y extranjeros. Es responsable de una patente (Péptido con actividad anticancerígena). Es miembro de la Comisión Dictaminadora de la Carrera de Química Farmacéutico Biológica de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza desde 2018 a la fecha. Ha sido autor y coautor de artículos y capítulos de libro publicados en revistas arbitradas internacionales y con factor de impacto. Asimismo, ha dirigido tesis a nivel licenciatura, maestría y doctorado. Ha presentado más de cien trabajos en congresos nacionales e internacionales. La Dra. Catalina Soriano Correa es profesora de las materias de Fisicoquímica I y II en la carrera de QFB, es miembro del sistema nacional de investigadores Nivel I y tutora del doctorado en el posgrado en Ciencias Biológicas y en el posgrado en Ciencias Químicas de la Universidad Nacional Autónoma de México, Tutora en los posgrados en Ciencias Biológicas y Biología Experimental de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Tutora en el posgrado en el Centro de Investigación Cerebrales (CICE), Universidad Veracruzana, Profesora invitada de la maestría en Ciencias en Farmacología de la Escuela Superior de Medicina-Instituto Politécnico Nacional.

I.Q. Aldo Fernando Varela Martinez

El **I.Q. Aldo Fernando Varela Martínez** es Ingeniero Químico por parte de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, por la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma (FESZ-UNAM). Tiene estudios en Ingeniería en Energía en la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. Fue coordinador de ciclo terminal de la Carrera de Ingeniería Química de la FESZ-UNAM y actualmente es el Jefe de la Carrera de I.Q. de la FESZ-UNAM. Lideró el Proyecto de certificación de los laboratorios de I.Q. Bajo su liderazgo, se acreditó la Carrera de I.Q. internacionalmente por Segunda vez, actualmente el profesor Varela-Martínez se encuentra en la reforma del plan de estudios de la Carrera de Ingeniería Química de la FESZ-UNAM ante el organismo acreditado del CAACFMI-UNAM. Sus área de interés en la docencia son: (i) Fisicoquímica, (ii) Laboratorio de Taller de Proyectos, (iii) Administración y Alta gerencia. Entre sus pasiones, se encuentra el Football-Soccer y es un seguidor consagrado del Atlante.

Dra. Linda Verónica Campos Fernández

La **Dra. Linda Verónica Campos Fernández** posee una licenciatura en en Química Farmacéutico Biológica por la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, UNAM. Tiene una Maestría en Ciencias en Farmacología por la Escuela Superior de Medicina, IPN. Es Doctora en Biología Experimental por la UAM-Iztapalapa y posee la medalla al mérito universitario por haber obtenido el mejor promedio en el Doctorado. Actualmente, es profesora de Carrera Asociado C de tiempo completo de la carrera de IQ, impartiendo las materias de Química I, Fisicoquímica I y LCBIII. Asimismo, posee la distinción como miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel C. Es colaboradora en la línea de investigación: "Estructura Electrónica de Sistemas de Interés Biológico" LUI-FESZ-200506. Ha sido colaboradora en los proyectos PAPIIT-IN230419 y PAPIIT- IN210023 de la DGAPA-UNAM. Ha sido autor y coautor de artículos publicados en revistas arbitradas internacionales y con factor de impacto. Ha sido evaluadora de proyectos de investigación en congresos y participado en labores de apoyo institucional. Ha presentado más de veinte trabajos en congresos nacionales e internacionales, de los cuales, ha sido ganadora del primero, segundo y tercer lugar en concursos de presentación de trabajos libres. Ha asesorado tesis a nivel licenciatura y también ha participado como sinodal en exámenes de grado a nivel licenciatura. La **Dra. L. Campos Fernández** se ha especializado en el diseño teórico-experimental de nuevas moléculas como potenciales fármacos para el tratamiento de la enfermedad de Chagas y otras enfermedades. Tiene experiencia en cálculos de estructura electrónica empleando la teoría de los funcionales de la densidad (DFT), en donde relaciona descriptores químico-cuánticos con las propiedades fisicoquímicas, de reactividad química y toxicidad; también, ha realizado modelado por homología de proteínas no cristalizadas a partir del análisis de estructura/secuencia y estudios de acoplamiento molecular fármaco-enzima. En la sección experimental, ha realizado síntesis química de derivados de imidazoles y nitroimidazoles, así como estudios de actividad biológica *in vitro* y citotoxicidad de moléculas diseñadas.

Dr. Luis Alberto Verduzco Mora

El **Dr. Luis Alberto Verduzco Mora** es ingeniero químico, Maestro en Ciencias en Ingeniería Química y Doctor en Ciencias en Ingeniería Química egresado de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (UAM-I). Ganador de la Medalla al Mérito Universitario por el promedio obtenido en la licenciatura y la maestría. Ha participado como docente de asignatura a nivel licenciatura en diversas Instituciones de Educación Superior como

UAM-I, Instituto Tecnológico Superior de Teziutlán, UNITEC y actualmente en la Facultad de Estudios Superiores-Zaragoza (FES-Z) donde imparte las asignaturas de Laboratorio y Taller de Proyectos 6°, Diseño de Equipo de Separación e Ingeniería de Reactores, Con sus trabajos de investigación y colaboraciones ha participado en Congresos Nacionales e Internacionales de Ingeniería Química y publicado en la Revista Mexicana de Ingeniería Química y en memorias de Congresos. Actualmente se desempeña como Coordinador de Ciclo Terminal de la Carrera de Ingeniería Química en la FES-Z y es responsable del programa de Servicio Social "Estudio de la técnica de fluidización y su empleo en procesos unitarios y en operaciones unitarias".

Dr. Joaqui Flores Gerónimo

El **Dr. Joaquín Flores Gerónimo** realizó sus estudios de licenciatura en Ingeniería Química en la Facultad de Química de la UNAM. En esa misma institución, cursó su maestría y doctorado en Ingeniería Química en los temas flujo en redes vasculares, flujos pulsados en microfluídica y el sistema cardiovascular. Durante su maestría y doctorado realizó estancias de investigación en la Universidad de Barcelona en España y en la Universidad de Coimbra en Portugal, sentando las bases para desarrollar una investigación sólida en temas de frontera. Al finalizar su doctorado realizó una estancia postdoctoral de dos años en "The School of Biomedical Engineering & Imaging Sciences of the Kings College London" (KCL) en Reino Unido. Durante esta estancia tuvo la oportunidad de colaborar con médicos del St. Thomas' Hospital con el fin de desarrollar métodos para estimar la presión sanguínea central a partir de mediciones no invasivas de la presión sanguínea periférica, lo cual tiene relevancia en la evaluación de la salud cardiovascular. El Dr. Joaquín realizó una segunda estancia postdoctoral de dos años en "The Hong Kong Polytechnic University" (PolyU) en Hong Kong a través de una prestigiosa beca para realizar investigación en Asia. En Hong Kong, el Dr. Joaquín colaboró con ingenieros mecánicos y estructurales, especialistas en ondas transitorias y detección de fugas en redes hidráulicas, para desarrollar nuevas metodologías que ayuden a la detección no invasiva de anomalías vasculares. La colaboración con grupos de diversas especialidades le ha permitido al Dr. Joaquín desarrollar investigación interdisciplinaria, necesaria para el desarrollo de temas novedosos en el área de dinámica de fluidos. Derivado de su trabajo cuenta con 9 artículos en revistas indexadas y dos memorias de congreso. Además, ha participado en 15 congresos nacionales e internacionales, ayudando a la difusión de la ciencia y ha impartido 8 conferencias en congresos y universidades. Cabe mencionar que el trabajo del Dr. Joaquín ha ganado financiamiento internacional a través de "The Hong Kong Polytechnic University Micro Fund 2022-23 Cohort 2 for technology development on cardiovascular health evaluation" y a través del programa "Ideation 2023" por parte de "The Hong Kong Science and Technology Parks Corporation".

El Dr. Joaquín cuenta con amplia experiencia docente en universidades nacionales e internacionales entre las cuales se encuentran la UNAM, UAM, Universidad Iberoamericana y el King's College London, impartiendo los cursos de Física I, Física II, Laboratorio de Reactores, Laboratorio de Procesos Químicos I, Laboratorio de Procesos Químicos II, Comunicación en las Ciencias e Ingenierías, Transferencia de Calor y "Tutorials of Modelling Flow and Transport". Además de impartir clases, el Dr. Joaquín ha ayudado a la formación de recursos humanos siendo supervisor técnico de la tesis de licenciatura "Efecto de la elasticidad en la resonancia de redes arteriales" y supervisor de los proyectos de fin de carrera "A Statistical Analysis of the Characteristic Points of Aortic Root and Brachial Pressure" y "Hemodynamics in the Windkessel Model" presentados por estudiantes de licenciatura del KCL y PolyU.

Las líneas de investigación del Dr. Joaquín son altamente relevantes en el campo de la Ingeniería Química, especialmente en el estudio de flujos pulsados en sistemas tecnológicos y médicos, como los sistemas de microfluídica y el sistema cardiovascular. El análisis de la dinámica de fluidos a microescala es crucial para el diseño de sistemas microfluídicos, como microrreactores, que ofrecen ventajas significativas sobre los reactores convencionales, incluyendo mayor eficiencia, portabilidad y un control más preciso de los procesos. Asimismo, el estudio del flujo sanguíneo en el sistema cardiovascular tiene un impacto directo en la salud pública, dado que las enfermedades cardiovasculares son la principal causa de muerte a nivel global. La investigación del Dr. Joaquín ha ampliado las perspectivas en este campo mediante el desarrollo de modelos analíticos y la integración de datos obtenidos de mediciones en pacientes, contribuyendo así a una mejor comprensión y tratamiento de estas enfermedades. Finalmente, cabe mencionar que el Dr. Joaquín tiene un gran cariño por México y considera que la educación es una de las vías para el progreso del país.

Dr. Joel Bucio Rodríguez

El **Dr. Joel Bucio Rodríguez** es Medico Cirujano por parte de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, de la Universidad Nacional Autónoma de México. Actualmente es Profesor de Carrera Asociado "C" de Tiempo Completo definitivo, en el área de Morfofisiología de la Carrera de Médico Cirujano FES Zaragoza. Ha realizado estudiados de posgrado en: 1. Especialización en Urgencias Médico-Quirúrgicas, IMSS, avalado por la Escuela Superior de Medicina del Instituto Politécnico Nacional, 2. Maestría en Competencias Educativas, Universidad del Valle de México, 3. Doctorado en Educación, Centro de Estudios Superiores en Educación. Ha sido director de tesis de especialidad, colaborador en proyectos de investigación con financiamiento por año (PAPIME). Ha publicado dos capítulos de libro cuyos títulos versan en: (i) "Cianuro". Toxicología Clínica en Urgencias. Editorial Alfil. México. 2016. Autor del libro: Jorge Loria Castellanos, María del Socorro Sánchez Villegas, (ii) "Hierro". Toxicología Clínica en Urgencias. Editorial Alfil. México. 2016. Autor del libro: Jorge Loria Castellanos, María del Socorro Sánchez Villegas. Su trabajo actual de investigación se centra en: a) "Estudio correlacional. Engagement, miedo a covid-19 y depresión en estudiantes de medicina de segundo año de la FES Zaragoza", b) "Burnout syndrome, engagement and associated factors in medical students at FES Zaragoza".

Dr. Gabriel Ascanio Gasca

El **Dr. Gabriel Ascanio Gasca** es ingeniero mecánico y maestro en ingeniería por la Facultad de Ingeniería de la UNAM y doctor en ingeniería química por la Escuela Politécnica de Montreal, Canadá. Realizó una estancia sabática en la empresa Fresenius-Kabi en Alemania. Actualmente es Investigador Titular C de tiempo completo adscrito al Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología (ICAT) de la UNAM. Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores en el nivel 2 y es nivel D del Programa de Primas de Desempeño Académico de la UNAM. Sus líneas de investigación tratan sobre la Ingeniería de Fluidos, Reología Extensional e Instrumentación Mecánica. Ha publicado 92 artículos en revistas indexadas de circulación internacional, además de capítulos en libros y trabajos en congresos, los cuales han recibido más de 1720 citas, además de contar con 8 patentes nacionales e internacionales. Ha sido responsable de proyectos financiados por el gobierno federal, por la UNAM y por el sector industrial. Ha dictado más 20 conferencias en la industria e instituciones educativas, tanto en México como en el extranjero. Ha sido profesor en la Facultad de Ingeniería, en el Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería (UNAM), en la Universidad Internacional de Andalucía (España) y en la Universidad Tecnológica de Ambato (Ecuador). Ha dirigido 54 tesis a nivel doctorado, maestría y licenciatura. Actualmente es coordinador del Grupo de Ingeniería de Proceso del ICAT y Editor en Jefe del Journal of Applied Research and Technology, la cual forma parte del Sistema de Clasificación de Revistas Mexicanas de Ciencia y Tecnología y está indexada en Scopus, Scielo, Redalyc y Latindex.

Dr. Fausto Calderas García

El **Dr. Fausto Calderas García** es ingeniero químico por la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza (FES-Z), UNAM. Es maestro en Ciencia e Ingeniería de Materiales por parte del Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM. Es doctor en Ingeniería química por parte de la UNAM. Es experto en el área de reología con veinte años de experiencia en manejo de reómetros capilares, de esfuerzo controlado y de deformación controlada. Es autor de más de 50 artículos en revistas internacionales con factor de impacto en las áreas de nuevos materiales, reología y fluidos complejos; tiene más de 800 citas en la literatura especializada, 4 artículos en revistas de divulgación y tiene tres capítulos en libros sobre reología y nanocompuestos poliméricos con editoriales internacionales, además tiene tres patentes registradas, una de ellas sobre un aditamento de pulsos ultrasónicos para realizar mediciones simultáneas de reología. Ha sido revisor certificado de más de 50 artículos en revistas internacionales. Ha impartido cursos técnicos de capacitación a empresas para manejo de reómetros de vulcanización y tecnología del hule. Ha dirigido y co-asesorado 50 tesis de licenciatura, 4 de maestría y 1 de doctorado. Imparte cursos de ingeniería química en la Facultad de estudios superiores Zaragoza y en la Facultad de Química de la UNAM. Ha presentado sus trabajos en más de 50 congresos internacionales y nacionales. Ingresó al Sistema Nacional de Investigadores con Nivel 2. Es presidente de la sociedad mexicana de reología (SMR), que es la representación de la Sociedad de Reología (SR) en México. Es miembro de la sociedad de procesamiento de polímeros (Polymer Processing Society, PPS) y co-organizó el 34° congreso de esa sociedad (PPS-34) que se celebró por primera vez en México, en la ciudad de Cancún en diciembre del 2017. Actualmente está interesado en los temas de mezclado de fluidos complejos, nanocompuestos poliméricos, geles para alimentos, secado por convección de antioxidantes, modelado y caracterización de fluidos reológicos (sangre, disoluciones poliméricas, polímeros fundidos), flujo elongacional de fluidos modelo, etc. Colabora con grupos de investigación del área de alimentos, de farmacia, de nuevos materiales, reología entre otros. Es responsable de la línea de investigación "Reología teórica y reometría de fluidos estructurados" (LI-FESZ-570619).

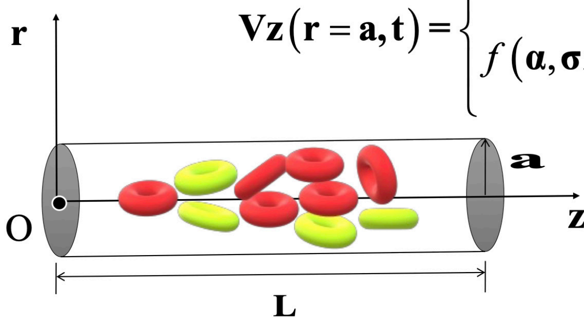
Dr. Vicente Jesús Hernández Abad

El Dr. Vicente Jesús Hernández Abad nació en la Ciudad de México el 28 de enero de 1974. El **Dr. Hernández Abad** es Químico Farmaceútico Biólogo con mención honorífica por la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza (FES-Z). Posee una maestría en ciencias especializada en farmacia y biofarmacia por la Facultad de Química de la UNAM postulado y ganador de la medalla Alfonso Caso. Posee un doctorado en farmacia. Actualmente es profesor de Carrera Titular C de tiempo completo, es nivel C del PRIDE. Es Miembro del Sistema Nacional de Investigadores, nivel 1 (1997-Actualidad). Desde 1997 hasta la fecha ha impartido de manera ininterrumpida los módulos de Biofarmacia y Desarrollo Analítico (teoría) en la carrera de Químico Farmacéutico y Biólogo de la Facultad la FESZ. Ha impartido diferentes actividades académicas y formado parte de comités tutores de Posgrado. Fue coordinador de 2001 a 2014 del Programa de Especializaciones en Farmacia Industrial. Autor y coordinador de los diplomados: Administración Farmacéutica y Cromatografía de Líquidos de Alta Resolución. Ha impartido cátedra, por convenios institucionales, en la Red Panamericana para la Armonización de la Reglamentación Farmacéutica (Organización Panamericana de la Salud), en la Dirección General de Medicamentos y Tecnologías para la Salud (Secretaría de Salud) en el Instituto Nacional de Pediatría y en la Facultad de Farmacia de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Ha participado en el Consejo Interno asesor de Estudios de Posgrado, en el Comité de Investigación, así como en el Comité Editorial de la FES Zaragoza. Fungió como secretario del H. Consejo Técnico de la FES Zaragoza durante casi ocho años, siendo actualmente su presidente. Es presidente de la Comisión del Mérito Universitario del H. Consejo Universitario de la UNAM. Fue integrante de los Comités Académicos de Posgrado de: las Especializaciones en Farmacia Industrial, las Maestrías en Enfermería y Trabajo Social, de Ciencias de la Administración, Maestría y Doctorado en Psicología, así como de la Maestría y doctorado en Ciencias Médicas, Odontológicas y de la Salud. Ha ocupado diversos cargos en la FES Zaragoza de forma ininterrumpida. En el periodo 1998-2001 fue Coordinador del área Química de la Carrera de QFB. Coordinador de Desarrollo Tecnológico de 2001 a 2003. Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación de 2003 a 2010. Fungió como secretario general de 2010 a 2018. Director de la FES Zaragoza desde noviembre de 2018. Es jefe de la Línea de Investigación en Ciencias Farmacéuticas, con énfasis en Desarrollo Farmacéutico. Dirigió la certificación en ISO del laboratorio a su cargo. Ha sido responsable o participado en 15 proyectos de investigación con financiamiento. Ha publicado 25 artículos en revistas arbitradas e indizadas. Es árbitro del Journal of Ethnopharmacology y de Drug Development and Industrial Pharmacy, así como evaluador de proyectos de CONACYT y PAPIIT. Ha generado productos que se encuentran en proceso de patentamiento y cuenta con una patente concedida. Autor de diversos materiales educativos: cinco libros de texto, dos capítulos de libros, tres manuales, siete videos, tres aulas virtuales y dos aplicaciones para dispositivos inteligentes. Ha presentado 100 trabajos libres en eventos académicos y 54 conferencias en diversos foros. Dirigió el servicio social de 47 alumnos, asesoró o dirigió la tesis de más de 120 egresados de licenciatura y posgrado. Sus actividades fuera de la UNAM se han orientado hacia la conducción de grupos multidisciplinarios e interinstitucionales encaminados al fortalecimiento y la mejora continua de la educación. Participó en el grupo técnico que elaboró la propuesta de política farmacéutica para México en 2005. En la Asociación Farmacéutica Mexicana A.C. ha ocupado diversos cargos de elección: fue su presidente en 2010-2011 y fue Coordinador de su Consejo de Expresidentes. Es evaluador líder fundador del Consejo Mexicano para la Acreditación de la Educación Farmacéutica desde 2006. Es editor, desde 2015, de la Revista Mexicana de Ciencias Farmacéuticas. Fue electo en 2017 primer vicepresidente de la Fundación para la Educación Farmacéutica en México A.C. Recibió el Premio Nacional de Ciencias Farmacéuticas "Dr. Leopoldo Río de la Loza" 2017 que otorga la Asociación Farmacéutica Mexicana A.C., en el área de Educación.

CAPÍTULO I

Flujo pulsátil

$$V_z(r=a,t)=\begin{cases}0\\ f(\alpha,\sigma_w)=\begin{cases}\alpha\sigma_w\\ \alpha_n\sigma_w^n\end{cases}\end{cases}$$



$$\nabla_z p(t)=\nabla_z p_0\left(1+\varepsilon n(t)\right)$$

1. Preliminares

En la historia de la mecánica de fluidos, el estudio del flujo pulsátil en sistemas newtonianos, no newtonianos y liquido complejos tiene un lugar muy importante en la ciencia de la reologia (Edwards et al. 1972; Manero y Mena 1977; Mena et al. 1979; Manero y Walters 1980; Barnes et al. 1969, 1971, 1989; Fredrickson 1964; Bird et al. 1987, 2002; Currie 1974). Actualmente, existen en la literatura dos grandes clasificaciones en fluidos oscilantes. El primero de estos, es el flujo a gradiente de presión pulsátil y el segundo es perturbación oscilatoria en la pared a gradiente de presión constante. El estudio del flujo pulsátil es uno de los sistemas más estudiados en la literatura concerniente a las áreas de fenómenos de transporte, reología y en ciencia de polímeros.

Los principales efectos del flujo pulsátil o vibrátil se presentan en:

a) Flujo volumétrico
b) Potencia
c) Función viscosidad

Varios grupos de investigación nacionales e internacionales, han demostrado que el flujo volumétrico se incrementa por efecto de las perturbaciones oscilantes y vibrátiles con respecto a aquel a gradiente de presión constante (Phan-Thien 1978, 1980 a,b, 1982; Phan-Thien and Dudek 1982a,b), por otra parte, Herrera et al. (2017) demostró que la viscosidad cortante disminuye pro efecto del flujo por lo que podría representar una ventaja de tipo biológico, por efecto de un decremento en la fricción del fluido (Herrera et al. 2017). La potencia pulsátil en todos los estudios ha sido siempre positiva, por lo que no representaría una ventaja utilizar un sistema vibrátil o una bomba de desplazamiento positivo (Phan-Thien 1980, apéndice A; Davies et al. 1978). Sin embargo, desde un punto de vista biológico, la energía asociada al flujo se compensa con la disminución en la fricción por efecto de la reducción en la viscosidad, esto implicaría que el trabajo que hace el corazón en bombear la sangre se compensa con la disminución en la fricción del sistema (Herrera et al. 2017; Moreno et al. 2013, 2015).

1.1 Definición de flujo pulsátil

El flujo pulsátil estudiado en mecánica de fluidos se origina cuando a un gradiente de presión se le añade una contribución que depende del tiempo, la cual describe las desviaciones temporales del valor promedio en el gradiente de presión. Esta pequeña contribución temporal tiene un impacto en la viscosidad cortante y por consiguiente en el flujo (Phan-Thien 1978, 1980a, b, 1982; Phan-Thien and Dudek 1982a, b; Lin et al. 2015).

1.2 Flujo pulsátil en reológia

El estudio de las oscilaciones transversales en la dirección axial de flujo y del flujo debido a un gradiente de presión pulsátil de fluidos newtonianos y no newtonianos en geometrías simples, ha atraído un amplio interés debido a su potencial aplicación en ingeniería. El corazón humano es una válvula de desplazamiento positivo que se puede similar mediante una función estocástica. La sangre y los nutrientes de esta son transportados por efecto de un eficiente sistema de transporte en el sistema circulatorio (Herrera et al. 2017). Actualmente, los estudios de sangre se han centrado en estudiarla bajo diferentes trastornos alimenticios desde un punto de vista teórico y reométricos (Apostolidis y Beris 2015; Apostolidis et al. 2016; Herrera-Valencia et al. 2017). En ingeniería química y petrolera ha sido importante en la recuperación terciaria de petróleo mediante agentes tensoactivos tipo gusano, los cuales son inyectados en la roca y debido a los elevados gradientes de presión se fractura y se recuperan cantidades adicionales de petróleo (Herrera-Valencia et al. 2009, 2010; Manero et al. 2002).

En superfibras naturales (seda de la araña) y sintéticas (Kevlar) (Rey y Herrera 2012a, b), bioreología (Moreno et al. 2015; Moyers-Gonzalez y Owen 2010; Moyers-Gonzalez et al. 2008a-c, 2009; Owen 2006), medios porosos (Del Rio 1993; Del Rio et al. 1998a-c; Del Rio y Castrejon-Pita 1998; Del Rio 1993; López de Haro et al. 1996), bio-ingeniería, etc. (Daka et al. 2012; Herrera et al. 2009; Herrera-Valencia et al. 2010, 2014, 2017; Rey et al. 2011; Rey y Herrera 2012 a, b), membranas flexoeléctricas (células que se encuentran en el oído interno y que son los amplificadores biológicos en el cuerpo humano) (Herrera-Valencia y Rey 2014 y referencias ahi citadas), ciencia de polímeros (extrusión con boquillas oscilantes; Herrera-Velarde y Mena 2000, 2001; Herrera-Velarde et al.

2003; Casualli et al. 1990; Middleman 1977), reometría en flujo oscilante a baja y alta amplitud (Bird et al. 1977; Bird et al. 2002; Calderas et al. 2009) y finalmente en cristales líquidos en forma de discos con las ecuaciones de Leslie-Ericksen (De Andrade Lima y Rey 2005, 2006).

Los sistemas oscilatorios han sido aplicados en el estudio de la transferencia de energía asociada a la disipación viscosa acoplada con los mecanismos inerciales de la ecuación de movimiento (Herrera-Velarde y Mena 2000, 2001; Herrera-Velarde et al. 2003), en fluidos newtonianos y no newtonianos. Ha sido demostrado, que esta, depende de las propiedades no newtonianas de lo líquidos de estudio, frecuencia de las oscilaciones y la amplitud de las perturbaciones (Herrera, et al., 2010, 2009; Ding et al. 1999; Dunwoody 1996). Además, el flujo pulsátil ha sido estudiado en flujo turbulento (números de Reynolds > 10,000), transferencia de masa acoplada con momento (Manero 2002) y procesos de recubrimiento de películas poliméricas (Herrera-Valencia et al., 2010, 2009).

El flujo a gradiente de presión dependiente del tiempo puede expresarse como la suma de dos contribuciones: (i) La primera, asociada al gradiente de presión constante y la segunda por una contribución que depende de la función estocástica multiplicada por un parámetro de pequeñez denotado en la literatura como épsilon ε:

$$\nabla p(t) = \nabla p_0 + \varepsilon \nabla p_1 = \nabla p_0 + \varepsilon \nabla p_0 n(t) = \nabla p_0 \left(1 + \varepsilon n(t)\right) \tag{1}$$

En la Ec. (1), ε es un parámetro de perturbación que puede considerarse como una amplitud de la función estocástica n (t) (Phan-Thien 1978, 1980a, b, 1982; Phan-Thien and Dudek 1982a, b; Lin et al. 2015). Matemáticamente n(t) es una función de ruido estocástico que representa la desviación del gradiente de presión en estado estable. Dos de los efectos más interesantes en el flujo de fluidos no-Newtonianos pulsátiles y oscilantes son el aumento del flujo y la potencia requerida E (%) para mantener el flujo pulsátil (Phan-Thien 1978, 1980a, b, 1982; Phan-Thien and Dudek 1982a, b; Lin et al. 2015; Herrera et al. 2009; Herrera-valencia et al. 2010; Herrera et al. 2017). El aumento de flujo y la potencia pulsátil pueden calcularse por medio de las siguientes relaciones matemáticas:

$$I(\%) = 100\frac{\langle Q(t)\rangle - Q_0}{Q_0}; \quad E(\%) = 100\frac{\langle P(t)\rangle - P_0}{P_0} \tag{2a, b}$$

Y la potencia pulsátil toma la forma:

$$P(t) = Q(t)\nabla p(t), P_0 = Q_0 \nabla p_0 \qquad \text{(2c, d)}$$

En las Ecs. (2a-d) I(%), E(%) es el aumento de flujo y la potencia requerida, $< Q(t) >$ y $< P(t)>$ son el flujo y la potencia dependientes del flujo pulsátil, Q_0 y P_0 son el flujo volumétrico y la potencia en estado estacionario respectivamente. El flujo pulsátil volumétrico de las Ecs. (2a-d) puede ser expresado matemáticamente, como el producto de la fluidez pulsátil aparente del material y el flujo volumétrico newtoniano es decir:

$$Q(t) = \varphi_{ap}(t) Q_N \qquad \text{(3a)}$$

Y el flujo volumétrico en estado estacionario y homogéneo se puede de la misma manera:

$$Q_0 = \varphi_{ap0} Q_N \qquad \text{(3b)}$$

Con fines de implementar un método perturbativo en las Ecs. (3a,3b) en torno al parámetro de perturbación definido en la Ec. (1), se postula, que la fluidez aparente, se puede desarrollar en término de una serie de potencias, en torno al parámetro de perturbación epsilon ε:

$$\varphi_{ap}(t) = \varphi_{ap0} + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j \varphi_{apj}(t) \qquad \text{(4)}$$

Una vez que las Ecs. (3a-c) han sido sustituidas en la Ec. (2) la expresión siguiente para el aumento en la fluidez es obtenida:

$$I_\varphi(\%) = 100\varepsilon^1 \frac{\langle \varphi_{ap1}(t) \rangle}{\varphi_0} + 100\varepsilon^2 \frac{\langle \varphi_{ap2}(t) \rangle}{\varphi_0} + 100 \frac{\sum_{j=3}^{N} \varepsilon^j \langle \varphi_{apj}(t) \rangle}{\varphi_0} \qquad \text{(5)}$$

Si suponemos mecanismos inerciales despreciables, fluido incompresible y proceso isotérmico en un capilar de radio r = a y longitude z = L, la fluidez aparente puede ser calculada mediante una integral

$$\varphi_{apj}(t) = \frac{4}{\sigma_w^4}\int_0^{\sigma_w} \dot{\gamma}_{(rz)j}\,\sigma_{rz}^2 d\sigma_{rz} = \frac{1}{\sigma_w^4}\int_0^{\sigma_w^4} \varphi_j(t)\,d\sigma_{rz}^4 \tag{6}$$

Tomando el valor promedio de la Ec. (6) se tiene lo siguiente:

$$\langle \varphi_{apj}(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi_{apj}(t)\,dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \varphi_{apj}(t)\,dt \tag{7}$$

De la misma forma, que en la fluidez, se tiene para la fracción de potencia empleada en mantener el flujo pulsátil, lo siguiente:

$$E_\varphi(\%) = 100\varepsilon^1\left(\frac{\langle \varphi_1(t) \rangle}{\varphi_0} + \langle n(t) \rangle\right) + 100\varepsilon^2\frac{\langle \varphi_2(t) \rangle}{\varphi_0} + 2(100)\frac{\sum_{j=3}^{N}\varepsilon^j\langle \varphi_j(t) \rangle}{\varphi_0} \tag{8a, b}$$

La Ec. (8) puede ser expresada en función del aumento en la fluidez (Ecs. 5-7)

$$\begin{aligned} E_{\varphi(1)}(\%) &= I_{\varphi(1)}(\%) + 100\varepsilon^1\langle n(t) \rangle = I_{\varphi(1)}(\%) + I_0(\%) \\ E_{\varphi(2)}(\%) &= I_{\varphi(2)}(\%) \\ E_{\varphi(k)}(\%) &= 2I_{\varphi(k)}(\%);\ k \geq 3 \end{aligned} \tag{9}$$

Las Ecs. (8,9) son las relaciones entre el aumento del flujo y la potencia pulsátil. En la Ec. (8a) el primer termino corresponde al cociente de fluideces asociadas a la perturbación y sin perturbación respectivamente, mientras que el Segundo, es debido al ruido asociado con la función estocástica. La contribución a segundo orden, en la fluidez es un cociente entre el promedio de la fluidez perturbada a Segundo orden y la fluidez a orden cero (estado estacionario y homógeneo). En este trabajo, solo nos interesa el primer y segundo orden ya que, los términos subsecuentes son muy pequeños. Por otra parte, la energía asociada al flujo pulsátil, es mayor a la fluidez por un valor que dependen del parámetro de perturbación epsilon I_0 (%) = $100\varepsilon^1 < n(t) >$, por lo que la energía que se emplea asociada al flujo pulsátil es del mismo orden que el aumento en la fluidez por lo que no representaría una ventaja de tipo energético en principio. Por ultimo, las contribuciones de segundo y ordenes superiores son siempre el doble del aumento del flujo (Ec. 9) por lo que se confirma que este tipo de sistemas presentan un gasto energético mayor debido a la implementación de bombas peristálticas o de desplazamiento positive que inducen estos flujos (Phan-Thien 1978, 1980 a,b, 1982;

Phan-Thien and Dudek 1982a,b; Herrera et al. 2009; Herrera-Valencia 2010; Herrera-Valencia et al. 2017).

