Los números reales y sus propiedades

Tomas Vargas Ramírez
José Antonio Zamora Plata

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

Los números reales y sus propiedades

Tomas Vargas Ramírez
José Antonio Zamora Plata

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza

Dr. Vicente Jesús Hernández Abad
Director

Dra. Mirna García Méndez
Secretaria General

Dr. José Luis Alfredo Mora Guevara
Secretario de Desarrollo Académico

CD. Yolanda Lucina Gómez Gutiérrez
Secretaria de Desarrollo Estudiantil

Mtro. Jorge Enrique Carbajal López
Secretario Administrativo

Dra. María Susana González Velázquez
Jefa de la División de Planeación Institucional

Dra. Rosalva Rangel Corona
Jefa de la División de Vinculación

Dr. David Nahum Espinosa Organista
Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación

Lic. Carlos Raziel Leaños Castillo
Diseño de portada

Claudia Ahumada Ballesteros
Diseño y formación de interiores

Datos para catalogación bibliográfica

Autores: Tomas Vargas Ramírez, José Antonio Zamora Plata.

Los números reales y sus propiedades.

UNAM, FES Zaragoza, agosto de 2021.

Peso: 5.3 MB.

ISBN: 978-607-30-4896-5.

Diseño de portada: Carlos Raziel Leaños Castillo.
Formación de interiores: Claudia Ahumada Ballesteros.

Este libro fue dictaminado a través del Comité Editorial de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza y se aprobó en mayo de 2021.

Contenido

Prólogo

En esta obra abordaremos el inquietante mundo de los números reales. Para ello iniciamos con una serie de cuestionamientos que realiza el profesor Tomas Vargas al iniciar la segunda unidad de Matemáticas I, con ello propiciar una primera reflexión sobre los números reales.

Actividad 1. Integra un equipo de 3 o 4 personas e intenten dar respuesta a las siguientes interrogantes. Anota los comentarios en una hoja para su posterior análisis.

1. ¿Qué se expresa con los números reales?
2. ¿Qué no se expresa con los números reales?
3. ¿Por qué los números reales son una herramienta útil, entre otros, para el ingeniero, el biólogo, el físico y el químico?
4. ¿Qué aspecto de los problemas del área de ingeniería obliga a la utilización de los números reales?
5. ¿En qué situación los ingenieros no emplean los números reales?
6. ¿Los números reales van asociados en la mayoría de los fenómenos que ocurren en la naturaleza y los provocados en los laboratorios?
7. ¿Un número real es el medio para expresar cuantitativamente el resultado de medir y contar?
8. ¿Una propiedad general o específica de la materia se puede expresar mediante un número real?
9. ¿Las propiedades extensivas e intensivas de la materia se pueden expresar con un número real?
10. ¿Los números reales son útiles para expresar una magnitud y una cantidad?
11. ¿Por qué los números reales es un conjunto?
12. ¿Es un campo todos los números reales?
13. ¿Por qué los números reales es un conjunto de subconjuntos?
14. ¿Qué operaciones son válidas en los números reales?

15. ¿Integración, derivación y ecuaciones diferenciales, entre otras, están sujetas a los axiomas y teoremas del álgebra de los números reales?

16. ¿Por qué vale la pena estudiar con empeño y cuidado, el álgebra de los números reales?

17. ¿Qué depende de la comprensión, manejo conceptual y operativo del álgebra de los números reales?

Después de haber o no reflexionado, comparte con tus compañeros la hoja de respuestas y compara los comentarios de ambos equipos.

Actividad 2. Para una segunda aproximación a los números reales, ahora se invita a comentar en el grupo la información interrogante:

¿Qué se puede hacer ante una situación en la que se debe resolver un problema matemático?

En el contexto de una situación de esta naturaleza, se puede analizar, clasificar, jerarquizar, organizar y decidir, entre otros; hechos que puede conducir a la distinción y construcción de la solución a un problema específico, el que, según la clase de situación, puede estar relacionada con algo conocido, por ejemplo, con hechos puramente matemáticos, fenómenos físicos, químicos, biológicos, por citar algunas. Una vez que el problema ha sido construido y analizado, se continúa con el proceso de solución en el que se hacen explícitos los procedimientos, las estrategias, los argumentos, las formas de validar y comunicar; lo que, respectivamente, depende del tipo de problema.

En el proceso de construir y resolver un problema aparecen las acciones de contar y medir, las cuales conducen a símbolos y operaciones con literales relacionadas, los cuales son números no específicos, que conducen a números propiamente y al conjunto solución.

Asimismo, después de construir y resolver el problema, surge la necesidad de demostrar, probar, comprobar o verificar la solución según sea el tipo de problema y la solución, se verifica que los procedimientos, estrategias, conceptos y relaciones; además de ser correctos, fueron debidamente ejecutados y que por ende los resultados son los verdaderos. Se prueba argumentando el significado de las palabras, procedimientos y conceptos; que se verifica mediante un número.

En todo el proceso de construir y resolver problema, está la acción de comunicar, por ejemplo, hacer explícitos los conocimientos, las ideas, los conceptos, los procedimientos, los argumentos y las estrategias; intercambiar puntos de vista, información, datos y resultados; las gráficas y las tablas numéricas, entre otras, son medios útiles para representar ideas matemáticas e información; así como resultados, por ejemplo de experimentos, encuestas, etc.

Igualmente, las acciones de medir y contar, se presentan en los problemas en los que participan los conceptos de cantidad y magnitud, las cuales son susceptibles de ser medidas y contadas, por ejemplo, entre otras, la superficie, masa, temperatura y volumen. Algo parecido ocurre con las propiedades generales, específicas o particulares, extensivas e intensivas de la materia.

De igual manera, la acción de contar y medir, se presenta en conceptos geométricos como área, longitud, extensión de un cuerpo y volumen; entre otros, lo cual nos acerca a la idea intuitiva de número. Por ello se establece el siguiente objetivo:

Objetivo general

- Describir el conjunto de los números reales a fin de explicar las características que los definen y las operaciones que son permitidas.

Para satisfacer este objetivo general, el material aquí expuesto ha considerado emplear la siguiente técnica de enseñanza.

1. Se expone el tema

2. Se ejemplifica y se proponen ejercicios a los que se le denominarán problemas de asimilación, son problemas de dificultad del mismo nivel al de los ejemplos.

3. Se sugieren problemas de mayor complejidad a los que se les denomina problemas de reafirmación, estos serán de nivel equiparables a los aplicados en los exámenes parciales u ordinarios de la materia.

4. Se incluyen también dos secciones de problemas denominados problemas de evaluación con el propósito de que el estudiante ejercite su habilidad para la resolución de un extenso número de problemas, aquí el estudiante puede tomar el tiempo para mejorar sus marcas e identificar que temas debe repasar.

Capítulo 1

Conjunto de números

1.1 Números naturales (N)

El resultado de contar objetos es un número, por ejemplo, 8, 10 y 20 son números. A este conjunto de números se les llama conjunto de los números naturales y se les denota por N. Simbólicamente se les expresa como

$$\boldsymbol{N = \{x/x = 1, 2, 3, \ldots\}}$$

donde los tres puntos indican que la lista o enumeración continúa indefinidamente.

Para un conjunto de los primeros diez números naturales se tiene:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Puede observarse que el primer número natural es 1 y que al número natural n le sigue n + 1; distintos números naturales m y n tienen distintos siguientes m + 1 y n + 1 son diferentes; de esta forma, cualquier número natural puede alcanzarse iniciando con 1 y contando los siguientes consecutivos.

En los números naturales tiene solución la ecuación $x - 1 = 2$, dando como solución $x = 3$, mientras que $x + 6 = 6$ no tiene solución en este conjunto de números naturales. Porque x asumiría el valor de cero, y cero no es elemento del conjunto de los números naturales. Este es un defecto manifiesto de los números naturales, el cual se remedia agregando el cero al conjunto de los números naturales.

1.2 Números enteros (Z)

Si al conjunto de los números naturales, se le agrega el elemento cero, el nuevo conjunto es el conjunto de los números enteros positivos y éste se denota por Z^+. Este conjunto puede enunciar como

$$\boldsymbol{Z^+ = \{x/x = 0,1, 2, 3, \ldots\}}$$

El cero es el número que a cualquier número natural se le puede sumar y el resultado es ese mismo número. Cada número entero positivo tiene su simétrico tal que si el simétrico se suma al número positivo, el resultado es cero.

Mientras que $x + 6 = 6$ tiene solución en los números enteros positivos, la ecuación $x + 3 = 2$ no tiene solución en estos. Porque la solución es $x = 2 - 3$. Este es un defecto que se corrige agregando a los números enteros positivos los números enteros negativos.

1.3 Números enteros negativos (Z^-)

El conjunto de los números enteros negativos, se denota por Z^- y se expresa como

$$\mathbf{Z^- = \{x/x \text{ es un número entero negativo }\}} \text{ ó}$$

$$Z^- = \{ \ldots, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

También se puede decir que los simétricos de los números enteros negativos es el conjunto de los enteros positivos. Ver figura 1.1

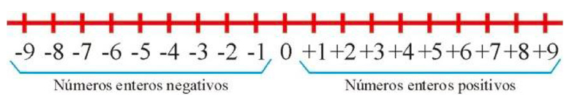


Figura 1.1 Números enteros.

Con los elementos de estos dos conjuntos, se forma el conjunto de los números enteros. Si Z = { …, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, … }, donde Z denota este conjunto, consecuentemente, $Z = Z^- \cup Z^+ \cup \{0\}$, cuyos conjuntos son disjuntos.

Un conjunto disjunto es cuando los elementos de un conjunto no se encuentran en el otro conjunto, se dice que no hay intersección entre ambos.

En el conjunto Z^- tiene solución $x + 3 = 2$, pero $2x = 5$ no tiene solución en Z. En este caso, la solución es $x = 5/2 = 2.5$. Esto significa que tiene un defecto, y el cual se corrige añadiendo los números racionales.

1.4 Números racionales (Q)

Sea ahora el conjunto cuyos elementos son los números de la forma a/b, donde $b \neq 0$ y a son enteros. A este conjunto se le llama el conjunto de los números racionales, que se denotan por Q. Así que

$$\boldsymbol{Q = \{x/x = a/b,\ a \in Z;\ b \in Z,\ b \neq 0\}}$$

Como la división de todo Z es posible entre uno y entre sí mismo, excepto cero, cualquier entero es un número racional. Por consiguiente, $Z \subset Q$ que se lee "Z es un subconjunto de Q".

Mientras la división esté definida, cualquier número racional puede expresarse como un decimal, por ejemplo,

$$\frac{7}{1000} = 0.007, \quad \frac{7}{4} = 1.75 \quad \text{y} \quad \frac{97}{32} = 3.03125$$

Puede observarse y comprobarse que estos números decimales tienen un último término. A estos decimales se les denomina decimales conmensurables. En cambio, hay números racionales cuya representación decimal es inconmensurable y periódica; por ejemplo,

$$\frac{1}{9} = 0.1111, \quad \frac{21}{74} = 0.2837837 \quad \text{y} \quad \frac{57}{11} = 5.181818\ ...$$

También se puede afirmar que todo decimal inconmensurable periódico es la representación de un número racional. En otras palabras, los números racionales se expresan como decimales periódicos y éstos en números racionales.

En Q tiene solución $2x = 5$, pero $x^2 = 7$ no, porque no existe en Q un número que verifique la igualdad. La solución es $x = \sqrt{7}$. Este es un defecto de los números racionales.

También, como pi no está en Q, y $pi = a/b$ es imposible, por lo que pi no puede ser solución de todo polinomio de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \quad \text{con} \quad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in Q.$$

Tampoco la longitud de una circunferencia está en Q, ni la base de los logaritmos naturales. Para cada uno de estos casos hay que recurrir a otro tipo de números, los irracionales.

1.5 Números irracionales (I)

Quien amplio los números racionales a reales fue el matemático alemán R. Dedekin. Éste, con ello, eliminaba todo defecto y el aspecto intuitivo, dejaba, geométricamente, sin hueco la recta de los números reales. Consecuentemente, quedaba demostrado la ubicación de los números reales cuya representación decimal es inconmensurable y no periódica, por ejemplo, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y en general, $\sqrt[n]{p}$, donde p es un número primo y n es un entero. Estos números forman el conjunto de los números irracionales y son tales que éstos no pueden ser iguales a los números racionales, es decir, nunca $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, …, $\sqrt{p}$, podrían ser, una a uno, igual a a/b, con $b \neq 0$.

Mostrar la correspondencia que existe entre números irracionales y puntos sobre la recta numérica no es tarea fácil. Mediante construcción se puede hallar el punto correspondiente al número irracional $\sqrt{2}$, lo que no se puede hacer para determinar el punto correspondiente, por ejemplo, del número irracional π. Todo punto que no corresponde a un número racional se asocia a un número irracional.

El conjunto de los números irracionales se denota por I y simbólicamente se expresa como

I = {x/x es un número decimal inconmensurable y no periódico}

Cuando un número real es irracional no es racional y viceversa, es decir $I \not\subset Q$ y $Q \not\subset I$, lo cual significa que estos conjuntos son disjuntos, por lo que $I \cap Q = \emptyset$ y $I \cup Q = R$.

Esta unión conforma al conjunto de los números reales por la unión de los números racionales y de los irracionales.

Ahora, los números reales es el conjunto en que tiene solución $x^2 = 7$, pero no $x^2 + 3 = 0$, porque no existe un número real que elevado al cuadrado verifique la igualdad. El problema ya no consiste en ampliar los números reales, sino de construir otro campo numérico. Este campo son los números complejos y se abordarán en otro libro o volumen posterior.

1.6 Aspectos geométricos de los números reales

Los números reales es un conjunto infinito y éstos también se pueden ver geométricamente como un conjunto de puntos, sucesión o campo. Los dos primeros conceptos de números reales conducen intuitivamente a la idea de continuo numérico y continuo geométrico, los cuales no se pueden desvincular, hecho que se entiende considerando el concepto de número real como el que tiene implícita la noción de infinito al considerar a éstos como límite de una sucesión convergente de intervalos encajonado. Entonces sí, el concepto podría vincularse con el concepto de punto. En este sentido, la recta de los números reales está formada por un conjunto infinito de puntos con las características siguientes.

- Cada punto de la recta corresponde exactamente a un número real.
- Cada número real corresponde a un punto de la recta.

Esto motiva la recta numérica. Ver la figura 1.2 siguiente.

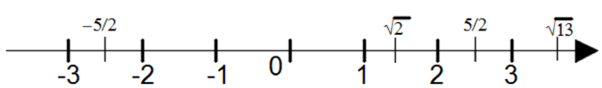


Figura 1.2 La recta numérica.

La gráfica de la recta numérica nos muestra que existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los puntos de una recta. En la recta numérica los números reales no se mueven y los puntos sí. Asimismo, ésta da idea de orden de los números, del valor absoluto, de la simetría y la distancia. En ella, se pueden efectuar operaciones como la suma, resta, multiplicación y división, así como definir dominios, particiones y sucesiones, los números reales son en sí mismos una sucesión.

Después de elegir un punto en la recta de los números reales para representar el cero, al cual se le llama origen, se fija libremente una unidad de distancia. En consecuencia, el punto que representa, por ejemplo, el entero positivo 5, se encuentra a una distancia de 5 unidades a la derecha del origen y como el número negativo –5 es el simétrico de número 5, éste estará representado por un punto que se encuentra a una distancia de 5 unidades a la izquierda de cero como se muestra en la figura 1.3. Esto es válido para cualquier número entero.

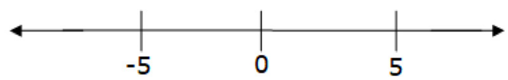


Figura 1.3 Representación de valores simétricos.

Igual que los números enteros, los números racionales geométricamente son puntos en la recta de los números reales. En efecto, la idea intuitiva de un número racional es la longitud de un segmento que se obtiene al dividir el segmento de longitud 1 en b partes iguales, donde b es un número entero cualquiera. El número 1/b se asocia con el punto límite de la primera de las subdivisiones. Igualmente, el punto límite de la segunda, tercera, y cuarta subdivisión se asocia respectivamente con los números 2/b, 3/b y 4/b; de esta manera se llega al número racional b/b que está asociado con el punto límite de la respectiva subdivisión. Ver la figura 1.4 siguiente.

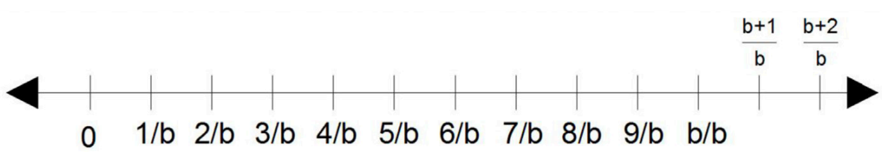


Figura 1.4 Representación con subdivisiones de b.

Si c es un número natural, el número racional c/b es la longitud de c de esas partes y el punto al que está asociado se encuentra en c de esas partes a la derecha del origen, en forma particular, el número racional 7/2 es la longitud de 7/2 y el punto al que está asociado está 7/2 a la derecha del origen. Si ahora c es cero, el número racional c/b es cero. Cuando los números racionales solo difieren en los signos, los puntos límites asociados con tales números están a la misma distancia, pero el asociado al negativo se encuentra a la izquierda del origen y el otro a la derecha.

No olvidar que entre dos números racionales siempre existe un tercero (se expone más adelante la *propiedad de densidad*).

1.7 Números racionales e irracionales (Q e I)

En matemáticas, la palabra racional hace referencia a todo número que se puede expresar como la razón de dos números enteros.

Los números irracionales geométricamente es la distancia del origen al punto donde se intercepta una circunferencia de radio igual a la hipotenusa que corresponde a la diagonal de un cuadrado para $\sqrt{2}$ y de un rectángulo para $\sqrt{5}$, por ejemplo. El problema es encontrar los números que forma en la figura geométrica.

Para encontrar tales número y poder determinar geométrica y numéricamente los números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{7}$; a partir del origen del plano cartesiano se elige una unidad arbitraria de medida y debe ser tal que al aplicar el teorema de Pitágoras, $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$, $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{3}$, $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{5}$, $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{7}$

Para $\sqrt{2}$, A = 1 y B =1, lo cual quiere decir que $\sqrt{2}$, es a la vez la hipotenusa de un triángulo rectángulo, la diagonal de un cuadrado y el radio de una circunferencia, la que al interceptarse con el eje x positivo determina geométricamente al número $\sqrt{2}$. Ver la figura 1.5 siguiente:

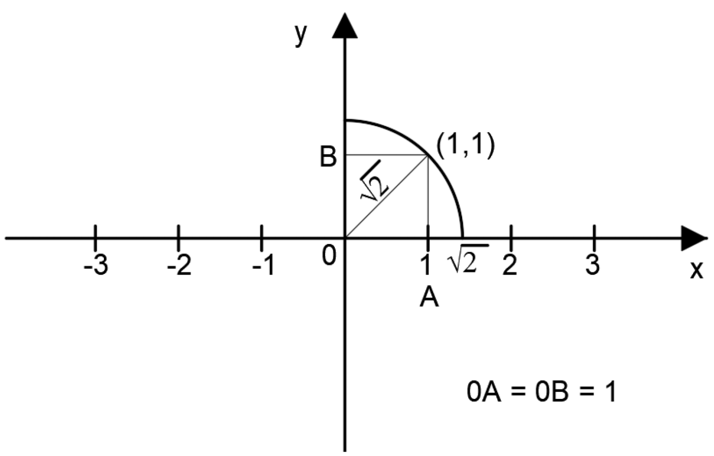


Figura 1.5 Representación del número $\sqrt{2}$.

Ahora para la hipotenusa $\sqrt{3}$, A = $\sqrt{2}$ y B = 1 son las medidas de los lados de un rectángulo cuya hipotenusa del triángulo que se forma es geométricamente el número que se busca, esto es, $\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$. Ver la figura 1.6

Con la figura 1.7 se continúa con la determinación geométrica del número $\sqrt{5}$. Para este número A = 2 y B = 1, puesto que $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, por lo que los valores de A y B son la medida de un rectángulo, cuya hipotenusa del triángulo rectángulo es de $\sqrt{5}$.

Por último, los valores de A y B que hacen posibles $\sqrt{7}$ son A = $\sqrt{3}$ y B = 2, puesto que $\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$. Ver la figura 1.8.

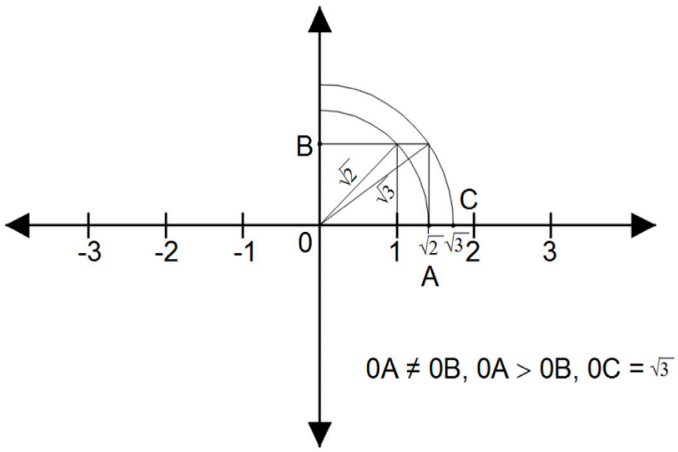


Figura 1.6 Representación del número $\sqrt{2}$ y del número $\sqrt{3}$.

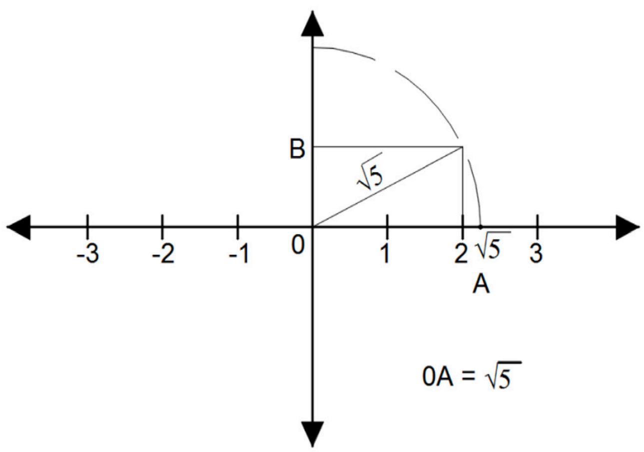


Figura 1.7 Representación del número $\sqrt{5}$.

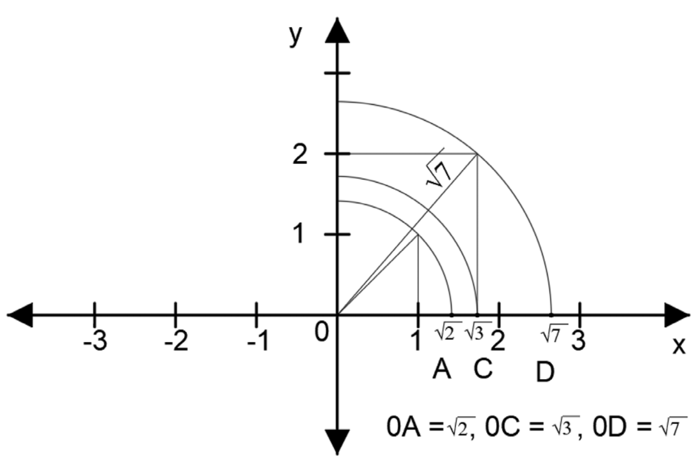


Figura 1.8 Representación del número $\sqrt{7}$.

1.8 Operaciones entre conjuntos

Antes de plantear y dar respuesta a lo propuesto es necesario saber que los números reales son el principio y antecedente o, bien, el conocimiento previo para comprender y operar funciones, números complejos, polinomios, derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales, entre otros.

También vale la pena mencionar que con el número se imagina, planea, discute, decide, concluye, etc.

Y que resulta oportuno formular algunas preguntas para resaltar ciertos aspectos de los números reales. Por ejemplo, después de definir el conjunto

$$T = \left\{-3, -\frac{1}{10}, \frac{1}{4}, 0.3, 0.71428571, 2, e, \sqrt{7}, \sqrt{17}\right\}$$

¿qué subconjuntos es posible determinar? y ¿qué relaciones se pueden establecer entre éstos subconjuntos?

Según el conjunto dado y denotando a los números naturales por N, a los enteros por Z, a los racionales por Q y a los irracionales por I;

$$T = \{2\}, \quad Z = \{-3, 2\}, \quad Q = \left\{-3, -\frac{1}{10}, \frac{1}{4}, 0.3, 0.71428571, 2\right\}$$

$$Z = \{e, \sqrt{7}, \sqrt{17}\}$$

Puede observarse que

$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}$ y $\mathrm{N} \subset \mathrm{Q}$, $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Q}$; pero $\mathrm{Z} \not\subset \mathrm{N}$, $\mathrm{Q} \not\subset \mathrm{N}$, $\mathrm{Q} \not\subset \mathrm{Z}$,

$\mathrm{N} \subset \mathrm{T}$, $\mathrm{Q} \subset \mathrm{T}$ e $\mathrm{I} \subset \mathrm{T}$; pero $\mathrm{T} \not\subset \mathrm{N}$, $\mathrm{T} \not\subset \mathrm{Z}$, $\mathrm{T} \not\subset \mathrm{Q}$, $\mathrm{T} \not\subset \mathrm{I}$.

Consecuentemente, se deja que el alumno verifique lo siguiente:

$\mathrm{N} \cap \mathrm{Z} = \mathrm{N}$ y $\mathrm{N} \cap \mathrm{Z} \subset \mathrm{T}$, pero $\mathrm{T} \not\subset \mathrm{N} \cap \mathrm{Z}$;

$\mathrm{N} \cap \mathrm{Q} = \mathrm{N}$ y $\mathrm{N} \cap \mathrm{Q} \subset \mathrm{T}$, pero $\mathrm{T} \not\subset \mathrm{N} \cap \mathrm{Q}$;

$\mathrm{N} \cap \mathrm{I} = \varnothing$ y $\mathrm{N} \cap \mathrm{I} \subset \mathrm{T}$, pero $\mathrm{T} \not\subset \mathrm{N} \cap \mathrm{I}$;

$\mathrm{Z} \cap \mathrm{Q} = \mathrm{Z}$ y $\mathrm{Z} \cap \mathrm{Q} \subset \mathrm{T}$, pero $\mathrm{T} \not\subset \mathrm{Z} \cap \mathrm{Q}$;

$\mathrm{Z} \cap \mathrm{I} = \mathrm{Q}$ y $\mathrm{Z} \cap \mathrm{I} \subset \mathrm{T}$, pero $\mathrm{T} \not\subset \mathrm{Z} \cap \mathrm{I}$;

$\mathrm{Q} \cap \mathrm{I} = \varnothing$ y $\mathrm{Q} \cap \mathrm{I} \subset \mathrm{T}$, pero $\mathrm{T} \not\subset \mathrm{Q} \cap \mathrm{I}$

Distinguir un número racional de un irracional puede motivar una interrogante, por ejemplo, ¿cuáles de los siguientes números son racionales o irracionales?

a) 2.236067…,

b) 2.6457513…,

c) 0.272727… y

d) 0.125

Después de observar los dos primeros números dados a) y b), se encuentra que luego del punto decimal ningún número se repite y que además son inconmensurables y no periódicos, lo cual significa que estos números son irracionales. Los dos últimos números c) y d) son racionales, porque el primero de éstos ($0.2727\overline{27}$) es inconmensurable y periódico, mientras que el último (0.125) tiene un último término, lo cual significa que es un decimal conmensurable.