1.3 Estado del arte: flujo pulsátil

Las Ecs. (5-9) son una medida de los efectos pulsátiles o vibrátiles en fluidos newtonianos y no newtonianos (Davies et al. 1977; De Andrade Lima et al. 2005, 2006; Herrera et al. 2009; Herrera-Valencia et al. 2010; Herrera-Valencia et al. 2017; Phan-Thien 1978, 1980 a, b, 1982; Phan-Thien and Dudek 1982a,b).

Diferentes investigaciones en flujo oscilantes (pulsátil y vibrátil) han demostrado que el principal mecanismo en el aumento de la función fluidez es el adelgazante al corte (Barnes et al. 1969; 1971; Davies et al. 1977), i.e cuando el sistema experimenta una transición de estados de mayor a menor estructura por efecto del corte, se tiene un incremento en la fluidez y por lo tanto en el flujo volumétrico (Herrera et al. 2009; Herrera-Valencia et al. 2010; Herrera-Valencia et al. 2016, 2017). Este aumento depende de varios factores los cuales son mencionados a continuación (Davies et al. 1977; Phan-Thien 1978, 1980 a, b, 1982; Phan-Thien and Dudek 1982a, b)

(a) Cuadrado de la amplitud de la función estocástica empleada,

(b) la función estocástica empleada (triangular, sinusoidal o cuadrada),

(c) la función viscosidad empleada en caracterizar la reología y el flujo en el sistema.

(d) El máximo en las curvas resonantes (eficiencia vs gradiente de presión) está determinado por un acoplamiento de las propiedades viscoelásticas del material.

(e) Experimentalmente se demostró que para algunos valores de frecuencia la eficiencia aumenta mientras que para otros decrece (Barnes et al. 1969, 1971).

Walters y Towsend (1970) estudiaron el flujo pulsátil de un líquido viscoelástico caracterizado con un modelo corrotacional de cuatro constantes tipo Oldroyd-B. Sus predicciones fueron similares a las de Barnes et al. (1969). Ellos demostraron que la eficiencia depende de la amplitud de la perturbación y que para un cierto valor crítico del gradiente de presión, se aprecian aumentos considerables en el flujo volumétrico. Además, sus cálculos teóricos demostraron que la eficiencia es una función creciente o decreciente de la frecuencia para un gradiente constante de presión. Por otra parte, y en la misma línea, Barnes et al. (1971) estudiaron el mismo problema, utilizando datos viscométricos para alimentar su modelo. Las conclusiones principales de su trabajo basado en el modelo Newtoniano Generalizado son:

(i) A bajas frecuencias, los resultados experimentales con una solución de poliacrilamida demostraron que el flujo volumétrico perturbado decrece conforme aumenta la frecuencia de las pulsaciones.

(ii) A frecuencias altas la eficiencia aumenta conforme la frecuencia de las pulsaciones lo hace.

De acuerdo con esto, existen discrepancias entre los resultados teóricos con el modelo viscoelástico de cuatro constantes propuesto por Walters y Towsend (1970) y los resultados teóricos-experimentales de Barnes et al. (1971). Por estos motivos, los métodos computacionales empleados para resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales han sido de gran interés con el fin de obtener resultados más precisos en la obtención de la eficiencia. Towsend (1973) resolvió el flujo pulsátil como un problema de valor inicial mediante un algoritmo computacional basado en un esquema perturbativo y utilizando un método numérico tipo Runge-Kutta clásico de cuarto orden. Una de las ventajas de éste es su gran estabilidad computacional y versatilidad en las cantidades físicas importantes (amplitud de la perturbación, frecuencia, propiedades materiales de la ecuación constitutiva etc).

Para el intervalo de frecuencias que utilizaron, Barnes et al. (1971) y Edwards et al. (1972) estudiaron la eficiencia y la potencia requerida para el sistema de flujo a gradiente de presión pulsátil. Para caracterizar su líquido, utilizaron dos modelos viscosos (ley de potencia y Ellis, Bird et al. 1977; 2012) y resolvieron el problema de valor inicial empleando un método de diferencias finitas.

Sus principales conclusiones incluyeron, que el aumento en el flujo volumétrico no depende de la frecuencia de las pulsaciones, solamente de su amplitud y del índice del modelo de ley de potencia, asociado con las propiedades adelgazantes del líquido.

Sin embargo, la potencia requerida para mantener el flujo pulsátil es siempre positiva, lo que implica que no existe ninguna ventaja de tipo energética en bombear un líquido viscoso mediante un gradiente de presión pulsátil. Por último, ellos concluyeron que la diferencia entre sus resultados y los de Barnes et al. (1971) están asociados a las ecuaciones constitutivas que fueron empleadas en los experimentos.

Davies et al. (1978) analizaron el flujo a gradiente de presión pulsátil incorporando los mecanismos mencionados anteriormente. Para caracterizar su líquido viscoelástico, utilizaron un modelo de **Goddard-Miller**, el cual demostró las mismas discrepancias entre la teoría y la parte experimental mencionadas por Barnes et al. (1971). Sus conclusiones principales fueron:

(i) Los mecanismos inerciales y elásticos no son los responsables de aumento en el flujo volumétrico.

(ii) La discrepancia entre la teoría y los datos experimentales han sido asociados a flujos secundarios.

(iii) El aumento en el flujo volumétrico depende fuertemente de la curva de viscosidad que se empleé.

Conclusiones similares a las de Davies et al. (1978), han sido obtenidas por diferentes investigadores, utilizando diferentes ecuaciones constitutivas Phan-Thien resolvió los dos sistemas de flujo (gradiente de presión pulsátil y perturbación oscilatoria en la pared). Mediante desarrollos perturbativos-estocásticos ((Davies et al. 1977; De Andrade Lima et al. 2005, 2006; Herrera et al. 2009; Herrera-Valencia et al. 2010; Herrera-Valencia et al. 2017; Phan-Thien 1978, 1980 a, b, 1982; Phan-Thien and Dudek 1982a,b) y numéricos (Barnes et al. 1969, 1971, Davies et al. 1977), con un número considerable de ecuaciones constitutivas (Tanner, newtoniano generalizado, redes no afines, Wagner, fluidos débilmente elásticos, Bird et al 1977, Herrera et al. 2009; Herrera-Valencia 2009, 2010, 2017 y referencias ahí mencionadas)

Las conclusiones principales de sus trabajos fueron:

(i) Para que exista aumento en el flujo, la función viscosidad debe disminuir con el segundo invariante del tensor rapidez de deformación es decir, el líquido debe ser adelgazante al corte.

(ii) La eficiencia es muy sensible al tipo de ecuación constitutiva que se utilice.

(iii) El valor del gradiente de presión al cual se obtiene el máximo en las curvas eficiencia-gradiente de presión, está determinado por un acoplamiento entre las propiedades viscoelásticas de los líquidos.

(iv) De acuerdo con su esquema perturbativo, la eficiencia es un fenómeno de segundo orden en el parámetro de expansión (amplitud de las perturbaciones).

1.4 Reología de la sangre humana

La sangre es un tejido formado por eritrocitos (glóbulos rojos RCB), leucocitos (glóbulos blancos) y trombocitos (plaquetas), que son forzados por un gradiente de presión periódica a través del cuerpo circulante humano (Moreno et al. 2013, 2015). Los glóbulos rojos constituyen alrededor del 45% de la sangre total en volumen, el plasma alrededor del 54.3% y los glóbulos blancos alrededor del 0.7% (Moreno et al. 2013, 2015). Desde un punto de vista reológico, la sangre (plasma y células) es un fluido no newtoniano complejo, y la principal explicación de su comportamiento complejo (viscoelasticidad, adelgazamiento por corte, tixotropía y esfuerzo de cedencia) se encuentra en la capacidad de agregación, desagregación, deformación, orientación y migración de los eritrocitos (Moyers-Gonzalez, y Owens 2010; Owen, 2009; Moyers-Gonzalez, et al., 2008a-c; Herrera et al. 2017).

En muchos casos, el flujo de sangre dentro de los vasos se ve fuertemente afectado por los niveles de colesterol y la hiperglucemia en las venas, después de muchos años de hipercolesterolemia que es un transtorno en el cuerpo humano debido a un exceso de colesterol (Apostolids et al. 2015, 2016; Moreno et al. 2013, 2015, Herrera-Valencia et al. 2017). Esta condición puede conducir a otras enfermedades como: la aterosclerosis acelerada, angina de pecho, infarto, estenosis, obesidad y diabetes tipo 2 debido a trastornos alimentarios y predisposiciones genéticas (Moreno et al. 2013, 2015, Herrera-Valencia et al. 2017; Sanchez-Villavicencio et al. 2017), que han alcanzado el estatus de epidemia en todo el mundo, y herramientas como el modela matemático, simulación computacional (EL-shahed 2003; Ghasemi et al. 2016; Kolbasov et al. 2016) y la medicina alternativa basada en la plantas tradicionales utilizadas por medicos y aborígenes son alternativas que permitirían encontrar soluciones a estos problemas (Sánchez-Villevicencio et al. 2016 y referencias ahí citadas). En este contexto, el modelado matemático puede ser una alternativa para desarrollar un nuevo tratamiento con el fin de desarrollar anticoagulantes más eficientes que puedan ser una alternativa para estas enfermedades (Herrera et al. 2017).

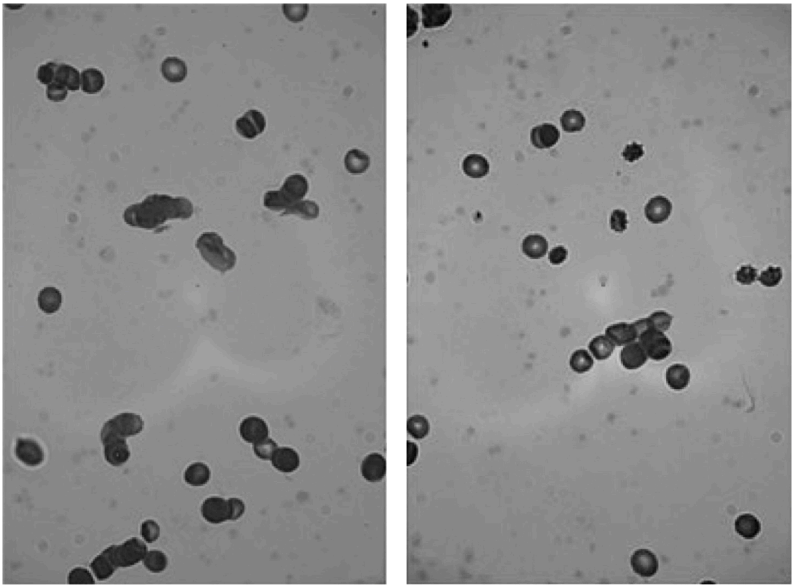


Figura 1.1. **Frotis de sangre de (a) colesterol alto y (b) bajo (L3 derecha) muestra de colesterol.**

Desde un punto de vista experimental (reometría), la sangre es un desafío para los experimentadores debido a la coagulación (coagulación sanguínea) en presencia de oxígeno. Desde un punto de vista matemático, la sangre se ha modelado como un flujo pulsante y oscilante, utilizando diferentes ecuaciones constitutivas, a saber: (i) Casson, (ii) Quemada, (iii) Tanner-Ellis, (iv) Cross-Yasuda, (v) Owen, (vi) BMP (Panagiotis y Sócrates, 2006; Moyers-González y Owens, 2010; Owen, 2009; Moyers-González, et al., 2008a-c; Del Río, 1988, Herrera-Valencia et al. 2016, 2017). Estas ecuaciones constitutivas se han probado en flujo de cizalladura: (i) Poiseuille, (ii) Poiseuille oscilatorio y (iii) flujos pulsátiles para simular el flujo sanguíneo a través del sistema cardiovascular humano (Moyers-Gonzalez y Owens 2010; Owen, 2009; Moyers-Gonzalez, et al., 2008a-c; Del Rio, 1988).

La relevancia de las simulaciones computacionales en el desarrollo de dispositivos cardiovasculares, en particular bombas de sangre, ha sido destacada en varios trabajos

(Panagiotis y Sócrates, 2006; Anand y Rajagopal, 2004) y existe la necesidad de modelos poderosos, pero simples, que puedan capturar la respuesta reológica compleja completa de la sangre en un rango de condiciones de flujo. El complejo sistema circulatorio (corazón, venas, arterias) se puede modelar en una primera aproximación como un acoplamiento de un gradiente de presión pulsante usando un gradiente de presión estocástico pulsátil (Phan-Thien 1978, 1980a, b, 1981, 1982; PhanThien y Dudek 1982a, 1982b). Este enfoque matemático y físico puede aportar algo de luz en la dirección de prótesis de válvulas cardiacas humanas preparadas industrialmente en pacientes con enfermedades de la sangre, y allanar el camino hacia enfoques más realistas en las bio-simulaciones de la sangre (Majhi y Nair 1994; Massoudi y Phuoc 2008; Prakash and Ogulu 2007; Rabby et al. 2013; Razavi et al. 2011; Siddiqui et al. 2009).

En este contexto, hay preguntas que todavía no han sido contestadas las cuales son formuladas a continuación:

(i) ¿Cuál es el efecto del gradiente de presión pulsátil en la viscosidad o fluidez cortante?

(ii)¿Por qué el corazón humano no utiliza un gradiente de presión constante en lugar de un gradiente de presión pulsátil, para distribuir la sangre en el sistema circulatorio

(iii)¿Cuál es la contribución energética del gradiente de presión pulsátil en la contribución del equilibrio mecánico en el cuerpo humano?

Las preguntas (i-iii) deben de ser contestadas satisfactoriamente, por lo que el estudio de sistemas oscilantes (vibrátiles y pulsátiles) debe de ser una prioridad debido a su potencial aplicación en fármaco-cinética. Por otra parte, el estudio de estos sistemas físicos con ecuaciones simples reológicas viscosas y viscoelástica que ayuden a entender el flujo sanguíneo en sistemas con transtornos alimenticios, son de vital importancia a nivel nacional e internacional, ya que son enfermedades clasificadas como emergentes e inducidas por una mala alimentación, hábitos sociales y estilo de vida en general.

No obstante, faltan preguntas por contestar acerca del efecto pulsátil del corazón sobre la sangre. Para tal efecto, se plantea la siguiente hipótesis de trabajo fundamental:

1.5 Hipótesis

El efecto de la incorporación de un ruido en la gradiente de presión pulsátil produce un aumento en el flujo volumétrico y que este aumento, es varias veces más grande que aquel a gradiente de presión pulsátil.

Para debatir la veracidad de esta hipótesis, se plantean los siguientes objetivos de esta investigación (general y particulares).

1.6 Objetivos de la investigación

1.6.1 General

Contribuir al entendimiento del comportamiento reológico de un fluido complejo sometido a un flujo combinado gradiente de presión pulsátil y perturbación vibrátil en la pared y aplicarlos los desarrollos teóricos a un fluido biológico.

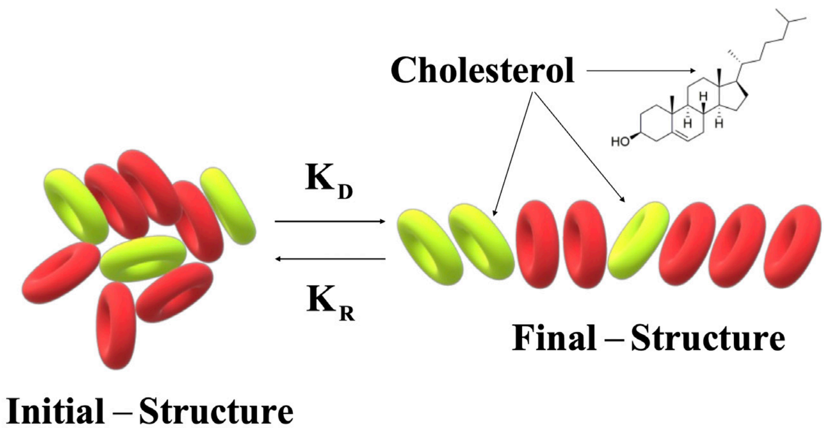
1.6.2 Particulares

- P.1: Deducir un modelo dinámico lineal que involucre los mecanismos inerciales viscoelásticos lineales a partir de la ecuación de momento y la ecuación reológica constitutiva de Maxwell.
- P.2: Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de escalar la ecuación dinámica lineal y que se obtengan grupos adimensionales que describan los mecanismos físicos que gobiernan al sistema de estudio.
- P.3: Obtener expresiones analíticas para el perfil de velocidades, flujo volumétrico y tomando en cuenta los mecanismos inerciales viscoelásticos asociados con los mecanismos de relajación y el módulo elástico de Maxwell.
- P.4: Aplicar el formalismo de Fourier para resolver la ecuación dinámica lineal propuesta y obtener una expresión analítica que relacione el perfil de velocidades y el flujo volumétrico asociado con el gradiente de presión pulsátil.

P.5: Obtener una expresión analítica de la función de transferencia relacionando la variable de entrada (gradiente de presión) y la de salida (flujo volumétrico).

P.6: Utilizar datos reométricos provenientes de la literatura con el fin de obtener la respuesta dinámica del sistema: Viscoelasticidad lineal y compleja, así como el flujo pulsátil (real e imaginaria).

Estado del arte



2.1 Enfermedades

El alto índice de enfermedades cardiovasculares en países desarrollados y en vías de desarrollo ha estimulado la investigación del comportamiento de la sangre en los grandes vasos sanguíneos, con la finalidad de comprender diversas patologías cardiovasculares, mejorar los métodos de diagnóstico asociados y reducir costos en el diseño e implementación de dispositivos implantables que tendrían contacto con la sangre, como, por ejemplo, válvulas cardíacas y bombas de sangre. La descripción matemática del comportamiento de la sangre permite estudiar sistemáticamente el comportamiento de los patrones de flujo al variar las características elásticas y geometrías de los vasos sanguíneos, sin exponer a un ser vivo a situaciones experimentales (Ortiz-León 2013).

2.2 La sangre

La sangre humana es un fluido no newtoniano muy complejo en la reología debido a que la viscosidad de la sangre no es proporcional al esfuerzo aplicado, cuenta con características pseudoplásticas, esto debido en parte a la formación de estructuras transitorias de muy corta duración, cuyo tamaño e intensidad dependen de la concentración del colesterol total.

La sangre es un fluido con dos fases: Una fase dispersa (plasma) que en esencia es un fluido newtoniano, pero tiene partículas en suspensión eritrocitos y leucocitos (fase dispersa). La interacción entre las células depende de la velocidad a la cual se mueve el fluido. La viscosidad de la sangre depende directamente de la relación entre la cantidad de células y el contenido de proteínas y metabolismos en el plasma. La sangre humana es un fluido con gran cantidad de funciones dentro del cuerpo humano, entre ellas la entrega de oxígeno y la remoción de dióxido de carbono de tejidos distales, y el trasporte de nutrientes y metabolitos. Los trastornos metabólicos en la actualidad son problemas que atañen a los seres humanos cada vez con mayor frecuencia: estos se atribuyen a un sin número de factores de estrés, medio ambiente, alimentación y genéticos, como el hipercolesterolemia familiar.

2.2.1 Efectos del colesterol en la sangre

La sangre con concentraciones aumentadas de colesterol presentara características bioquímicas y mecánicas diferentes de la sangre con concentraciones normales, la concentración alta de colesterol tiende a formar estructuras transitorias más complejas y difíciles de desagrega, aumentando el carácter pseudoplástico en la sangre.

El flujo de la sangre dentro del cuerpo, es generado por una fuerza que de forma continua e irreversiblemente al fluido. Un gradiente de presión generado por el corazón mueve la sangre desde los tejidos proximales hasta los tejidos distales. El recorrido de la sangre en el cuerpo humano tiene una duración de 20 segundos. El corazón actúa como una bomba que obliga que la sangre recorra todo el sistema cardiovascular.

Desde el punto de vista fisiológico, el corazón exhibe tres mecanismos principales, el fenómeno eléctrico, el acústico y el mecánico. El primero de ellos es la manifestación de los procesos de despolarización de las células cardiacas para generar contracción y relajación debido a la entrada y salida de iones a través de canales de iónicos expresados en las membranas celulares. El segundo de ellos es la manifestación de los ruidos cardiacos, el primero corresponde al comienzo de la sintoles ventricular.

2.3 Reología

La reología es la ciencia que estudia la respuesta de los fluidos complejos en términos de esfuerzo y deformación, su parámetro más característico es la viscosidad.

Las propiedades reológicas tienen un impacto en todas las etapas del uso de los materiales en las diversas industrias, desde el desarrollo de fórmulas y su estabilidad, hasta el procesamiento y el rendimiento de los productos. El tipo de reómetro que se necesita para medir estas propiedades depende, con frecuencia, de las velocidades de cizallamiento y períodos de tiempo pertinentes, así como del tamaño de la muestra y de la viscosidad.

2.4 Fenómenos de trasporte y reología

Los fenómenos de transporte y reología aplicado al estudio de la sangre humana ofrecen una interpretación matemática y física del comportamiento de la misma en el cuerpo humano. A pesar de que el tipo de flujo que se maneja es diferente del que se presenta en el cuerpo humano, es un esbozo de los fenómenos que se presentan en una situación real de flujo. Además, este tipo de estudios servirán en el futuro para la predicción de concentración de colesterol en una muestra de sangre. Sin lugar a dudas, el colesterol total influye directamente en la viscosidad de la sangre y en el grado de estructuración que tiene esta. Podría este fenómeno no se significativo desde el punto de vista clínico, ya que sujetos con niveles elevados de colesterol aun dentro del intervalo de lo considerado normal, no se percaten de ello, pero reológicamente las diferencias son muy marcadas.

Un fluido newtoniano como el agua es un sistema homogéneo de una sola fase, no tiene partículas en suspensión que puedan interactuar, además de que su estructura química es simple por ser una molécula pequeña compuesta solo por un átono de oxigeno unido a dos átomos de hidrógeno. Por esta razón el agua en estado líquido tendrá la misma viscosidad independientemente de la rapidez con la que se deforme. La sangre, por otro lado, es un sistema que está formado por una fase dispersa (plasma), que en esencia es un fluido newtoniano, pero tiene partículas en suspensión (fase dispersa) que interactúan entre sí con el plasma. Esta fase dispersa está compuesta de células cuyas membranas tiene un carga eléctrica negativa y sustancias como el colesterol. Esto da lugar a un sistema complejo cuya respuesta reológica es muy variada dependiendo del sistema de flujo y las condiciones en las que se estudie.

En el reo-grama se observa que las curvas presentan adelgazamiento al corte, es decir a mayor velocidad de corte la viscosidad disminuye. A bajas deformaciones de corte, la sangre muestra conglomerados de partículas y todas las estructuras están orientadas al azar (fase dispersa) y por lo tanto mayor resistencia al flujo. En la segunda etapa a esfuerzos moderados, los constituyentes de la sangre (eritrocitos, fase dispersa) se orientan más en la dirección de flujo, lo que da origen a estructuras que cada vez se oponen menos al flujo y por lo tanto la viscosidad disminuye. Estas estructuras no son estables pues al dejar de fluir, el sistema recobra su estructura original y la viscosidad se eleva. Dentro del cuerpo humano, la sangre está sometida a rapideces de deformación del orden de 1-100 s-1 que corresponde a la parte central del reo-grama teórico.

El exceso colesterol total en la sangre provoca que la repulsión electroestática natural entre las células disminuya, esto favorece que las células sanguíneas se aglomeren y formen una red más rígida que la que naturalmente se forma cuando el colesterol total esta en menor cantidad. La hipercolesterolemia (altas concentraciones de colesterol en sangre ~200 mg/dL) tiene grandes repercusiones en la fisiología del sistema cardiovascular; la sangre con concentraciones aumentadas de colesterol total presenta características bioquímicas y mecánicas diferentes a las de sangre con concentraciones menores. Dichas características son las siguientes: presenta una mayor viscosidad que la sangre, tiende a formar estructuras más complejas y difíciles de desagregar además de que el carácter pseudoplástico de este fluido aumenta. Bioquímicamente hablando, a la hipercolesterolemia se le atribuye una mayor producción de especies reactivas de oxigeno las cuales deterioran el sistema antioxidante del cuerpo humano.

Las propiedades de agregación de las células sanguíneas en este caso los glóbulos rojos, obedecen a una teoría muy simple la cual sostiene que las macromoléculas (colesterol, por ejemplo) promueven la agregación de los eritrocitos ya que se interponen entre una célula y otra generando puentes entre sus membranas lo cual reduce la interacción electroestática natural entre dos células. Las propiedades de agregación de las células sanguíneas en este caso los glóbulos rojos, obedecen a una teoría muy simple la cual sostiene que las macromoléculas (colesterol, por ejemplo) promueven la agregación de los eritrocitos ya que se interponen entre una célula y otra generando puentes entre sus membranas lo cual reduce la interacción electroestática natural entre dos células.

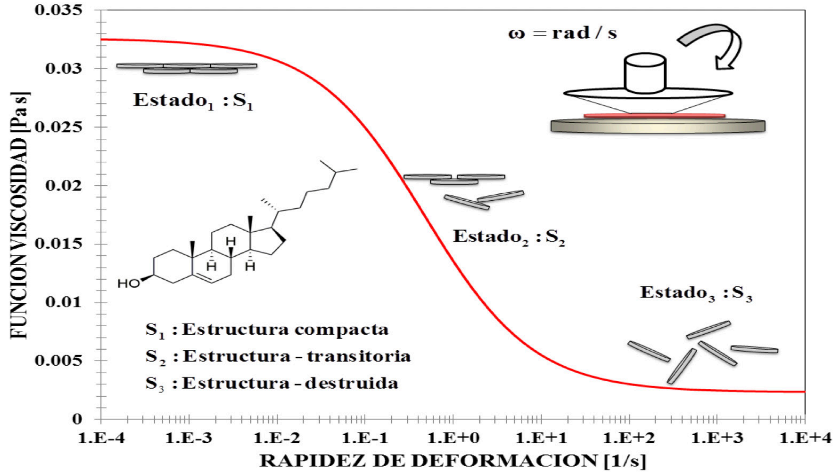


Figura 2.1. Reograma de sangre sin colesterol. Función viscosidad vs rapidez de deformación.

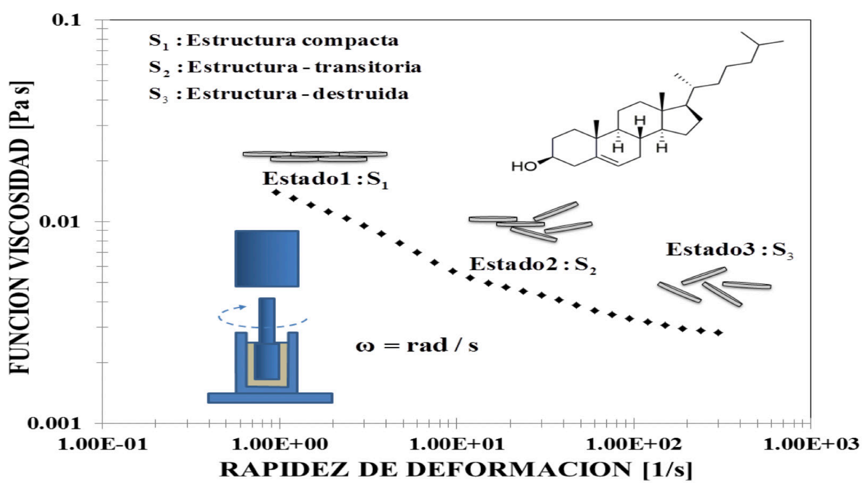


Figura 2.2. Reograma de la sangre con colesterol. Función viscosidad vs rapidez de deformación

CAPÍTULO III

Problema físico

En este capítulo se presenta el sistema físico de estudio y se dan los pormenores para el tratamiento matemático. En 3.1 se estudia las condiciones de proceso y se dividen en tres principales: (i) La geometría del sistema, (ii) El tipo de fluido de estudio y las condiciones del proceso.

3.1. Análisis de proceso

3.1.1 Geometría del sistema

3.1.1.1 Naturaleza reológica del fluido

El fluido es incompresible, i.e. su densidad permanece constante en el tiempo y en la posición. Además, consideraremos que este es viscoelástico, es decir que tiene componentes viscosas asociadas a la disipación y elásticas de recuperación o almacenamiento de la energía. El fluido biológico que se estudia es sangre humana con hipercolesterolemia, i.e., que existe un exceso de colesterol debido a un trastorno alimenticio (condiciones actuales, sobrepeso, sedentarismo etc). En este estudio, se supone que la sangre se obtuvo de pacientes hombres y mujeres y que se siguieron los protocolos establecidos para la extracción de la misma. Otras enfermedades como diabetes, hipo e hiperglucemia no fueron tomadas en cuenta, se supone que los donantes tuvieron en promedio, las mismas características fisiológicas de tal manera que, no haya discrepancias significativas en estas.

3.1.1.2 Condiciones de proceso

Las condiciones de proceso son formuladas a continuación:

1. Proceso isotérmico, i.e. la temperatura en el sistema es constante por lo que no hay variación de las propiedades materiales en el. Biológicamente, se supone que el cuerpo humano tiene una temperatura bastante constante de aproximadamente $T = 37°C$.
2. Mecanismos inerciales no son tomados en cuenta, es decir, la aceleración instantánea no es cero, por lo que los cambios de la velocidad son importantes en el análisis del problema.
3. El flujo pulsátil es modelado introduciendo una función estocástica que representa las fluctuaciones en el gradiente de presión pulsátil, i.e.: $\nabla p(t) = \nabla p(t)(1 + n(t))$.
4. La función estocástica estacionaria $n(t)$ con promedio cero, i.e. $\langle n(t) \rangle = 0$.
5. Efectos gravitacionales despreciables, i.e. el vector gravedad en cero: $g = 0$.
6. La reología y el flujo del líquido no newtoniano es caracterizado por la ecuación constitutiva viscoelástica de Tanner-Reiner-Philippof.

3.1.1.3 Condiciones biológicas

1. Se supone que el hematocrito que es básicamente el plasma compuesto por sales y minerales permanece constante.
2. Se supone que no existen otras patologías en la sangre de tal manera que intervenga en el desarrollo matemático de la misma, el intercambio de minerales, proteínas, etc, se desprecia del presente análisis.

3.2. Ecuación de transporte

3.2.1 Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad describe la conservación de la materia en un elemento de control, es decir describe los cambios de la densidad en función de los cambios espaciales del flux de momento. La expresión matemática en términos del operador de Stokes:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \rho\mathbf{V} = 0 \qquad (3.1)$$

La cual puede ser re-escrita en términos del operador del operador de Stokes:

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \qquad (3.2)$$

Si suponemos que el fluido es incompresible, es decir la densidad no depende del tiempo ni del espacio, por lo que, se simplifica de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \qquad (3.3)$$

La ecuación anterior, es la forma simplificada de la ecuación de continuidad para un fluido incompresible y matemáticamente describe un campo solenoidal.