Expresar un número dado en una razón de dos enteros propicia la pregunta ¿cómo se expresa los números 0.625 y $0.\overline{27}$ en una razón de enteros?

Para encontrar tal razón el número 0.625, se expresa como

$$0.625 = \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$$

Después de efectuar la operación indicada y simplificar, el resultado es

$$0.625 = \frac{600 + 20 + 5}{1000} = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$$

Entonces, $\frac{5}{8}$ es la razón de enteros entre el 5 y el 8 en la que se expresa el número 0.625 dado.

Ahora, para expresar el número $0.\overline{27}$ en una razón de enteros, se procede utilizando la igualdad (100 –99)(0.272727…) = 0.27272727… lo cual es cierto (1)(0.272727…) = 0.27272727…, desarrollando la multiplicación se obtienen,

$$100(0.272727\ldots) - 99(0.272727\ldots) = 0.272727\ldots$$

$$27.272727\ldots - 0.272727\ldots = 99(0.272727\ldots)$$

$$27 = 99\,(0.272727\ldots)$$

$$\frac{27}{99} = 0.272727\ldots$$

El número 27 es 99 veces el valor de la fracción que se busca

Luego, se divide entre 9, o sea

$$\frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

Por consiguiente, la razón de enteros es $\frac{3}{11}$. Para comprobar el resultado, se efectúa la división y si corresponde a 0.27272727…

A continuación se plantea la pregunta ¿cómo se comprueba que la raíz de algunos números son números irracionales? Los números para tal efecto son

a) 4.1231056…

b) 4.79583152…

Por principio, sin hacer operación alguna y sólo observando los números, se puede afirmar que ambos son irracionales, porque después del punto decimal no se repite número alguno y además son inconmensurables. Esta afirmación se comprueba empleando para tal efecto la expresión $\sqrt[n]{p}$ como criterio, donde n es un número natural mayor que 1, p un número primo y $\sqrt[n]{p}$ es un número irracional. Luego de calcular $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$ y $\sqrt{23}$ se encuentra que los números irracionales dados a) y b) corresponden a $\sqrt{17}$ y $\sqrt{23}$, respectivamente.

Ahora, ¿cómo se puede comprobar que entre dos números racionales, siempre hay un tercer número?

Desde luego, sólo se hará la comprobación, por ejemplo, para dos parejas de números. Sean $\frac{4}{3}$ y $\frac{5}{3}$ el primer par de números. Si

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \text{ y } \frac{5}{3} = \frac{10}{6}, \text{ entonces } \frac{8}{6} < \frac{9}{6} < \frac{10}{6}$$

Otra forma de hacerlo se ilustra a continuación:

$$\frac{4}{3} < \frac{4+5}{3+3} < \frac{5}{3} \text{ ó } \frac{4}{3} < \frac{9}{6} < \frac{5}{3}$$

Similarmente, para los números $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$,

$$\frac{4}{3} < \frac{7}{5} < \frac{3}{2}$$

Estos son ejemplos que fortalecen la idea, ya mencionada, de que existen segmentos de recta que son múltiplos racionales de un segmento unitario, dicho de otra manera $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{7}$, no pueden ser ningún número racional. Además, existen más números irracionales que racionales.

También se puede afirmar que entre dos números racionales se puede hallar muchos números irracionales, además de racionales. Asimismo, entre dos números irracionales, se pueden encontrar números irracionales. Igualmente, entre dos números reales distintos, por más cercanos que estén, existe un número real entre ellos.

En consecuencia, un conjunto de números es denso, si entre los números a y b del conjunto existe siempre un número c entre a y b, es decir $a < c < b$.

Por un buen tiempo, se supuso que a todo punto de la recta numérica (eje) le corresponde un número racional o irracional y que este conjunto de números acota las mismas leyes aritméticas que los números racionales, dicho de otra manera, todos se manejaban como números racionales.

Dedekin, en el siglo XIX, justificó esta hipótesis, mostrando que el tratamiento intuitivo de los números reales era correcto.

Por último, la idea intuitiva de número real positivo es la de magnitud, es decir, de un tamaño o una medición de longitud.

Para continuar, ¿cómo determinas geométricamente los números $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$ $\sqrt{17}$ y $\sqrt{19}$?

Los problemas siguientes te pueden ser útiles para reafirmar aspectos de los números reales y, de paso, reafirmar y desarrollar capacidades, siempre y cuando intentes la solución.

1.9 Problemas de reafirmación

Para fijar el conocimiento y desarrollar capacidades, se proponen los problemas siguientes:

1) ¿Cómo comprobar que los números siguientes son racionales?

   a) 0.354 b) $0.\overline{234}$ c) $5\frac{4}{3}$ d) 2.314 e) $-2\frac{5}{3}$

2) ¿Los números siguientes son racionales o irracionales? ¿por qué?

   a) $2.\overline{32}$ b) 3.452 c) $1.41421356\ldots$ d) $3.3333\ldots$ e) 6.08276253

3) ¿Por qué los siguientes números son irracionales?

   a) $2+\sqrt{7}$ b) $(5+\sqrt{3})+(-5+\sqrt{3})$ c) $2\sqrt{2}$ d) $3(\sqrt{2}+3)$ e) $7\sqrt{7}$

4) ¿Los siguientes números son irracionales? ¿por qué?

a) $(\sqrt{2})(\sqrt{2})$ b) $(\sqrt{7})(\sqrt{7})$ c) $3\sqrt{7}$ d) $(\sqrt{23})(\sqrt{23})$

5) Expresar cada número dado como la razón de dos enteros.

a) 0.574 b) $0.\overline{342}$ c) 4.21 d) 3.132 e) $0.\overline{36}$

6) Hallar el tercer número que se encuentre entre cada una de las siguientes parejas de números racionales.

a) $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ y $\frac{9}{10}$ d) $0.7 < 0.9$ e) $0.234 < 0.532$ f) 0.25 y 0.36

Capítulo 2

El campo de los números reales

Para la exposición de los temas de este capítulo, es pertinente como lo tratamos en el capítulo 1, iniciar con una serie de planteamientos que den pie a la discusión.

El tema se inicia haciendo las preguntas siguientes

¿Qué conoces de los axiomas?

¿Cómo se enuncian?

¿Qué significan y cuál es su utilidad?

¿Qué percepción tiene de éstos?

¿Qué consecuencia se deriva de la percepción que se tiene de ellos?

¿Se puede prescindir de ellos?

¿Son fundamento del conocimiento matemático? ¿por qué?

Luego de contestar estas preguntas y comparar tus respuestas con otras personas, lee lo siguiente.

Después de abordar en este capítulo el sistema axiomático que caracteriza el campo de los números reales y que fundamenta el establecimiento del lenguaje algebraico de los números reales, su estructuración conceptual, lógica y metodológica, se reconocerá la utilidad para incidir en la construcción y comprensión de conceptos relacionados con definiciones, operaciones y sus propiedades; productos notables, factorizaciones y ecuaciones, por citar algunos; los cuales organizados pueden formar un conjunto de conceptos algebraicos que sirvan de base para abordar temas avanzados de matemáticas.

Los axiomas como primer principio en un orden de conocimiento constituyen el fundamento para establecer las propiedades de los números reales como campo y definir la resta y la división; potencias y productos notables; factorización y ecuación de primer grado; y así hasta el establecimiento y demostración de teoremas.

Los números reales como campo es un conjunto de números que tienen dos relaciones, igualdad y desigualdad; dos operaciones, suma y multiplicación. Este campo está caracterizado por un conjunto de axiomas. Los axiomas se instituyen para las dos operaciones y para las dos relaciones. Por ello, se describen a continuación.

2.1 Propiedades de los números reales

Los números reales como campo deben cumplir con los axiomas siguientes. La suma y la multiplicación se postulan en el campo de los números reales.

1. **Axioma o propiedad de clausura o cerradura**. Para todo $a, b \in R$, $a + b \in R$ y $ab \in R$. Esto significa que si se suman o se multiplican dos o más números reales, el resultado es un número real único. Por ejemplo,

$$a + b = c \quad \text{y} \quad ab = c; \qquad (N) \text{ naturales}$$

$$a + b = c \quad \text{y} \quad ab = c; \qquad (Z) \text{ enteros}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b} \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{b}\right)ab = \frac{ac}{b^2}; \qquad (Q) \text{ racionales}$$

$$a + \sqrt{b} = c \quad \text{y} \quad (a + \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) = c; \qquad (Q) \text{ racionales}$$

2. **Axioma o propiedad conmutativa**. Para todo $a, b \in R$, $a + b = b + a$ y $ab = ba$. Esta proposición abierta significa que el resultado no depende del orden en el que se sumen o multipliquen números reales. Por ejemplo,

$$a + b = b + \mathrm{c} \quad \text{y} \quad ab = ba; \quad (N)$$

$$x + y = y + x \quad \text{y} \quad xy = yx; \quad (Z)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = \frac{b}{c} + \frac{a}{b}, \text{ b, c} \neq 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}\right), \quad b \text{ y } d \neq 0; \qquad (Q)$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{b} + \sqrt{a}, \ a \text{ y } b \text{ son números primos} \ \text{ y } \ (\sqrt{a})(\sqrt{b}) = (\sqrt{b})(\sqrt{a}), \ a \text{ y } b \text{ son números primos.} \quad (I)$$

3. **Axioma o propiedad asociativa**. Para todo a, b, c R, $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $(ab)\,c = a(bc)$

Tanto para la suma como para la multiplicación, el resultado no es afectado en la forma en que se agrupan los términos de la suma o de la multiplicación, por lo que estas propiedades se pueden escribir como

$$a + b + c = a + b + c \qquad abc = abc$$

El uso del signo de agrupación depende de la tendencia que se tiene de sumar de dos en dos y de multiplicar de la misma manera, es decir

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (ab)c = a(bc)$$

$$K_1 + c = a + K_2 \qquad K_1c = aK_2$$

$$K_3 = K_4 \qquad K_3 = K_4$$

Igualmente,

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f},$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}, \text{ o bien,}$$

$$\frac{a}{b}+K_1=K_2+\frac{e}{f} \qquad \frac{a}{b}(K_1)=(K_2)\left(\frac{e}{f}\right)$$

$$K_3=K_4 \qquad K_3=K_4 \quad \text{y}$$

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{11}=\sqrt{3}+(\sqrt{5}+\sqrt{11})$$

4. Axioma o propiedad distributiva. Para todo $a, b, c \in R$, $a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)a=ba+ca$ ó $(b+c)a=ab+ca$.

Una es por la izquierda y otra por la derecha, igualmente con significado las dos.

Esta proposición expresa que el resultado es el mismo si primero se suma y luego se multiplica, que si primero se multiplica y enseguida se suma. Por ejemplo,

$$5(3+4)=5\cdot 3+5\cdot 4 \qquad \text{(N)}$$

$$5\cdot 7=5\cdot 3+5\cdot 4$$

$$35=15+20$$

$$35=35;$$

$$x(y+z)=xy+xz; \qquad \text{(Z)}$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}, \qquad \text{(Q)}$$

$$\frac{a}{b}\left(\frac{k}{l}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f},$$

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}+\frac{r}{s} \quad \text{y}$$

$$\frac{m}{n}=\frac{m}{n}.$$

$$\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\sqrt{5}\sqrt{3}+\sqrt{5}\sqrt{2}. \qquad \text{(I)}$$

Igual que otras, esta propiedad se puede extender a más de tres términos, esto es

$$a(b+c+d+e+\ldots+m)=ab+ac+ad+\ldots+am$$

Se nota que este axioma incluye a las dos operaciones postuladas.

5. **Axioma de identidades**. Si 1, 0 $\in$ R tales que para todo $a \in R$, $a + 0 = a$ y $a(1) = a$.

El neutro aditivo garantiza que si a un número real se le suma cero, el resultado es igual a dicho número. Por otra parte, el neutro multiplicativo asegura que si un número real se multiplica por uno, el producto es igual al número citado. En consecuencia, todo número está multiplicado por uno. Esta propiedad también se le conoce como axioma de los neutros.

6. **Axioma o propiedad de los inversos**. Para todo $a \in R$, $a + (-a) = 0$, $-a \in R$ y $a(a^{-1}) = 1$, $a \neq 0$, $a^{-1} \in R$,

Cada número real tiene su inverso aditivo o su simétrico. De igual manera, todo número real diferente de cero tiene su inverso multiplicativo. El número –5 es el inverso aditivo de 5 y 8^{-1} es el inverso multiplicativo de 8.

El simétrico aditivo asegura que si a un número real se le suma el simétrico de ese número, la suma es igual a cero. En cambio, el inverso multiplicativo garantiza que si un número se multiplica por su inverso, el producto es igual a la unidad.

7. **Propiedad de densidad**. Para todo $r, s \in R$, con $r < s$, existe $t \in Q$ tal que $r < t < s$.

Entre dos números racionales, siempre hay otro número racional. Cada número irracional está entre dos irracionales. Esta propiedad nos permite establecer relaciones de orden y afirmar que el conjunto de los números racionales son infinitos (Q).

8. **Propiedad arquimediana**. Para todo $r, s \in R^{+}$, con $r < s$, existe $n \in Z^{+}$ tal que $n \cdot r > s$.

9. **Propiedad de plenitud**. Todo subconjunto no vacío de R que tenga un minorante tiene un extremo inferior. Todo subconjunto no vacío de R que tenga un mayorante tiene un extremo superior.

Para continuar con la estructuración axiomática de los números reales, ahora nos referimos a las dos relaciones que se postulan en el campo de éstos, es decir, a la igualdad y la desigualdad. A ambas las caracterizan un conjunto de proporciones llamadas axiomas. Los números reales como campo deben cumplir tales axiomas. Este tema se aborda en el capítulo 10.

Antes de enunciar estos axiomas, referido a estas relaciones, se plantea el siguiente cuestionamiento:

¿qué axioma conoces?,

¿qué importancia tienen estos axiomas? y

¿puedes enunciar estas proposiciones?.