3.2.2 Ecuaciones de movimiento

La ecuación de movimiento se basa en la segunda ley de Newton para un medio continuo, es decir un elemento de control con densidad constante es acelerado debido a las fuerzas superficiales y de cuerpo (bulto) que actúan sobre el:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{V} + \nabla \cdot [\rho\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}] = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} \qquad (3.4)$$

En donde el tensor de esfuerzos total, se descompone en la contribución hidrostática y del tensor de esfuerzos asociado al material viscoelástico:

$$\mathbf{T} = -p(t)\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma} = -p_0\left(1+\varepsilon n(t)\right) + \boldsymbol{\sigma} \tag{3.5}$$

Y la matriz identidad **I** toma la forma:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

En la expresión anterior I es el tensor unidad. Al substituir el tensor de esfuerzos totales en la ecuación de Cauchy, y suponiendo que las fuerzas de bulto están asociadas al campo gravitacional, por lo que:

$$\rho\frac{D}{Dt}\mathbf{V} = \rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\right)\mathbf{V} = -\nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = -\nabla p + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{g} \tag{3.7}$$

En donde **V** es el vector de velocidad, D/Dt es la derivada material del campo de velocidades, ρ es la densidad del líquido complejo, p es la presión termodinámica, **σ** es el tensor de esfuerzos visco-elástico, f es el campo externo gravitacional. Aplicando las condiciones de proceso antes mencionadas (flujo cortante simple, estado no estacionario, mecanismos gravitacionales despreciables), se tiene lo siguiente:

$$\varepsilon\rho\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p\left(1+\varepsilon n(t)\right) + \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{3.8}$$

El parámetro épsilon del término inercial fue puesto deliberadamente para tomar en cuentas los efectos inerciales en el desarrollo matemático. Multiplicando por el vector unitario en la dirección en z, i.e., se tiene lo siguiente:

$$\varepsilon\rho\frac{\partial Vz}{\partial t} = -\nabla_z p\left(1+\varepsilon n(t)\right) + \left(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\cdot\hat{e}_z = -\nabla_z p\left(1+\varepsilon n(t)\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma_{rz}\right) \tag{3.9}$$

Finalmente, la componente z de la ecuación de movimiento:

$$\varepsilon\rho\frac{\partial Vz}{\partial t} = -\nabla_z p\left(1+\varepsilon n(t)\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma_{rz}\right) \tag{3.10}$$

3.2.3 Ecuación reológica visco-elástica no lineal

Para caracterizar nuestro líquido no newtoniano se propone la ecuación constitutiva de Tann

$$\varphi(\mathrm{II}_{\boldsymbol{\sigma}})\left(\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{G_0\varphi_0}\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}\right)=2\mathbf{D} \tag{3.11}$$

Es importante resaltar que el tensor de esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor de esfuerzos viscoelástico el cual nos describe la fuerzas cortantes y normales que actúan en el elemento de control. EL término $1/G_0\varphi_0$ es el tiempo viscoelástico de Maxwell a rapidez de corte baja, η es la función viscosidad la cual, describe los mecanismos disipativos en el sistema y $\mathbf{D}$ es el tensor rapidez de deformación. La derivada convectiva superior de Maxwell puede ser descrita como:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{D}{Dt}\boldsymbol{\sigma}-\left\{\nabla\mathbf{V}^{\dagger}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\mathbf{V}\right\} \tag{3.12}$$

Esta derivada convectiva superior describe los cambios del tensor de esfuerzos temporales y espaciales del sistema de flujo. En la Ec. (3.12) la derivada del tensor de esfuerzos se define como:

$$\frac{D}{Dt}\boldsymbol{\sigma}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\sigma} \tag{3.13}$$

El tensor rapidez de deformación $\mathbf{D}$ es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad y se define como:

$$\mathbf{D}=\frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{V}+\nabla\mathbf{V}^{\dagger}\right) \tag{3.14}$$

La función viscosidad definida en el modelo de Tanner, esta descrita en terminos de la magnitud del tensor de esfuerzos y puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\eta\left(\mathrm{II}_{\boldsymbol{\sigma}}\right)=\frac{1}{\varphi_{\infty}+\dfrac{\varphi_0-\varphi_{\infty}}{1+\left(\dfrac{|\boldsymbol{\sigma}|}{\sigma_s}\right)^2}}=\frac{1+\left(\dfrac{|\boldsymbol{\sigma}|}{\sigma_s}\right)^2}{\varphi_0+\varphi_{\infty}\left(\dfrac{|\boldsymbol{\sigma}|}{\sigma_s}\right)^2} \tag{3.15}$$

La fluidez es el inverso de la viscosidad, asi que:

$$\varphi\left(\mathrm{II}_{\boldsymbol{\sigma}}\right)=\frac{1}{\eta\left(\mathrm{II}_{\boldsymbol{\sigma}}\right)}=\frac{\varphi_0+\varphi_{\infty}\left(\dfrac{|\boldsymbol{\sigma}|}{\sigma_s}\right)^2}{1+\left(\dfrac{|\boldsymbol{\sigma}|}{\sigma_s}\right)^2} \tag{3.16}$$

La magnitud del tensor de esfuerzos se calcula como:

$$|\boldsymbol{\sigma}|=\sqrt{(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma})/2} \tag{3.17}$$

En las ecuaciones el esfuerzo $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzo visco-elástico, ∇ es el operador matemático asociado a la derivada co-defomacional del tensor de esfuerzo, definido en la Ec. (3.12), **D** es el tensor rapidez de deformación que es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad. El modelo de Tanner-Reiner-Philippoff (TRF) fue seleccionado debido a su sencillez matemática en comparación con otros modelos matemáticos. Por otra parte, esta ecuación presenta soluciones analíticas en flujo cortante simple en estado estacionario y componentes elásticas (primera y segunda diferencia de esfuerzos normales). Además, todas las propiedades materiales del modelo pueden ser calculadas mediante experimentos reológicos en estado estacionario y no estacionario y poseen interpretación física.

3.3 Flujo homogéneo y cortante

En el flujo homogéneo las variables dinámicas del sistema no dependen de la posición por lo que los gradientes de estas son cero, i.e. $\nabla \mathbf{X} = 0$, $\mathbf{X}=\{\boldsymbol{\sigma},\mathbf{D}\}$. Por otra parte, en el flujo cortante el vector velocidad solo tiene una componente, i.e. las demás son cero por lo que las demás componentes son cero. En particular, en coordenadas cilíndricas (r, θ,z) el vector velocidad toma la forma:

$$\mathbf{V} = (Vr, \quad V\theta, \quad Vz) = (0, \quad 0, \quad Vz(r,t)) \tag{3.18}$$

En este caso, los tensores gradiente de velocidad y de esfuerzo se escriben en la siguiente forma matricial:

$$\nabla\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Vr}{\partial r} & \frac{\partial V\theta}{\partial r} & \frac{\partial Vz}{\partial r} \\ \frac{\partial Vr}{\partial \theta} & \frac{1}{r}\frac{\partial V\theta}{\partial \theta} & \frac{1}{r}\frac{\partial Vz}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Vr}{\partial z} & \frac{\partial V\theta}{\partial z} & \frac{\partial Vz}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial Vz}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial Vz}{\partial r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

La transpuesta del tensor gradiente de velocidad toma la forma:

$$\nabla\mathbf{V}^{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Vr}{\partial r} & \frac{\partial V\theta}{\partial r} & \frac{\partial Vz}{\partial r} \\ \frac{\partial Vr}{\partial \theta} & \frac{1}{r}\frac{\partial V\theta}{\partial \theta} & \frac{1}{r}\frac{\partial Vz}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Vr}{\partial z} & \frac{\partial V\theta}{\partial z} & \frac{\partial Vz}{\partial z} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial Vz}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{T} = \frac{\partial Vz}{\partial r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Los tensores rapidez de deformación y de esfuerzo toman la forma:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{V} + \{\nabla\mathbf{V}\}^{T}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial Vz}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Vz}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial Vz}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Vz}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

El tensor de esfuerzos para un fluido cortante simple toma la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz}\\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z}\\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz}\\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0\\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz}\end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Es importante resaltar que la matriz de esfuerzos físicamente no da información de las fuerzas cortantes o extensionales que actúan sobre el elemento de control en el sistema de estudio. Al sustituir estas matrices en la ecuación constitutiva y con las restricciones antes mencionadas, se tiene el siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma}+\frac{1}{G_0\varphi_0}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\sigma}-\left(\nabla\mathbf{V}^{T}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\mathbf{V}\right)\right\}=2\eta\left(\mathrm{II}_{\boldsymbol{\sigma}}\right)\mathbf{D}=\eta\left(\mathrm{II}_{\boldsymbol{\sigma}}\right)\left(\nabla\mathbf{V}+\nabla\mathbf{V}^{T}\right) \tag{3.23}$$

Sustituyendo las matrices en la ecuación constitutiva:

$$\begin{pmatrix}\sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz}\\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0\\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz}\end{pmatrix}+\frac{1}{G_0\varphi_0}\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz}\\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0\\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz}\end{pmatrix}-\dfrac{\partial Vz}{\partial r}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz}\\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0\\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz}\end{pmatrix}\\ -\dfrac{\partial Vz}{\partial r}\begin{pmatrix}\sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz}\\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0\\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{matrix}\right\} \tag{3,24}$$
$$=\eta\left(\mathrm{II}_{\boldsymbol{\sigma}}\right)\left(\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \dfrac{\partial Vz}{\partial r} & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & \dfrac{\partial Vz}{\partial r}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)$$

Realizando la multiplicación de matrices y simplificando obtenemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix}\sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz}\\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0\\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz}\end{pmatrix}+\frac{1}{G_0\varphi_0}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz}\\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0\\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz}\end{pmatrix}-\frac{\partial Vz}{\partial r}\begin{pmatrix}0 & 0 & \sigma_{rr}\\ 0 & 0 & 0\\ \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz}+\sigma_{zr}\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\eta\left(\mathrm{II}_{\boldsymbol{\sigma}}\right)\begin{pmatrix}0 & 0 & \dfrac{\partial Vz}{\partial r}\\ 0 & 0 & 0\\ \dfrac{\partial Vz}{\partial r} & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Simplificando las matrices, se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} + \frac{1}{G_0\varphi_0}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \frac{\partial Vz}{\partial r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{rr} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{rr} & 0 & 2\sigma_{rz} \end{pmatrix} \right\} = \eta(II_{\sigma})\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial Vz}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial Vz}{\partial r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Al igualar las componentes del sistema matricial definido en la Ec. (3.26) ecuaciones, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{rz} + \frac{1}{G_0\varphi_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{rz} - \frac{\partial Vz}{\partial r}\sigma_{rr} \right) = \eta(II_{\sigma})\frac{\partial Vz}{\partial r} \quad (3.27)$$

$$\sigma_{zr} + \frac{1}{G_0\varphi_0}\left(\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial t} - \frac{\partial Vz}{\partial r}\sigma_{rr} \right) = \eta(II_{\sigma})\frac{\partial Vz}{\partial r} \quad (3.28)$$

$$\sigma_{rr} + \frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial t} = 0 \quad (3.29)$$

$$\sigma_{\theta\theta} + \frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial t} = 0 \quad (3.30)$$

$$\sigma_{zz} + \frac{1}{G_0\varphi_0}\left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} - 2\frac{\partial Vz}{\partial r}\sigma_{rz} \right) = 0 \quad (3.31)$$

El segundo invariante del tensor de esfuerzos se calcula de la siguiente manera:

$$II_{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma})} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \right)} \quad (3.32)$$

Desarrollando el doble producto tensorial, se tiene lo siguiente:

$$II_{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sigma_{rr}^2 + \sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zr}^2 + \sigma_{zz}^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(2\sigma_{rz}^2 + \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{zz}^2 \right)} \quad (3.33)$$

Por lo que, la magnitud del tensor de esfuerzos, toma la forma:

$$\mathbf{II}_{\sigma} = \sigma_{rz}\sqrt{1+\left(\sigma_{zz}^{2}+\sigma_{rr}^{2}+\sigma_{\theta\theta}^{2}\right)/2\sigma_{rz}^{2}} \cong \sigma_{rz} \tag{3.34}$$

Por lo tanto, las ecuaciones más importantes de este libro especializado en flujo pulsátil son:

$$\sigma_{rz}+\frac{1}{G_0\varphi_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{rz}-\frac{\partial Vz}{\partial r}\sigma_{rr}\right)\cong \sigma_{rz}+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{rz}=\eta\left(\sigma_{rz}\right)\frac{\partial Vz}{\partial r} \tag{3.35}$$

$$\varphi\left(\sigma_{rz}\right)=\varphi_0\frac{1+\left(\varphi_\infty/\varphi_0\right)\left(\dfrac{\sigma_{rz}}{\sigma_s}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sigma_{rz}}{\sigma_s}\right)^2} \tag{3.36}$$

$$\sigma_{zz}+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t}=2\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial Vz}{\partial r}\sigma_{rz} \tag{3.37}$$

Finalmente, se tienen las siguientes ecuaciones matemáticas

$$\frac{\partial Vz}{\partial r}=\varphi\left(\sigma_{rz}\right)\left(1+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{rz} \tag{3.38}$$

$$\varphi\left(\sigma_{rz}\right)=\varphi_0\frac{1+\left(\varphi_\infty/\varphi_0\right)\left(\dfrac{\sigma_{rz}}{\sigma_s}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sigma_{rz}}{\sigma_s}\right)^2} \tag{3.39}$$

$$\sigma_{zz}+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t}=2\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial Vz}{\partial r}\sigma_{rz} \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial Vz}{\partial r}=\varphi\left(\sigma_{rz}\right)\left(1+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{rz} \tag{3.41}$$

$$\varphi(\sigma_{rz}) = \varphi_0 \frac{1 + (\varphi_\infty / \varphi_0)\left(\frac{\sigma_{rz}}{\sigma_s}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sigma_{rz}}{\sigma_s}\right)^2} \tag{3.42}$$

$$\left(1 + \frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{zz} = 2\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial Vz}{\partial r}\sigma_{rz} \tag{3.43}$$

Las Ecs. (3.35) -(3.43) anteriores son la base del presente análisis y son punto de partida en el esquema perturbativo. Un resumen de las ecuaciones obtenidas en este desarrollo matemático es, presentadas a continuación:

a) Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial Vz}{\partial z} = 0 \tag{3.44}$$

b) Componente axial de la ecuación de momento:

$$\varepsilon\rho\frac{\partial Vz}{\partial t} = -\nabla_z p\left(1 + \varepsilon n(t)\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma_{rz}\right) \tag{3.45}$$

c) Rapidez de deformación rz:

$$\frac{\partial Vz}{\partial r} = \varphi(\sigma_{rz})\left(1 + \frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{rz} \tag{3.46}$$

d) Fluidez de la ecuación reológica:

$$\varphi(\sigma_{rz}) = \varphi_0 \frac{1 + (\varphi_\infty / \varphi_0)\left(\frac{\sigma_{rz}}{\sigma_s}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sigma_{rz}}{\sigma_s}\right)^2} \tag{3.47}$$

e) Componente zz de la ecuación reológica:

$$\left(1+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{zz}=2\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial Vz}{\partial r}\sigma_{rz} \tag{3.48}$$

f) Fluidez aparente:

$$\varphi_{apj}(t)=\frac{4}{\sigma_w^4}\int_0^{\sigma_w^2}\dot{\gamma}_{(rz)j}\,\sigma_{rz}^2 d\sigma_{rz} \tag{3.49}$$

g) Aumento en la fluidez aparente a primer orden:

$$I_{\varphi 1}(\%)=100\varepsilon^1\frac{\langle\varphi_{ap1}(t)\rangle}{\varphi_{ap0}} \tag{3.50}$$

h) Aumento en la fluidez aparente a primer orden:

$$I_{\varphi 2}(\%)=100\varepsilon^2\frac{\langle\varphi_{ap2}(t)\rangle}{\varphi_{ap0}} \tag{3.51}$$

Las Ecs. (3.44) -(3.51) representan los resultados más importantes del presente análisis y estas son punto de partida del siguiente capítulo que consistirá en el modelado matemático del flujo a gradiente de presión constante, gradiente de presión pulsátil a bajas y altas deformaciones respectivamente.

CAPÍTULO IV
Viscoelasticidad lineal

4.1 Ecuaciones de transporte y reológica

En este capítulo se presenta el modelado matemático del flujo pulsátil con el modelo de Tanner Reiner-Philippoff (TRF). Asumiendo estado estacionario, homogéneo y fluido incompresible se tienen las siguientes expresiones matemáticas para las ecuaciones de: (a) continuidad, (b) momento y (c) constitutiva de Tanner Reiner-Philipoff.

4.1.1 Ecuación de continuidad

Si el fluido es incompresible, la densidad no depende de la posición, y de la hipótesis de flujo unidireccional, i.e. que la única componente diferente de cero, es la axial se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial Vz}{\partial z} = 0 \Rightarrow Vz = cte, \text{ o } Vz \neq f(z) \tag{4.1}$$

Esto significa que la velocidad axial no es función de z, solamente puede ser de las coordenadas radial y angular respectivamente. Los sistemas cilíndricos, presentan simetría angular, por lo que la derivada de la velocidad axial con respecto a la coordenada angular teta es cero,

$$\frac{\partial Vz}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow Vz = cte, \text{ o } Vz \neq f(\theta) \tag{4.2}$$

Por lo que, bajo la hipótesis de estado estacionario, el campo de velocidades solo depende de la coordenada radial r. Así que se tiene lo siguiente:

$$\boxed{\frac{\partial Vz}{\partial r} \neq 0 \Rightarrow \ Vz = f(r)} \tag{4.3}$$

4.1.2 Ecuación de momento modifica por el gradiente de presión pulsátil

La segunda ecuación (b) es la de momento que describe la aceleración del sistema debido a los procesos inerciales, viscosos y superficiales a través del gradiente de presión.

$$\varepsilon\rho \frac{\partial Vz(r,t)}{\partial t} = -\nabla_z p(t) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{zr}) \tag{4.4}$$

En la Ec. (4.4) el parámetro ε es perturbativo y ha sido puesto deliberadamente en los mecanismos inerciales (aceleración instantánea) debido a que queremos ver el efecto combinado pulsátil y vibrátil en el aumento de fluidez.

4.1.3 Ecuación constitutiva del modelo de TRP

La última es la función viscosidad del modelo de Tanner Reiner Phillippoff la cual, contiene tres propiedades materiales. La ecuación constitutiva viscoelástica no lineal toma la forma:

$$\varphi(\sigma_{zr})\left(1 + \frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{zr} = \frac{\partial Vz}{\partial r} \tag{4.5}$$

En la Ec. (4.5) φ es la función fluidez y $1/\varphi_0 G_0$ es el tiempo de relajación de Maxwell. La función fluidez depende del componente del esfuerzo zr y tiene la siguiente forma analítica:

$$\varphi(\sigma_{zr}) = \varphi_0 \frac{1+\left(\frac{\sigma_{zr}}{\sigma_s}\right)^2}{1+(\varphi_0/\varphi_\infty)\left(\frac{\sigma_{zr}}{\sigma_s}\right)^2} = \varphi_0 \frac{1+(k\sigma_{zr})^2}{1+(\varphi_0/\varphi_\infty)(k\sigma_{zr})^2} \quad (4.6)$$

Combinando las Ecs. (4.5,4.6) se tiene el siguiente modelo reológico acoplado:

$$\boxed{\frac{\partial Vz}{\partial r} = \varphi_0\left[\frac{1+(k\sigma_{zr})^2}{1+(\varphi_0/\varphi_\infty)(k\sigma_{zr})^2}\right]\left(1+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{zr}} \quad (4.7)$$

La Ec.4.1.7 contiene cinco constantes materiales las cuales, pueden ser calculadas mediante experimentos reológicos en estado estacionario y no estacionario. Dos fluideces a bajo y alto corte respectivamente $\{\varphi_0, \varphi_\infty\}$, un módulo elástico G_0, un parámetro que describe la transición de estados de mayor a menor fluidez por efecto del corte k.

En las siguientes secciones, se analizarán casos particulares de las Ecs. (4.1.4) y (4.1.7), y se obtendrá la función fluidez bajos las siguientes consideraciones de flujo:

a) Viscoelasticidad lineal (Transformada de Fourier).
b) Viscosos: Flujo en estado estacionario.
c) Viscoelasticidad no lineal.

4.2 Viscoelasticidad lineal: Modelo de Maxwell

En el régimen de viscoelasticidad lineal, la función fluidez tiende a la fluidez a corte bajo, i.e., $\varphi_\infty/\varphi_0 \rightarrow 1$, tomando el parámetro $\varepsilon = 1$, la ecuación de movimiento toma la forma:

$$\rho\frac{\partial Vz(r,t)}{\partial t} = -\nabla_z p(t) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{zr}) \quad (4.8)$$

El modelo viscoelástico no lineal TRF se reduce al de Maxwell:

$$\left(1+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{zr}=\frac{1}{\varphi_0}\frac{\partial Vz}{\partial r} \tag{4.9}$$

Al combinar las Ecs. (4.1.8,4.1.9) se tiene lo siguiente:

$$\rho\left(1+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}Vz(r,t)=-\left(1+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla_z p(t)+\frac{1}{\varphi_0}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}Vz(r,t)\right) \tag{4.10}$$

El gradiente de presión pulsátil se propone que tenga la expresión de una función exponencial compleja.

$$\nabla_z p(t)=\nabla_z p_0 \mathrm{Exp}(i\omega t) \tag{4.11}$$

donde Φ puede ser interpretado como un operador fluidez del modelo de Maxwell

$$\Phi=\varphi_0\left(1+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right) \tag{4.12}$$

Combinando las dos últimas expresiones

$$\boxed{\rho\Phi\,\frac{\partial}{\partial t}Vz(r,t)=-\Phi\,\frac{\partial p(t)}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}Vz(r,t)\right)} \tag{4.13}$$

La Ec. (4.13) representa el operador fluidez asociado al modelo de Maxwell.

4.2.1 Perfil de velocidades

Con el fin de resolver la ecuación dinámica Eq. (4.13), se utilizará el formalismo de Fourier. Si suponemos que la función es continua la transformada de Fourier de una función continua y la derivada de una función continua se escribe como:

$$\hat{F}(t)=\Im(f(t))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt;\ \Im\left(\frac{\partial^k f(t)}{\partial t^k}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^k f(t)}{\partial t^k}e^{-i\omega t}dt=(i\omega)^k F(\omega) \tag{4.14}$$

Las condiciones de frontera que se imponen al sistema son: (i) No deslizamiento en la pared, (ii)

$$\text{C.F.1:} V_z(r=a,t)=0$$
$$\text{C.F.2:} \frac{\partial}{\partial t} V_z(r,t)\Big|_{r=0}=0, \text{ o } \left|V_z(r=0,t)\right| \leq M \tag{4.15a, b}$$

Aplicando la transformada de Fourier a la Ec. (4.13), se tiene lo siguiente:

$$\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+i^3\rho\omega\widehat{\Phi}^*\right\}\widehat{V}z(r,\omega)=\widehat{\Phi}^*\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \tag{4.16}$$

La Ec. (4.16) es una ecuación diferencial paramétrica de Bessel no homogénea. En la Ec. (4.16) $\widehat{\Phi}^*$ es el operador fluidez descrito en la Ec. (4.12) en el espacio de los números complejos, i.e., la derivada parcial temporal se cambia por el producto $i\omega$, i.e. $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$ y la fluidez compleja tiene la siguiente representación matemática:

$$\Phi=\varphi_0\left(1+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\xrightarrow{\Im}\widehat{\Phi}^*=\text{Re}[\widehat{\Phi}^*]+j\text{Im}[\widehat{\Phi}^*]=\varphi_0\left(1+\frac{1}{G_0\varphi_0}(i\omega)\right) \tag{4.17}$$

La solución de la Ec. (4.16) se descompone en una homogénea y una particular. La solución homogénea es:

$$\widehat{V}z_H(r,\omega)=C_1J_0\left(i^{3/2}\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}\,r\right)+C_2Y_0\left(i^{3/2}\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}\,r\right) \tag{4.18}$$

Y la solución particular toma la forma:

$$\widehat{V}z_P(r,\omega)=-\frac{1}{\rho(i\omega)}\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z} \tag{4.19}$$

Por lo que, la solución general tiene la forma:

$$\widehat{V}z(r,\omega)=C_1J_0\left(i^{3/2}\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}\,r\right)+C_2Y_0\left(i^{3/2}\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}\,r\right)-\frac{1}{\rho(i\omega)}\frac{\partial p(\omega)}{\partial z} \tag{4.20}$$

Aplicando las condiciones de a la frontera: (i) condiciones antideslizantes en la pared y (ii) el sistema debe estar delimitado en el centro de la tubería. La segunda condición implica que la constante C_2 debe ser cero, y la condición antideslizante puede expresarse como:

$$C_1 = \frac{1}{\rho(i\omega)J_0\left(i^{3/2}\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}a\right)}\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z} \tag{4.21}$$

Una vez que la Ec. (4.1.21) se sustituye en la solución general (Ec. 4.1.20), el perfil de velocidades axial es obtenido para el modelo de Maxwell, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\boxed{\widehat{V}z(r,\omega) = \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(1-\frac{J_0\left(i^{3/2}\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}r\right)}{J_0\left(i^{3/2}\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}a\right)}\right)\left(-\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)} \tag{4.22}$$

La Ec. (4.22) es el perfil de velocidades general del sistema físico de estudio.

4.2.2 Flujo volumétrico de un líquido viscoelástico

El flujo volumétrico puede ser obtenido directamente mediante una doble integración por lo que, en coordenadas polares se tiene lo siguiente:

$$\widehat{Q}(\omega) = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \widehat{V}z(r,\omega)rdrd\theta = 2\pi a^2\int_0^1 \widehat{V}z(r^*,\omega)r^*dr^* \tag{4.23}$$

Al introducir el perfil de velocidades, en la integral del flujo volumétrico, se tiene la relación entre el flujo volumétrico y el flujo volumétrico newtoniano:

$$\widehat{Q}_V(\omega) = \widehat{\Phi}^*_{ap}(\omega)\frac{\pi a^4 \varphi_0}{8}\left(-\frac{\partial \widehat{p}(\omega)}{\partial z}\right) = \widehat{\Phi}^*_{ap}(\omega)\widehat{Q}_N(\omega) \tag{4.24}$$

Donde la función de transferencia esta dada por el siguiente cociente de funciones Bessel.

$$\boxed{\widehat{\Phi}^*_{ap}(\omega) = -\frac{8i}{a^2\rho\varphi_0}\frac{1}{\omega}\left(1-2\frac{J_1\left(i^{3/2}a\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}\right)/\left(i^{3/2}a\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}\right)}{J_0\left(i^{3/2}a\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}\right)}\right)} \tag{4.25}$$

La función de transferencia Ec. (4.25) es general y puede ser utilizada para cualquier función fluidez compleja en el régimen de viscoelasticidad lineal. Los siguientes puntos importantes de la Ec. (4.25) son mencionados a continuación:

a) Nótese que la función de transferencia (Ec. 4.25) depende de las propiedades materiales $\{\varphi_0, \rho\}$ respectivamente.

b) Físicamente, la función de transferencia compleja nos da las desviaciones del comportamiento newtoniano por efecto de los mecanismos inerciales y viscoelásticos del medio.

c) Nótese que la función de transferencia compleja es un cociente de funciones Bessel por lo que, se presentara curvas resonantes debido a las oscilaciones de las funciones Bessel.

En particular para pruebas de flujo oscilatorio el modelo de Maxwell de un modo no describe satisfactoriamente los datos experimentales. Moreno et al. (2015) demostraron que datos de sangre con colesterol bajo, medio y alto pueden ser modelados con el modelo multimodal de Maxwell con tres modos asociados a la respuesta mecánica de la estructura del fluido biológico. **En este trabajo, nos centraremos, solamente en el modo dominante para describir la dinámica oscilatoria del modelo de Maxwell.**

4.2.3 Gradiente de presión pulsátil

El gradiente de presión total se puede expresar en términos de un exponencial complejo, por lo que

$$\frac{\partial \hat{p}(\omega)}{\partial z} = \frac{\partial p_0}{\partial z}\delta(\omega - \omega_0) \tag{4.26}$$

Combinando el gradiente de presión y tomando el operador inverso de Fourier, tenemos:

$$Q(t) = \hat{\Phi}^*_{ap}(\omega)\frac{\pi a^2 \varphi_0}{8}\left(-\frac{\partial p_0}{\partial z}\mathrm{Exp}(i\omega t)\right) = \hat{\Phi}^*_{ap}(\omega)\frac{\pi a^2 \varphi_0}{8}\left(-\frac{\partial p(t)}{\partial z}\right) \tag{4.27}$$

Por lo que el flujo transitorio, toma la forma:

$$Q^*_V(t) = \hat{\Phi}^*_{ap}(\omega)Q^*_N(t) \tag{4.28}$$

Usando la Ec. (4.28) la mejora del flujo es cero en el régimen de viscoelasticidad lineal, es decir, I (%) = 0.

CAPÍTULO V
Viscoelasticidad no-lineal

5.1 Modelo Inelástico: Reiner-Philippoff

En este caso el sistema (fluido) cambia su viscosidad por efecto del corte o del esfuerzo aplicado, pero no presenta recuperación asociado a la parte de la elasticidad es cero, i.e. el tiempo de relajación del sistema es despreciable.

$$\frac{\partial Vz}{\partial r}=\varphi_0\left[\frac{1+\left(k\sigma_{zr}\right)^2}{1+\left(\varphi_0/\varphi_\infty\right)\left(k\sigma_{zr}\right)^2}\right]\left(1+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{zr}\cong\varphi_0\frac{1+\left(k\sigma_{zr}\right)^2}{1+\left(\varphi_0/\varphi_\infty\right)\left(k\sigma_{zr}\right)^2}\sigma_{zr} \quad (5.1)$$

Del balance de momento, y despreciando los mecanismos inerciales, se tiene lo siguiente:

$$\rho\frac{\partial Vz\left(r,t\right)}{\partial t}\cong 0 \quad (5.2)$$

Así que el balance de fuerzas en la ecuación de movimiento toma la forma:

$$0=-\nabla_z p_0+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_{zr}\right) \quad (5.3)$$

Arreglando la Ec. (5.3), se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sigma_{zr}\right)=\nabla_z p_0 \quad (5.4)$$

Integrando con respecto a la coordenada radial r y utilizando la condición de frontera de que el esfuerzo debe de permanecer acotado en el centro del sistema, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{2}\nabla_z p_0 r \tag{5.5}$$

La Ec. (5.5) es muy importante debido a que la componente zr del tensor de esfuerzos, solo depende de la coordenada radial r y de la fuerza motriz asociada a al gradiente de presión. Un hecho sobresaliente de la Ec. (5.5) es que este resultado es general, es decir no depende del fluido y solo de las condiciones de proceso. El esfuerzo en la pared el cual, es una cantidad medible.

$$\sigma_w = -\sigma_{zr}\big|_{r=a} = -\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a \tag{5.6}$$

5.1.1 Perfil de velocidades

De la ecuación constitutiva se tiene lo siguiente

$$\frac{\partial Vz}{\partial r} = \varphi_0 \frac{1+(k\sigma_{zr})^2}{1+(\varphi_0/\varphi_\infty)(k\sigma_{zr})^2}\sigma_{zr} \tag{5.7}$$

Sustituyendo la Ec. (4.3.5) en la Ec. (4.3.7), se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial Vz}{\partial r} = \varphi_0 \frac{1+(k\sigma_{zr})^2}{1+(\varphi_0/\varphi_\infty)(k\sigma_{zr})^2}\sigma_{zr} = \varphi_0 \frac{1+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}{1+(\varphi_0/\varphi_\infty)\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}\left(\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right) \tag{5.8}$$

La Ec. (4.3.8), puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\frac{\partial Vz}{\partial r}=\varphi_0\frac{1+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}{1+\left(\varphi_0/\varphi_\infty\right)\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}\left(\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right) \tag{5.9}$$

Integrando la Ec. (4.3.9) con respecto a la coordenada radial r, se tiene lo siguiente:

$$Vz(r)=\varphi_0\int\frac{1+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}{1+\left(\varphi_0/\varphi_\infty\right)\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}\left(\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)dr+C \tag{5.10}$$

Ecuación (4.3.10) puede ser escrita en términos del esfuerzo en la pared:

$$Vz(r)=\varphi_0\int\frac{1+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}{1+\left(\varphi_0/\varphi_\infty\right)\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}\left(\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)dr+C \tag{5.11}$$

La Ec. (4.3.10) puede escribirse de esta manera con el fin de facilitar su integración:

$$Vz(r)=\frac{\varphi_0/k}{k\nabla_z p_0/2}\int\frac{1+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}{1+\left(\varphi_0/\varphi_\infty\right)\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)d\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)+C \tag{5.12}$$

Con el fin de integrar la Ec. (5.12), se propone el siguiente cambio de variable: $u=\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2$, por lo que

$$Vz(r)=\frac{1}{2}\frac{\varphi_0/k}{k\nabla_z p_0/2}\int\frac{1+u}{1+\left(\varphi_0/\varphi_\infty\right)u}du+C \tag{5.13}$$

La Ec. (4.3.13) puede ser re-escrita en la siguiente forma:

$$Vz(r)=\frac{1}{2}\frac{\varphi_0/k}{k\nabla_z p_0/2}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\int\frac{(\varphi_\infty/\varphi_0)+u+1-(\varphi_\infty/\varphi_0)}{(\varphi_\infty/\varphi_0)+u}du+C \tag{5.14}$$

Simplificando la Ec. (5.14)

$$Vz(r)=\frac{1}{2}\frac{\varphi_0/k}{k\nabla_z p_0/2}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\int\left\{1+\frac{1-(\varphi_\infty/\varphi_0)}{(\varphi_\infty/\varphi_0)+u}\right\}du+C \tag{5.15}$$

Aplicando el principio de linearidad de las integrales, se tiene lo siguiente:

$$Vz(r)=\frac{1}{2}\frac{\varphi_0/k}{k\nabla_z p_0/2}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\int\left\{1+\frac{1-(\varphi_\infty/\varphi_0)}{(\varphi_\infty/\varphi_0)+u}\right\}du+C \tag{5.16}$$

Así que,

$$Vz(r)=\frac{1}{2}\frac{\varphi_0/k}{k\nabla_z p_0/2}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\left\{\int du+(1-(\varphi_\infty/\varphi_0))\int\frac{1}{(\varphi_\infty/\varphi_0)+u}du\right\}+C \tag{5.17}$$

Integrando se tiene lo siguiente:

$$Vz(r)=\frac{1}{2}\frac{\varphi_0/k}{k\nabla_z p_0/2}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\left\{u+(1-(\varphi_\infty/\varphi_0))Ln\left|(\varphi_\infty/\varphi_0)+u\right|\right\}+C \tag{5.18}$$

Cambiando la variable de integración:

$$Vz(r)=\frac{1}{2}\frac{\varphi_0/k}{k\nabla_z p_0/2}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\left\{\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2+(1-(\varphi_\infty/\varphi_0))Ln\left|(\varphi_\infty/\varphi_0)+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2\right|\right\}+C \tag{5.19}$$

Aplicando la condición de no deslizamiento en la pared, i.e., Vz = 0 en r = a, se deduce el valor de la constante:

$$C=-\frac{1}{2}\frac{\varphi_0/k}{k\nabla_z p_0/2}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\left\{\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^2+(1-(\varphi_\infty/\varphi_0))Ln\left|(\varphi_\infty/\varphi_0)+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^2\right|\right\} \tag{5.20}$$

Sustituyendo la constante Ec. (5.20), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} Vz(r) &= \frac{1}{2}\frac{\varphi_0/k}{k\nabla_z p_0/2}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\left\{\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2 + \left(1-(\varphi_\infty/\varphi_0)\right)\mathrm{Ln}\left|(\varphi_\infty/\varphi_0)+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2\right|\right\} \\ &-\frac{1}{2}\frac{\varphi_0/k}{k\nabla_z p_0/2}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\left\{\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^2 + \left(1-(\varphi_\infty/\varphi_0)\right)\mathrm{Ln}\left|(\varphi_\infty/\varphi_0)+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^2\right|\right\} \end{aligned} \tag{5.21}$$

Factorizando y utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$Vz(r) = \frac{1}{2}\frac{a\varphi_0/k}{(-k\nabla_z p_0\, a/2)}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(1-(\varphi_\infty/\varphi_0)\right)\mathrm{Ln}\left|\frac{(\varphi_\infty/\varphi_0)+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^2}{(\varphi_\infty/\varphi_0)+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}\right|\right\} \tag{5.22}$$

Finalmente, la velocidad axial en el sistema a gradiente de presión constante toma la forma:

$$\boxed{Vz(r) = \frac{1}{2}\frac{a\varphi_0/k}{k\sigma_w}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\left\{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \left(1-(\varphi_\infty/\varphi_0)\right)\mathrm{Ln}\left|\frac{(\varphi_\infty/\varphi_0)\ +\ k^2\sigma_w^2}{(\varphi_\infty/\varphi_0)+k^2\sigma_w^2\left(\frac{r}{a}\right)^2}\right|\right\}} \tag{5.23}$$

La Ec. (5.23) representa el perfil de velocidades para el modelo de Reiner-Philippoff para un fluido de densidad constante, isotérmico y que es deformado continua e irreversiblemente por un gradiente de presión en la difrección axial. Es importante resaltar, que el perfil de velocidades depende de la razón defluideces, las cuales describen la transición de estados de mayor estructura a menor estructura por efecto del corte y de los parámetros del modelo de Reiner-Philippoff.

5.1.2 Flujo volumétrico a gradiente de presión constante

El flujo volumétrico es el producto de la velocidad por el área de flujo y se calcula a través de una doble integral sobre la sección transversal de flujo. La expresión básica toma la forma:

$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{a} Vzrdrd\theta=-\pi\int_0^{a}\dot{\gamma}_{zr}r^2dr \tag{5.24}$$

Al integrar por partes la Ec. (5.24), se tiene lo siguiente:

$$Q=-\pi\int_0^{a}\frac{\partial Vz}{\partial r}r^2dr \tag{5.25}$$

La ventaja de la Ec. (5.25) es que nos permite calcular el flujo volumétrico a través de la integral de la rapidez de deformación y el área, por lo que, el flujo volumétrico se puede expresar como:

$$Q=-\frac{1}{2}\frac{\pi\varphi_0}{k\left(k\nabla_z p_0/2\right)^3}\int_0^{a}\frac{1+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}{1+\left(\varphi_0/\varphi_\infty\right)\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2}2\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)^2 d\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right) \tag{5.26}$$

Haciendo el mismo cambio de variable, que el en caso del campo de velocidades, se tiene lo siguiente

$$Q=-\frac{1}{2}\frac{\pi\varphi_0/k}{\left(k\nabla_z p_0/2\right)^3}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\int_0^{\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^2}\frac{1+u}{\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)+u}udu \tag{5.27}$$

Para integrar la Ec. (5.27), se hace la división de polinomios por lo que se obtiene el siguiente resultado:

$$Q=-\frac{1}{2}\frac{\pi\varphi_0/k}{(k\nabla_z p_0/2)^3}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\int_0^{\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^2}\frac{\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)+u-\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)+1}{\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)+u}udu \tag{5.28}$$

Simplificando la expresión anterior, se tiene lo siguiente:

$$Q=-\frac{1}{2}\frac{\pi\varphi_0/k}{(k\nabla_z p_0/2)^3}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\int_0^{\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^2}\left(u+\left(1-\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\right)\frac{u}{\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)+u}\right)du \tag{5.29}$$

De nueva cuenta, la división de polinomios es requerida para resolver la integral de la Ec. (5.29)

$$Q=-\frac{1}{2}\frac{\pi\varphi_0/k}{(k\nabla_z p_0/2)^3}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\int_0^{\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^2}\left(u+\left(1-\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\right)\frac{\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)+u-\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)}{\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)+u}\right)du \tag{5.30}$$

La rapidez de deformación se puede expresar en términos del producto de la fluidez y el esfuerzo de corte rz, por lo que:

$$Q=-\frac{1}{2}\frac{\pi\varphi_0/k}{(k\nabla_z p_0/2)^3}\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\int_0^{\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^2}\left(u+\left(1-\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\right)\left(1-\frac{\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)}{\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)+u}\right)\right)du \tag{5.31}$$

Finalmente, la integración de esta expresión, resulta en la siguiente ecuación no lineal para el esfuerzo:

$$Q=-\frac{1}{2}\frac{\pi\varphi_0/k}{(k\nabla_z p_0/2)^3}$$
$$\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\left\{\frac{1}{2}\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^4+\left(1-\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\right)\left(\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^2-\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\mathrm{Ln}\left|\frac{\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}+\left(k\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a\right)^4}{\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}}\right|\right)\right\} \tag{5.32}$$

La Ec. (5.32) puede ser simplificada de la siguiente manera:

$$Q_I=\left(\frac{\varphi_{ap}}{\varphi_0}\right)Q_N \tag{5.33}$$

EL flujo inelástico del modelo de Reiner-Philippoff esta dado por el producto del la fluidez aparente y el flujo volumétrico respectivamente:

$$Q_N=\frac{1}{4}a^3\pi\varphi_0\left(-a\nabla_z p_0/2\right) \tag{5.34}$$

La fluidez aparente para el modelo inelástico de Reiner Philippoff a gradiente de presión constante, tiene la siguiente forma analítica:

$$\varphi_{ap}=2\frac{\varphi_\infty}{(ka\nabla_z p_0/2)^4}\left\{\frac{1}{2}(k\sigma_w)^4+\left(1-\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\right)\left((k\sigma_w)^2-\left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\mathrm{Ln}\left|\frac{\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}+(k\sigma_w)^4}{\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}}\right|\right)\right\} \tag{5.35}$$

Es importante resaltar que la Ec. (5.35) tiene dos límites asintóticos importantes, a bajos y altos esfuerzos en la pared, i.e.

$$\begin{aligned}\mathrm{Lim}_{\sigma_w\to 1}\varphi_{ap}&=\varphi_0\\ \mathrm{Lim}_{\sigma_w\to\infty}\varphi_{ap}&=\varphi_\infty\end{aligned} \tag{5.36}$$

Por lo tanto, la Ec. (5.36) describe una transición de fluideces a bajo y alto respectivamente.

5.2 Viscoelasticidad no lineal

La componente z pulsátil modificada de la ecuación de momento viene dada por:

$$\rho\varepsilon\frac{\partial Vz}{\partial t}=-\frac{\partial p_0}{\partial z}\left(1+\varepsilon n_p\left(t\right)\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r}\right) \quad (5.37)$$

y la ecuación reológica del modelo de Tanner-Reiner-Phillippoff

$$\frac{\partial Vz}{\partial r}=\varphi_0\left[\frac{1+\left(k\sigma_{zr}\right)^2}{1+\left(\varphi_0/\varphi_\infty\right)\left(k\sigma_{zr}\right)^2}\right]\left(1+\frac{1}{G_0\varphi_0}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{zr} \quad (5.38)$$

Para resolver la expresión no lineal, se resuelve utilizando una técnica analítica de perturbación:

$$Vz(r,t)=\varepsilon^0\left(Vz(r)+Vn_V(t)\right)+\varepsilon^1\left(Vz(r)+V\dot{n}_V(t)\right)+\varepsilon^2\left(Vz(r)+V\ddot{n}_V(t)\right)+O\left(\varepsilon^3\right) \quad (5.39)$$

$$\sigma_{zr}(r,t)=\varepsilon^0\sigma_{(zr)0}(r)+\varepsilon^1\sigma_{(zr)1}(r,t)+\varepsilon^2\sigma_{(zr)2}(r,t)=\varepsilon^0\sigma_{(zr)0}+\varepsilon^1\sigma_{(zr)0}n_P\left(t\right)+\varepsilon^2(0) \quad (5.40)$$

$$\varphi=\varepsilon^0\ \varphi_0+\varepsilon^1\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+O\left(\varepsilon^3\right) \quad (5.41)$$

Usando el teorema de Taylor en la función de fluidez, tenemos:

$$\varphi\left(\sigma_{(zr)}\right)=\varepsilon^0\ \varphi\left(\sigma_{(zr)0}\right)+\varepsilon^1\left(\sigma_{(zr)}-\sigma_{(zr)0}\right)\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{(zr)}}\right|_{\sigma_{(zr)}\to\sigma_{(zr)0}}+\varepsilon^2\frac{1}{2}\left(\sigma_{(zr)}-\sigma_{(zr)0}\right)^2\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_{(zr)}^2}\right|_{\sigma_{(zr)}\to\sigma_{(zr)0}}+O\left(\varepsilon^3\right) \quad (5.42)$$

Combinando las últimas ecuaciones, tenemos:

$$\varphi\left(\sigma_{(zr)}\right)=\varepsilon^0\ \varphi\left(\sigma_{(zr)0}\right)+\varepsilon^1\sigma_{(zr)0}n_p\left(t\right)\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_{(zr)}}\right|_{\sigma_{(zr)}\to\sigma_{(zr)0}}+\varepsilon^2\frac{1}{2}\sigma_{(zr)0}^2n_p\left(t\right)^2\left.\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_{(zr)}^2}\right|_{\sigma_{(zr)}\to\sigma_{(zr)0}}+O\left(\varepsilon^3\right) \quad (5.43)$$

De las dos últimas ecuaciones:

$$\varphi_0 = \varphi\left(\sigma_{(zr)0}\right) \tag{5.44}$$

$$\varphi_1 = \sigma_{(zr)0} n_p\left(t\right) \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{(zr)}}\right|_{\sigma_{(zr)} \to \sigma_{(zr)0}} \tag{5.45}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \sigma^2_{(zr)0} n_p\left(t\right)^2 \left.\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma^2_{(zr)}}\right|_{\sigma_{(zr)} \to \sigma_{(zr)0}} \tag{5.46}$$

5.2.1 Teoría a orden cero (ε^0):

Para el orden cero, la Ec. (5.44) coincide con el caso inelástico modelado con la ecuación de R

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \sigma_{(zr)0}}{\partial r}\right) = \frac{\partial p_0}{\partial z} \tag{5.47}$$

$$\frac{\partial Vz_0}{\partial r} = \varphi_0 \left[\frac{1+\left(k\sigma_{(zr)0}\right)^2}{1+\left(\varphi_0/\varphi_\infty\right)\left(k\sigma_{(zr)0}\right)^2}\right]\sigma_{(zr)0} \tag{5.48}$$

Entonces, en este contexto, el orden cero en nuestro esquema de perturbación está relacionado con el estado estacionario y el flujo homogéneo.

5.2.2 Teoría a primer orden (ε^1):

Al sustituir, las series en las ecuaciones diferenciales y separar las contribuciones a primer orden, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones acopladas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \sigma_{(zr)1}}{\partial r}\right)=\frac{\partial p_0}{\partial z}n_p(t)+\rho V\dot{n}_V(t) \tag{5.49}$$

Y

$$\frac{\partial Vz_{(1)}}{\partial r}=(\varphi\sigma_{zr})_1+\frac{1}{G_0}\frac{\partial \sigma_{(zr)1}}{\partial t}=\varphi_0\sigma_{(zr)1}+\varphi_1\sigma_{(zr)0}+\frac{1}{G_0}\frac{\partial \sigma_{(zr)1}}{\partial t} \tag{5.50}$$

Al integrar la Ec. (5.50) con respecto a la coordenada radial r, se tiene los siguiente:

$$\sigma_{(zr)1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_0}{\partial z}n_p(t)+\rho V\dot{n}_V(t)\right)r=N(t)\sigma_{(zr)0} \tag{5.51}$$

Si se define la siguiente función estocástica modificada, se tiene lo siguiente:

$$N(t)=n_p(t)+\frac{\rho V/2}{(\partial p_0/\partial z)/2}\dot{n}_V(t) \tag{5.52}$$

El esfuerzo cortante rz a orden uno toma la forma:

$$\sigma_{(zr)1}=N(t)\sigma_{(zr)0} \tag{5.53}$$

En la Ec. (5.53), el esfuerzo debe de permanecer acotado para cualquier valor de r, por lo que la constante de integración debe de valer cero.

$$\frac{\partial Vz_{(1)}}{\partial r}=\varphi_0\sigma_{(zr)1}+\varphi_1\sigma_{(zr)0}+\frac{1}{G_0}\frac{\partial \sigma_{(zr)1}}{\partial t} \tag{5.54}$$

Al sustituir el esfuerzo a primer orden y la función fluidez, se obtiene la siguiente expresión matemática:

$$\frac{\partial Vz_{(1)}}{\partial r}=\varphi_0\sigma_{(zr)1}+\varphi_1\sigma_{(zr)0}+\frac{1}{G_0}\frac{\partial\sigma_{(zr)1}}{\partial t}=N(t)\sigma_{(zr)0}\left(\varphi_0+\sigma_{(zr)0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\sigma_{(zr)0}}\right)+\frac{1}{G_0}\dot{N}(t)\sigma_{(zr)0} \quad (5.55)$$

Simplificando la expresión anterior, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial Vz_{(1)}}{\partial r}=N(t)\sigma_{(zr)0}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma_{(zr)0}}\left(\sigma_{(zr)0}\varphi_0\right)\right)+\frac{1}{G_0}\dot{N}(t)\sigma_{(zr)0} \quad (5.56)$$

La rapidez de deformación a orden uno es:

$$\varphi_{(ap)1}(t)=\frac{4}{\sigma_w^4}\int_0^{\sigma_w}\frac{\partial Vz_{(1)}}{\partial r}\sigma_{rz0}^2 d\sigma_{rz0} \quad (5.57)$$

Al sustituir la rapidez de deformación a primer orden, se tiene lo siguiente:

$$\varphi_{(ap)1}(t)=N(t)\frac{4}{\sigma_w^4}\int_0^{\sigma_w}\sigma_{rz0}^3\left(\frac{\partial}{\partial\sigma_{(zr)0}}\left(\sigma_{(zr)0}\varphi_0\right)\right)d\sigma_{rz0}+\dot{N}(t)\frac{4}{\sigma_w^4}\int_0^{\sigma_w}\sigma_{rz0}^3 d\sigma_{rz0} \quad (5.58)$$

La ecuación (5.58) puede integrarse por partes

$$\varphi_1=\frac{4}{\left(\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}\right)^4}\left\{\int_0^{\sigma_{(zr)0}|_{r=a}}\sigma_{(zr)0}^3\frac{\partial\left(\varphi_0\sigma_{(zr)0}\right)}{\partial\sigma_{(zr)0}}d\sigma_{(zr)0}N(t)+\int_0^{\sigma_{(zr)0}|_{r=a}}\sigma_{(zr)0}^3 G_0^{-1}d\sigma_{(zr)0}\dot{N}(t)\right\} \quad (5.59)$$

La Ec. (5.59) puede ser escrita como:

$$\varphi_1=\frac{4}{\left(\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}\right)^4}\int_0^{-\gamma_w}\sigma_{(zr)0}^3 d\gamma_0 N(t)+G_0^{-1}\left(\frac{4}{\left(\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}\right)^4}\int_0^{\sigma_{(zr)0}|_{r=a}}\sigma_{(zr)0}^3 d\sigma_{(zr)0}\right)\dot{N}(t) \quad (5.60)$$

La rapidez de deformación evaluada en la pared puede ser calculada a través de la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sigma_w^3}\int_0^{-\gamma_w}\sigma_0^3(r)d\gamma_0(r)=\gamma_w-3Q_0 \tag{5.61}$$

Multiplicando la Ec. (5.61) por 4/σw, se tiene lo siguiente:

$$\varphi_w=3\varphi_0+\frac{4}{\sigma_w^4}\int_0^{-\gamma_w}\sigma_0^3(r)d\gamma_0(r) \tag{5.62}$$

En donde la fluidez en la pared y a orden cero, fueron definidas como:

$$\varphi_w=\frac{\gamma_w}{\sigma_w/4}=\frac{\gamma_w}{Q_N} \qquad \varphi_0=\frac{Q_0}{\sigma_w/4}=\frac{Q_0}{Q_N} \tag{5.63a, b}$$

Utilizando la regla de Leibnitz, la rapidez de deformación, se expresa como:

$$\gamma_w=\frac{1}{\sigma_w^2}\frac{d}{d\sigma_w}\left\{\sigma_w^3Q_0\right\} \tag{5.64}$$

La cual, puede ser expresada en termino de la fluidez en la pared: $\varphi_w=\gamma_w/(\sigma_w/4)$

$$\varphi_w=\frac{4}{\sigma_w^3}\frac{d}{d\sigma_w}\left\{\sigma_w^3Q_0\right\} \tag{5.65}$$

Por lo que, simplificando la Ec. (5.65)

$$\varphi_w=3\frac{Q_0}{\sigma_w/4}+4\frac{dQ_0}{d\sigma_w}=3\frac{Q_0}{Q_N}+4\frac{dQ_0}{d\sigma_w} \tag{5.66}$$

La fluidez en la pared es la suma de la fluidez a orden cero y una corrección debido a la pendiente de la curva flujo BMP vs esfuerzo en la pared

$$\varphi_w=3\,\varphi_0+4\frac{dQ_0}{d\sigma_w} \tag{5.67}$$

La Ec. (5.67) se puede expresar como:

$$\varphi_1 = (\varphi_w - 3\varphi_0)N(t) + G_0^{-1}\dot{N}(t) \tag{5.68}$$

Combinando las Ecs. (5.67) y (5.68) se tiene la siguiente expresión:

$$\boxed{\varphi_1 = 4\frac{dQ_0}{d\sigma_w}N(t) + G_0^{-1}\dot{N}(t) = \frac{dQ_0}{dQ_N}N(t) + G_0^{-1}\dot{N}(t)} \tag{5.69}$$

La Ec. (5.69) es la fluidez a primer orden, si calculamos el aumento,

$$I_{\varphi_1}(\%) = 100\varepsilon\frac{\langle \varphi_1 \rangle}{\varphi_0} = 100\varepsilon\varphi_0^{-1}\left(\frac{dQ_0}{dQ_N}\langle N(t)\rangle + G_0^{-1}\left\langle \dot{N}(t)\right\rangle\right) \tag{5.70}$$

Una vez que la función estocástica se sustituye en la Ec. (5.69), y se promedia, se tiene lo siguiente:

$$\boxed{\begin{gathered} I_{\varphi 1}(\%) = 10^2\varepsilon \\ \left(\frac{dLnQ_0}{dLnQ_N}\left(\langle n_P(t)\rangle + \frac{\rho V/2}{(\partial p_0/\partial z)/2}\dot{n}_V(t)\right) + \varphi_0^{-1}G_0^{-1}\left(\left\langle \dot{n}_P(t)\right\rangle + \frac{\rho V/2}{(\partial p_0/\partial z)/2}\ddot{n}_V(t)\right)\right) \end{gathered}} \tag{5.71}$$

El aumento del fluidez depende de un cociente de una fluidez local asociada a la monotonía de la curve fluidez vs esfuerzo en la pared y otra a la fluidez aparente asociada al promedio integral de esta, en estado estacionario y homógeneo. Sustituyendo la serie de Fourier definida en el capítulo 3, el aumento es constante a primer orden y tiene la siguiente representación analítica:

$$I_\varphi(\%) = 100\varepsilon^1\langle N(t)\rangle = 50\varepsilon M_\ell \tag{5.72}$$

5.2.3 Teoría a segundo orden (ε^2):

En esta sección presentamos, la teoría a segundo orden del esquema perturbativo. Sustituyendo las series y solo considerando términos de segundo orden, el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales parciales lineales acopladas es obtenido:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \sigma_{(zr)2}}{\partial r}\right)=\rho V\ddot{n}(t) \tag{5.73}$$

$$\frac{\partial Vz_{(2)}}{\partial r}=\left(\varphi\sigma_{zr}\right)_2+\frac{1}{G_0}\frac{\partial \sigma_{(zr)2}}{\partial t}=\varphi_0\sigma_{(zr)2}+\varphi_1\sigma_{(zr)1}+\varphi_2\sigma_{(zr)0}+\frac{1}{G_0}\rho V\dddot{n}(t) \tag{5.74}$$

Al integrar la Ec. (5.74) con respecto a la coordenada radial r, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{(zr)2}=\frac{1}{2}\rho V\ddot{n}(t)r=\frac{\rho V/2}{(\partial p_0/\partial z)/2}\ddot{n}(t)\sigma_{(zr)0} \tag{5.75}$$

Definiendo el siguiente conjunto de variables como:

$$N_1=\frac{\rho V/2}{(\partial p_0/\partial z)/2}\ddot{n}(t) \tag{5.76}$$

Al sustituir las Ec. (5.76) en la (5.74) se tiene la expresión para la rapidez de deformación a segundo orden:

$$\frac{\partial Vz_{(2)}}{\partial r}=N_1\varphi_0\sigma_{(zr)0}+N^2\sigma^2_{(zr)0}\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial \sigma_{(zr)0}}+\frac{1}{2}\sigma_{(zr)0}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial \sigma^2_{(zr)0}}\right)+\frac{1}{G_0}\dot{N}_1\,\sigma_{(zr)0} \tag{5.77}$$

El primer termino del segundo miembro se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \sigma_{(zr)0}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial \sigma^2_{(zr)0}}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2_{(zr)0}}\left(\varphi_0\sigma_{(zr)0}\right) \tag{5.78}$$

Combinando las últimas dos ecuaciones,

$$\frac{\partial Vz_{(2)}}{\partial r}=N_1\varphi_0\sigma_{(zr)0}+\frac{1}{2}N^2\sigma^2_{(zr)0}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2_{(zr)0}}\left(\varphi_0\sigma_{(zr)0}\right)+\frac{1}{G_0}\dot{N}_1\,\sigma_{(zr)0} \qquad (5.79)$$

La fluidez a segundo orden, puede ser expresada de acuerdo a la siguiente integral

$$\varphi_2=\frac{4}{\left(\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}\right)^4}\int_0^{\sigma_{(zr)0}|_{r=a}}\frac{\partial Vz_{(2)}}{\partial r}\sigma^2_{(zr)0}d\sigma_{(zr)0} \qquad (5.80)$$

Sustituyendo la Ec. (5.79) en la Ec. (5.80) y aplicando linearidad de la integral, se tiene lo siguiente:

$$\varphi_2=\frac{4}{\left(\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}\right)^4}$$
$$\left\{\int_0^{\sigma_{(zr)0}|_{r=a}}\varphi_0\sigma^3_{(zr)0}d\sigma_{(zr)0}N_1+\frac{1}{2}\int_0^{\sigma_{(zr)0}|_{r=a}}\sigma^4_{(zr)0}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2_{(zr)0}}\left(\varphi_0\sigma_{(zr)0}\right)d\sigma_{(zr)0}N^2+G_0^{-1}\int_0^{\sigma_{(zr)0}|_{r=a}}\sigma^3_{(zr)0}d\sigma_{(zr)0}\,\dot{N}_1\right\} \qquad (5.81)$$

La Ec. (5.81) toma la forma:

$$\varphi_2=\varphi_0N_1+\underbrace{\frac{4}{\left(\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}\right)^4}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\sigma_{(zr)0}|_{r=a}}\sigma^4_{(zr)0}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2_{(zr)0}}\left(\varphi_0\sigma_{(zr)0}\right)d\sigma_{(zr)0}\right)N^2}_{I_2}+G_0^{-1}\dot{N}_1 \qquad (5.82)$$

La segunda integral del miembro derecho de la Ec. (5.82) puede ser expresada en la siguiente forma analítica:

$$I_2=\frac{4}{\left(\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}\right)^4}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\sigma_{(zr)0}|_{r=a}}\sigma^4_{(zr)0}d\left(\frac{\partial\left(\varphi_0\sigma_{(zr)0}\right)}{\partial\sigma_{(zr)0}}\right)N^2\right) \qquad (5.83)$$

A partir de la Ec. (5.83), se tiene:

$$I_2 = \frac{2}{\sigma_w^3}\left(\sigma_0^4 \frac{d\gamma_0}{d\sigma_0}\bigg|_{-\sigma_w} - 4\int_0^{-\sigma_w} \sigma_0^3 \frac{d\gamma_0}{d\sigma_0} d\sigma_0 \right) N^2(t) \tag{5.84}$$

Por lo que

$$I_2 = 8\left(\frac{\sigma_w}{4}\frac{d\gamma_w}{d\sigma_w} - \frac{1}{\sigma_w^3}\int_0^{-\gamma_w} \sigma_0^3 d\gamma_0 \right) N^2(t) \tag{5.85}$$

Pero la integral de la Ec. (5.85) toma la forma:

$$\frac{1}{\sigma_w^3}\int_0^{-\gamma_w} \sigma_0^3 d\gamma_0 = \gamma_w - 3Q_0 \tag{5.86}$$

Y la diferencia entre la rapidez de deformación y el triple del flujo volumétrico es:

$$\gamma_w - 3Q_0 = \sigma_w \frac{dQ_0}{d\sigma_w} \tag{5.87}$$

Combinando las Ecs. (5.85-5.87)

$$I_2 = 8\left(Q_N \frac{d\gamma_w}{d\sigma_w} - \sigma_w \frac{dQ_0}{d\sigma_w} \right) N^2(t) \tag{5.88}$$

La derivada de la rapidez de deformación tiene la siguiente forma analítica:

$$\frac{d\gamma_w}{d\sigma_w} = 4\frac{dQ_0}{d\sigma_w} + \sigma_w \frac{d^2Q_0}{d^2\sigma_w} \tag{5.89}$$

Sustituyendo la Ec. (5.89) en la Ec. (5.88), se tiene:

$$I_2 = 8\left(Q_N \left(4\frac{dQ_0}{d\sigma_w} + \sigma_w \frac{d^2Q_0}{d^2\sigma_w} \right) - \sigma_w \frac{dQ_0}{d\sigma_w} \right) N^2(t) \tag{5.90}$$

Simplificando, la función fluidez a segundo orden toma la forma:

$$\boxed{\varphi_2 = \varphi_0 N_1 + 2\sigma_w^2 \frac{d^2 Q_0}{d^2\sigma_w} N^2(t) + G_0^{-1} \dot{N}_1} \tag{5.91}$$

$$I_{\varphi_2}(\%) = 100\varepsilon^2 \frac{\langle \varphi_2(t) \rangle}{\varphi_0} = 100\varepsilon^2 \frac{\varphi_0 \langle N_1 \rangle + 2\sigma_w^2 \frac{d^2 Q_0}{d^2\sigma_w} \langle N^2(t) \rangle + G_0^{-1} \langle \dot{N}_1 \rangle}{\varphi_0} \tag{5.92}$$

Simplificando,

$$\boxed{I_{\varphi_2}(\%) = 100\varepsilon^2 \left(\langle N_1 \rangle + 2 \frac{Q_N^3}{Q_0} \frac{d^2 Q_0}{d\sigma_w^2} \langle N^2(t) \rangle + \frac{Q_N}{Q_0} G_0^{-1} \langle \dot{N}_1 \rangle \right)} \tag{5.93}$$

Las funciones estocásticas tienen la forma:

$$N(t) = n_p(t) + \frac{\rho a V/2}{\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}} \dot{n}_v(t) \tag{5.94}$$

En donde el promedio del cuadrado de la función estocástica modificada por la inercia toma la forma:

$$\langle N^2(t) \rangle = n_p^2(t) + \left(\frac{\rho a V/2}{\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}} \right)^2 \left(\dot{n}_v(t) \right)^2 \tag{5.95}$$

Por lo que, el aumento de la fluidez a orden dos esta dado por la expresión:

$$I_{\varphi_2}(\%) = 200\varepsilon^2 \frac{Q_N^3}{Q_0} \frac{d^2 Q_0}{d\sigma_w^2} \left\{ n_p^2(t) + \left(\frac{\rho a V/2}{\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}} \right)^2 \left(\dot{n}_v(t) \right)^2 \right\} \tag{5.96}$$

La fluidez a orden dos, puede ser separada en dos contribuciones asociadas al gradiente de presión pulsátil y al movimiento oscilatorio en la dirección axial.