Después de contestar estas preguntas y comparar tus respuestas, con las de tus compañeros, enseguida lee lo siguiente.

Como el conjunto de los números reales es un campo totalmente ordenado, como lo muestra su continuidad, con toda certeza decimos que si dos números reales no son iguales, uno está a la derecha del otro, lo cual se expresa diciendo que todo número situado a la derecha de otro es mayor, hecho que siempre se cumple y que se simboliza con <, e indica que el número a de la izquierda es menor al número b de la derecha, $a < b$.

Comenzamos con los axiomas que distinguen a la igualdad.

1. Axioma o propiedad reflexiva. Para todo $a \in R$, $a = a$.

Se puede observar que se está usando el mismo símbolo para representar el mismo número. Si se hubiera escrito $a = b$, "$a = b$" significa que se están usando dos símbolos diferentes que representan el mismo número. Si cambio el significado de un símbolo debe haber una razón.

Todo número es igual a sí mismo. Esto es el significado de axioma Por ejemplo,

$$5 = 5, \quad -3 = -3, \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \quad 0.75 = 0.75, \quad x = y, \quad \sqrt{13}) = \sqrt{13})$$

Este axioma es válido en N, Z, Q e I.

2. Axioma o propiedad simétrica. Para todo $a, b \in R$, si $a = b$,entonces $b = a$.

Como se están usando dos símbolos diferentes que representan el mismo número y como en una igualdad se puede leer de derecha a izquierda igual que de izquierda a derecha, significa que los números son iguales.

$$\text{Si } x = \frac{3}{5}, \text{ entonces } \frac{3}{5} = x \quad \text{y}$$

$$\text{si } \frac{2}{3} = \frac{9}{9}, \text{ entonces } \frac{9}{9} = \frac{2}{3}.$$

Axioma válido en los N, Z, Q e I.

3. Axioma o propiedad transitiva. Para todo $a, b, c \in R$, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Esta propiedad se puede extender a más números y continúa teniendo significado. Por ejemplo, si $a = b$, y $b = c$ y

$$c = d, \text{ entonces } a = d.$$

Igual, si $a = b$, $b = c$, $c = d$ y $d = e$, entonces $a = e$.

Este nos ayuda a concluir que el primer término es igual al último, a través de los términos intermedios y el orden.

Dos números iguales a un tercero son iguales entre sí, es otra forma de enunciar el axioma. Por ejemplo,

$$\text{si } \frac{1}{4}=\frac{2}{8} \quad \text{y} \quad \frac{2}{8}=\frac{5}{20}, \text{ entonces } \frac{1}{4}=\frac{5}{20}.$$

Este axioma es válido en N, Z, Q e I.

4. Axioma o propiedad de adición para la igualdad. Para todo a, b y $c \in R$, si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

La igualdad se conserva si a los dos lados de ésta, se le suma el mismo número, por ejemplo

$$\text{si } ax = b, \text{entonces } ax + c = b + c, \quad \text{y}$$

$$\text{si } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{entonces } \frac{a}{b}+\text{e}=\frac{c}{d}+e, \ d \text{ y } b \neq 0;$$

$$\text{si } \sqrt{a}=\sqrt{b}, \text{ entonces } \sqrt{a}+c=\sqrt{b}+c.$$

Este axioma es válido en N, Z, Q e I.

5. Axioma o propiedad multiplicativa de la igualdad. Para todo a, b y c $\in$ R, si a= b,entonces ac = bc.

$$\text{Si } a = b \quad \text{y} \quad c = d, \text{ entonces } ac = bd.$$

También, cuando ambos lados de la igualdad, se multiplican por un mismo número, ésta no pierde significado, por ejemplo,

$$\text{si } 9 = 9, \text{entonces } 9(2) = 9(2) \quad \text{y}$$

$$\text{si } 5x = ab, \text{ entonces } 5ax = a^2b, \quad a \in R;$$

$$\text{si } \sqrt{a}=\sqrt{b}, \text{entonces } c\sqrt{a}=c\sqrt{b}.$$

Este axioma es válido en N, Z, Q e I.

2.2 Axiomas de orden

Continuamos con la relación de orden de los números reales.

Para todo a, $b \in R$, $a < b$. Esta relación indica geométricamente que todo número que está a la derecha de otro es mayor que éste. Esto significa que los números reales es un campo totalmente ordenado y que como tal está caracterizado por los cuatro axiomas de orden.

Con referencia a los axiomas de orden, ¿cuál es su significado y utilidad?, ¿cuáles son y cómo se expresan?, ¿por qué se deben omitir o estudiar?

Luego de comentar con tus compañeros cada respuesta, leer lo siguiente.

1. **Axioma de tricotomía**. Si $a, b \in R$, entonces una y sólo una, de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$a > b,\ a = b,\ a < b \quad \text{ó} \quad a < b,\ a = b,\ a > b$$

Las proposiciones son mutuamente excluyentes, es decir, si una de estas ocurre las otras no, por ejemplo,

$$5 < 7, \text{ pero no } 5 = 7 \text{ y } 5 > 7,$$

$$8 > 4, \text{ pero no } 8 = 4 \text{ y } 8 < 4 \text{ y}$$

$$10 = 10, \text{ pero no } 10 < 10 \text{ y } 10 > 10;$$

$$5x + 2 < y, \text{ pero no } 5x + 2 = y \text{ y } 5x + 2 > y,\ y = 10.$$

2. **Axioma de transitividad**. Si $a, b, c \in R$ y son tales que $a > b$, $b > c$, entonces $a > c$ ó si $a < b$, $b < c$, entonces $a < c$.

Igualmente, esto es verdadero para

$$a > b > c > d,\ a > d \quad \text{ó}$$

$$a < b < c < d,\ a < d, \quad \text{ó}$$

$$-a < 0,\ 0 < a,\ -a < a,\ a > 0.$$

Los ejemplos dejan ver que, según el caso, el primer término es mayor o menor que el último.

3. **Axioma de adición de la desigualdad**. Si $a, b, c \in R$ y son tales que $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

La desigualdad no pierde significado si a ambos lados de ésta se suma el mismo número, por ejemplo,

$$si\ \ 5 > 3, \text{ entonces } 5 + 2 > 3 + 2,$$

$$si\ \ x > y, \text{ entonces } x + t > y + t,\ t \in R \text{ y}$$

$$si\ \ \sqrt{a} > \sqrt{b}, entonces\ \ \sqrt{a} + c > \sqrt{b} + c.$$

4. **Axioma o propiedad multiplicativa para la desigualdad**. Si $a, b, c \in R$ y son tales que $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.

La desigualdad no cambia si ambos lados de la desigualdad se multiplica por un número positivo, por ejemplo,

$$8 > 3,\ 16 > 6, \quad ó \quad 8 \times 2 > 3 \times 2, \quad 16 \times 3 > 6 \times 3.$$

Los dos últimos axiomas también se pueden expresar como: Para todo $a, b, c \in R$ tal que $a > b$ y $c > d$, entonces

$$a + c > b + d \text{ y } ac > bd.$$

Si dos números reales son iguales, entonces uno puede ser sustituido por el otro y viceversa, en cualquier expresión algebraica en la que se encuentre.

Sea $a = 3b$ ó $b = a/3$ por ejemplo, entonces $6b + a = 6\left(\frac{a}{3}\right) + a$.

Ahora, después de enunciar las proposiciones llamadas axiomas, los cuales resultan ser tan básicos que se utilizarán sin que sea el propósito, para justificar algunas propiedades de los números reales. Los axiomas, como los que caracterizan a la igualdad, son tan básicos que muchas veces no nos referimos a ellos explícitamente, pero no, por ello, dejan de ser importantes.

Para ilustrar el uso de los axiomas se proponen algunas proposiciones que no son axiomas. Para todo a, b, $c \in R$, si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

El proceso para concluir que la propiedad de cancelación para suma es cierta, se inicia sumando a los dos lados de la igualdad el inverso aditivo de c y considerando el neutro aditivo, esto es,

$$a + c - c = b + c - c \quad \text{y}$$

$$a + 0 = b + 0;$$

por consiguiente, $a = b$.

Basado en esto,

$$si\ 2x + 6 = 3a + 6, \text{ entonces } 2x = 3a \quad \text{y}$$

$$si\ 5x + a = 3b + a, \text{ entonces } 5x = 3b.$$

De igual manera, se prueba la propiedad de cancelación para la multiplicación, esto es, para todo a, b, y $c \in R$, si $ac = bc$, entonces $a = b$.

Es decir, se comienza multiplicando los dos lados de la ecuación por el inverso multiplicativo de c y se termina tomando en cuenta el neutro multiplicativo, o sea

$$acc^{-1} = bcc^{-1}$$

$$a \cdot 1 = b \cdot 1$$

En consecuencia, $a = b$.

Es importante aclarar que el inverso multiplicativo c^{-1} no es válido para $c = 0$. Debido a que el inverso no está definido.

Apoyado en esta conclusión,

$$si\ \ 5ax = ab, \text{ entonces }\ 5x = b,$$

$$si\ \ \frac{3ax}{b} = \frac{5}{b},\ entonces\ \ 3ax = 5 \ \text{ para }\ b \neq 0,\ \text{ y}$$

$$si\ \ (3x + c)b = (2a + d)b, \text{ entonces }\ 3x + c = 2a + d$$

Para todo $a, b \in R$, si $a + b = 0$, entonces $a = -b$. Esta es otra proposición que se debe verifcar. Para concluir que ésta es verdadera, se suma a los lados de la ecuación el inverso aditivo de b y de acuerdo con el neutro aditivo, el resultado es,

$$\mathrm{a} + b - b = 0 - b, \quad \text{ó}$$

$$a + 0 = 0 - b.$$

En consecuencia, $a = -b$

Sustentado en este resultado,

$$\text{si }\ 3x + b = 0, \text{ entonces }\ 3x = -b,$$

$$\text{si }\ 2x - \frac{a}{b} = 0, \text{ entonces }\ 2x = \frac{a}{b},\ \mathrm{b} \neq 0 \quad \text{y}$$

$$\text{si }\ 2x/3 + 8 = 0, \text{ entonces }\ 2x/3 = -8.$$

Para concluir que la proposición: para todo $a, b \in R$, si $a = b$, entonces $-a = -b$, es verdadera, se parte de $a = b$.

Enseguida, a ambos lados de la ecuación dada se suman los inversos aditivos de a y b, y considerando el axioma de identidad, $r + 0 = r$, el resultado es

$$a - a - b = b - b - a \quad \text{y}$$

$$0 - b = 0 - a.$$

Por lo tanto, $-b = -a$ y por simetría, $-a = -b$.

Apoyado en esta conclusión,

$$\text{si } 2x = 3b, \text{ entonces } -2x = -3b \quad \text{y}$$

$$\text{si } 5x - a = b - c, \text{ entonces } a - 5x = c - b.$$

Por extensión y sin demostrar,

$$\text{si } a = -b, \text{ entonces } -a = b \quad \text{y}$$

$$\text{si } -a = b, \text{ entonces } a = -b.$$

Capítulo 3

Expresiones algebraicas

Entre los conceptos que anteceden a esta sección están los números naturales, enteros, racionales e irracionales, así como los axiomas. Dentro del campo deductivo de los números reales, los axiomas sirven de base y permiten estatuir una estructura conceptual y hechos básicos del álgebra de los números reales.

En lo subsiguiente, para construir una estructura algebraica útil para que el estudiante progrese en su aprendizaje, se emplearán propiedades de los números reales ya vistas en párrafos anteriores y las que aparezcan en el proceso.

Para avanzar, aparte de utilizar las propiedades ya vistas y las que se muestren en el proceso, se definen y emplean, entre otros, término, expresión algebraica, términos semejantes, grado de un polinomio.

3.1 Elementos de una expresión algebraica

¿Qué elementos estructuran una expresión algebraica? Y ¿qué se puede decir, de cada uno de las siguientes expresiones que están escritas en cada inciso?

a) $7a^2$

b) $6ax^2$, $-ax^2$, $-7ax^2$

c) $a^2 + b^2$, $a^3 - b^3x$

d) $bx - (2x - b)$, $5a - b + c$

e) $x^3 + 3x + 1$, $x^2y + y^2 + 5x$

f) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 6$, $x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4$

Después de observar lo que está escrito en cada uno de los incisos, se concluye que se trata de una expresión algebraica, porque ésta es una combinación de números, letras y signos, en la que intervienen las operaciones fundamentales del álgebra, potenciación, signos de relación y agrupación, y exponentes. Los términos, términos semejantes, monomio, binomio, trinomio y polinomios escritos en cada inciso son ejemplos de ésta.

Las expresiones algebraicas que están en los incisos a) y b) son términos, aparte de ser expresiones algebraicas, porque cada uno tiene signo, coeficiente, literal o literales y exponente o grado.

Cuando un término dado consiste de dos o más factores, por ejemplo, $5xy$, en el que 5 es el coeficiente numérico, $5x$ el coeficiente de y, y por último y es el coeficiente de $5x$. También una constante general o ésta multiplicada por un número pueden ser coeficiente de un término.

Todos los términos del punto b) son semejantes, porque éstos sólo difieren en el signo y sus coeficientes. Consecuentemente, también $-2axy$, $6axy$, $-7axy$ son términos semejantes.

Lo que está escrito en el punto a), aparte de identificarse como un término o expresión algebraica, se identifica como un monomio, es decir como una expresión algebraica que consta de un solo término.

Similarmente lo que está escrito en el inciso b) son monomios.

En cambio, el binomio es una expresión algebraica que consta de dos términos, las expresiones escritas en el inciso c) son de este tipo.

Antes de terminar, se observa que todas las expresiones que están en los incisos d) y e) son trinomios, porque todo trinomio es una expresión algebraica que consta de tres términos.