5.2.4 Resumen del capítulo

En este capítulo se desarrolló el modelado matemático del flujo pulsátil a diferentes regímenes de flujo. Para entender el efecto del flujo pulsátil se estudios los sistemas más simples que consistió en el fluido inelástico del modelo de Tanner-Reiner-Philippoff. Este modelo inelástico nos permite deducir expresiones cerradas para la fluidez en el sistema de Poiseuille (gradiente de presión constante). La ecuación básica que se obtuvo es la siguiente:

a) **Fluidez inelástica: Modelo de RF**

$$\varphi_{ap} = \frac{\varphi_\infty}{(k\sigma_w)^4}\left\{(k\sigma_w)^4 + 2\left(1 - \left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\right)\left((k\sigma_w)^2 - \left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\mathrm{Ln}\left|\frac{\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0} + (k\sigma_w)^4}{\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}}\right|\right)\right\}$$

Esta fluidez aparente, describe la transición de estados de mayor a menor fluidez a través de los parámetros materiales. Esta ecuación es clave en la descripción de los regímenes viscoelástico a bajo y alto corte respectivamente.

b) **Fluidez inelástica: Modelo de RF**

$$\widehat{\Phi}^*_{ap}(\omega) = -\frac{8i}{a^2\rho\varphi_0}\frac{1}{\omega}\left(1 - 2\frac{J_1\left(i^{3/2}a\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}\right)/\left(i^{3/2}a\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}\right)}{J_0\left(i^{3/2}a\sqrt{\rho\omega\widehat{\Phi}^*}\right)}\right)$$

c) **Viscoelasticidad no-lineal**

c.1. Orden cero:

$$\varphi_{ap} = \frac{\varphi_\infty}{(k\sigma_w)^4}\left\{(k\sigma_w)^4 + 2\left(1 - \left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\right)\left((k\sigma_w)^2 - \left(\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}\right)\mathrm{Ln}\left|\frac{\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0} + (k\sigma_w)^4}{\frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}}\right|\right)\right\}$$

c.2. Orden uno:

$$\varphi_{(ap)1}(t) = \varphi_0 N(t) + G_0^{-1}\dot{N}(t)$$

c.3. Promedio de la perturbación a orden uno.

$$\left\langle \varphi_{(ap)1}(t) \right\rangle = \frac{dQ_0}{dQ_N}\left\langle N(t) \right\rangle + G_0^{-1}\left\langle \dot{N}(t) \right\rangle$$

c.4. Aumento en la fluidez a orden uno

$$I_{\varphi(ap)_1}(\%) = 100\varepsilon\frac{\langle \varphi_1 \rangle}{\varphi_0} = 100\varepsilon\varphi_0^{-1}\left(\frac{dQ_0}{dQ_N}\left\langle N(t) \right\rangle + G_0^{-1}\left\langle \dot{N}(t) \right\rangle\right)$$

c.5. Orden dos:

$$\varphi_{ap2} = \varphi_0 N_1(t) + 2\sigma_{(zr)0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\sigma_{(zr)0}}N^2(t) + G_0^{-1}\dot{N}_1(t)$$

c.6. Promedio de la perturbación a orden dos.

$$\left\langle \varphi_{(ap)2}(t) \right\rangle = \varphi_0\left\langle N_1(t) \right\rangle + 2\sigma_{(zr)0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\sigma_{(zr)0}}\left\langle N^2(t) \right\rangle + G_0^{-1}\left\langle \dot{N}_1(t) \right\rangle$$

c.7. Aumento en la fluidez a orden dos:

$$I_{\varphi(ap)2}(\%) = 100\varepsilon^2\left(\left\langle N_1 \right\rangle + 2\frac{Q_N^3}{Q_0}\frac{d^2Q_0}{d\sigma_w^2}\left\langle N^2(t) \right\rangle + \frac{Q_N}{Q_0}G_0^{-1}\left\langle \dot{N}_1 \right\rangle\right)$$

En la siguiente sección se expondrán los resultados más importantes del presente capitulo. En la primera sección se presentan las predicciones de los modelos teóricos y en la segunda sección se toman experimentos reométrico de sangre con colesterol y se obtienen los resultados pertinentes.

CAPÍTULO VI

Análisis de resultados

6.1 Análisis adimensional

En este capítulo se presentan los resultados más importantes del presente proyecto de licenciatura. Para tal efecto, las Ecs. (A-E) del resumen del capítulo anterior serán ocupadas.

6.2 Variables adimensionales

Para facilitar los cálculos, se emplearán variables adimensionales, con el fin de acotar el sistema y facilitar la simulación de las ecuaciones teóricas en el programa Mathematica 11.1, después los datos serán exportados a una hoja de cálculo. Las variables adimensionales son:

$$\varphi_{ap} = \frac{\varphi_{ap}}{\varphi_0};\widehat{\Phi}^* = \frac{\widehat{\Phi}^*}{\varphi_0};\sigma_w = \frac{\sigma_w}{\langle Vz\rangle / a\varphi_0};t = \frac{t}{\langle Vz\rangle / a};\omega = \frac{\omega}{\langle Vz\rangle / a}$$

En los números adimensionales definidos, φ_0 es la fluidez a bajo corte de la ecuación constitutiva del modelo Reiner-Philippoff, $< Vz >$ es la velocidad macroscópica y "a" es la longitud característica radial en el sistema. Sustituyendo esto en las ecuaciones

6.3 Números adimensionales

Los números adimensionales nos permiten interpretar en término de mecanismos los principales hechos físicos en el sistema. Al substituir las variables adimensionales en las ecuaciones gobernantes, se tienen cuatro números adimensionales.

$$I_{\varphi(ap)2}(\%) = 2(10\varepsilon)^2 \frac{\partial \mathrm{Ln}\varphi_0}{\partial \mathrm{Ln}\sigma_{(zr)0}} \left\{1+\frac{1}{4}\mathrm{Re}^2\,\sigma_w^{-2}\omega^2\right\}\left\langle\left(N^2(t)\right)\right\rangle$$

6.3.1 Grupo adimensional A

Este grupo relaciona las fuerzas viscosas con un parámetro de normalización para el esfuerzo k, el cual, es una medida de las propiedades no newtonianas en el sistema. Si k = 0 se tiene un fluido newtoniano (viscosidad constante), mientras que k muy grandes, i.e. k >>1 se tiene una transición de estados de mayor a menor estructura por efecto del flujo. Es importante mencionar que este número se puede interpretar como una medida de la historia de estructuración en el sistema, i.e. la tixotropía.

6.3.2 Grupo adimensional B

Este grupo es una medida de la estructura a bajo y alto corte y cuantifica los procesos de adelgazamiento o engrosamiento al corte respectivamente. Cuando B >> 1 se presenta un fluido adelgazante al corte, mientras que para B << 1, se tiene el comportamiento opuesto (engrosante al corte). Cuando B = 1, se tiene una estructura constante en el sistema (Fluido Newtoniano).

6.3.3 Grupo adimensional We

El tercer grupo es el número de Weissneberg que se define como el producto de un tiempo de relajación y una rapidez característica en el sistema. Cuando el número de Weissenberg es cero, i.e., We = 0 se supone que el sistema no presenta almacenamiento de energía y por lo tanto el sistema es inelástico, es decir, no contiene componentes elásticas en el sistema. Cuando el número de Weissenberg es mayor a uno, i.e. We >> 1.

6.3.4 Grupo adimensional Re

El último grupo es el número de Reynolds el cual, es una medida de los mecanismos inerciales y viscosos en el sistema, y cuantifica la transición de flujos de laminar (Re < 2100), transitorio (2100 < Re < 10,000). Cuando el número de Re es menor a la unidad, i.e. Re << 1, el sistema es gobernado por los mecanismos viscosos asociados a la disipación viscosa. Por otra parte, cuando el Re >> 1, los mecanismos inerciales rigen la dinámica de flujo en el sistema.

Las ecuaciones adimensionales resultantes son las siguientes:

I. Fluidez inelástica: Modelo de RF

$$C = k\langle V\rangle / a\varphi_0$$

$$B = \frac{\varphi_\infty}{\varphi_0}$$

$$We = 1/G_0\,\varphi_0\,\frac{\langle V\rangle}{a}$$

$$Re = \varphi_0\rho\langle V\rangle a$$

Esta fluidez aparente, describe la transición de estados de mayor a menor fluidez a través de los parámetros materiales. Existen dos límites importantes de esta fluidez a bajo y alto corte respectivamente. Esta ecuación es clave en la descripción de los regímenes viscoelástico a bajo y alto corte respectivamente.

II. Viscoelasticidad lineal: Modelo de Maxwell

a.1 Fluidez en el régimen inercial y viscoelástico

$$\varphi_{ap} = \frac{B}{(C\sigma_w)^4}\left\{(C\sigma_w)^4 + 2(1 - B)\left((C\sigma_w)^2 - BLn\left|\frac{B+(C\sigma_w)^4}{B}\right|\right)\right\}$$

a.2 Aumento en la fluidez viscoelástica lineal

$$\hat{\Phi}^*_{ap}(\omega) = -\frac{8i}{Re\,\omega}\left(1-2\frac{J_1\left(i^{3/2}\sqrt{Re\,\omega\hat{\Phi}^*}\right)/\left(i^{3/2}\sqrt{Re\,\omega\hat{\Phi}^*}\right)}{J_0\left(i^{3/2}\sqrt{Re\,\omega\hat{\Phi}^*}\right)}\right)$$

III. Viscoelasticidad no lineal

b.1 Orden cero:

$$I_{\varphi(ap)}(\%) = 100\varepsilon\langle N(t)\rangle$$

$$\varphi_{(ap)0} = B + \frac{2(1 - B)B}{(C\sigma_w)^4}\left((C\sigma_w)^2 - BLn\left|\frac{B+(k\sigma_w)^4}{B}\right|\right)$$

$$I_{\varphi(ap)}(\%) = 0$$

b.1 Promedio de la perturbación a orden uno.

$$\langle \ddot{o}_{(ap)1}(t)\rangle = \ddot{o}_0\langle N(t)\rangle$$

b.2 Aumento en la fluidez a orden uno

$$\langle \varphi_{(ap)1}(t)\rangle = \varphi_0\langle N(t)\rangle$$

c.1 Orden dos:

$$I_{\varphi(ap)}(\%) = 100\varepsilon\left\langle N(t)\right\rangle$$

c.2 Aumento en la fluidez a orden dos

$$\left\langle \varphi_{(ap)2}(t)\right\rangle = 2\sigma_{(zr)0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\sigma_{(zr)0}}\left\langle N^2(t)\right\rangle$$

6.4 Predicciones teóricas

6.4.1 Viscoelasticidad lineal: fluidez compleja

Matemáticamente, la parte real del sistema presenta una sucesión de curvas resonantes, siendo a valores altos de la frecuencia angular adimensional. Para así, conforme el sistema va evolucionando, las curvas resonantes van atenuándose hasta llegar al momento en que se vuelven lineales e independientes del sistema. Se observan dos curvas resonantes las cuales describen la frecuencia multimodal de Maxwell, para un modo (a) y para tres modos (b) con datos de viscosidad y tiempo de relajación iguales. Ambos describen un comportamiento monótono decreciente para encontrar un punto máximo y después ser sucedido por un punto mínimo; la transición existente, sólo entre estos dos puntos, es lineal, además, conforme el sistema va evolucionando, existe una sucesión de puntos que se asemejan al comportamiento antes mencionado dando lugar a un comportamiento tipo diente de sierra. Nótese, el comportamiento entre las curvas resonantes (a) y (b) antes mencionadas son semejante pero con desplazamientos pequeños, lo que muestra que el modelo de Maxwell aproxima a una mejor respuesta de las propiedades viscoelásticas del material a través de la variación de la frecuencia adimensional sin importar la cantidad de modos que se utilicen para describir a dicho sistema. Cuando los valores máximos y mínimos disminuyen y el comportamiento irregular se va atenuando, conforme el sistema evoluciona, para volverse estable. Es importante resaltar que la contribución de las curvas resonantes se da a frecuencias altas pero presentado un pico de resonancia más pronunciada y produciendo una frecuencia de resonancia máxima a bajas frecuencias, a su vez tienden a atenuarse e incluso a desaparecer. Físicamente, la máxima respuesta entre el flujo oscilante y el gradiente de presión, se ve inducida con respecto a la frecuencia multimodal de Maxwell y la relación entre el solvente y el polímero, que es el tiempo reducido adimensional. Con esto, como consecuencia, es posible notar que a valores pequeños de la frecuencia adimensional se tiene el máximo valor obtenido para el flujo pulsátil, i, e., el flujo máximo posible se da en este punto. Conforme el sistema va evolucionando, se puede observar una mitigación en el aspecto antes mencionado.

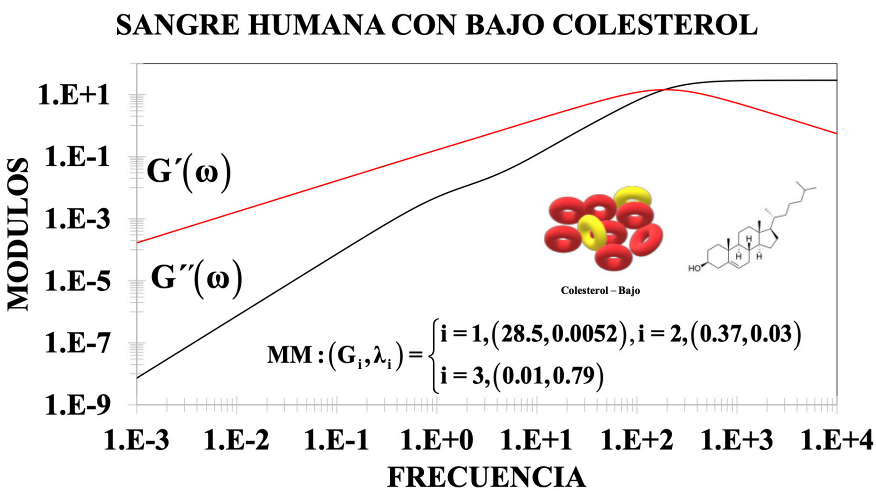


Figura 6.1. **Ilustra el comportamiento de la fluidez vs esfuerzo en la pared en función de las propiedades adelgazantes y engrosantes al corte a través del número adimensional B. En esta simulación el valor de C permanece constante igual a la unidad.**

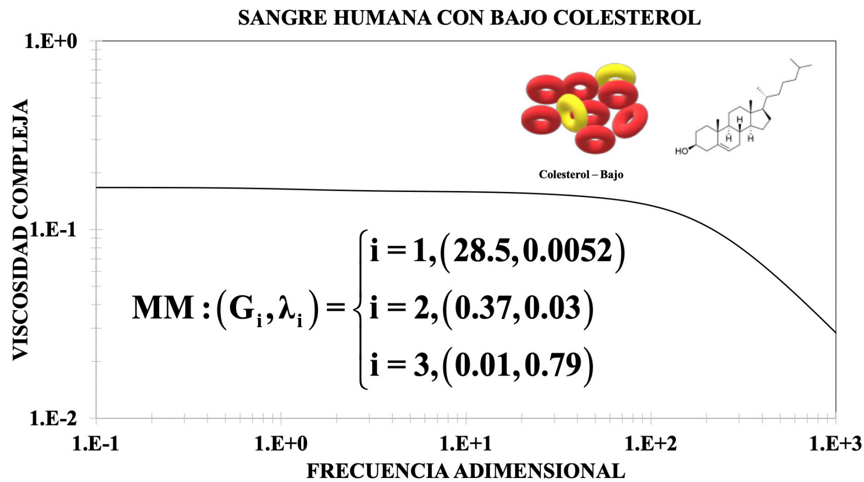


Figura 6.2. Ilustra el comportamiento de la fluidez vs esfuerzo en la pared en función de las propiedades adelgazantes y engrosantes al corte a través del número adimensional B. En esta simulación el valor de C permanece constante igual a la unidad.

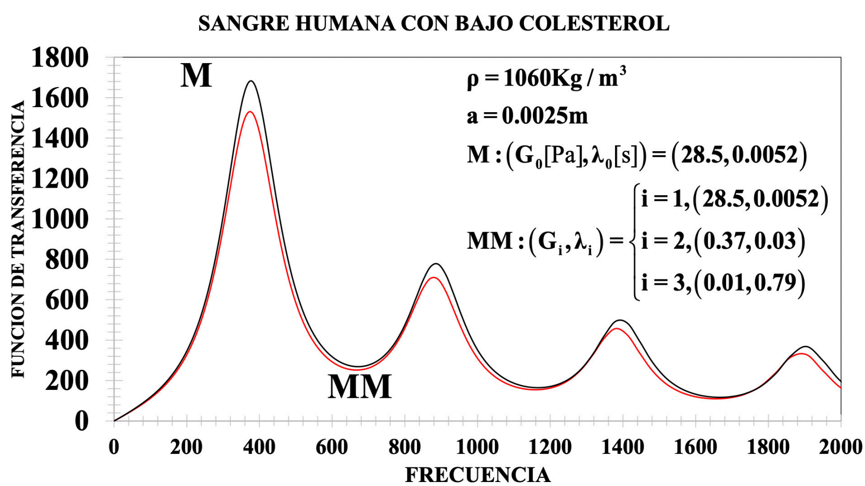


Figura 6.3. Ilustra el comportamiento de la fluidez vs esfuerzo en la pared en función de las propiedades adelgazantes y engrosantes al corte a través del número adimensional B. En esta simulación el valor de C permanece constante igual a la unidad.

6.4.2 Teoría a orden cero

6.4.2.1 Mecanismos adelgazantes: fluidez

La Fig. 6.2 muestra el comportamiento matemático de la fluidez a orden cero (inverso de la viscosidad) vs esfuerzo en la pared para diferentes valores de número adimensional B el cual, está asociada a los procesos adelgazantes al corte. La ecuación que rige, el comportamiento de la Fig. 5 está dado por:

$$\varphi_{ap}=\frac{B}{(C\sigma_w)^4}\left\{(C\sigma_w)^4+2(1-B)\left((C\sigma_w)^2-B\,Ln\left|\frac{B+(C\sigma_w)^4}{B}\right|\right)\right\}$$

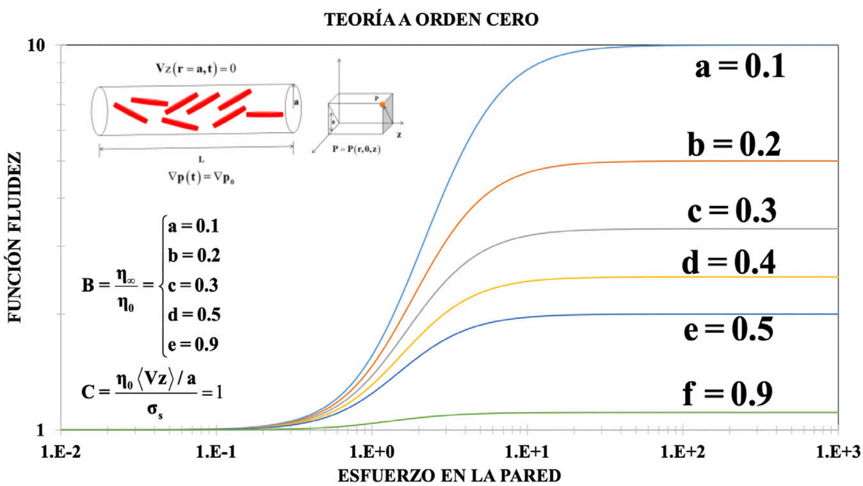


Figura 6.2. **Ilustra el comportamiento de la fluidez vs esfuerzo en la pared en función de las propiedades adelgazantes y engrosantes al corte a través del número adimensional B. En esta simulación el valor de C permanece constante igual a la unidad.**

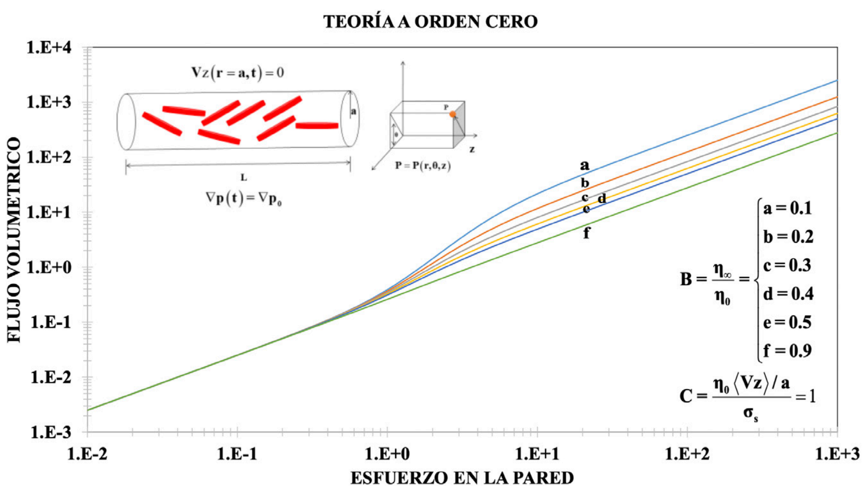
Esta ecuación tiene dos límites matemáticos a bajo y alto esfuerzo en la pared:

$$\mathrm{Lim}_{\sigma_w \to 0} \varphi_{ap} = 1; \ \mathrm{Lim}_{\sigma_w \to \infty} \varphi_{ap} = B$$

A esfuerzos en la pared altos, el valor de la fluidez está determinado exclusivamente por el número adimensional B, que es una medida de los procesos adelgazantes en el sistema. **Matemáticamente,** en todas las simulaciones de la Fig. 5, se observan tres comportamientos básicamente: (i) a esfuerzos en la pared bajos (menores a uno) el sistema presenta una zona constante en donde, la fluidez presenta un valor constante, lo que implica una estructura constante en el sistema. A esfuerzos en la pared moderados (1, 10) el sistema experimenta un comportamiento monótono creciente con pendiente diferente para cada valor del número adimensional B, aun esfuerzo en la pared critico. Para un segundo comportamiento crítico en el esfuerzo en la pared, la fluidez es constante e independiente del esfuerzo. Físicamente, este punto significa que el valor de la fluidez a altos cortes es equivalente a la fluidez del solvente en física de polímeros o para sistemas biológicos como la sangre sería al plasma. **Físicamente,** a esfuerzos bajos el sistema se considera con una fluidez constante (Fluido newtoniano), sin embargo, a esfuerzos en la pared moderados 1, 10 el sistema experimenta constantes cambios en la estructura por lo que su fluidez aumenta lo que implica que tenemos un fluido no newtoniano adelgazante. Por último, a elevados valores de esfuerzo en la pared presenta una estructura destruida por efecto del esfuerzo en la pared y esta es equiparable a la viscosidad del solvente (agua). **Biológicamente** la zona intermedia representaría la desestructuración y orientación de los eritrocitos por efecto del flujo asociado al gradiente de presión constante, que es la fuerza que deforma continua e irreversiblemente el fluido complejo.

6.4.2.2 Mecanismos adelgazantes: flujo volumétrico

La Fig. (6.3) muestra el comportamiento matemático del flujo. A esfuerzos de la pared bajos el comportamiento es lineal. A un esfuerzo en la pared crítico el sistema presenta un cambio en la pendiente (en valores de 4 a 10) y para un segundo esfuerzo critico el valor del flujo retoma su comportamiento lineal. Físicamente, al aumentar el valor de B el esfuerzo en la pared que se tiene que aplicar es menor debido a los mecanismos adelgazantes el fluido que inducen menor fricción. A esfuerzos bajos en el sistema se considera un flujo lineal, sin embargo, a esfuerzos en la pared moderados (4 a 10) el sistema experimenta cambios en la estructura por lo que el cambio en la pendiente. Por último, a elevados valores de esfuerzo en la pared el fluido presenta una estructura destruida por efecto del esfuerzo en la pared por lo tanto el flujo vuelve a tener su comportamiento lineal. Biológicamente entre más engrosante sea la sangre por efectos de colesterol menor será el flujo que tenga a un esfuerzo en la pared constante.



$$B = \frac{\eta_\infty}{\eta_0} = \begin{cases} a = 0.1 \\ b = 0.2 \\ c = 0.3 \\ d = 0.4 \\ e = 0.5 \\ f = 0.9 \end{cases}$$

$$C = \frac{\eta_0 \langle Vz \rangle / a}{\sigma_s} = 1$$

Figura 6.5. **Ilustra el comportamiento del fluido no newtoniano a orden en función del esfuerzo en la pared, para diferentes condiciones de adelgazamiento al corte, en función del número adimensional B.**

6.4.2.3 Mecanismos tixotrópicos: fluidez

La Fig. (6.4) muestra el comportamiento matemático de la fluidez vs esfuerzo en la pared para un líquido adelgazante al corte, en función del número adimensional C, que relaciona los mecanismos de estructuración y desestructuración asociados a la tixotropía. Es claro que el efecto que tiene el número adimensional C sobre las curvas de esfuerzo es la de controlar los procesos de reestructuración en el sistema. Como en el caso de la Fig. 5, el sistema muestra dos comportamientos claves y el tercero que es una interpretación biológica del sistema. **Matemáticamente:** A bajos esfuerzos en la pared, el sistema presenta una zona constante, y a un esfuerzo en la pare crítico, el sistema presenta un comportamiento monótono creciente, y para un segundo esfuerzo crítico en la pared, la fluidez es independiente del esfuerzo en la pared, y su valor está determinado enteramente por el número adimensional B. Cuando el número C aumenta, en una década de la simulación “a” a la simulación “b”, se observa que el comportamiento es el mismo, sin embargo, el valor crítico en donde la fluidez experimenta el cambio de estados de menor a mayor fluidez decrece, esto se observa en las flechas para los casos de fluidez de C = 0.001 a C = 0.1. Obsérvese que las 4 curvas que se presentan tienen un comportamiento semejante esto se debe a el número adimensional C que me describe la desviación del comportamiento newtoniano en el sistema. La fluidez se comporta de una forma constantes. A esfuerzos en la pared críticos (0.3, 3, 12,) la fluidez presenta cambios crecientes t de menor a mayor y para un segundo esfuerzo en la pared él comportamiento de la fluidez es asintótico.

Físicamente: el efecto del número adimensional C está asociado a las curvas de tixotropía en el sistema es decir es decir a la reversibilidad en el sistema, e igual manera muestra la perdida de estructura en el sistema.

Claramente estas curvas dan dos aspectos importantes de información al observarlas:

a) La irreversibilidad en el sistema, la forma de esta curva está determinada por la propiedad material k o por el grupo adimensional C.
b) La desestructuración del sistema debido a los procesos tixotrópicos en la muestra.

Estas curvas que se observan se presentan en otros sistemas físicos y son conocidas como de histeris y están asociadas a la historia de deformación del material.

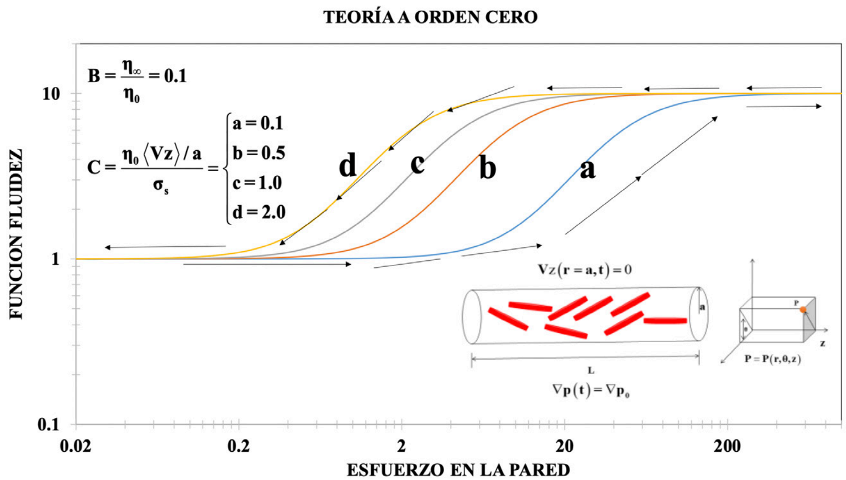


Figura 6.6. **Ilustra el comportamiento del fluido no newtoniano a orden en función del esfuerzo en la pared, para diferentes condiciones de tixotropía del fluido, a través del número adimensional C.**

Biológicamente: describe la deformación y desestructuración de los cúmulos, asociados a los hematocritos en la sangre por lo que al estructurarse por fuerzas de adhesión o electrostáticas se presenta una estructura compacta y cuando se desestructura, se orienta bajo flujo y al regenerarse otra vez el sistema, este no presenta la estructura inicial con la que empezó el ciclo por lo que ha perdido más estructura. El área bajo la curva en un periodo de flujo denotado por la Fig. 7 simulaciones (a, b) está asociada a la perdida de estructura en el sistema. Nótese que entre más cambie la desestructuración en el sistema, el área de la curva aumenta.

6.4.2.4 Mecanismos tixotrópicos: flujo volumétrico

La Fig. (6.5) muestra el flujo matemático en función del esfuerzo en la pared para diferentes condiciones de tixotropía a través del número adimensional C. Para su simulación, se ha fijado un valor en los mecanismos adelgazantes al corte a través del número adimensional B = 0.9. Como en los otros análisis (Figs. 6-3-6.5), el análisis se enfoca en tres vertientes básicas. **Físicamente:** la historia de las deformaciones, no afectan el comportamiento del flujo volumétrico como se apreció en las otras simulaciones. El efecto del número adimensional C no infiere en el comportamiento del flujo. **Biológicamente**: a valores de C más grandes reducen la parte newtoniana, es decir, la sangre entre más adelgazante permitirá que se apliquen esfuerzos menores para un determinado fluido, en cambio a valores de C menores, la sangre es menos adelgazante, por lo que se tiene que aplicar esfuerzos en la pared más grandes para un determinado flujo.

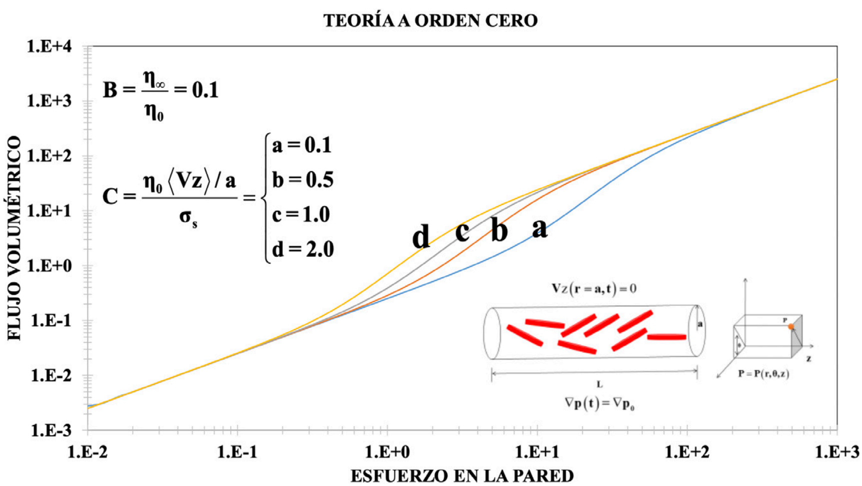


Figura 6.7. **Ilustra el comportamiento del flujo volumétrico como función del esfuerzo en la pared en función de los procesos de estructuración y desestructuración del material a través del número adimensional C. El número adimensional B asociado a los procesos adelgazantes al corte se mantuvo con un valor constante de B = 0.9.**

6.5 Teoría a primer orden

6.5.1 Mecanismos adelgazantes: fluidez

La Fig. 6.6 muestra el comportamiento matemático de la fluidez (inverso de la viscosidad). A esfuerzos de la pared bajos el comportamiento es constante igual a la unidad 0.1, 0.5. A un esfuerzo en la pared crítico el sistema presenta un comportamiento monótono creciente. Para un segundo esfuerzo (6-10) en la pared se puede observar la contribución de la función estocástica y del efecto pulsátil en una desviación en la pendiente y para un tercer esfuerzo crítico el valor de la fluidez se mantiene constante.

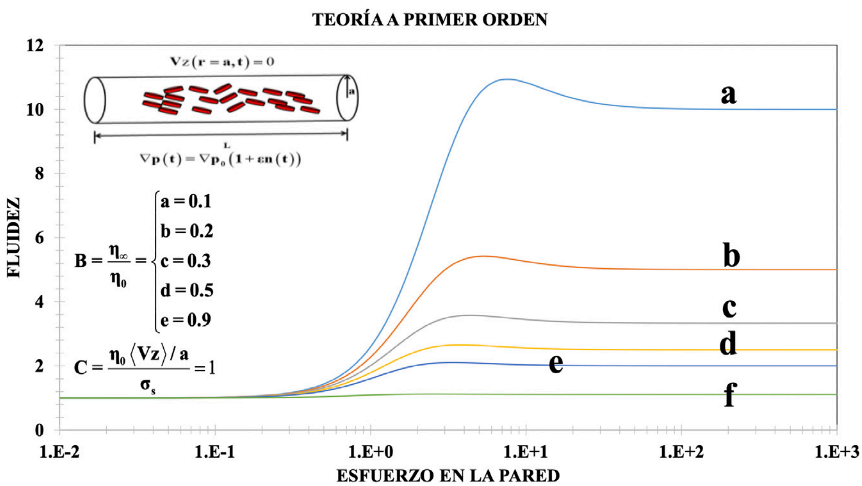


Figura 6.8. **Ilustra el comportamiento del flujo volumétrico como función del esfuerzo en la pared en función de los procesos de estructuración y desestructuración del material a través del número adimensional C. El número adimensional B asociado a los procesos adelgazantes al corte se mantuvo con un valor constante de B = 0.9.**

Físicamente, a esfuerzos bajos el sistema se considera con una fluidez constante (Fluido newtoniano), sin embargo, a esfuerzos en la pared moderados 1, 10 el sistema experimenta constantes cambios en la estructura por lo que su fluidez aumenta lo que implica que tenemos un fluido no newtoniano adelgazante. Al tener la contribución del efecto pulsátil se puede observas como existe un aumento en la fluidez y decrece hasta alcanzar un efecto constante.

Biológicamente se puede interpretar como el aumento de la fluidez de la sangre durante la aplicación de un efecto pulsátil, el corazón n. Esto nos indica que varía la viscosidad de la sangre reduciéndola, para que aumente la fluidez. Aplicando menor esfuerzo en la pared. Interpretándolo como la desestructuración de los eritrocitos al aplicar el esfuerzo pulsátil.

6.5.2 Mecanismos adelgazantes: flujo volumétrico

Como en los casos anteriores, se presenta el flujo volumétrico en función del gradiente de presión para diferentes valores del número adimensional B. En esta simulación el valor de C =1. A valores de esfuerzos bajos, el sistema muestra un comportamiento lineal para todos los valores del número adimensional B. Este comportamiento corresponde al fluido newtoniano. Por otra parte, a un valor de esfuerzo en la pared crítico el sistema cambia de pendiente y su valor esta determinado por los procesos de desestructuración vía el adelgazamiento al corte, hasta un valor máximo. Para un segundo valor crítico, el sistema presenta un segundo comportamiento lineal con pendiente constante, consistente con el comportamiento a altos esfuerzos en la pared.

Biológicamente el sistema presenta una zona de desestructuración a moderados cortes, como se observa en la Fig. 9. Físicamente, significa que debido al corte, los cúmulos se desestructuran y rompen por efecto del flujo y se orientan lo que se induce en el cambio de flujo. Una manera de cuantificar, el efecto del gradiente de presión pulsátil, es a través del aumento n la fluidez lo que se aprecia en la Fig. 10.

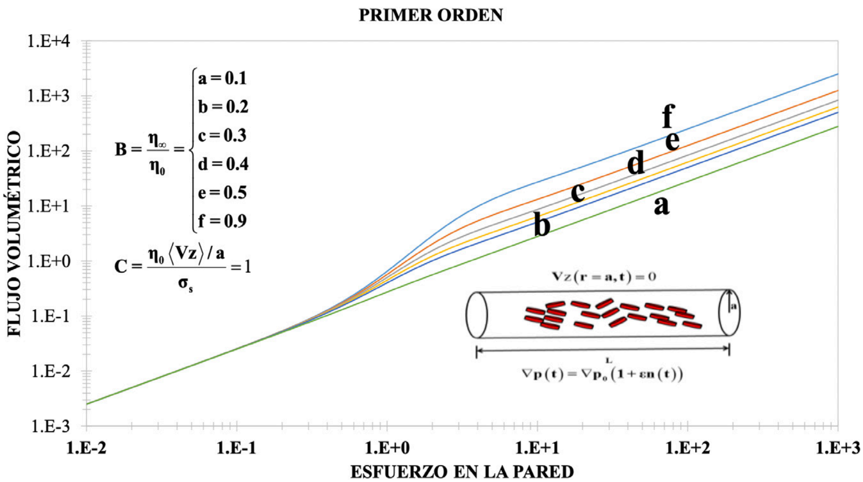


Figura 6.9. **Ilustra el comportamiento del flujo volumétrico como función del esfuerzo en la pared en función de los procesos de adelgazamiento al corte a través del número adimensional B. El número adimensional C se mantuvo constante con valor C =1.**

6.5.3 Mecanismos adelgazantes: Aumento en el flujo volumétrico

En la Fig. (6.8) se observa el aumento en el flujo, en función del esfuerzo en la pared aplicado. La ecuación evaluada toma la forma:

$$I_{\varphi(ap)}(\%) = 100\varepsilon \frac{\varphi_{(ap)1}}{\varphi_{(ap)0}} \langle N(t) \rangle = \left(10\sqrt{\varepsilon}\right)^2 \frac{\sigma_w \left(\partial\varphi_{(ap)0} / \partial\sigma_w\right)}{\varphi_{(ap)0}} \frac{M}{2}$$

En las simulaciones de la Fig. (10) el valor de M asociada a la amplitud de la serie de Fourier, es igual a dos, i.e. M = 2. Dos hechos importantes son observables en la Fig. 10.

a) El efecto del gradiente de presión se observa a primer orden. La condición suficiente para obtener las curvas resonantes observables en la Fig. 10 es que el sistema físico experimente cambios en sus estructura debido al corte, i.e. que presente adelgazamiento al corte.

b) Al aumentar las propiedades adelgazantes, en máximo en las curvas resonantes incrementa por efecto de la desestructuración.

c) Para valores cercanos a 1, es decir al valor del fluido newtoniano, las curvas resonantes decrecen notablemente, y en el valor de B = 1 (Newtoniano) el aumento de la fluidez es cero.

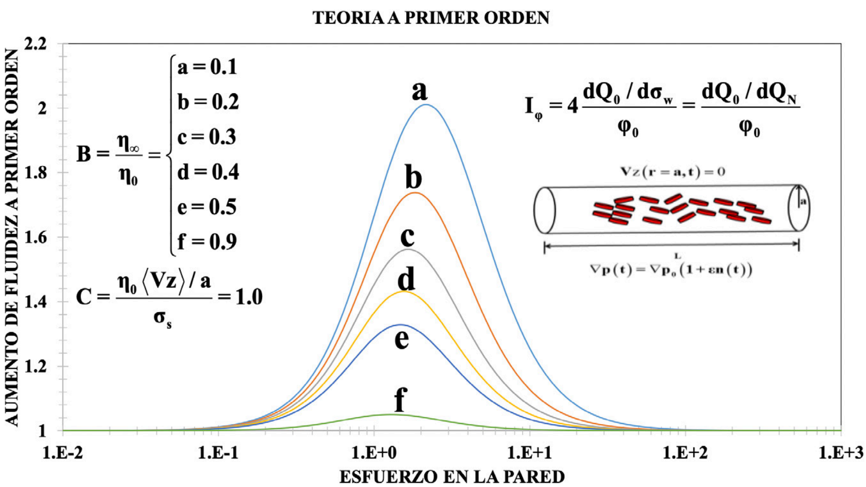


Figura 6.10. **Ilustra el comportamiento del flujo volumétrico como función del esfuerzo en la pared en función de los procesos de adelgazamiento al corte a través del número adimensional B. El número adimensional C se mantuvo constante con valor C =1.**

6.5.4 Mecanismos tixotrópicos: fluidez

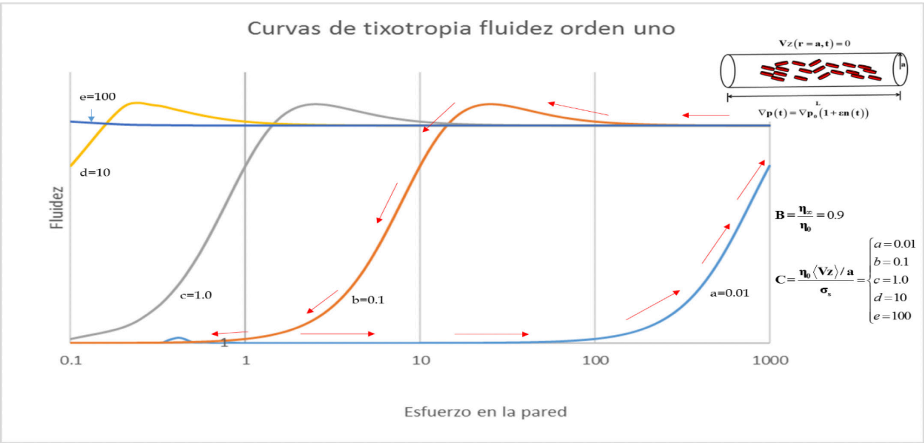


Figura 6.11. Ilustra el comportamiento del flujo volumétrico como función del esfuerzo en la pared en función de los procesos de estructuración y desestructuración del material a través del número adimensional C. El número adimensional B asociado a los procesos adelgazantes al corte se mantuvo con un valor constante de B = 0.9.

En la Fig. (6.9) se observa los mecanismos tixotrópicos en la función fluidez. En las 4 simulaciones se ha dejado el valor del número adimensional B constante i.e. B = 0.9. Los valores del número adimensional C utilizados son: (a) 0.01, (b) 0.1, (c) 1.0, (d) 10, (e) 100. Se observa que la fluidez a primer orden tiene el mismo comportamiento para las cinco simulaciones. A bajos esfuerzos en la pared el sistema presenta un comportamiento constante, aquí la función fluidez vale uno. A un esfuerzo crítico la función describe un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo de fluidez. A un segundo valor crítico, la función decrece monótonamente hasta un tercer valor critico, en donde la fluidez es constante e independiente del esfuerzo en la pared. **Claramente el efecto del número adimensional C en el flujo, es el de desplazar es trasladar las gráficas de estados de mayor a menor esfuerzos en la pared.** Esto podría ser una ventaja, desde el punto de vista energético porque asociado a los procesos no newtonianos de estructuración y formación de la estructura, el número C es una medida de la energía que el sistema necesita para ser deformado a través del gradiente de presión. Un número C >> 1 implica que el esfuerzo en la pared es mucho menor, que cuando C << 1, en donde se necesita mayor energía en el sistema para alcanzar el mismo máximo y por lo tanto el mismo comportamiento que en las otras simulaciones (Vea por ejemplo las simulaciones b-e, de la Fig. 6.8).

6.5.5 Mecanismos tixotrópicos: aumento en el flujo

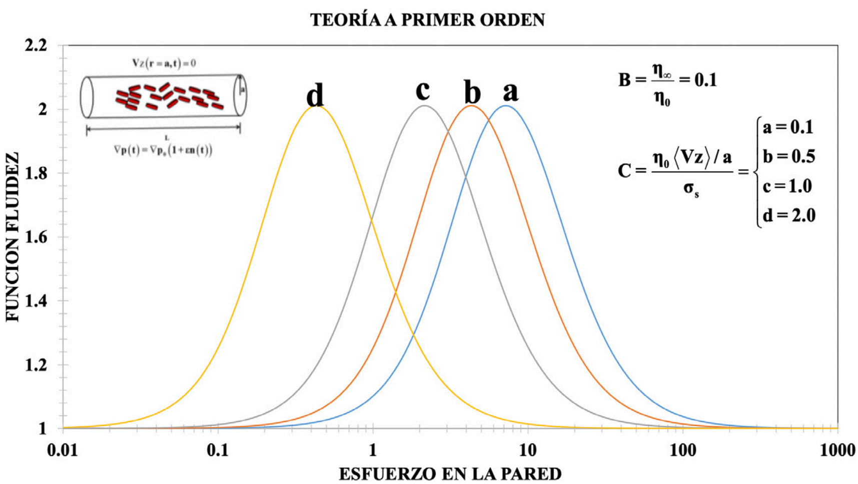


Figura 6.12. **Ilustra el aumento de flujo a primer orden vs esfuerzo en la pared en función del número adimensional C. EL valor del número adimensional B = 0.1 y los valores del número adimensional C son: (a) 0.1, (b) 0.5, c (1.0) y d (2.0)**

En la Fig. (6.10) se observa el aumento de flujo en función del gradiente de presión para diferentes valores del número adimensional C. En las simulaciones, el valor del número B = 0.1. El efecto del número adimensional asociado a la tixotropía es el de desfasar las curvas resonantes hacia la izquierda, a menores valores de gradiente de presión. Un hecho importante, es que el máximo de la curva se debe a un acoplamiento entre las propiedades adelgazantes y de reestructuración del sistema, sin embargo, el valor del esfuerzo en la pared asociado al gradiente de presión utilizado para el máximo en las curvas, se obtiene por efecto del número adimensional C. Este número depende de la concentración de estructura en el sistema y puede ser visualizado como de tixotropía.

6.6 Teoría a segundo orden

En la Figs. 12(a, b) se observa la fluidez a segundo orden en función del esfuerzo en la pared para diferentes condiciones de flujo: (a) Adelgazamiento al corte, (b) Tixotropía en el sistema. En estas simulaciones la ecuación que se utilizo fue la de segundo orden, es decir,

$$\varphi_{(ap)2} = \sigma_w^2 \frac{\partial^2 \varphi_{(ap)0}}{\partial \sigma_w^2} \left\langle N^2(t) \right\rangle$$

Esta ecuación es la base de las predicciones de las Figs. (12, 13). El comportamiento matemático es muy similar en las dos curvas. A esfuerzos en la pared bajos, el sistema presenta una fluidez constante, mientras que a un esfuerzo crítico el sistema experimenta un comportamiento monótono creciente hasta un valor máximo en la pared a un esfuerzo crítico. Para valores mayores de este esfuerzo crítico la fluidez decrece monótonamente cruzando el eje coordenado del esfuerzo en la pared en donde la fluidez es cero. En este punto la segunda derivada es cero, debido al punto de inflexión de la misma. Para un tercer esfuerzo crítico, el sistema presenta un mínimo, el cual se puede suponer como un efecto anti-resonante y para valores de esfuerzo en la pared, mayores que el del mínimo se observa un comportamiento asintótico aproximándose al valor de fluidez cero. Las siguientes observaciones son las más importantes de las Figs. (12) y (13).

a) El efecto del segundo orden, induce un comportamiento anti-resonante seguido de un anti-resonante en el sistema.

b) El efecto de B es aumentar el máximo y decrecer el mínimo en la curva resonante.

c) El efecto del número adimensional C es el de trasladar las curvas a menores valores de esfuerzo en la pared, pero a diferencia de las curvas a primer orden, aquí se observa una disminución en la magnitud del máximo y del mínimo respectivamente.

d) Experimentalmente, no se ha detectado la presencia del mínimo, por lo que se necesitan realizar protocolos de investigación direccionados a contestar esta pregunta. Quizá, la respuesta se observe en sistemas muy anisotrópicos como los cristales líquidos.

6.6.1 Mecanismos adelgazantes: fluidez

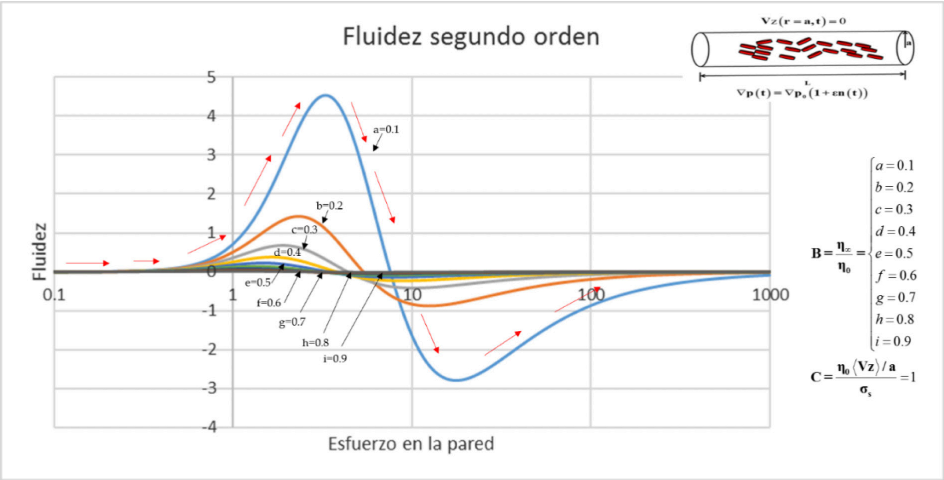


Figura 6.13. Ilustra el comportamiento del flujo volumétrico como función del esfuerzo en la pared en función de los procesos de estructuración y desestructuración del material a través del número adimensional C. El número adimensional B asociado a los procesos adelgazantes al corte se mantuvo con un valor constante de B = 0.9.

6.6.2 Mecanismos tixótropicos: fluidez

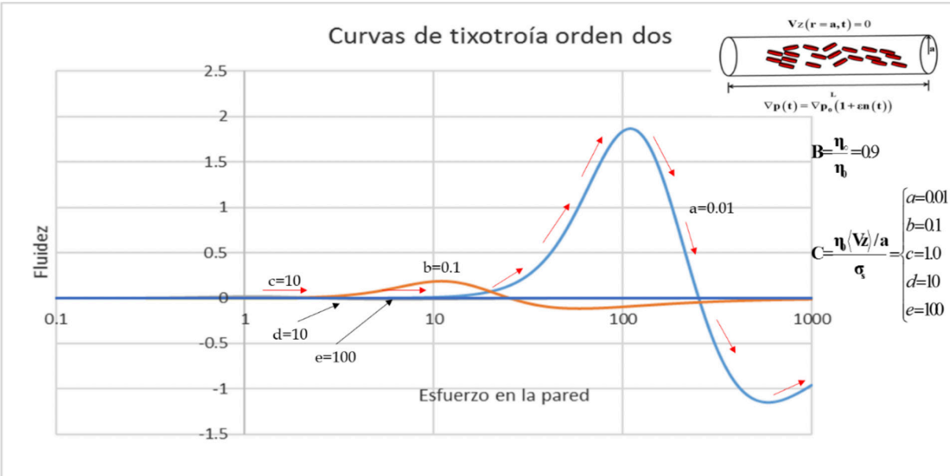


Figura 6.14. **Ilustra el comportamiento del flujo volumétrico como función del esfuerzo en la pared en función de los procesos de estructuración y desestructuración del material a través del número adimensional C. El número adimensional B asociado a los procesos adelgazantes al corte se mantuvo con un valor constante de B = 0.9.**

6.6.3 Aplicaciones de la teoría de perturbaciones a un fluido biológico viscoelástico: Sangre humana con hipercolesterolemia

En esta sección, se analiza el aumento en la fluidez a través de datos reométricos de sangre con hipercolesterolemia (alto contenido en colesterol). Los datos y protocolos experimentales fueron realizados bajo estrictos criterios de Bioética los cuales fueron descritos a detalle en el trabajo de Moreno et al. 2015 y utilizados por Herrera et al. (2017, 2019). A partir de estos, se obtienen las siguientes tablas de propiedades materiales y números adimensionales respectivamente.

Tabla 3. Propiedades materiales del modelo Tanner-Reiner-Philippoff.

Contenido de colesterol /Propiedades Materiales	Constante de normalización para el esfuerzo	Módulo elástico	Viscosidad a bajo corte	Viscosidad a alto corte
	k [Pa^{-1}]	G_0 [Pa]	η_0 [Pas]	η_∞ [Pas]
Colesterol Bajo 300 mg/dL	0.90	1. 487	0.0113	0.009
Colesterol Medio 174 mg/dL	0.74	1.472	0.023	0.0042
Colesterol Alto 114 mg/dL	0.19	1.834	0.046	0.0047

Tabla 4. Números adimensionales.

Números Adimensionales	$C = \frac{\langle Vz \rangle / \varphi_0 a}{1/k}$	$B = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}$	$We_0 = \frac{1}{\varphi_0 G_0} \frac{\langle Vz \rangle}{a}$
Colesterol Bajo 300 mg/dL	0.0125	1.250	0.0061
Colesterol Medio 174 mg/dL	0.0170	**5.476**	0.0156
Colesterol Alto 114 mg/dL	0.0098	9.703	0.0222

El radio sanguíneo típico de las venas varía de 0,02 a 0,35 cm y la densidad de la sangre es aproximadamente de 1,05 g/cm^3 respectivamente (Del Rio et al., 1998). La rapidez de deformación característica con estos datos, satisface las siguiente desigualdad:

$$0.085\ s^{-1} = \frac{\langle V \rangle}{a_{max}} = \left(\dot{\gamma}_{car}\right)_{min} \leq \dot{\gamma}_{car} \leq \left(\dot{\gamma}_{car}\right)_{min} = \frac{\langle V \rangle}{a_{min}} = 1.5\ s^{-1}$$

Las fuerzas inerciales y viscosas puede calcularse a través del número de Reynolds, es decir,

$$0.0051=\frac{\rho\langle V\rangle a_{min}}{\eta_0}=Re_{min}\leq Re\leq Re_{max}=\frac{\rho\langle V\rangle a_{min}}{\eta_0}=0.191$$

Como el número de Reynolds es menor que la unidad, es físicamente aceptable descartar la contribución de los mecanismos de inercia.

La Fig. (6.13) muestra las curvas reométricas de BMP ajustadas para seguir cualitativamente los datos reométricos obtenidos para sangre con diferentes niveles de colesterol. Los parámetros utilizados se muestran en la Tabla 3. Solo se utiliza un modo del BMP para ajustar los datos y, por lo tanto, solo se muestran los datos a baja velocidad de corte. La razón para esto es que las predicciones de la tensión de fluencia mostradas aquí suponen que el modelo TRP es un modelo de modo único. Según lo informado por Moreno et al. (2015) se necesitan tres modos para ajustar todos los datos reométricos de la sangre en la zona de alta velocidad de corte. Aquí estamos usando solo el modo principal que reproduce adecuadamente los datos para las regiones de corte bajo y moderado, que es donde los fenómenos de tensión de fluencia se vuelven importantes. Las predicciones de mejora de flujo para sangre humana real se representan en la Fig. 15, donde la línea continua representa la aproximación de orden cero (sin mejora de flujo) y la línea de puntos representa las predicciones de primer orden. A medida que aumenta el contenido de colesterol, el máximo de mejora del flujo es más evidente en las curvas. Esto se debe a que el colesterol hace que la sangre se convierta en un fluido de reducción de cizallamiento más fuerte y, por lo tanto, se potencia la mejora del flujo.

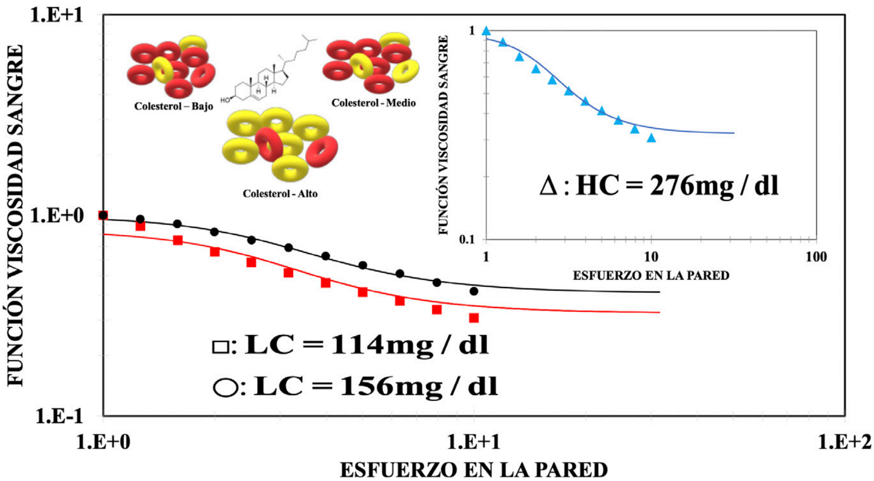


Figura 6.15. Datos de flujo reométrico de sangre con diferentes contenidos de colesterol ajustados con el modelo BMP, el parámetro obtenido se muestra en la Tabla 3.

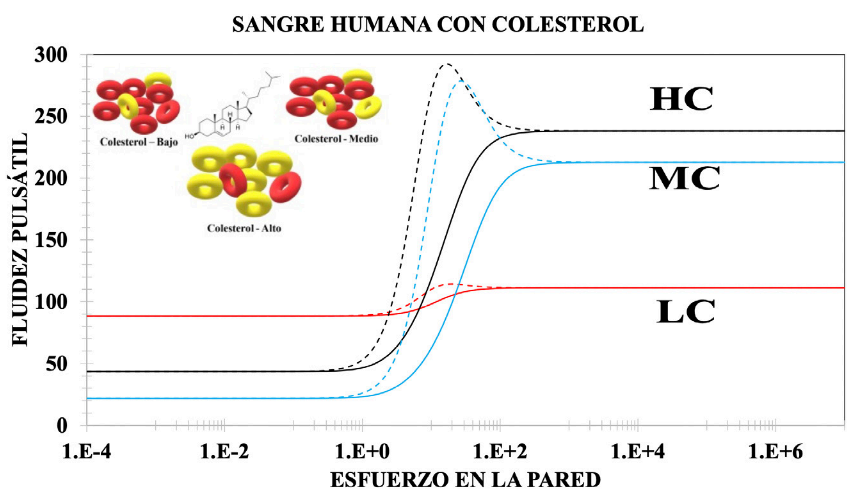


Figura 6.16. Mejora de la fluidez frente a la tensión adimensional de la pared en función del mecanismo de adelgazamiento por corte, respectivamente. Los parámetros y números adimensionales utilizados en la simulación se muestran en los Tablas 3 y 4.

La comparación de los máximos para la mejora de la fluidez se representa en la Fig. 6.15. El recuadro de la Fig. 6.15 muestra los resultados de la mejora energética que está directamente relacionada con los resultados en la mejora de la fluidez, es decir, el contenido de colesterol aumenta la mejora energética. con la muestra de colesterol alto que muestra los valores máximos y la muestra con colesterol bajo que muestra la mejora energética más baja.

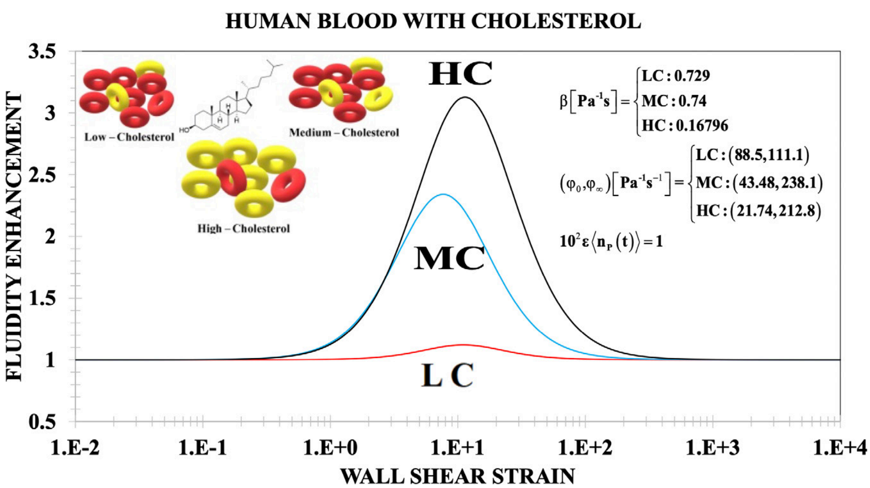


Figura 6.17. **Mejora de la fluidez frente a la tensión adimensional de la pared en función del mecanismo de adelgazamiento por cizalladura, respectivamente. Los parámetros y números adimensionales utilizados en la simulación se presentan en las Tablas 3 y 4.**

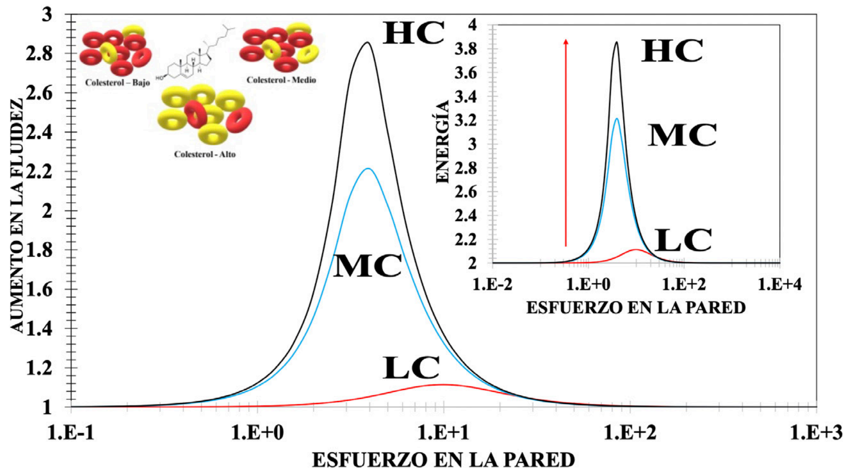


Figura 6.18. Ilustra el flujo volumétrico frente al esfuerzo en la pared en función del mecanismo de adelgazamiento inducidos por el corte. Los parámetros y números adimensionales utilizados en la simulación se calculan en las Tablas 3 y 4.

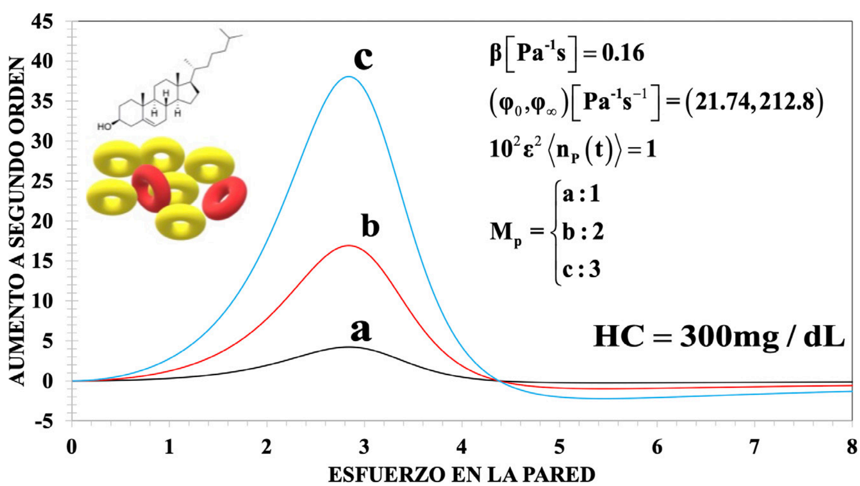


Figura 6.19. Ilustra el flujo volumétrico frente al esfuerzo en la pared en función del mecanismo de adelgazamiento inducidos por el corte. Los parámetros y números adimensionales utilizados en la simulación se calculan en las Tablas 3 y 4.

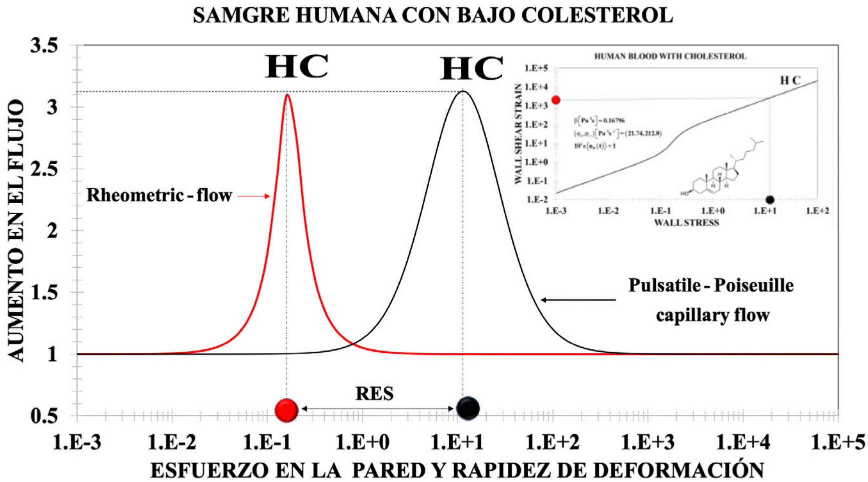


Figura 6.20. Muestra el aumento de flujo vs el esfuerzo en la pared y rapidez de deformación.

Los resultados para el flujo volumétrico se muestran en la Fig. (6.16), donde se observa el mayor aumento en el flujo volumétrico para la muestra con alto contenido de colesterol. De nuevo, el incremento en el flujo volumétrico se presenta solo en la región de ley de potencia. Con las zonas de esfuerzo en la pared baja y alta, no se observa una diferencia entre el gradiente de presión constante y los casos de gradiente de presión pulsátil. Es claro que para que existe una mejora en el flujo volumétrico, este debe de presentar cambios en la estructura por efecto del flujo y entre más contenido de colesterol exista en la sangre, esta promueve un incremento en el flujo debido a que el sistemas posee más punto estructurales e induce una mayor Resistencia lo que se promueve en un mayor aumento. Este hecho es lo más relevante de este Proyecto de libro especializado y es punto de partida en investigaciones futuras.

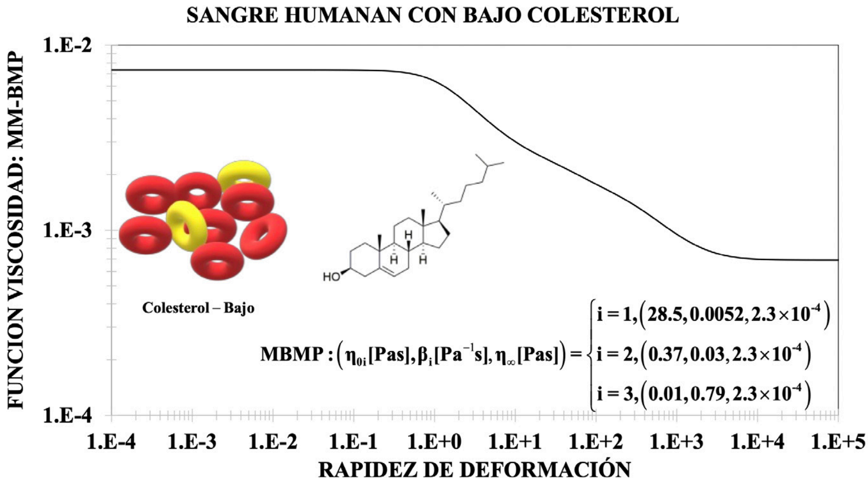


Figura 6.21. Ilustra el flujo volumétrico frente al esfuerzo en la pared en función del mecanismo de adelgazamiento inducidos por el corte. Los parámetros y números adimensionales utilizados en la simulación se calculan en las Tablas 3 y 4.