Finalmente, luego de examinar las expresiones del inciso f); se concluye que éstos constan de más de tres términos, a este tipo de expresiones algebraicas se les conoce como polinomios. Un polinomio es una expresión algebraica que está estructurado por más de tres términos o por cualquier número de éstos, por ejemplo,

$x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 6$, $x^3 + ax^2 + bx + c$, $x + 2x + 6$ aunque, a las expresiones $ax^2 + bx + c$ y $5x^2 + 7x - 9$ también se les puede llamar polinomio en la variable x. Del mismo modo están definidos polinomios de más de una variable, por ejemplo, $M(x, y) = xy + x^2 + y^2 + x + 4$ y $N(x, y) = x^3y + x^2y^2 + 3x^3y + x + y$ son de este tipo. De acuerdo con el grado de cada uno de los términos pueden ser homogéneos o no homogéneos. $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son no homogéneos, mientras el polinomio $p(x, y) = xy^3 + x^3y + x^2y^2$ si es homogéneo porque todos los términos tienen el mismo grado, lo que no sucede con los polinomios denotados por $M(x, y)$ y $N(x, y)$.

Ahora, para clasificar expresiones, identificar los elementos que los conforman y reducir términos, se utiliza la información expuesta en párrafos anteriores. Para tal efecto, se consideran las siguientes expresiones.

a) $5ab$, $-3ab$,

b) $4xy$.

c) $5x + 6y$ y

d) $4x^2 + 3x - 8y$;

e) $5x^3 + 2x^2 + xy - 6y^2$ y

f) $3x^2y^2 + x^2y^3 + x^3y^6 - xy$.

Las expresiones propuestas en *a)*, aparte de ser términos semejantes, por separado, son términos o bien monomios. Los elementos que conforman a $5ab$ son:

el signo: +,

los coeficientes: 5 de ab, $5a$ de b y $5b$ de a;

las literales: a y b; y

los exponentes 1 de a y 1 de b.

De la misma manera y después de reconocer los elementos del monomio $-3ab$, estos son:

el signo: – ,

los coeficientes: 3 de ab, $3a$ de b y $3b$ de a;

las literales: a y b; y

los exponentes 1 de a y 1 de b

Como los dos términos escritos en *a*) son semejantes, entonces estos, se pueden reducir a un solo término, con este fin se suman algebraicamente el coeficiente numérico de cada uno de ellos, es decir

$$5ab - 3ab = (5 - 3)ab = 2ab.$$

En *b)*, la expresión propuesta es un monomio, porque está formado por un solo término. En éste, se distinguen

el signo: + ,

los coeficientes: 4 de xy, $4x$ de y, $4y$ de x;

las literales: x, y, y

los exponentes 1 de x, 1 de y.

Se continúa con la expresión que está en *c)*, la cual es un binomio, porque está formada por dos términos ligados por el signo más. En ésta, se identifican:

el signo: +

los coeficientes: 5 de x y 6 de y;

las literales: x, y; y

los exponentes 1 de x, 1 de y.

Al continuar, se observa que la expresión escrita en *d)* es un trinomio y en ella se reconocen

los signos: +, +, – ;

los coeficientes: 4 de x, 3 de x y –8 de y;

las literales: x, y; y

los exponentes 2 de x, 1 de x, 1 de y

Seguimos con la expresión propuesta en *e)*, la cual es un polinomio y en ella se reconocen

Signos: +, +, +, –

Coeficientes: 5, 2, 1, –6

Literales: x, y

Exponentes 3, 2 y 1 de x, 1 y 2 de y

Por último, igual que en la expresión propuesta en e*)* la que se propone en *f)* es un polinomio y en éste se distinguen

los signos: +, +, +, – ;

los coeficientes: 3, 1 y –1

las literales: x, y; y

los exponentes 2, 2, 3, 1 de x, 2, 3, 6 y 1 de y.

Para fijar el concepto de expresión algebraica y desarrollar capacidades, se proponen los problemas siguientes.

3.2 Ejercicios de asimilación

Ahora, en cada caso, determine el tipo de expresión algebraica e identifique los elementos de éstas.

a) $2x^3y^5$

b) $-3xy$

c) $2x - 2y$

d) $3x^2 + 5y^2$

e) $3x^3y + 2x^2y^2 - 5xy^3$

f) $-2x^3y^3 + 3x^2x^2 - 6xy$

g) $x^2y^2 + 2ax^2 + 3bxy - 2x^2y^3$

h) $-x^2 + y - xy + y^2$

Por otra parte, el grado de un monomio se determina sumando los exponentes de cada literal (variable) que lo conforman; mientras que para hacer lo mismo con un polinomio (binomio, trinomio o propiamente un polinomio), primero se determina el grado de cada literal, después el grado de cada término y enseguida el grado del polinomio, resultando que éste corresponde al término de mayor grado. Por ejemplo, el grado de los monomios $3x^2y^3$ y $5x^3y^2z^3$ son, respectivamente $2 + 3 = 5$ y $3 + 2 + 3 = 8$ y el de los polinomios $5x^2y^2 + xy - 7x^3y^5$ y $3x^4y^5 - 3axy + 2x^3y^2$ son respectivamente, 8 y 9, los cuales corresponden, en este orden, a los términos $-7x^3y^5 + 3x^4y^5$.

Los problemas siguientes proporcionan la incorporación de conocimientos, la fijación de otros y el desarrollo de capacidades. Resuélvelos.

Después de clasificar cada expresión algebraica dada, determine el grado de ésta.

a) $5xy$

b) $-5x^2y^3$

c) $2xy - 3xy^2$

d) $3x^2y^2 - 3xy^2 + 8$

e) $3xy^2 - 4xy + 3x^2y^2$

f) $2x^2y^2 + 3xy + 3$

g) $2xy - 2x^2y^2 + 3x^3y^3 - x^3y^4$

h) $3xy - 5x^2y^2 - 2x^3y^3 + 10$

i) $3x^2y^2z$

j) $5x^2yz^2 - 8$

k) $x^2 + x + 8$

l) $x^3 + x^2 + x - 6$

3.3 Términos semejantes

Puesto que los términos semejantes son aquellos que sólo difieren en el coeficiente y su signo. Por ejemplo, $2xy$, $5xy$, $6xy$, $-\frac{3}{4}xy$ y $10xy$ son, por lo dicho, términos semejantes; mientras que $2x$, $3y$, $4z$ y $-3w$ no lo son, porque no tienen las mismas variables y menos elevadas a la misma potencia, es decir, no difieren sólo en el coeficiente y en el signo.

La reducción de términos semejantes, se ampliará después de abordar la suma y la resta.

Para fijar conceptos básicos relacionados con el álgebra de los números reales y expresiones algebraicas, y, de paso, fortalecer y desarrollar capacidades, se propone lo siguiente.

1) Reconozca los cuatro elementos de cada término

a) $7x^2y^2$

b) $-6a^2b^3$

c) $-\frac{x^4}{5}$

d) $0.5a^2b^3$

e) y

f) $-\sqrt{2}\,x^2y^3$

g) $-az$

h) $\frac{3}{5}p^3q^2$

i) $-xr^2s^3$

j) $4pq$

2) En un término, ¿qué indica el signo, coeficiente, literal y potencia?

3) En cada una de las expresiones siguientes, ¿qué indica el coeficiente?

a) $5a$

b) $10x$

c) $7x^2y^2$

d) $-3xy$

e) $8(2x + 3)^5$

f) $-5x^2y^2z^3$

g) $5x(3x + 4)^2$

h) $-3x(3x + 4)^2$

i) $\frac{2ab}{3}$

j) $\frac{-3ab}{5}$

4) ¿Qué indica el exponente en cada una de las siguientes expresiones?

a) a^3

b) $(xy)^3$

c) $(a - b)^4$

d) $-a^4$

e) $(ax)^5$

f) xy^2z^3

g) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$

h) $-\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^3$

i) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^4$

j) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^4$

5) En cada expresión, ¿qué significa el signo?

a) $-5a$

b) $6x$

c) $4xy$

d) $-8ab$

e) $-3ax$

f) $-\frac{3}{4}ay$

g) $\frac{5}{2}x^2y^2$

h) $-\frac{3}{5}xy$

i) $-2xy$

j) $\frac{7ab}{3}$

6) De las expresiones dadas, ¿cuáles son monomio, trinomio o polinomio?

a) $7a^2b^2$

b) $-6ax^2$

c) $2a^2 + 3x^2$

d) $-3b^2 + ax$

e) $ax^2 + bx + c$

f) $ay^2 - 5x + b$

g) $x^3 + 2x^2 + ax + b$

h) $4x^3 - 3x^2 + ax - 8$

i) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

j) $ax^4 + 2ax^3 - 5x^2 + x - 9$

7) De los términos dados, ¿cuáles son semejantes?

$$4ab,\ 3a^2\text{ y},\ 2x^2y^2z^2,\ \frac{1}{2}x^2y,\ 5a^2y^2,\ x^3y^3,\ -3a^2y,\ 5ab,\ 3x^2y^2z^2$$

$$-\frac{3}{2}x^2y,\ \frac{3}{4}\mathrm{a}^2\mathrm{y}^2,\ 3ab,\ 5x^3y^3,\ -5x^2y^2z^2$$

8) Si en cada inciso se escribe un término, ¿qué términos escribes para completar dos semejantes?

a) $-2x^2y^2$

b) $2a^2b$

c) $\frac{1}{2}ax$

d) $\frac{3}{4}x^2y^3$

e) $-3xy^2z^3$

f) $2x^3y^2z$

g) $2axy$

h) $\frac{3}{4}(x + y)$

i) $\frac{a + b}{2}$

j) $2\left(\frac{x}{y}\right)^3$

9) ¿Qué puedes comentar de cada uno de las expresiones siguientes?

a) $-5x$

b) ax, $2b + 3c$

c) $4x^2 + 8$, $a + b + c$

d) $m^3 + 2m^2 + 3m + 5$

e) $5xy + a$, ax, $2(5xy + a)$

f) $6ab$, $-3ab$, $x + 3$, $3(x + 3)$

g) $4ay^2$, $5/7ay^2$, $10ay^2$

h) $\dfrac{x+1}{x+2}$, $\sqrt[3]{a}$, $a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b$

i) $2ab$, $-3ab$, $4ab$

j) $3xy$, $5xy$, $-5xy$

k) $2a + b$, $2(2a + b)$, $6a + 3b$

l) $5(x + y)$, $x + y$

10) ¿Cuál es el grado de cada una de las expresiones siguientes?

a) $6x^2y^2$

b) $3x^2y^2 + y^5$

c) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

d) $\mathrm{x^3y + x^2y^2 + xy^4}$

e) $x^2y^2 + x2 + y^2 + x$

f) $\sqrt{x^2y^2} + \sqrt{x^4y^4}$

g) $2x^2y^3 - xy^4 + 8$

h) $3x + 8$

i) $ax^2 + bx + c$

11) De los polinomios siguientes, ¿Cuáles son homogéneos y cuáles no?

a) $M(x, y) = x^3y^2 + x^5 + x^2y^3$

b) $N(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4} + xy + x^2$

c) $P(x, y) = 2xy + x^2 + y^2 + 2$

d) $Q(x, y) = xy^2 + x^3 + x^2y$

e) $M(x, y) = x^2y^2 + xy + x^2 + y^2$

f) $P(x, y) = x^2y + xy^2 + xy + 5$

g) $T(x, y) = \sqrt{xy} + x + 2y$

h) $H(x, y) = \sqrt{x^2y^4} + x^2y + y^3$

i) $I(x, y) = \sqrt[3]{xy^2} + 2x + 2y$

Capítulo 4

Operaciones algebraicas

Fundamentado en las propiedades de los números reales, se continúa con la explicación de las ideas y procesos relacionados con la suma, diferencia, multiplicación y división.

4.1 Suma

Con respecto a esta operación nos permitimos formular el cuestionamiento siguiente. ¿Por qué se dice que la suma es una operación postulada? ¿Qué relación tiene la suma con los axiomas? ¿Qué se suma y qué se obtiene? ¿Qué utilidad tiene?

La suma es una operación que se postula, no se define y mucho menos se formula como un teorema, y como tal debe cumplir todos los axiomas de campo, ya vistos y relacionados con ella. Por ejemplo, teniendo como fundamento el axioma de cerradura, se dice que la suma es cerrada con respecto a los números naturales, enteros y racionales, o mejor en todos los números reales. Esto significa que si se suman dos o más números naturales, el resultado o suma es un número natural.

La suma es única porque para dos o más números cualesquiera a, b, y c, existe un único número d y no otro, es decir, $a + b + c = d$. El lado izquierdo de este resultado es una expresión algebraica y se llama suma algebraica. A la suma algebraica de dos términos se le llama binomio, a la de tres trinomios y, en general, a la de cualquier otro número de términos, se llama polinomios. Una expresión algebraica consiste de una combinación de símbolos y letras ligadas por las operaciones del álgebra.

Con la suma, aparte de expresar axiomas, también se formulan teoremas, entre ellos está, por ejemplo, la ley de cancelación de la adición. Este teorema expresa que para todo a, b y $c \in R$, si $a + b = c + b$, entonces $a = c$.

Para probar esta proposición se parte de lo dado, es decir,

$$a + b = c + b.$$

Luego se utiliza la propiedad aditiva de la igualdad, obteniendo

$$(a + b) + (-b) = (c + b) + (-b)$$

Ahora, por la propiedad asociativa y el inverso de b, se obtiene

$$a + [b + (-b)] = c + [b + (-b)] \quad \text{ó} \quad a + 0 = c + 0$$

Por consiguiente, después de utilizar el axioma de identidad para la adición,

$$a = c.$$

Otra proposición en la que se emplea la suma para su formulación y que debe probarse, se enuncia enseguida. Para todo a y b $\in$ R, si $a + b = a$, entonces $b = 0$.

El proceso de probar se inicia de lo dado, es decir $a + b = a$.