CAPÍTULO VII

Conclusiones

7.1 Contribución al conocimiento

En el presente trabajo se estudió el flujo de un fluido biológico (sangre humana) con niveles de colesterol bajo, medio y alto, sometidos a un gradiente de presión pulsátil. El flujo y la reología del sistema biológico fueron descritos por el modelo visco-elástico de Tanner, y la función viscosidad del modelo de Tanner fue descrita con el modelo de Reiner-Philippoff, el cual es un modelo de tres constantes materiales que describe los procesos de adelgazamiento o engrosamiento al corte por efecto del flujo. El gradiente de presión pulsátil fue modelado mediante el producto de un gradiente de presión pulsátil y una función estocástica multiplicada por un parámetro perturbativo. La función estocástica representa las variaciones de la presión en el corazón humano, y con el fin de incorporar efectos de armónicos en el sistema, se escogió una serie de Fourier generalizada. En este trabajo se analizaron dos regímenes de flujo: (i) visco elasticidad lineal (trasformada de Fourier) y de (ii) visco elasticidad no lineal. El régimen de viscosidad lineal, se analizó mediante el formalismo de la trasformada de Fourier, mientras que en el régimen de visco elasticidad no lineal, se utilizó un desarrollo perturbativo en donde las variables perturbadas fueron velocidad, esfuerzo, rapidez de deformación viscosidad y flujo volumétrico, el parámetro de perturbación fue ε. En este trabajo de investigación los resultados se centraron en el cálculo de:

a) Flujo volumétrico.

b) Función viscosidad.

c) Aumento en el flujo.

d) Aumento en la potencia.

Para resolver el problema de flujo se introduce un conjunto de variables adimensionales que permiten obtener grupos adimensionales los cuales describen la física del sistema. En este caso los grupos adimensionales fueron número de Reynolds, Weissenberg y los números adimensionales B, C. El número de Reynolds relaciona los mecanismos inerciales (masa y movimiento) y viscosos (disipativos). El número de Weissenberg es el producto de un tiempo característico asociado con la viscoelasticidad del material y una rapidez de deformación del proceso. Este número nos indica la diferencia entre un fluido viscoso, visco-elástico. El tercer grupo B es un cociente de viscosidades a bajo y alto corte respectivamente, si B es mayor a 1 tenemos un fluido engrosante, si B es menor a 1 tenemos un fluido adelgazante, y en el caso de B = 1 el fluido es newtoniano. Por último el cuarto número C está asociado a la restructuración del material y su magnitud puede ser asociada a los procesos de construcción y destrucción de la estructura por efecto del flujo y por ende relacionados con los procesos de desestructuración.

Los resultados más importantes del presente trabajo son resumidos a continuación:

7.2 Viscoleasticidad lineal

A) En el régimen de viscosidad lineal la relación entre el flujo volumétrico y el gradiente de presión está regulada por la función de trasferencia compleja en el espacio de Fourier y esta relaciona los mecanismos inerciales y la fluidez compleja a través de un cociente de función de Bessel.

7.3 Viscoelasticidad no-lineal

B) La reología y el flujo en el sistema puede ser caracterizada mediante cuatro grupos adimensionales.

C) El efecto que tiene el gradiente de presión pulsátil sobre el sistema es disminuir la viscosidad.

D) Las funciones Bessel en el régimen de visco-elasticidad lineal describen curvas resonantes las cuales se han encontrado en diferentes sistemas físicos asociados a problemas de trasporte de medios acuíferos, medios porosos, sistemas biológicos (células ciliadas externas). La parte real están relacionadas con el aumento del flujo y la permeabilidad dinámica en el sistema. Mientras que la parte imaginaria está relacionada con las curvas discontinuas encontradas en otros sistemas.

E) En el régimen de viscosidad lineal, bajas deformaciones no existen aumentos en el flujo es decir son constantes.

F) A orden cero el sistema se reduce a considerar un flujo en estado estacionario y homogéneo es decir que los efectos inerciales y elásticos no son tomados en cuenta.

F) A primer orden de la función se obtienen las contribuciones del gradiente de presión pulsátil, y la parte visco-elástica del material atreves de la función estocástica y el número de Weissenberg.

G) A segundo orden se obtienen las contribuciones visco-elásticas de menor orden, por lo tanto a partir del segundo orden se obtienen contribuciones en el régimen visco-elástico de menor orden.

H) El efecto del gradiente de presión pulsátil solo se observa a esfuerzos en la pared moderados mientras que a bajos y altos esfuerzos en la pared el efecto del gradiente no es observable.

7.4 interpretación biológica

G) Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que el corazón trabaja de manera pulsátil debido a que disminuye la fricción abatiendo la viscosidad en el régimen de esfuerzos en la pared maderables.

H) Básicamente el flujo pulsátil del corazón se puede interpretar como un mecanismo de defensa de este ya que al tener mayor concentración de colesterol en la sangre el corazón adapta las pulsaciones de tal manera que disminuye su viscosidad, desde el punto de vista ingenieril el corazón regula su funcionamiento de acuerdo a la viscosidad de la sangre.

7.5 Trabajo a futuro

Este trabajo puede ser extendido de manera natural tomando en cuenta las variaciones del hematocrito diferentes tipos de enfermedades (cirrosis hepática, leucemia, diabetes) y trasferencia de tecnología (anticoagulantes o válvulas cardiacas). Por ultimo el modelado de estos sistemas implica el uso de herramientas matemáticas y físicas como son, métodos perturbativos, métodos asintóticos y métodos numéricos basados en elemento volumen finito e híbridos utilizando software especializado en fluidos no Newtonianos (COMSOL, ANSYS FLUENT).

APÉNDICE A

En este apéndice se desarrolla las ecuaciones principales mediante una forma matemática equivalente diferente a la desarrollada mediante el formalismo de Fourier y la ecuación homogénea de Bessel.

Flujo de Poiseuille en estado estacionario

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\sigma_{zr}) = \nabla_z p_0 \tag{A-1}$$

Integrando con respecto a la coordenada radial r y utilizando la condición de frontera de que el esfuerzo debe de permanecer acotado, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{2}\nabla_z p_0 r \tag{A-2}$$

Es importante notar que el esfuerzo en la pared, toma la forma

$$\sigma_w = - \sigma_{zr}\big|_{r=a} = -\frac{1}{2}\nabla_z p_0 a \tag{A-3}$$

De la ecuación constitutiva se tiene lo siguiente

$$\dot{\gamma}_{zr} = \frac{dVz}{dr} = \varphi(\sigma_{zr})\sigma_{zr} = \varphi\left(\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r \tag{A-4}$$

Integrando con respecto a la coordenada radial r y aplicando la condición de no deslizamiento en la pared, i.e. $V_z = 0$ en $r = a$, se tiene lo siguiente (Apéndice A)

$$Vz = \int \varphi(\sigma_{zr})\sigma_{zr} dr = \int \varphi\left(\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r\right)\frac{1}{2}\nabla_z p_0 r dr + C \tag{A-5}$$

La velocidad axial puede simplificarse utilizando las siguientes variables:

$$Vz=-\frac{\varphi_0\sigma_s a}{2\left(\eta_\infty/\eta_0\right)}\frac{1}{\tau}\int\left\{1+\frac{1-\left(\eta_0/\eta_\infty\right)}{\left(\eta_0/\eta_\infty\right)+z}\right\}dz+C \tag{A-6}$$

Integrando se tiene lo siguiente:

$$Vz=-\frac{\varphi_0\sigma_s a}{2\left(\eta_\infty/\eta_0\right)}\frac{1}{\tau}\left\{z+1-\left(\eta_0/\eta_\infty\right)Ln\left|\left(\eta_0/\eta_\infty\right)+z\right|+C\right\} \tag{A-7}$$

Donde se definieron las siguientes variables

$$\begin{aligned} z &= u^2 \\ u &= \tau r^* \\ \tau &= a\frac{\nabla_z p_0/2}{\sigma_s} \\ r^* &= r/a \end{aligned} \tag{A-8}$$

Aplicando la condición de frontera en la pared, se tiene:

$$C=-z_w-\left(1-\left(\eta_0/\eta_\infty\right)\right)Ln\left|\left(\eta_0/\eta_\infty\right)+z_w\right| \tag{A-9}$$

Sustituyendo se tiene lo siguiente:

$$Vz=\frac{\varphi_0\sigma_s a}{2\tau\left(\eta_\infty/\eta_0\right)}\left\{z_w-z+\left(1-\left(\eta_0/\eta_\infty\right)\right)Ln\left|\frac{\left(\eta_0/\eta_\infty\right)+z_w}{\left(\eta_0/\eta_\infty\right)+z}\right|\right\} \tag{A-10}$$

En donde z_w esta dado por la siguiente expresión:

$$z_w=\tau^2=\left(\frac{a\nabla_z p_0 2^{-1}}{\sigma_s}\right)^2 \tag{A-11}$$

Aplicando la definición del flujo volumétrico en un geometría cilíndrica,

$$Q=\int_0^{2\pi}\int_0^{a} Vzrdrd\theta=-\pi\int_0^{a}\dot{\gamma}_{zr}r^2dr \tag{A-12}$$

La rapidez de deformación se puede expresar en términos del producto de la fluidez y el esfuerzo de corte rz, por lo que:

$$\dot{\gamma}_{zr}=\varphi(\sigma_{zr})\sigma_{zr}=\varphi_0\frac{1+\left(\frac{\sigma_{zr}}{\sigma_s}\right)^2}{1+(\eta_\infty/\eta_0)\left(\frac{\sigma_{zr}}{\sigma_s}\right)^2}\sigma_{zr} \tag{A-13}$$

Al sustituirlo en el flujo volumétrico, se tiene lo siguiente:

$$Q=\frac{\pi\,\varphi_0\sigma_s a^3}{2\tau^3(\eta_\infty/\eta_0)}\int_0^{\tau^2}\frac{1+z}{(\eta_0/\eta_\infty)+z}zdz \tag{A-14}$$

Resolviendo la integral, se tiene lo siguiente:

$$Q=\frac{\pi\,\varphi_0\sigma_s a^3}{2\tau^3(\eta_\infty/\eta_0)}\left\{\frac{1}{2}\tau^4+\left(1-(\eta_0/\eta_\infty)\right)\left(\tau^2+(\eta_0/\eta_\infty)\mathrm{Ln}\left|\frac{(\eta_0/\eta_\infty)}{(\eta_0/\eta_\infty)+\tau^2}\right|\right)\right\} \tag{A-15}$$

Finalmente, se tiene el flujo volumétrico del modelo de Reiner–Phiilipoff

$$Q=\frac{\pi\,\varphi_0\sigma_s a^3}{4\left(a\frac{\nabla_z p_0/2}{\sigma_s}\right)^3(\eta_\infty/\eta_0)}\times$$
$$\left\{\left(a\frac{\nabla_z p_0/2}{\sigma_s}\right)^4+2\left(1-(\eta_0/\eta_\infty)\right)\left(\left(a\frac{\nabla_z p_0/2}{\sigma_s}\right)^2+(\eta_0/\eta_\infty)\mathrm{Ln}\left|\frac{(\eta_0/\eta_\infty)}{(\eta_0/\eta_\infty)+\left(a\frac{\nabla_z p_0/2}{\sigma_s}\right)^2}\right|\right)\right\} \tag{A-16}$$

APÉNDICE B

En este apéndice se desarrolla las ecuaciones principales mediante una forma matemática equivalente diferente a la desarrollada mediante el formalismo de Fourier y la ecuación homogénea de Bessel.

La componente z de la ecuación de movimiento tomando en cuenta los mecanismos inerciales, toma la siguiente forma:

$$\rho \frac{\partial Vz}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz}) \tag{B-1}$$

El término $\rho\partial_t Vz$ es la masa por unidad de volumen multiplicada por la aceleración instantánea en el sistema. Por otra parte, la componente rz d e la ecuación constitutiva toma la forma:

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{\Phi}\dot{\gamma}_{rz} \tag{B-2}$$

Al combinar las Ecuaciones (6.1-45,6.1- 47), se tiene lo siguiente:

$$\rho \frac{\partial Vz}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rz}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{\Phi}\dot{\gamma}_{rz}\right) \tag{B-3}$$

Al multiplicar la Ec. (6.1-45) $1+\lambda_M\partial_t$ se tiene lo siguiente:

$$\rho\Phi \frac{\partial Vz}{\partial t} = \Phi\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\dot{\gamma}_{rz}\right) \tag{B-4}$$

La rapidez de deformación $\dot{\gamma}_{rz} = dVz/dr$ se puede expresar de la siguiente:

$$\rho\Phi\frac{\partial Vz}{\partial t}=\Phi\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Vz}{\partial r}\right) \tag{B-5}$$

La Ec. (6.1-51) se puede es diferencial lineal y describe las variaciones de la velocidad por efectos del espacio y tiempo. Aplicando el formalismo de Fourier, en la Ec. (6.1-51) se tiene lo siguiente:

$$\Im\left\{\rho\Phi\frac{\partial Vz}{\partial t}\right\}=\Im\left\{\Phi\left(-\frac{\partial p}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Vz}{\partial r}\right)\right\} \tag{B-6}$$

$$\rho\hat{\Phi}\cdot(i\omega)\hat{V}z(r,\omega)=\hat{\Phi}\left(-\frac{\partial\hat{p}}{\partial z}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\hat{V}z(r,\omega)}{\partial r}\right) \tag{B-7}$$

Simplificando la Ec. (6.1-54) y definiendo la fluidez compleja como el inverso de la viscosidad compleja, se tiene lo siguiente:

$$\hat{\Phi}^{*}=\frac{1}{\eta^{*}}=\mathrm{Re}\left[\hat{\Phi}\right]+i\,\mathrm{Im}\left[\hat{\Phi}\right] \tag{B-8}$$

Simplificando esta expresión, se tiene lo siguiente:

Perfil de velocidades

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\hat{V}z(r,\omega)}{\partial r}\right)+\rho(i\omega)\hat{\Phi}^{*}\hat{V}z(r,\omega)=\hat{\Phi}^{*}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-9}$$

Factorizando la función velocidad $\hat{V}z(r,\omega)$

$$\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\rho(i\omega)\hat{\Phi}^{*}\right\}\hat{V}z(r,\omega)=\hat{\Phi}^{*}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-10}$$

Para resolver la Ecuación diferencial de Bessel se propone el siguiente cambio de variable:

$$\alpha^2 = \rho(i\omega)\hat{\Phi}^* \tag{B-11}$$

Nótese que α tiene unidades de longitud. Sustituyendo en la ecuación diferencial, se tiene lo siguiente:

$$\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\alpha^2\right\}\hat{V}z(r,\omega)=\hat{\Phi}^*\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-12}$$

La parte homogénea se resuelve de la siguiente manera:

$$\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\alpha^2\right\}\hat{V}z(r,\omega)=0 \tag{B-13}$$

Desarrollando la velocidad en el espacio de Fourier, se tiene lo siguiente:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\alpha^2\right\}\hat{V}z(r,\omega)=0 \tag{B-14}$$

Multiplicando por r^2 se tiene la ecuación diferencial del modelo de Bessel:

$$\left\{r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}+r\frac{\partial}{\partial r}+\alpha^2 r^2\right\}\hat{V}z(r,\omega)=0 \tag{B-15}$$

La Ec. (6.2-63) es paramétrica de Bessel y para resolverla se propone el siguiente cambio de variable $z = \alpha r$

$$\left\{z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+z\frac{\partial}{\partial z}+z^2\right\}\hat{V}z(r,\omega)=0 \tag{B-16}$$

La solución de la ecuación diferencial Ec. (B-16) está dada por la Expresión:

$$\hat{V}z(z,\omega)=C_1J_0(z)+C_2Y_0(z) \tag{B-17}$$

En la Ec. (B-17) $\{J_0(x), Y_0(x)\}$ son la funciones de Bessel de orden cero de primera y segunda especie respectivamente. La solución particular para el problema de la Ec. (6.1-60) se puede expresar como:

$$\hat{V}z_P(r,\omega) = A$$

$$\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\alpha^2\right\}\hat{V}z(r,\omega) = \hat{\Phi}^*\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-18}$$

Sustituyendo en la expresión general, se tiene lo siguiente:

$$\alpha^2 A = \hat{\Phi}^*\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-19}$$

Por lo que, la constante A se despeja y se tiene lo siguiente:

$$A = \frac{\hat{\Phi}^*}{\alpha^2}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) = \frac{\hat{\Phi}^*}{\rho(i\omega)\hat{\Phi}^*}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) = \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-20}$$

En donde el operador diferencial espacial se anula debido a que la solución particular es una constante:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\hat{V}z(r,\omega) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)A = 0 \tag{B-21}$$

Por lo que, la solución es la solución homogénea dada por las series de Bessel (Ec. 6.2-65) y sol. Particular Ec. (6.2-68) por lo que, se tiene lo siguiente:

$$\hat{V}z(z,\omega) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) + \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-22}$$

o

$$\hat{V}z(\alpha r,\omega) = C_1 J_0(\alpha r) + C_2 Y_0(\alpha r) + \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-23}$$

La solución general contiene dos constantes de integración C_1 y C_2 las cuales deben de determinarse a partir de las condiciones de frontera, las cuales se pueden describir como:

$$\text{C.F.1: } r = 0;\ \hat{V}z(0,\omega) = 0;\ \left|\hat{V}z(0,\omega)\right| \leq M \tag{B-24a}$$

$$\text{C.F.2: } r = a;\ \hat{V}z(\alpha a,\omega) = 0 \tag{B-24b}$$

La primera de estas condiciones obedece a que la solución particular debe de permanecer acotada, i.e. que para ningún valor que tome la coordenada radial debe ser infinita. Por otra parte, la segunda condición de frontera se relaciona con la condición de no deslizamiento en la frontera (pared del tubo capilar). Al sustituir la primera C.F.1 en la ecuación diferencial, se tiene lo siguiente:

$$\hat{V}z_{max} = \hat{V}z(\alpha r = 0,\omega) = C_1 J_0(\alpha 0) + C_2 Y_0(\alpha 0) + \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial \hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-25}$$

Simplificando la expresión se obtiene la siguiente expresión algebraica:

$$\hat{V}z_{max} = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-\infty) + \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial \hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-26}$$

Simplificando la ecuación anterior, se tiene lo siguiente:

$$\hat{V}z_{max} = C_2 \cdot (-\infty) + \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial \hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \cong C_2 \cdot (-\infty) \tag{B-27}$$

La ultima igualdad, demuestra que la velocidad en el centro del capilar, es infinita lo que carece de sentido físico. Para evitar esta inconsistencia física, la constante C_2 debe ser cero. Por lo que la solución general toma la forma:

$$\hat{V}z(\alpha r,\omega) = C_1 J_0(\alpha r) + \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial \hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-28}$$

La segunda condición de frontera al sustituirla nos da la siguiente información física:

$$\hat{V}z(\alpha a,\omega) = C_1 J_0(\alpha a) + C_2 Y_0(\alpha a) + \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial \hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) = 0 \tag{B-29}$$

De análisis de la primera condición de frontera se deduce que la constante C_2 es cero por lo que al despejar C_1 se tiene lo siguiente:

$$C_1 = -\frac{1}{J_0(\alpha a)\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial \hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-30}$$

Finalmente al sustituir las constantes C_1 y C_2 en la solución general, se tiene lo siguiente:

$$\hat{V}z(\alpha r,\omega) = -\frac{1}{J_0(\alpha a)\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial \hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)J_0(\alpha r) + \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial \hat{p}(\omega)}{\partial z}\right) \tag{B-31}$$

Factorizando la velocidad axial en el espacio de Fourier, se tiene:

$$\hat{V}z(\alpha r,\omega) = \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial \hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)\left(1 - \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)}\right) \tag{B-32}$$

Esta expresión nos permite obtener el perfil de velocidades en función de los parámetros materiales del sistema $\{\varrho\ \eta_0\ \lambda_0,\ \lambda_J\}$, la fuerza motriz que deforma continua e irreversiblemente el fluido asociado al gradiente de presión en la dirección axial. Nótese, que el perfil de velocidades está determinado por un cociente de funciones de Bessel, lo que podría inducir a efectos resonantes en el sistema.

Flujo volumétrico

La expresión para calcular el flujo volumétrico en un capilar de radio r = a y longitud z = L, esta dad por:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} Vz(r,t)\, r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{a} Vz(r,t)\, r\,dr \tag{B-33}$$

Al tomar la transformada de Fourier del flujo volumétrico, se tiene lo siguientes:

$$\Im\{Q(t)\} = Q(\omega) = \Im\left\{2\pi\int_0^a Vz(\alpha r,t)rdr\right\} \tag{B-34}$$

Por otra parte suponiendo que la función es continua, el operador de Fourier se puede introducir en la doble integral por lo que se tiene lo siguiente:

$$\Im\left\{2\pi\int_0^a Vz(\alpha r,t)rdr\right\} = 2\pi\int_0^a \Im\{Vz(\alpha r,t)\}rdr = 2\pi\int_0^a \hat{V}z(\alpha r,\omega)rdr \tag{B-35}$$

El flujo volumétrico transformado en el espacio de Fourier toma la forma:

$$Q(\omega) = 2\pi\int_0^a \hat{V}z(\alpha r,\omega)rdr \tag{B-36}$$

Al sustituir el perfil de velocidades en el espacio de Fourier en la integral de flujo volumétrico (Ec. B-36)

$$Q(\omega) = 2\pi\int_0^a \hat{V}z(\alpha r,\omega)rdr = 2\pi\int_0^a \frac{1}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)\left(1-\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)}\right)rdr \tag{B-37}$$

Simplificando esta expresión, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega) = \frac{2\pi}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)\int_0^a\left(1-\frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)}\right)rdr \tag{B-38}$$

Para simplificar la integración de la Ec. (B-38) se propone el siguiente cambio de variable: u = r/a,

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)\int_{0/a}^{a/a}\left(1-\frac{J_0\left(\alpha a\left(\frac{r}{a}\right)\right)}{J_0(\alpha a)}\right)\left(\frac{r}{a}\right)d\left(\frac{r}{a}\right) \tag{B-39}$$

$$Q(\omega) = \frac{2\pi a^2}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)\int_0^1\left(1-\frac{J_0(\alpha au)}{J_0(\alpha a)}\right)udu \tag{B-40}$$

Definiendo $\alpha a = \beta$ como una longitud característica adimensional, la Ec. (B-40) toma la forma:

$$Q(\omega)=\frac{2\pi a^2}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)\int_0^\beta\left(1-\frac{J_0(\beta u)}{J_0(\beta)}\right)udu \qquad \text{(B-41)}$$

En la Ec. (B-41) se hace el siguiente cambio de variable $z = \beta u$, por lo que:

$$Q(\omega)=\frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)\int_0^\beta\left(1-\frac{J_0(z)}{J_0(\beta)}\right)zdz \qquad \text{(B-42)}$$

Aplicando linealidad de la suma, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega)=\frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)\left\{\int_0^\beta zdz-\frac{1}{J_0(\beta)}\int_0^\beta J_0(z)zdz\right\} \qquad \text{(B-43)}$$

Para integrar las funciones de Bessel, se utiliza la siguiente propiedad matemática:

$$\frac{d}{dz}[zJ_1(z)]= zJ_0(z) \qquad \text{(B-44)}$$

En la Ec. (B-44) J_1 es la función de Bessel de primera especie de orden 1. Al sustituir la Ec. (B-43), en la integral de la expresión del flujo volumétrico:

$$Q(\omega)=\frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)\left\{\int_0^\beta zdz-\frac{1}{J_0(\beta)}\int_0^\beta \frac{d}{dz}[zJ_1(z)]dz\right\} \qquad \text{(B-45)}$$

Al simplificar la Ec. (6.3-92) se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega)=\frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)\left\{\frac{1}{2}z^2\Big|_0^\beta-\frac{zJ_1(z)}{J_0(\beta)}\Bigg|_0^\beta\right\} \qquad \text{(B-46)}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, i.e. evaluando la función de Bessel en los límites superior e inferior respectivamente:

$$Q(\omega)=\frac{2\pi a^2}{\rho\beta^2(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)\left\{\frac{1}{2}\beta^2-\frac{\beta J_1(\beta)}{J_0(\beta)}\right\} \qquad \text{(B-47)}$$

Simplificando, se tiene lo siguiente:

$$Q(\omega)=\frac{\pi a^2}{\rho(i\omega)}\left(\frac{\partial\hat{p}(\omega)}{\partial z}\right)\left\{1-2\frac{J_1(\beta)/\beta}{J_0(\beta)}\right\} \qquad \text{(B-48)}$$

La Ec. (B-48) es el resultado más importante del presente análisis y es punto de partida en los cálculos posteriores. Un hecho importante de la Ec. (B-48) es la dependencia con el parámetro β el cual, nos aporta información acerca de los mecanismos inerciales y de flujo a través de la función fluidez compleja.

APÉNDICE C

Teoría a primer orden (ε^1):

Al sustituir, las series en las ecuaciones diferenciales y separar las contribuciones a primer orden, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones acopladas:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \sigma_{(zr)1}}{\partial r}\right)=\frac{\partial p_0}{\partial z}n(t)+\rho V\dot{n}(t) \tag{C-1}$$

$$\frac{\partial Vz_{(1)}}{\partial r}=(\varphi\sigma_{zr})_1+\frac{1}{G_0}\frac{\partial \sigma_{(zr)1}}{\partial t}=\varphi_0\sigma_{(zr)1}+\varphi_1\sigma_{(zr)0}+\frac{1}{G_0}\frac{\partial \sigma_{(zr)1}}{\partial t} \tag{C-2}$$

Al integrar la Ec. (4.4.12) con respecto a la coordenada radial r, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{(zr)1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p_0}{\partial z}n(t)+\rho V\dot{n}(t)\right)r=\left(n(t)+\frac{\rho V/2}{(\partial p_0/\partial z)/2}\dot{n}(t)\right)\sigma_{(zr)0} \tag{C-3}$$

Si se define la siguiente función estocástica modificada, se tiene lo siguiente:

$$N(t)=n(t)+\frac{\rho V/2}{(\partial p_0/\partial z)/2}\dot{n}(t) \tag{C-4}$$

El esfuerzo a orden uno toma la forma:

$$\sigma_{(zr)1}=N(t)\sigma_{(zr)0} \tag{C-5}$$

En la Ec. (4.4.12), el esfuerzo debe de permanecer acotado para cualquier valor de r, por lo que la constante de integración debe de valer cero.

$$\frac{\partial Vz_{(1)}}{\partial r}=\varphi_0\sigma_{(zr)1}+\varphi_1\sigma_{(zr)0}+\frac{1}{G_0}\frac{\partial\sigma_{(zr)1}}{\partial t} \tag{C-6}$$

Al sustituir el esfuerzo a primer orden y la función fluidez, se obtiene la siguiente expresión matemática:

$$\frac{\partial Vz_{(1)}}{\partial r}=\varphi_0\sigma_{(zr)1}+\varphi_1\sigma_{(zr)0}+\frac{1}{G_0}\frac{\partial\sigma_{(zr)1}}{\partial t}=N(t)\sigma_{(zr)0}\left(\varphi_0+\sigma_{(zr)0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\sigma_{(zr)0}}\right)+\frac{1}{G_0}\dot{N}(t)\sigma_{(zr)0} \tag{C-7}$$

Simplificando la expresión

$$\frac{\partial Vz_{(1)}}{\partial r}=N(t)\sigma_{(zr)0}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma_{(zr)0}}\left(\sigma_{(zr)0}\varphi_0\right)\right)+\frac{1}{G_0}\dot{N}(t)\sigma_{(zr)0} \tag{C-8}$$

La rapidez de deformación a orden uno es:

$$\varphi_{(ap)1}(t)=\frac{4}{\sigma_w^4}\int_0^{\sigma_w}\frac{\partial Vz_{(1)}}{\partial r}\sigma_{rz0}^2 d\sigma_{rz0} \tag{C-9}$$

Al sustituir la rapidez de deformación

$$\varphi_{(ap)1}(t)=N(t)\frac{4}{\sigma_w^4}\int_0^{\sigma_w}\sigma_{rz0}^3\left(\frac{\partial}{\partial\sigma_{(zr)0}}\left(\sigma_{(zr)0}\varphi_0\right)\right)d\sigma_{rz0}+\dot{N}(t)\frac{4}{\sigma_w^4}\int_0^{\sigma_w}\sigma_{rz0}^3 d\sigma_{rz0} \tag{C-10}$$

La expresión (4.4.17) puede integrarse por partes

$$\varphi_1=\frac{4}{\left(\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}\right)^4}\left\{\int_0^{\sigma_{(zr)0}|_{r=a}}\sigma_{(zr)0}^3\frac{\partial\left(\varphi_0\sigma_{(zr)0}\right)}{\partial\sigma_{(zr)0}}d\sigma_{(zr)0}N(t)+\int_0^{\sigma_{(zr)0}|_{r=a}}\sigma_{(zr)0}^3 G_0^{-1}d\sigma_{(zr)0}\,\dot{N}(t)\right\} \tag{C-11}$$

La Ec. (C-11) puede ser escrita como:

$$\varphi_1=\frac{4}{\left(\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}\right)^4}\int_0^{-\gamma_w}\sigma_{(zr)0}^3 d\gamma_0 N(t)\ +G_0^{-1}\left(\frac{4}{\left(\sigma_{(zr)0}\big|_{r=a}\right)^4}\int_0^{\sigma_{(zr)0}|_{r=a}}\sigma_{(zr)0}^3 d\sigma_{(zr)0}\right)\dot{N}(t) \tag{C-12}$$

La rapidez de deformación evaluada en la pared puede ser calculada a través de la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sigma_w^3}\int_0^{-\gamma_w}\sigma_0^3(r)d\gamma_0(r)=\gamma_w-3Q_0 \tag{C-13}$$

Multiplicando la Ec. (C-13) por 4/σw, se tiene lo siguiente:

$$\varphi_w=3\varphi_0+\frac{4}{\sigma_w^4}\int_0^{-\gamma_w}\sigma_0^3(r)d\gamma_0(r) \tag{C-14}$$

En donde la fluidez en la pared y a orden cero, fueron definidas como:

$$\begin{aligned}\varphi_w&=\frac{\gamma_w}{\sigma_w/4}=\frac{\gamma_w}{Q_N}\\ \varphi_0&=\frac{Q_0}{\sigma_w/4}=\frac{Q_0}{Q_N}\end{aligned} \tag{C-15a,b}$$

Utilizando la regla de Leibnitz, la rapidez de deformación, se expresa como:

$$\gamma_w=\frac{1}{\sigma_w^2}\frac{d}{d\sigma_w}\left\{\sigma_w^3Q_0\right\} \tag{C-16}$$

La cual, puede ser expresada en termino de la fluidez en la pared: $\varphi_w=\gamma_w/(\sigma_w/4)$

$$\varphi_w=\frac{4}{\sigma_w^3}\frac{d}{d\sigma_w}\left\{\sigma_w^3Q_0\right\} \tag{C-17}$$

Por lo que, simplificando la Ec. (93)

$$\varphi_w=3\frac{Q_0}{\sigma_w/4}+4\frac{dQ_0}{d\sigma_w}=3\frac{Q_0}{Q_N}+4\frac{dQ_0}{d\sigma_w} \tag{C-18}$$

La fluidez en la pared es la suma de la fluidez a orden cero y una corrección debido a la pendiente de la curva flujo BMP vs esfuerzo en la pared

$$\varphi_w=3\varphi_0+4\frac{dQ_0}{d\sigma_w} \tag{C-19}$$

La Ec. (C-19) se puede expresar como:

$$\varphi_1 = \left(\varphi_w - 3\,\varphi_0 \right) N(t) + G_0^{-1}\,\dot{N}(t) \tag{C-20}$$

Combinando las Ecs. (C-20) y (C-21) se tiene la siguiente expresión:

$$\varphi_1 = 4\frac{dQ_0}{d\sigma_w} N(t) + G_0^{-1}\,\dot{N}(t) = \frac{dQ_0}{dQ_N} N(t) + G_0^{-1}\,\dot{N}(t) \tag{C-21}$$

La Ec. (C-21) es la fluidez a primer orden, si calculamos el aumento,

$$I_{\varphi_1}(\%) = 100\varepsilon \frac{\langle \varphi_1 \rangle}{\varphi_0} = 100\varepsilon\varphi_0^{-1}\left(\frac{dQ_0}{dQ_N} \langle N(t) \rangle + G_0^{-1} \left\langle \dot{N}(t) \right\rangle \right) \tag{C-22}$$

Una vez que la función estocástica se sustituye en la Ec. (C-22), y se promedia, se tiene lo siguiente:

$$\boxed{I_{\varphi 1}(\%) = \frac{dLnQ_0}{dLnQ_N} \langle n_P(t) \rangle} \tag{C-23}$$

El aumento del fluidez depende de un cociente de una fluidez local asociada a la monotonía de la curve fluidez vs esfuerzo en la pared y otra a la fluidez aparente asociada al promedio integral de esta, en estado estacionario y homogéneo. Sustituyendo la serie de Fourier definida en el capítulo 3, el aumento es constante a primer orden y tiene la siguiente representación analítica:

$$I_{\varphi}(\%) = 100\varepsilon^1 \langle N(t) \rangle = 50\varepsilon M_\ell \tag{C-24}$$

APÉNDICE D

Este apéndice muestra los pasos matemáticos en detalle del método perturbativo a segundo orden.

$$\gamma_2(r,t) = -\frac{1}{2}\gamma_1^2(r,t)\frac{\ddot{\sigma}_0(r)}{\dot{\sigma}_0(r)} \tag{D-1}$$

Sustituyendo la Ec. (D-1) en el aumento en el flujo e integrando por partes, la siguiente expresión para el flujo volumétrico es obtenida:

$$Q_2 = -\int_0^1 \gamma_2(r,t)\, r^2 dr = \left(-\frac{4}{\sigma_w^4}\int_0^{-\sigma_w} \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^4}{\dot{\sigma}_0^2}\ddot{\sigma}_0(r)\, d\sigma_0 H^2(t)\right)\frac{\sigma_w}{4} \tag{D-2}$$

Por lo que, el promedio de la fluidez a segundo orden, se puede deducir inmediatamente como:

$$\left\langle \varphi_2(\sigma_w,\beta,B,C)\right\rangle = -\frac{1}{\sigma_w^4}\int_0^{-\sigma_w} \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^4}{\dot{\sigma}_0^3}\ddot{\sigma}_0(r)\, d\sigma_0 \left\langle H^2(t)\right\rangle \tag{D-3}$$

La diferencial del esfuerzo cortante, puede ser expresada como la derivada del esfuerzo a orden cero con respecto a la rapidez de deformación

$$d\sigma_0 = \frac{d\sigma_0}{d\gamma_0}d\gamma_0 = \dot{\sigma}_0\, d\gamma_0 \tag{D-4}$$

Sustituyendo la Ec. (D-4) en la Ec. (D-3)

$$\left\langle \varphi_2(\sigma_w,\beta,B,C)\right\rangle = -\frac{1}{\sigma_w^3}\int_0^{-\sigma_w} \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^4}{\dot{\sigma}_0^3}\ddot{\sigma}_0(r)\,\dot{\sigma}_0\, d\gamma_0 \left\langle H^2(t)\right\rangle = -\frac{1}{\sigma_w^3}\int_0^{-\sigma_w} \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^4}{\dot{\sigma}_0^2}\ddot{\sigma}_0(r)\, d\gamma_0 \left\langle H^2(t)\right\rangle \tag{D-5}$$

Usando la siguiente expresión matemática:

$$\frac{d}{d\gamma_0}\left[\frac{1}{\dot{\sigma}_0}\right]=\frac{d}{d\dot{\sigma}_0}\left[\frac{1}{\dot{\sigma}_0}\right]\frac{d\dot{\sigma}_0}{d\gamma_0}=-\frac{\ddot{\sigma}_0}{\dot{\sigma}_0^{2}} \tag{D-6}$$

Sustituyendo la Ec. (D-6) en la Ec. (D-5)

$$\left\langle \varphi_2\left(\sigma_w,\beta,B,C\right)\right\rangle=\frac{1}{\sigma_w^3}\int_0^{-\sigma_w}\frac{\sigma_0^4}{2}\left(-\frac{\ddot{\sigma}_0(r)}{\dot{\sigma}_0^{2}}\right)d\gamma_0\left\langle H^2(t)\right\rangle=\frac{1}{2\sigma_w^3}\int_1^{d\gamma_0/d\sigma_0|_{-\sigma_w}}\sigma_0^4 d\left[\frac{1}{\dot{\sigma}_0}\right]\left\langle H^2(t)\right\rangle \tag{D-7}$$

El promedio de la fluidez a Segundo orden, toma la siguiente forma:

$$\left\langle \varphi_2\left(\sigma_w,\beta,B,C\right)\right\rangle=\frac{1}{\sigma_w^3}\int_0^{-\sigma_w}\frac{\sigma_0^4}{2}\left(-\frac{\ddot{\sigma}_0(r)}{\dot{\sigma}_0^{2}}\right)d\gamma_0\left\langle H^2(t)\right\rangle=\frac{1}{2\sigma_w^3}\int_1^{d\gamma_0/d\sigma_0|_{-\sigma_w}}\sigma_0^4 d\left[\frac{d\gamma_0}{d\sigma_0}\right]\left\langle H^2(t)\right\rangle \tag{D-8}$$

Suponiendo que la rapidez de deformación es continua, se puede expresar en función de su inversa, por lo que se tiene la siguiente expresión matemática:

$$\frac{d\gamma_0}{d\sigma_0}=1/\frac{d\sigma_0}{d\gamma_0}=\frac{1+\left(3-2B\right)C^2\sigma_0^2}{1+BC^2\sigma_0^2} \tag{D-9}$$

Integrando por partes, la Ec. (D-8) se tiene lo siguiente:

$$\left\langle \varphi_2\left(\sigma_w,\beta,B,C\right)\right\rangle=\frac{1}{2\sigma_w^3}\left(\sigma_0^4\frac{d\gamma_0}{d\sigma_0}\bigg|_{-\sigma_w}-4\int_0^{-\sigma_w}\sigma_0^3\frac{d\gamma_0}{d\sigma_0}d\sigma_0\right)\left\langle H^2(t)\right\rangle \tag{D-10}$$

Entonces

$$\left\langle \varphi_2\left(\sigma_w,\beta,B,C\right)\right\rangle=2\left(\frac{\sigma_w}{4}\frac{d\gamma_w}{d\sigma_w}-\frac{1}{\sigma_w^3}\int_0^{-\gamma_w}\sigma_0^3 d\gamma_0\right)\left\langle H^2(t)\right\rangle \tag{D-11}$$

La integral del segundo miembro de la Ec. (D-11), puede expresarse en términos de la diferencia entre la rapidez de demoración en la pared y el triple del flujo volumétrico:

$$\frac{1}{\sigma_w^3}\int_0^{-\gamma_w}\sigma_0^3(r)d\gamma_0=\gamma_w-3Q_0=\sigma_w\frac{dQ_0}{d\sigma_w} \tag{D-12}$$

Substituyendo la Ec. (D-12) en la Ec. (D-11)

$$\left\langle \varphi_2\left(\sigma_w,\beta,B,C\right)\right\rangle=2\left(Q_N\frac{d\gamma_w}{d\sigma_w}-\sigma_w\frac{dQ_0}{d\sigma_w}\right)\left\langle H^2(t)\right\rangle \tag{D-13}$$

La derivada de la rapidez con respecto al esfuerzo en la pared, puede ser expresada en termino de una combinación de primera y segunda derivadas del flujo volumétrico a orden cero:

$$\frac{d\gamma_w}{d\sigma_w}=4\frac{dQ_0}{d\sigma_w}+\sigma_w\frac{d^2Q_0}{d^2\sigma_w} \tag{D-14}$$

Substituyendo la Ec. (D-14) en la Ec. (D-13) y simplificando

$$\left\langle \varphi_2\left(\sigma_w,\beta,B,C\right)\right\rangle=2^3\left(\sigma_wQ_N\frac{d^2Q_0}{d\sigma_w^2}\right)\left\langle H^2(t)\right\rangle=2\left(\sigma_w^2\frac{d^2Q_0}{d\sigma_w^2}\right)\left\langle H^2(t)\right\rangle \tag{D-15}$$

Finalmente, el promedio de la fluidez a segundo orden tiene la forma:

$$\left\langle \varphi_2\left(\sigma_w,\beta,B,C\right)\right\rangle=2\left(Q_N^2\frac{d^2Q_0}{dQ_N^2}\right)\left\langle H^2(t)\right\rangle \tag{D-16}$$

NOMENCLATURA

a	Radio del capilar [m]
G_0	Modulo elástico [Pa]
L	Longitud del capilar [m]
$\{N_1, N_2\}$	Primera y segunda diferencia de esfuerzos normales [Pa]
Q	Flujo volumétrico [m^3/s]
Letras griegas	
ε	Parámetro de perturbación [1]
η	Función viscosidad [Pa s]
$\{\eta_0, \eta_\infty\}$	Viscosidades a bajo y alto corte [Pa s]
ϕ	Función fluidez [1/Pas]
φ_0	Función fluidez a bajo corte [1/Pas]
φ_{app}	Función fluidez aparente [1/Pas]
φ_∞	Fluidez a alto corte [1/Pas]
φ_1	Fluidez a primer orden [1/Pas]
$\dot{\gamma}_{rz}$	Escalar rapidez de deformación [s^{-1}]
λ_0	Tiempo de relajación de Maxwell a bajo corte [s]
λ_∞	Tiempo de relajación de Maxwell a alto corte [s]
σ_{rz}	Componente rz del tensor de esfuerzos [Pa]
$\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}\}$	Componentes normales del tensor de esfuerzos [Pa]
σ_s	Propiedad material del modelo de Reiner-Philippoff [Pa]
σ_w	Esfuerzo en la pared [Pa]
θ	Coordenada angular [1]
Vector, dyadic and tensors	
$\mathbf{V}$	Vector velocidad [m/s]
$\mathbf{V}\otimes\mathbf{V}$	Producto diádico del vector de velocidad [m^2/s^2]

$\mathbf{D}$	Tensor rapidez de deformación [1/s]
$\mathbf{f}$	Fuerza de cuerpo [N/m^3]
σ	Tensor de esfuerzos [Pa]
$\mathbf{W}$	Tensor vorticidad [1/s]
$\nabla\mathbf{V}$	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
$\nabla\mathbf{V}^T$	Transpuesta del tensor gradiente de velocidad [1/s]
II_D	Segundo invarante del tensor rapidez de deformación [1/s]
$\lvert\sigma\rvert$	Magnitud del tensor de esfuerzos [Pa]
Otros símbolos	
$()^T$	Transpuesta de una matrix [1]
∇	Operador gradiente [m^{-1}]
$\nabla\cdot$	Operador divergencia [m^{-1}]
∇^2	Operador Lapalciano [m^{-1}]
$\overset{\nabla}{\sigma}$	Derivada convectiva superior del modelo de Maxwell [1/s]
Tr	Traza de una matriz [1]
$\langle\cdot\rangle$	Valor promedio [1]

GLOSARIO

Deformación:	Cambio de posición con respecto a otra.
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación)
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley newton aplicada aun medio continuo.
Esfuerzo en la pared:	Esfuerzo evaluado en la pared.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Fluido:	Es aquel que al aplicarle un esfuerzo cortante sufre una deformación continua e irreversiblemente.
Fluido biológico:	Son las diferentes excreciones y secreciones que provienen del organismo.
Fluidos complejos:	Son aquellos que presentan comportamiento reológico en estado estacionario y no estacionario.
Flujo cortante:	Flujo que se aplica una fuerza tangencial al sistema que se deforma continua e irreversiblemente.
Flujo homogéneo:	Es el flujo en la cual las propiedades del sistema no dependen de la posición.

Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante.
Fluido newtoniano:	Son aquellos donde la viscosidad muestra una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.
Fluido no-newtoniano:	La viscosidad no muestra una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación.
Flujo oscilante:	Es el flujo que se origina cuando un plato oscila a una función periódica.
Flujo pulsátil:	Flujo asociado a un gradiente de presión pulsátil representado por una función matemática estocástica.
Fluido viscoelástico:	Es aquel fluido que tiene una contribución viscosa y otra elástica.
Flujo volumétrico:	Volumen por unidad de tiempo.
Frecuencia Angular:	Se refiere a la frecuencia del movimiento circular expresada en proporción del cambio de ángulo.
Función estocástica:	Función probabilística que evoluciona en el tiempo.
Modelo de Maxwell:	Ecuación constitutiva que describe el estado viscoelástico de un sistema en el régimen de rapideces de deformación bajas (viscoelasticidad lineal).
Módulo elástico:	Está asociado con la energía almacenada en el material, y se mide en pascal.
Módulo viscoso:	Está asociada con la energía disipada por el material, y se mide en pascal.
Módulo complejo:	Es el módulo del vector obtenido como suma de las contribuciones de los módulos elásticos y viscosos.

Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.
Sangre:	Fluido biológico que presenta dos fases y que es viscoelástico.
Tensor de Esfuerzo:	Es una matriz simétrica de nueve elementos (3x3) en el cual se describe el estado de las fuerzas en un elemento de control.
Tiempo de relajación:	Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un estado de equilibrio después de un periodo.
Tiempo de retardo:	Es el tiempo en el que tarda el material en llegar al equilibrio debido a la aplicación de un esfuerzo cortante.
Velocidad promedio:	Es la velocidad axial promediada a través del área de flujo.
Viscoelasticidad lineal:	Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.
Viscoelasticidad no lineal:	Es la región a bajas deformaciones, en donde el fluido presenta repuestas viscosas y elásticas.

BIBLIOGRAFÍA

Apostolidis AJ, Beris AN (2015) The effect of cholesterol and triglycerides on the steady state rheology of blood. Rheol Acta 1: 1-13.

Apostolidis AJ, Moyer AP, Beris AN (2016) Non-Newtonian effects in simulations of coronary arterial blood flow. J Non-Newton Fluid Mech 233: 155–165.

Bautista F, De Santos JM, Puig JE, Manero O (1999) Understanding thixotropic and antithixotropic behavior of viscoelastic micellar solutions and liquid crystalline dispersions. The model. J Non-Newton Fluid Mech 80: 93-113.

Bautista F, Soltero JFA, Macias ER, Manero O (2002) On the shear banding flow of wormlike micelles. J Phys Chem B 106: 13018-13026.

Bautista F, Soltero JFA, Pérez–López JH, Puig JE, Manero O (2000) On the shear banding flow of elongated micellar solutions. J Non-Newton Fluid Mech 94: 57-66.

Barnes HA, Towsend P, Walters K (1969) Flow of non-newtonian liquids under a varying pressure gradient. Nature 224: 585-587.

Barnes HA, Towsend P, Walters K (1971) On pulsatile flow of non-Newtonian liquids. Rheol Acta 10: 517-527.

Barnes, H.A., Hutton, J.F., & Walters, K. 1989 An introduction to rheology, Amsterdam: Elsevier.

Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 Dynamics of polymeric liquids, vol. 1. New York: John Wiley & Sons.

Bird, R.B., Stewart E. & Lighfoot E.N. 2002 Transport Phenomena, Second Edition. John Wiley and Sons, Inc.

Brust M, Schaefer C, Doerr R, Pan L, Garcia M, Arratia P, Wagner C (2013) Rheology of Human Blood Plasma: Viscoelastic Versus Newtonian Behavior. Phys Rev Lett 110:078305.

Calderas, F., Sánchez-Solis, A., Maciel, A. & Manero, O. 2009 The transient flow of the PETPEN-Montmorillonite clay Nanocomposite, Macromol Symp. MACROMEX 283-284 354-360.

Casualli J, Clermont JR, Von Ziegler A, Mena B (1990) The oscillating die: a useful concept in polymer extrusion. J Polym Eng Sci 30: 1551-1556.

Cates ME (1987) Reptation of living polymers: dynamics of entangled polymers in the presence of reversible chain-scission reactions. Macromolecules 20: 2289-2296.

Cates ME, Candau SJ (1990) Statics and dynamics of worm-like surfactants micelles. J Phys Condens Matter 2: 6869-6892.

Chen J, Lu X (2006) Numerical investigation of the non-Newtonian pulsatile blood flow in a bifurcation model with a non-planar branch. J Biomech 39: 818–832.

Changdar S, De S (2016) Analysis of non-linear pulsatile blood flow in artery through a generalized multiple stenosis. Arab J Math 5: 51–61

Cuevas, S & Del Rio, J.A. 2001 Dynamical permeability of electrically conducting fluids under magnetic fields in annular ducts. Phys. Rev. E. 64, 016313/1-7.

Currie, I.G, 1974 Fundamental Mechanics of Fluids, McGraw-Hill Press.

Davies JM, Bhumiratana S, Bird RB (1978) Elastic and inertial effects in pulsatile flow of polymeric liquids in circular tubes. J Non-Newtonian Fluid Mech 3: 237-259.

De Andrade Lima LRP, Rey AD (2005) Pulsatile Poiseuille flow of discotic mesophases. Chem Eng Sci 60: 6622-6636.

De Andrade Lima LRP, Rey AD (2006) Pulsatile flows of Leslie-Ericksen liquid crystals. J Non-Newton Fluid Mech 135: 32-45.

De Kee D, Chan Man Fong CF (1994) Rheological Properties of Structured Fluids. Polym Eng Sci 34: 438-445.

Del Rio J.A (1993) Contribuciones teóricas al estudio de los fenómenos de transporte en medios porosos. Ciencia 44, 527-544.

Del Rio JA, López de Haro M, Whitaker S (1998a) Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. Phys Rev E 58: 6323-6327.

Del Rio J.A., De Haro, M.L. & Castrejón-Pita J.R. (1998b) Enhancement in the dynamic response of a viscoelastic fluid flowing in a tube. Phys. Rev. E. 58 (5) 6323.

Del Rio J.A & Castrejón-Pita J.R. (1987) Modelo simple para la permeabilidad dinámica de fluidos viscoelásticos. Revista Mexicana de Física. 49 (1) 74-85.Ba

Ding F, Giacomin, Bird RB, Kweon CB (1999) Viscous dissipation with fluid inertia in oscillatory shear flow. J Non-Newtonian Fluid Mech 86: 359-374,

Dunwoody J (1996) The effects of inertia and infinite amplitude on oscillatory plane shear flow of K-BKZ fluids such as LPDE melts. J Non-Newtonian Fluid Mech 65: 195-200.

Edwards MF, Nellist DA, Wilkinson WL (1972) Pulsating flows of non-Newtonian fluids in pipes. Chem Eng Sci 27: 545-553.

EL-Shahed M (2003) Pulsatile flow of blood through a stenosed porous medium under periodic body acceleration. Appl Math Comput 138: 479–488.

Fredrickson AG (1964) Principles and Applications of Rheology. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Gianetto A, Baldi G, Capra V (1973) Laminar pulsed flow of non-Newtonian fluids. Chem Eng Sci 27: 295-306.

Giesekus H (1982) A Simple Constitutive Equation for Polymer Fluids Based on the Concept of Deformation-dependent Tensorial Mobility. J Non-Newtonian Fluid Mech 11: 69-109.

Giesekus H (1984) On Configuration-Dependent Generalized Oldroyd Derivatives. J Non-Newtonian Fluid Mech 14: 47-65.

Giesekus H (1985) Constitutive equation for Polymer Fluids Based on the Concept of Configuration dependent Molecular Mobility: A Generalized Mean-Configuration Model. J Non-Newtonian Fluid Mech 17: 349-372.

Ghasemi SE, Hatami M, Hatami J, Sahebi SAR, Ganji DD (2016) An efficient approach to study the pulsatile blood flow in femoral and coronary arteries by Differential Quadrature Method. Physica A 443: 406–414.

Herrera-Valencia E.E. & Rey, A,D. 2014 Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. Phil. Trans. R. Soc. A. 372: 20130369/1-28.

Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E. & Manero, O. 2010 Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 165 174-183.

Herrera EE, Calderas F, Chavez AE, Manero O, Mena B (2009) Effect of random longitudinal vibration on the Poiseuille flow of a complex liquid. Rheol Acta 48:779-800

Herrera-Velarde JR, Mena B (2000) A note on Newtonian and non-Newtonian oscillatory pipe flow. Rev Mex Fís 46: 566-571.

Herrera-Velarde JR, Mena B (2001) Viscous dissipation of a power law fluid in a oscillatory pipe flow. Rev Mex Fís 47: 351-356.

Herrera Velarde JR, Zenit R, Mena B (2003) Measurement of the temperature rise in non-Newtonian oscillatory pipe flows. J Non-Newtonian Fluid Mech 109: 157-176.

Kolbasov A, Comiskey PM, Sahu RP, Sinha-Ray S, Yarin AL, Sikarwar BS, Kim S, Jubery TZ, Attinger D. Blood rheology in shear and uniaxial elongation. Rheol. Acta (2016).

Lin Y, Han Tan GW, Phan-Thien N, Cheong Khoo B (2015) Flow enhancement in pulsating flow of non-colloidal suspension in tubes. J Non-Newtonian Fluid Mech 202: 13-17.

Lopez de Haro, M., Del Rio J.A. & Whitaker, S. 1996 Flow of Maxwell fluids in Porous Media. Transp. Porous Media 25, 167-192.

Manero O, Bautista F, Soltero JFA, Puig JE (2002) Dynamics of worm-like micelles: the Cox-Merz rule. J Non-Newtonian Fluid Mech 106: 1-15.

Manero O, Mena B (1977) An interesting effect in non-Newtonian flow in oscillating pipes. Rheol Acta 19: 277-284.

Manero O, Walters K (1980) On elastic effects in unsteady pipe flows. Rheol Acta 19: 277-284.

Moreno L, Calderas F, Sanchez-Olivares G, Medina-Torres L, Sanchez-Solis A, Manero O (2015) Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood. Korea-Aust Rheol J 27: 1-10.

Moreno L. Calderas, F. Sánchez-Olivares, G, Medina-Torres, L., Sánchez-Solis, A & Manero, O. 2013. La sangre humana desde el punto de vista de la reología. Materiales Avanzados. 20, 33-37.

Thruston, S. 1976 The effects of frequency of oscillatory flow the impedance of rigid, blood filled tubes, Biorheology 13, 191-199.

Majhi SN, Nair VR (1994) Pulsatile flow of third grade fluids under body acceleration-modelling blood flow. Internat J Eng Sci 32:839–846.

Manero O, Bautista F, Soltero JFA, Puig JE (2002) Dynamics of worm-like micelles: the Cox-Merz rule. J Non-Newtonian Fluid Mech 106: 1-15.

Manero O, Mena B (1977) An interesting effect in non-Newtonian flow in oscillating pipes. Rheol Acta 19: 277-284.

Manero O, Walters K (1980) On elastic effects in unsteady pipe flows. Rheol Acta 19: 277-284.

Massoudi M, Phuoc TX (2008) Pulsatile flow of blood using a modified second-grade fluid model. Comput Math Appl 56:199–211.

Mena B, Manero O, Binding DM (1979) Complex flow of viscoelastic fluids through oscillating pipes. Interesting effects and applications. J Non-Newtonian Fluid Mech 5: 427-448.

Middleman S (1977) Fundamental of polymer processing. McGraw-Hill. New-York.

Moreno L, Calderas F, Sanchez-Olivares G, Medina-Torres L, Sanchez-Solis A, Manero O (2015) Effect of cholesterol and triglycerides levels on the rheological behavior of human blood. Korea-Aust Rheol J 27: 1-10.

Moyers-Gonzalez MA, Owens RG (2010) Mathematical modelling of the cell-depleted peripheral layer in the steady flow of blood in a tube. Biorheology 47: 39-71.

Moyers-Gonzalez MA, Owens RG, Fang J (2009) On the high frequency oscillatory tube flow of healthy human blood. J Non-Newtonian Fluid Mech 163: 45-61.

Moyers-Gonzalez MA, Owens RG, Fang J (2008a) A nonhomogeneous constitutive model for human blood. Part 1. Model derivation and steady flow. J Fluid Mech 617: 327-354.

Moyers-Gonzalez MA, Owens RG, Fang J (2008b) A nonhomogeneous constitutive model for human blood: Part II. Asymptotic solution for large Peclet numbers. J Non-Newtonian Fluid Mech 155: 146-160.

Moyers-Gonzalez MA, Owens RG, Fang J (2008c) A nonhomogeneous constitutive model for human blood: Part III. Oscillatory flow. J Fluid Mech 155: 161-173.

Nandakumar N, Sahu KC, Anand M (2015) Pulsatile flow of a shear-thinning model for blood through a two-dimensional stenosed channel. Eur J Mech B-Fluid 49: 29–35.

Owens RG (2006) A new micro structure-based constitutive model for human blood. J Non-Newtonian Fluid Mech 140: 57-70.

Phan-Thien N (1978) On pulsating flow of polymeric fluids. J Non-Newtonian Fluid Mech 4: 167-176.

Phan-Thien N (1980a) Flow enhancement mechanism of a pulsating flow of non-Newtonian liquids. Rheol Acta 19: 285-290.

Phan-Thien N (1980b) The effects of longitudinal vibration on pipe flow of a non-Newtonian fluid. Rheol Acta 19: 539-547.

Phan-Thien N (1982) On a pulsating flow of slightly non-Newtonian liquids. J Méc Théo Appl 1: 81-89.

Phan-Thien N, Dudek J (1982a) Pulsating flow of a plastic fluid. Nature 296: 843-84.

Phan-Thien N, Dudek J (1982b) Pulsating flow revisited. J Non-Newton Fluid-Mech 11: 147-161.

Prakash J, Ogulu A (2007) A study of pulsatile blood flow modeled as a power law fluid in a constricted tube. Int Commun Heat Mass Transfer 34:762–768.

Rabby MG, Razzak A, Molla MM (2013) Pulsatile non-Newtonian blood flow through a model of arterial stenosis. Procedia Eng 56: 225 – 231.

Razavi A, Shirani E, Sadeghi MR (2011) Numerical simulation of blood pulsatile flow in a stenosed carotid artery using different rheological models. J Biomech 44: 2021–2030.

Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2012a Rheological theory and simulations of surfactant nematic liquid crystals, in Self-Assembled Supramolecular Architectures: Lyotropic Liquid Crystals. New Jersey, USA: John Wiley & Sons Inc. Hoboken. (eds N. Garti, P. Somasundaran and R. Mezzenga).

Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2012b Liquid crystal models of biological materials and silk spinning. Biopolymers 97 374-396.

Rey, A.D. Mojdeh Golmohammadi & Herrera-Valencia, E.E. 2011 A model for mesophase wetting thresholds of sheets, fibers and fiber bundles. Soft Matter 5002-5009.

Siddiqui SU, Verma NK, NMishra S, Gupta RS (2009) Mathematical modelling of pulsatile flow of Casson's fluid in arterial stenosis. App Math and Comp 210:1–10.

Soltero JFA, Puig JE, Manero O (1999) Rheology of Cetyltrimethylammonium p-Toluenesulfonate-Water System. 3. Nonlinear Viscoelasticity. Langmuir 15: 1604-1612.

Sousa PC, Pinho FT, Alves MA, Oliveira MSN (2016) A review of hemorheology: Measuring techniques and recent advances. Korea-Aust Rheol J 28: 1-22.

Spenley NA, Cates ME (1994) Pipe models for entangled fluids under strong shear. Macromolecules 27: 3850-3858.

Spenley NA, Cates ME, McLeish TCB (1993) Non-linear rheology of wormlike micelles. Phys Rev Lett 71: 939-942.

Spenley NA, Yuan XF, Cates ME (1996) Non-monotonic constitutive laws and the formation of shear banded flows. J Phys II France 6: 551-571.

Sundstrom DW, Kaufman A (1977) Pulsating flow of polymeric solutions. Ind Eng Chem Process Des Dev 16: 320-325.

Tian F, Zhu L, Fok P, Lu X (2013) Simulation of a pulsatile non-Newtonian flow past a stenosed 2D artery with atherosclerosis. Comput Biol Med 43: 1098–1113.

Townsend P (1973) Numerical solutions of some unsteady flows of elastico-viscous liquids. Rheol Acta 12: 13-18.

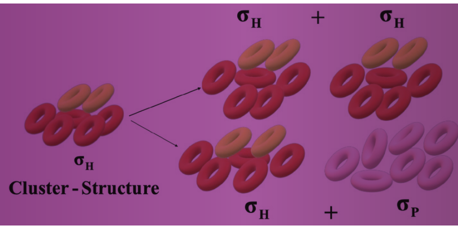
Wittberg LP, Wyk SV, Fuchs L, Gutmark E, Backeljauw P, Little IG (2016) Effects of aortic irregularities on blood flow. Biomech Model Mechanobiol 15: 345–360.

Wong CM, Chen CH, Isayaev AI (1990) Flow of thermoplastic in an annular die under parallel oscillations. Polym Eng Sci 30: 1574-1584.

Yaglom AM (1965) An introduction to the theory of stationary random functions, translated by Silverman RA. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Yazdani A, Li X, Karniadakis GE (2016) Dynamic and rheological properties of soft biological cell suspensions. Rheol Acta 55: 433–449.

Métodos perturbativos aplicados a bioingeniería de fluidos no-newtonianos: flujo pulsátil no lineal de sangre humana con hipercolesterolemia



En este trabajo se estudia el flujo pulsátil de un sistema que presenta estructura tomando en cuenta los efectos inerciales de la ecuación de movimiento. Para caracterizar el fluido se utiliza el modelo constitutivo de Tanner acoplado con el de Reiner-Phillippoff el cual, describe toda la curva de flujo en estado estacionario, i.e. dos mesetas a bajo y alto corte y una zona de transición tipo ley de potencia. Para describir el efecto pulsátil y vibrátil se supone que la presión y el término inercial de la ecuación de movimiento se modifican mediante una presión estocástica que representa las variaciones del gradiente de presión con el tiempo. El sistema de estudio es un capilar de radio r = a y longitud z = L. El proceso es isotérmico y se lleva a cabo en estado no estacionario, i.e la velocidad depende del tiempo en la ecuación de movimiento. El problema se divide en dos casos principales a bajas deformaciones y altas deformaciones. Para el primero, la función viscosidad es independiente de la rapidez de deformación, y por lo tanto se tiene una ecuación diferencial lineal parcial que incluye mecanismos inerciales-viscoelásticos y que satisface las premisas del formalismo de Fourier, por lo tanto, es soluble bajo esta transformada. Se obtiene la función de transferencia del sistema lineal que relaciona el flujo volumétrico con el gradiente de presión pulsátil y se obtienen las respectivas curvas resonantes. Para resolver el conjunto de ecuaciones no-lineales acopladas se propone un esquema perturbativo en términos de un parámetro de pequeñez ε que describe las variaciones de la amplitud del gradiente de presión estocástico. Las variables perturbadas son la velocidad axial, el esfuerzo y la función fluidez. A orden cero, se obtienen las expresiones correspondientes al estado estacionario y homogéneo del modelo Tanner-Reiner-Philippoff, se calculan las expresiones correspondientes a los perfiles de velocidad y flujo volumétrico a diferentes condiciones de flujo (Adelgazamiento al corte y tixotropía). A primer orden se obtiene la contribución por efecto del flujo pulsátil en el aumento de fluidez, se observa que este, produce un mínimo en la curva de fluidez a rapidez de deformación y esta es proporcional con la primera derivada de la fluidez a orden cero con el esfuerzo en la pared. A segundo orden, se observa que el aumento en la fluidez es proporcional a la segunda derivada de la fluidez con respecto al esfuerzo en la pared, ponderado por el cuadrado del esfuerzo rz evaluado en la pared.

FES ZARAGOZA

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza,
Campus I. Av. Guelatao No. 66 Col. Ejército de Oriente,
Campus II. Batalla 5 de Mayo s/n Esq. Fuerte de Loreto.
Col. Ejército de Oriente.
Iztapalapa, C.P. 09230 Ciudad de México.
Campus III. Ex fábrica de San Manuel s/n,
Col. San Manuel entre Corregidora y Camino a Zautla,
San Miguel Contla, Santa Cruz Tlaxcala.

http://www.zaragoza.unam.mx

9 786075 875125