Después de utilizar el axioma de identidad para la adición se obtiene

$$a + b = a + 0$$

en consecuencia, luego de aplicar la propiedad cancelativa de la suma,

$$b = 0.$$

Sobra decir que el concepto de adición aparece relacionado con distintos temas de matemáticas. Por ejemplo, en productos notables, series, polinomios, logaritmos, expresiones algebraicas, por citas algunas.

Para sumar números de signos iguales, ya sean que todos sean positivos o negativos, se suman sus valores absolutos y se antepone a la suma el signo común, por ejemplo,

$8 + 4 + 5 = 17$,

$-8 - 4 - 5 = -17$ y

$a + a + a = 3a$,

$-a - a - a = -3a$.

Después de abordar la resta, se expondrá el problema de sumar dos números de signos opuestos.

Con fundamento en esta idea, considerando el concepto de términos semejantes y signos de agrupación, ¿cómo se suman las expresiones dadas en cada inciso?

a) $2a$, $3b$, $3a$, $5b$;

b) $3xy$, $4yz$, $2xy$, $2yz$;

c) $(2x + 3)$ y $(3x + 8)$;

d) $(2x^2 + 3x + 6)$ y $(5x^2 + 3x + 8)$;

e) $(ax^2 + bx + c)$ y $(a_1x^2 + b_1x + c_1)$ y

f) $(2abc + 3abd)$ y $(3abc + 4abd)$.

Después de indicar la suma con los términos dados en a) y aplicando el concepto de términos semejantes, propiedad asociativa, factor común y propiedad distributiva; el resultado es,

a) $2a + 3b + 3a + 5b = 2a + 3a + 3b + 5b$

$= (2 + 3)a + (3 + 5)b = 5a + 8b.$

De igual manera en los incisos b), c), d), e) y f), es decir,

b) $3xy + 4yz + 2xy + 2yz = (3xy + 2xy) + (4yz + 2yz)$

$=(3 + 2)xy + (4 + 2)yz = 5xy + 6yz.$

c) $(2x + 3) + (3x + 8) = 2x + 3x + 3 + 8 = (2 + 3)x + (3 + 8) = 5x + 11$

d) $(2x^2 + 3x + 6) + (5x^2 + 3x + 8) = 2x^2 + 3x + 6 + 5x^2 + 3x + 8$

$= (2 + 5)x^2 + (3 + 3)x + 6 + 8$

$= 7x^2 + 6x + 14$

e) $(\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}) + (a^1x^2 + b^1x + c^1)$

$= ax^2 + bx + c + a^1x^2 + b^1x + c^1$

$= (a + a^1)x^2 + (b + b^1)x + (c + c^1)$

f) $(2abc + 3abd) + (3abc + 4abd) = 2abc + 3abd + 3abc + 4abd$

$= (2abc + 3abc) + (3abd + 4abd)$

$= (2 + 3)abc + (3 + 4)abd$

$= 5abc + 7abd = (5c + 7d)ab$

4.2 Ejercicios de asimilación para la suma

Ahora ¿cuál es la suma de las expresiones dadas en cada inciso?

a) $3a, 5b, 4a, 7b;$

b) $5x, 8y, 3z, 4x, 5y, 2z;$

c) $(2x + 7y)$ y $(5x + 6y);$

d) $3xyz + 6xyz$ y $4xyz + 7xyz;$

e) $(a^2 + b)$ y $(3a^2 + 5b);$

f) $5x^2y^2 + xy$ y $2x^2y^2 + 3xy;$

g) $(a^2 + 2ab + b^2)$ y $(a^2 + b^2);$

h) $ax^2 + 2abx + b$ y $5x^2 + 40x + 20;$

i) $\frac{1}{2}xy + \frac{3}{4}x^2y^2$ y $\frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}x^2y^2;$

j) $3xy + 4xz + 5yz$ y $5xy + 5yz$ y $5yz + 5ab;$

k) $(\frac{1}{2}ax + 1/3by)$ y $(2/3ax + \frac{3}{4}by)$ y $(1/5ax + 2/3by);$

l) $2ax + 3by + 5cz$ y $3ax + 5by + 3cz$ y $5ax + 4cz;$

m) $3ap + 3ax$ y $3ap + 4ay + 2xz;$

n) $\frac{1}{2}st + \frac{3}{4}uv$ y $\frac{1}{2}st + \frac{1}{4}uv$ y $3st + 5uv.$

4.3 Sumas con propiedad distributiva

Además de lo ya dicho, en los problemas anteriores se mostró que sumar es reunir dos o más expresiones algebraicas, tomando en cuenta, para ello, que éstas pueden ser o no términos semejantes.

Todas las propiedades de la suma son importantes. Para fundamentar esta afirmación, de éstas, se utiliza la propiedad distributiva. Por principio, esta propiedad permite expresar un producto como una suma y a la inversa, una suma como un producto. Por ejemplo, expresar $(a + b)(c + d)$ como una suma.

Después de aplicar la propiedad distributiva, se obtiene

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d.$$

Luego de aplicar la propiedad distributiva por la derecha, se obtiene la suma, es decir,

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Ahora, expresar la suma $xy + 30x + bx$ como producto de dos factores. En efecto,

$xy + 3ax + bx = x(y + 3a) + bx$ y

$= x(y + 3a + b)$.

Expresar, según sea el caso, un producto como una suma, o una suma como producto.

a) $xy + 3y$

b) $2x(a + b)$

c) $8xy + 5y$

d) $(x + 2y)2x + (x + 2y)2y$

4.4 Problemas de reafirmación

Los problemas siguientes serán el medio para fijar conceptos relacionados con la suma y sus propiedades y, de paso, actualizar y desarrollar capacidades y habilidades. ¡Resuélvelos!

1) ¿Qué axioma justifica cada una de las proposiciones dadas?

a) $6 + 5 \in$ N

b) para todo $a, b \in R, a + b \in R.$

c) $8 + 6 = 6 + 8$

d) $3x + y = y + 3x$

e) $(7 + 3) + 2 = 7 + (3 + 2)$

f) $(4x + a) + c = 4x + (a + c)$

g) $(3 + 4)*2 = 3*2 + 4*2$

h) $(2x + y)a = 2xa + ya$

i) $5(4 + 7) = 5*4 + 5*7$

j) $a(bx + cy) = abx + acy$

2) Expresar cada producto dado como una suma

a) $(a + b)(a + b)$

b) $(x + 2y)(x + 2y)$

c) $(a + b)(c + d)(e + f)$

d) $(x + 3y)(a + b)$

e) $(a + 5)(b + 6)$

f) $(2x + 1)(2x + 3)$

g) $2x(x + y)$

h) $3x(x + a) + y(x + a)$

i) $(2a + b)3x$

j) $(x + y + z)2x + (x + y + z)x$

k) $(a + b)(x + y)(p + h)$

l) $(x + y)(x + y)(r + s)$

3) Expresar las sumas dadas como productos

a) $ab + ac$

b) $4xy + 2xc + 2by + bc$

c) $3xy + 6x$

d) $(x + y + 1)5a + (x + y + 1)2b$

e) $5bx + 3 + 15x + b$

f) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

g) $ad + ae + bd + be + cd + ce + a + b + c$

h) $ac + ad + bc + bd + a + b$

i) $ab + b + 2a + a$

j) $ac + ad + ay + bc + bd + by + cx + dx + xy$

4) Sumar las expresiones dadas en cada inciso

a) $3x, 3y, 3z, 2x, 3y, 2z, x, y, z$

b) $2x^2y, 5xy^2, 2ab, 3x^2y, xy^2, 5ab$

c) $(ax + b + 2)$ y $(5x + 2b + c)$

d) $(3x^3 + 2x^2 + ax + b)$ y $(ax^3 + bx^2 + 2x + c)$

e) $3x + y + z$ y $5x + ay$

f) $2xy + 2x + 3y$ y $3xy + 5y$

g) $\frac{3}{4}abc + \frac{1}{4}xy$ y $\frac{1}{4}abc + 3y$

h) $\frac{3}{8}abx + \frac{1}{3}axy$ y $\frac{5}{8}abx + \frac{2}{3}axy$ y $2abx$

4.5 Diferencia

Para el inicio de este tema, como en los anteriores, partamos de los cuestionamientos siguientes.

¿Por qué se puede definir la diferencia?

¿Esta operación está incluida en el campo de los números reales?

¿Qué axiomas se enuncian con respecto a la resta?

¿Cuáles son los elementos de una diferencia?

¿Qué utilidad tiene?

Después de contestar estas preguntas, lee lo siguiente.

La diferencia o sustracción es una operación binaria que no se postula en el campo de los números reales, por lo que no está relacionada directamente con los axiomas de campo, es decir, no se podrá decir, por ejemplo, axioma o propiedad conmutativa o asociativa de la diferencia. En todo caso, si existiera algo semejante a estas proposiciones, se tendría que escribir en forma de teorema y, enseguida, demostrarlo, por ejemplo,

$a(b - c) = ab - ac$ es semejante al axioma o propiedad distributiva, pero no es tal, este es un teorema.

Debido a esto, la diferencia se define en base a la existencia del inverso aditivo.

Definición. Sean a, b y c números reales tal que $a + b = c$, entonces $a = c - b$, si y solo si, $a + b = c$. En $a = c - b$, c es el minuendo, b el sustraendo y a la resta o diferencia. Debe notarse también que $-b$ es el inverso aditivo de b y que la suma del sustraendo más la diferencia es igual al minuendo, $b + a = c$.

Es conveniente señalar que la diferencia es única, porque no existe otro número tal que sumado al sustraendo sea igual al minuendo. Lo que sigue muestra la utilidad del concepto, esto es,

- $8 - 5 = 3 \Leftrightarrow 8 = 5 + 3$,
- $2x - x = x \Leftrightarrow 2x = x + x$,

- $2a + b - b = 2a \Leftrightarrow 2a + b = 2a + b$ y

- $8x - x = 7x \Leftrightarrow 8x = 7x + x$.

En la última operación $8x$ es el minuendo, x el sustraendo y $7x$ es la resta o diferencia.

La resta también se emplea para definir los números positivos, cero y números negativos. En efecto, si $b < c$, entonces $c - b = p$ es un número positivo, si $b = c$, entonces $b - c = 0$ y, por último, si $b > c$, entonces $c - b = -(b - c)$ es un número negativo.

La siguiente propiedad de la diferencia se puede enunciar diciendo que si a dos números iguales se restan números iguales las diferencias son también iguales. Esta es la propiedad sustractiva de la igualdad. En forma general, para todo $a, b \in$ R, si $a = b$, entonces $a - c = b - c$.

Apoyando en esta propiedad,

si $8 = 8$, entonces $8 - 2 = 8 - 2$, igual

si $2x - a$, entonces $2x - b = a - b$ y, por último,

si $3x + 5 = a + 5$, entonces $3x = a$.

En líneas anteriores, con $b < c$, $c = b$ y $b > c$, se definieron, respectivamente, los números positivos, cero y los negativos, que es, precisamente, lo que se quiere significar con el axioma de tricotomía.

Asimismo, la diferencia puede tomarse como un caso particular de la suma. Esto es, $c + (-b) = a$ es equivalente a $c - b = a$. Consecuentemente, la suma del número b con su simétrico es cero, por ejemplo, b es un número y $-b$ su simétrico, $b + (-b) = 0$, igualmente, $2x$ es un número y $-2x$ su simétrico, $2x + (-2x) = 0$, por último el simétrico de $3x + 2$ *es* $-(3x + 2)$ y $(3x + 2) + (-(3x + 2)) = 0$.

La proposición $a - c = b - c$, ya mencionada, también se puede expresar como $a + (-c) = b - c$ y en ella se afirma que sumar un número negativo a otro positivo es equivalente a restar ese número.

Ya se dijo que para sumar números positivos o negativos, se suman sus valores absolutos y, enseguida, se antepone a la suma el signo común. Ahora, si el problema es sumar dos números de signos opuestos, se resta el de menor valor absoluto del mayor valor también absoluto y se antepone a la diferencia el signo del número que tenga mayor valor absoluto. Por ejemplo,

$$-12 + 5 = -(12 - 5) = -7 \quad \text{y}$$

$$-8a + 2a = -(8a - 2a) = -6a$$

La suma no es necesariamente binario, por lo que los sumandos pueden ser más de dos y de signos iguales o diferentes. Por ejemplo,

a) $(2 + 3) + (4 + 5) = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$,

$a + 2a + 3a + 4a = (1 + 2 + 3 + 4)a = 10a$

b) $-2 - 3 - 4 - 5 = -14$,

$-a - 2a - 3a - 4a = (-1 - 2 - 3 - 4)a = -10a$.

c) $(3 - 4) + (2 - 6) = 3 - 4 + 2 - 6 = 3 + 2 - 4 - 6$

$= 5 - 10 = -(10 - 5)=5$;

$(a - 2a) + (3a - 4a) = a - 2a + 3a - 4a$

$a + 3a - 2a - 4a = 4a - 6a = -2a$.

d) $(4 - 3) + (6 - 2) = 4 - 3 + 6 - 2 = 4 + 6 - 3 - 2 = 10 - 5 = 5$;

$(2a - a) + (4a - 3a) = 2a - a + 4a - 3a$

$= 2a + 4a - a - 3a = 6a - 4a$

$= 2a$.

Se observa que en a) y b), a cada sumando le antecede el mismo signo, mientras que en c) y d) los signos son diferentes.

4.6 Problemas resueltos

En estos problemas resueltos, se observa que para sumar expresiones algebraicas, se suman, por separado, si se prefiere, los coeficientes de los términos positivos y negativos, obteniendo, por principio, una suma de dos términos que se pueden reducir o bien en binomio, trinomio o polinomio imposible de reducir. Por ejemplo,

a) $2xy + 3ab - xy + 2ab = 2xy - xy + 3ab + 2ab$

$= xy + 5ab$.

b) $(5xy + xy) + (3xy - 2xy) = 5xy + xy + 3xy - 2xy$

$= 9xy - 2xy$

$= 7xy$

c) $(2x^2 + 3x - 6) + (x^2 - x + 5) = 2x^2 + 3x - 6 + x^2 - x + 5$

$= 2x^2 + x^2 + 3x - x - 6 + 5$

$= 3x^2 + 2x - (6 - 5)$

$= 3x^2 + 2x - 1.$

Cuando en la adición, resta o reducción de términos, ya sea numérico o expresiones algebraicas, se elimina un signo de agrupación (óvalo, rectangular o llave) precedido por un signo menos se cambia el signo de cada termino en el interior del paréntesis, mientras que los paréntesis de signo más se pueden eliminar sin que nada cambie de la expresión entre paréntesis. Por ejemplo, la suma de

a) $3x - 5y + 8$ y $2x + 3y - 7$ es

$(3x - 5y + 8) + (2x + 3y - 7) = 3x - 5y + 8 + 2x + 3y - 7$

$=3x+2x - 5y+3y+8 - 7$

$= (3 + 2)x + (-5 + 3)y + 8 - 7$

$= 5x - 2y + 1.$

b) $-7x + 5y - 8$ y $-(3x - 4y + 5)$ es

$(-7x + 5y - 8) + -(3x - 4y + 5)= -7x + 5y - 8 - 3x + 4y - 5$

$= -7x - 3x + 5y + 4y - 8 - 5$

$= (-7 - 3)x + (5 + 4)y - 13$

$= -10x + 9y - 13.$

c) $2a^2 - 3b^2 + c^2$ y $3a^2 + 5b^2 - 7c^2$ es

$= (2a^2 - 3b^2 + c^2)+(3a^2 + 5b^2 - 7c^2)$

$= 2a^2 - 3b^2 + c^2 + 3a^2 + 5b^2 - 7c^2$

$= 2a^2 + 3a^2 - 3b^2 + 5b^2 + c^2 - 7c^2$

$= (2 + 3)a^2 + (-3 + 5)b^2 + (1 - 7)c^2$

$= 5a^2 + 2b^2 - 6c^2$.

Ahora, la diferencia entre

a) $5x + 3y - 4$ y $3x - 2y + 5$ es

$(5x + 3y - 4) - (3x - 2y + 5) = 5x + 3y - 4 - 3x + 2y - 5$

$= 5x - 3x + 3y + 2y - 4 - 5$

$= (5 - 3)x + (3 + 2)y - 9$

$= 2x + 5y - 9$.

b) $2xy - 3ab + 7$ y $5xy + 5ab - 8$ es

$(2xy - 3ab + 7) - (5xy + 5ab - 8) = 2xy - 3ab + 7 - 5xy - 5\mathrm{ab} + 8$

$= 2xy - 5xy - 3ab - 5ab + 7 + 8$

$= (2 - 5)xy + (-3 - 5)ab + 15$

$= -(5 - 2)xy - 8ab + 15$

$= -3xy - 8ab + 15$.

c) $-3xyz + 5abc - 7$ y $2xyz - 3abc + 10$ es

$(-3xyz + 5abc - 7) - (2xyz - 3abc + 10)$

$= -3xyz + 5abc - 7 - 2xyz + 3abc - 10$

$= -3xyz - 2xyz + 5abc + 3abc - 7 - 10$

$= (-3 - 2)xyz + (5 + 3)abc - 17$

$= -5xyz + 8abc - 17$.

Por último, la expresión simplificada, luego de eliminar paréntesis

a) $10x - (8x - 10)$ es

$$\begin{aligned} 10x - (8x - 10) &= 10x - 8x + 10 \\ &= (10 - 8)x + 10 \\ &= 2x + 10 \end{aligned}$$

b) $-5\,[-3(-8x + 2x + 7)]$ es

$$\begin{aligned} -5\,[-3(-8x + 2x + 7)] &= -5[-3\,(-6x + 7)] \\ &= -5\,(18x - 21) \\ &= -\,90x + 105. \end{aligned}$$

c) $-2\,\{-2[-4(3x - 2\,)]\}$ es

$$\begin{aligned} -2\{-2[-4(3x - 2)]\} &= -2[-2(-12x + 8)] \\ &= -2(24x - 16) \\ &= -48x + 32. \end{aligned}$$

d) $5x - \{2x - [6y - (5y - 3x)]\}$ es

$$\begin{aligned} 5x - \{2x - [6y - (5y - 3x)]\} &= 5x - [2x - (6y - 5y + 3x)] \\ &= 5x - [2x - (y + 3x)] \\ &= 5x - (2x - y - 3x) \\ &= 5x - (-y - x) \\ &= 5x + y + x \\ &= 6x + y. \end{aligned}$$

Observa que para eliminar los distintos paréntesis se trabajó desde adentro hacia afuera. Asimismo, en cada caso, para arribar al resultado, se aplicó el neutro multiplicativo o idéntico, la propiedad asociativa y, reiteradamente, la propiedad distributiva.

Para eliminar los paréntesis también se puede trabajar de afuera hacia adentro. Veamos.

$$5x - \{2x - [6y - (5y - 3x)]\} = 5x - 2x + [6y - (5y - 3x)]$$

$$= 3x + 6y - (5y - 3x)$$

$$= 3x + 6y - 5y + 3x$$

$$= 6x + y.$$

4.7 Problemas de reafirmación

Con los problemas siguientes, se intenta la manipulación de conocimientos previos y fijar conceptos relacionados con las operaciones de suma y diferencia; así como actualizar y desarrollar capacidades. ¡Resuélvelos!

1) De acuerdo con las operaciones de sumar y restar, determinar, primero, la suma de las expresiones dadas y, segundo, restar la segunda de la primera.

a) $3a - 5b + 8$ y $3a + 2b - 3$

b) $3(3x - 2y + 2)$ y $-3(5x - 3y + 4z)$

c) $5a - (2b - 7a)$ y $-[5a - (2b - 4a)]$

d) $3y - 5(x + 3y) + 5y$ y $-[4x - 5(x - 3y)]$

e) $-[x - (5y + 7z)]$ y $5x - (8y - 3z)$

f) $4x - [-(5x - 2y + 3z) - (5x - 6y + 5z)]$ y $8x - (4y + 3z)$

g) $6x - (6y - 4x) + z$ y $5x - 3(y - 7z)$

h) $5\{-2x + 3[-3(2x + 1) + 8y] - 3x\}$ y $-3[-5x + 5(6y + x) + 4]$

i) $5a - \{2b - 3[2(a - 2b + 1) + 4a] - 5a\}$ y $5b - [2a - 2(a - b + 3) + b]$

2) Simplificar cada expresión dada

a) $8x - (-5x - 4) + 7$

b) $9x - (10x - 8) + 7x$

c) $5x - (-4x - 7) + 10$

d) $7x - [4x - (6x + 7) - 8] + 7$

e) $6ab - 3[(3ab + 5) - 6ab]$

f) $5xy - [-5xy + 3(3x - 6\ ) - 3]$

g) $10x - \{-3\ [(y - 4x - 1) - x + y] - 5x + 6y\} + 5y$

h) $5yz - \{4xy - 2[3xz - (3xy - 2yz + 5xz) + 4xz] - yz + 4\}$

i) $5y - \{2x - 4y - 5[2x - (y - 5x)] + 5\} + 7x$

j) $7x - \{-2y - [(3x - 4y) + 7] + 2x - 5\} - 3y$

k) $-\{2y - [(5x + y - 8) + 6] + 3x\} - x + y$

l) $-\{-2[6x - (y + 2)] - 3x\} + 2x - y$

m) $-5\{x - 2[-2(x - y) + 5x] + 3x\} - 3x + 7$

n) $-3\{-6 + 5\ [-(3x - 7y + 2) - 3y - 6x] + 7x\} - x - 6$

Capítulo 5

Suma de polinomios

Para continuar incidiendo en las operaciones de adición y diferencia, así como en la simplificación de expresiones, haz lo que se solicita.

1) Dado $P = a^2 - b^2 + c^2$, $Q = 2a^2 - 3b^2 - 5c^2$, $R = -6a^2 + 7b^2 + 3c^2$. Hallar

   a) P + Q

   b) P + R

   c) P – Q

   d) R – P – Q

Lo que se solicita en a) se puede hacer en forma horizontal o vertical. Si se hace en forma horizontal, después de indicar lo que se solicita, se agrupan los términos semejantes, obteniendo

$$P + Q = a^2 - b^2 + c^2 + 2a^2 - 3b^2 - 5c^2$$

$$= a^2 + 2a^2 - b^2 - 3b^2 + c^2 - 5c^2$$

$$= (1 + 2)a^2 - (1 + 3)b^2 + (1 - 5\ )c^2$$

$$= 3a^2 - 4b^2 - 4c^2$$

Se observa que en esta forma el orden es relativo. En cambio en la forma vertical, desde el principio, el orden es importante, como puede notarse enseguida, o sea,

$$P = a^2 - b^2 + c^2$$

$$Q = 2a^2 - 3b^2 - 5c^2$$

$$P + Q = (1 + 2)a^2 - (1 + 3)b^2 + (1 - 5)\ c^2$$

$$= 3a^2 - 4b^2 - 4c^2$$

Igual en b), esto es,

$$P + R = a^2 - b^2 + c^2 - 6a^2 + 7b^2 + 3c^2$$

$$= a^2 - 6a^2 - b^2 + 7b^2 + c^2 + 3c^2$$

$$= (1 - 6)a^2 - (1 - 7)b^2 + (1 + 3)c^2$$

$$= -5a^2 + 6b^2 + 4c^2$$

En forma vertical, el resultado es,

$$P = a^2 - b^2 + c^2$$

$$R = -6a^2 + 7b^2 + 3c^2$$

$$P + R = (1 - 6)a^2 + (-1 + 7)b^2 + (1 + 3)c^2$$

$$= -5a^2 + 6b^2 + 4c^2$$

En c) está indicada una resta, por lo que a partir del minuendo P y el sustraendo Q, se obtienen la diferencia o resta, es decir,

$$P - Q = a^2 - b^2 + c^2 - (2a^2 - 3b^2 - 5c^2)$$

$$= a^2 - b^2 + c^2 - 2a^2 + 3b^2 + 5c^2$$

$$= a^2 - 2a^2 - b^2 + 3b^2 + c^2 + 5c^2$$

$$= (1 - 2)a^2 - (1 - 3)b^2 + (1 + 5)c^2$$

$$= -a^2 + 2b^2 + 6c^2.$$

En forma vertical, el resultado es

$$P = a^2 - b^2 + c^2$$

$$-Q = -(2a^2 - 3b^2 - 5c^2)$$

$$P = a^2 - b^2 + c^2$$

$$-Q = -2a^2 + 3b^2 + 5c^2)$$

$$P - Q = (1 - 2)a^2 + (-1+3)b^2 + (1 + 5)c^2$$

$$= -a^2 + 2b^2 + 6c^2$$

Por último, en d) es una combinación de suma y resta, o bien una adición de sumandos positivos y negativos. Después de hacer las operaciones en forma horizontal, el resultado es,

$$R - P - Q = -6a^2 + 7b^2 + 3c^2 - (a^2 - b^2 + c^2) - (2a^2 - 3b^2 - 5c^2)$$

$$= -6a^2 + 7b^2 + 3c^2 - a^2 + b^2 - c^2 - 2a^2 + 3b^2 + 5c^2$$

$$= (-6 \ -1 \ -2)a^2 + (7+1+3)b^2 + (3 - 1 + 5)c^2$$

$$= -9a^2 + 11b^2 + 7c^2.$$

En forma vertical, se obtiene

$$\left\{\begin{array}{l} R = -6a^2 + 7b^2 + 3c^2 \\ -P = -(a^2 - b^2 + c^2) \quad \text{ó} \\ -Q = -(2a^2 - 3b^2 - 5c^2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} R = -6a^2 + 7b^2 + 3c^2 \\ -P = -a^2 + b^2 - c^2 \\ -Q = -2a^2 + 3b^2 + 5c^2, \quad \textit{de donde} \end{array}\right.$$

$$R - P - G = (-6 - 1 - 2)a^2 + (7 + 1 + 3)b^2 + (3 - 1 + 5)c^2$$

$$= -9a^2 + 11b^2 + 7c^2.$$

Para complementar, se propone que resuelvas el problema siguiente.

Sea $P = 3a^2 - 2x^2 + y^2$, $Q = 3x^2 + 4a^2 - 6y^2$, $R = 5y^2 - 3\ a^2 + 8$.

Hallar en forma vertical y horizontal,

a) P + 2Q + 3R,

b) 3P + Q,

c) 3P – 2R,

d) P – 3Q + 2R   y

e) 2P – ½Q + ¾R

Ahora, si $p(x) = 5x + 7$ y $q(x) = x^2$, entonces

$$p(x) + q(x) = 5x + 7 + x^2$$

$$= x^2 + 5x + 7.$$

Se puede observar que el número de sumandos son diferentes y, además, que tales sumandos no son términos semejantes, lo cual significa que no hay reducción de términos semejantes. En consecuencia, el resultado de esta operación es la suma indicada de los sumandos de ambos polinomios.

De igual manera, si $p(x, y) = 3x^2y^2 + 2xy$ y $q(x, y) = x^2 + y$, entonces $p(x, y) + q(x, y) = 3x^2y^2 + 2xy + x^2 + y$.

Si ahora se suman $p(x, y) = x^2 + y^2 + 8$, $q(x, y) = x^2y^2 + 5x$ y $r(x, y) = x^3 + xy$, ¿a qué es igual la suma?

¿Qué ocurre con la resta? Para restar $p(x, y) = x^2 + y^2 + 8$ de $q(x, y) = x^2y$, se hace lo siguiente:

$$Q - P = x^2y - (x^2 + y^2 + 8)$$

$$= x^2y - x^2 - y^2 - 8$$

Como puede observarse, al no existir términos semejantes, el resultado es una operación indicada. Finalmente, si $p(x, y) = x + y$, $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, y $r(x, y, z, s) = x^3 + y^3 + z^3 + s^4$,

¿a qué es igual $p(x, y) - q(x, y, z) - r(x, y, z, s)$?

5.1 Problemas de reafirmación

Los problemas siguientes se proponen para fijar conceptos relacionados con adición, resta y simplificación; y de paso, actualizar y desarrollar capacidades.

1) Efectuar lo que se indica

a) $3xy + 5xy + 3xy$

b) $-3yz - 5yz - 3yz$

c) $5ab - 3xy + 2ab + 2xy - ab$

d) $6ax + 2by - 2ax - 3by + 3ax - 5by$

e) $2(x - 3) + 3(2x - 4)$

f) $3(x - 3y) + 5(x + 3y)$

2) ¿Cuál es el resultado en cada caso?

a) $(5xyz + 5abc) + (-3abc + 3xyz)$

b) $(7xy - 2xy) + (5xy + 2xy)$

c) $(2b^2 + 3b + 8) + (b^2 - 2b - 3)$

d) $(3x^2 + 5) + (x - 5)$

e) $(2xy + 3xy + 5yz) + (xy - 2xy - 3yz + 5)$

f) $(x^3 - 3x^2 + 5x + 8) + (-x^3 + 3x^2 - 5x - 8)$

g) $(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (3x^3 + 2x^2 - 2x + 5)$

h) $(3x^2 + 2x) + (ax^2 + cx) + (cx^2 + dx + e)$

i) $(x + y + 2) + (ax + by + c) + (3x - 2y + 2)$

j) $(a + b)x + (c + d)y + (2x - 5y)$

3) En cada caso, resta la primera expresión de la segunda

a) $8x + 3y + 7$ y $3x - 2y + 8$

b) $2xy - 7$ y $x^2 - 2xy + y^2 + 5$

c) $5ab + 5a - 6b$ y $3ab - 3a + x + 8$

d) $5x + 6y - 2z + 8$ y $7x - 9y + 5z - 9$

e) $-\{2x - [2x - (3x + y)] - 5y\}$ y $-[\, 2x - (4y - 3y) + 5]$

f) $-[5x + (6y - 4) + 7x]$ y $6x - 7y + 8$

g) $-\{-2xy + 5ab - [4xy - (7ab - 5xy) + 5ab\ )]$ y $-[x + y - (3ab - 2xy) - 6]$

h) $-\{2[4xy - (2xz + 5)]\}$ y $5xy - (xz - 4)$

i) $-\{-3[xyz - 5(x + y - 4)] + z\}$ y $5xyz - [4x - (4x - 6y)]$

j) $\{-2[-5(abc - 4a\ ) + b\ ] - c\}$ y $3abc - [a - 5(b - 3) + 6]$

4) Simplificar cada expresión dada

a) $-5\ (x - y) + 6\ (3x - y) + 10$

b) $-3\ (xy - xz) + 5(-xy - 3xz)$

c) $5(abc - ab) - 8(2abc - 2ab)$

d) $7(pq - 3rs) - 3(3pq + 7rs) + 2$

e) $3(mn - m^2n^2) - (mn - m^2n^2)$

f) $-3\ \{ -4(4xy - ab) - [-(5xy - 2ab) + 8]\}$

g) $-4\{-3[-3(3p + q)] - 2(5p - 6q)\}$

h) $3ab - 5\{-4[-(3x + y) + 8] + 5x - 6y + 5ab\}$

i) $5xy - 2[-(5x - y + 10) - 3xy + 2x - 5y + 10]$

j) $7x - \{-5y - 3[-(x - 3y + 6)] - 12 + x - y\}$

5) Sea $P = 3s^3 + t^2 - v$, $Q = -5s^3 - 3t^2 + 2v$, $R = 3s^3 - 5t^2 - 6v$. Calcular

a) P + Q + R

b) P – Q + R

c) P + Q – R

d) Q – 3P – 2R

e) R – 2P + 2R

f) R + 3P – 5R

g) Q + 2P – 3R

h) Q – P + 5R

i) R – 5P – Q

j) P + 2Q + 3R

5.2 Multiplicación

La multiplicación es una de las operaciones que se postula y respecto a ésta, como con la suma y diferencias, se formulan los axiomas que garantizan entre otros, la cerradura, la conmutatividad, distributividad.

El producto es el número que resulta de multiplicar el multiplicando por el multiplicador y es único.

Según del axioma que se trate, éstos pueden ser ampliados a cualquier cantidad de números reales, por ejemplo, para $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in R$,

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = a_n \ldots a_3 a_2 a_1,$$

$$a_1(a_2 + a_3 + \ldots + a_n) = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \ldots + a_1 a_n$$

$$a_1(a_2 a_3 \ldots a_n) = (a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1}) a_n.$$

son ciertas.

Por otra parte, los axiomas son la base para demostrar que ciertas proporciones adicionales de los números reales sean falsas o verdaderas, por ejemplo, para todo $a \in R$, $a.\ 0 = 0$, es una proposición que por principio puede ser falsa o verdadera. Para concluir si es o no verdadera, se parte de

$$a \cdot 1 = a \cdot 1.$$

A continuación, mediante la identidad aditiva la igualdad, se transforma en

$$a \cdot 1 = a(1 + 0).$$

Después de emplear la propiedad distributiva, se obtiene

$$a \cdot 1 = a \cdot 1 + \mathrm{a} \cdot 0.$$

Luego de utilizar la identidad aditiva, el resultado es

$$a + 0 = a + a \cdot 0.$$

Ahora, por la propiedad cancelativa de la igualdad, se obtiene

$$0 = a \cdot 0.$$

Por último, por simetría,

$$a \cdot 0 = 0.$$

Con apoyo de esta conclusión,

$$5 \cdot 0 = 0,$$

$$b \cdot 0 = 0, \quad \mathrm{y}$$

$$(2x + 3) \cdot 0 = 0, \quad x \in R.$$

Este teorema nos enseña que el producto de un número real por cero es cero.

Continuando, para corroborar la conclusión $-(-a) = a$, donde $a \in \mathrm{R}$, esto es, el negativo del negativo de a es a, después de aplicar el inverso de $-a$, $-(-a) = a$, se convierte en $-a = a$ y repitiendo el argumento se concluye que $a = a$.

Para todo $a, b \in R$, $(-a)b = -ab$ es otra proposición que debe desmostrarse porque no es una axioma. Para ello, se observa que $-ab$ es solución de la ecuación $ab + x = 0$ de modo que es suficiente mostrar que $ab + (-a)b = 0$. En efecto, después de usar la propiedad distributiva, la igualdad se transforma en

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b.$$

En seguida, por la identidad aditiva, la igualdad se convierte en

$$ab + (-a)b = 0 \cdot b.$$

Por último, como $a \cdot 0 = 0$, se concluye que $ab + (-a)b = 0$.

Ahora, para todo $a, b, c \in R$ tal que $a(b - c) = ab - ac$ es otra proposición que tampoco es un axioma, por lo que se tiene que probar. Por la forma que tiene, lo que se tiene que probar. Por la forma que tiene, se parte del axioma de la distributividad, o sea, $a(b + c) = ab + ac$ y para concluir se utiliza el inverso aditivo de c, esto es

$$a(b + (-c)) = ab + a(-c) \quad \text{ó}$$

$$a(b - c)= ab - ac.$$

Se observa que este teorema incluye las operaciones de multiplicar y diferencia.

Apoyado en esta proposición,

$$5(6 - 3) = 5 \cdot 6 - 5 \cdot 3,$$

$$5(3) = 30 - 15,$$

$$15 = 15 \quad \text{y}$$

$$x(a - y) = xa - xy.$$

Este teorema enseña la forma de distribuir un factor sobre una resta.

También, para todo $a, b \in R$, $(-a)(-b) = ab$ es una proposición que debe demostrarse. Para tal efecto, se parte de

$$0 = 0.$$

Luego de utilizar la identidad aditiva, se obtiene

$$[a + (-a)] = 0.$$

Después de emplear la propiedad multiplicatividad de la igualdad, el resultado es

$$[a + (-a)](-b) = 0(-b).$$

Luego de utilizar la propiedad distributiva, se obtiene

$$a(-b) + (-a)(-b) = 0(b).$$

Por la proposición $a\ .\ 0 = 0$, la igualdad se transforma en

$$a(-b) + (-a)(-b) = 0.$$

Después de aplicar la proposición $a(-b) = -ab$, la igualdad se transforma en $-(ab) + (-a)(-b) = 0$.

Luego de aplicar la propiedad aditiva de la igualdad y hacer operaciones, el resultado es

$$-(ab) + (ab) + (-a)(-b) = 0 + (ab)$$

$$0 + (-a)(-b) = 0 + (ab).$$

Finalmente, por el idéntico aditivo, $(-a)(-b) = ab$.

Este teorema muestra que el producto de dos números negativos es positivo y, consecuentemente, negativo de tres negativo, y positivo de cuatro positivo o cuatro negativos.

Para continuar, el enunciado para todo $a, b \in R$, si $ab = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$, es una proposición que debe probarse, porque no es un axioma. El teorema queda demostrado si $b = 0$. Sabemos que todo real, excepto cero, tienen inverso multiplicativo, en efecto, el inverso de b es b^{-1}.

Después de multiplicar los dos lados de $ab = 0$, se obtiene, $abb^{-1} = 0b^{-1}$ y por la propiedad asociativa, $a \,.\, 1 = 0b^{-1}$.

Por último, por el neutro multiplica y por $\frac{0}{b} = 0$, $a = 0$.

Para la división se ha destinado un capítulo independiente dado el número de alternativas que implica el dominio de sus axiomas. En consecuencia con la multiplicación, primero se abordará el tema de potencia.

5.3 Potencia

La potencia es otra operación de los números reales.

Si a, b, y $c \in R$, entonces $abc = abc$. La distinción entre estos productos es el orden, o sea $abc = cba$ y la diferencia es el agrupamiento, es decir $a(bc) = (ab)c$. Pero el valor es el mismo, es decir no depende del orden ni de la asociación de los factores. Pero si a tal producto se sujeta a la condición $a = b = c$, entonces éste se transforma en $a \cdot a \cdot a = a \cdot a \cdot a$

Ahora, si se acepta que todo número está elevado a la unidad, entonces

$$a^1a^1a^1 = a \cdot a \cdot a$$

Por último, si se acepta que los exponentes se sumen, entonces

$$a^{1+1+1} = a \cdot a \cdot a \quad \text{ó} \quad a^3 = a \cdot a \cdot a$$

Esta expresión es una definición de potencia, la cual se puede generalizar, es decir, para todo número entero positivo a mayor que cero y para todo n $\in$ N,

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$$

donde a es la base y n el exponente de la potencia. El significado de a^n es n factores, por ejemplo, a^5 significa $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$, y a^3 significa $a \cdot a \cdot a$. El exponente, pues, indica las veces que un número o una expresión se repite como factor.

¿La definición dada se podrá extender diciendo que $a^0 = 1$?

De esta definición se deducen algunas proposiciones sobre los exponentes. En efecto, si a^3a^2, entonces, por definición

$$a^3a^2 = (a \cdot a \cdot a)(a \cdot a)$$

$$= a^1a^1a^1a^1a^1$$

$$= a^3a^2 = a^5$$

En forma general, si a^ma^n, entonces, por definición,

$$a^ma^n = (a \cdot a \cdot a \cdots a)(a \cdot a \cdots a)$$

$$= a^{(1+1+1+\cdots 1)+(1+1+\cdots 1)}$$

$$= a^{m+n}$$

Esta proposición demostrada se puede enunciar diciendo que para cualquier número entero a y para n y m $\in$ N, el exponente del producto del mismo número es la suma de los exponentes de los factores.

Antes de ver la multiplicación entre polinomios, se continúa con la prueba y significado de $(a^n)^m$, así como con la aplicación de ésta en la solución de potencias de cada potencia. Por ejemplo, en cada caso, ¿a qué es igual las potencias de cada potencia?

a) $(a^n)^m$

b) $(2^3)^2$

c) $(a^2)^3$

d) $(x^3)^3$

En a) $(a^n)^m = a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdots a^n = a^{n+n+n+n\cdots n} = a^{(1+1+1+1+\cdots 1)\text{n}} = a^{mn}$

Este resultado se puede expresar con palabras diciendo que el exponente de la potencia de una potencia, dejando la misma base, es la multiplicación de los exponentes.

También, este resultado es la conclusión de la proposición que se puede anunciar diciendo que para todo m, n $\in$ R y $a \in$ R,

$$(a^n)^m = a^{nm},$$

De acuerdo con este teorema en

a) $(2^3)^2 = 2^3 2^3 = 2^6$

b) $(a^2)^3 = a^2 a^2 a^2 = a^6$

c) $(x^3)^3 = x^3 x^3 x^3 = x^9$.

Con estos problemas, se pretende la reafirmación y fijación del teorema $(a^n)^m = a^{nm}$ y, de paso, desarrollar y actualizar capacidades. ¡Resuélvelos!

De acuerdo con el teorema probado, calcular cada una de las siguientes potencias de cada potencia.

a) $(2^3)^4$

b) $(a^5)^3$

c) $(x^2)^5$

d) $(k^x)^y$

e) $(2^a)^b$

f) $(x^{n+1})^5$

g) $(p^r)^s$

h) $(q^r)^{n+1}$

i) $(x^a)^a$

j) $[(x + 3)^n]^3$

k) $[(a + b)^{m+1}]^n$

Finalmente, ¿qué significa $(ab)^n$ y cómo efectua las siguientes potencias de un producto?

a) $(ab)^n$

b) $(3xy)^3$

c) $(2a^2x^3y^2)^2$

d) $[(mx)^2(e^{3x})]^3$

En a) $(ab)^n$ y por definición $(ab)^n = ab \cdot ab \cdot \cdots ab$.

Después de conmutar y asociar,

$$(ab)^n = (a \cdot a \cdot a \cdots a)(b \cdot b \cdot b \cdots b)$$

Ahora, por definición,

$$(ab)^n = a^{1+1+1+\cdots+1}b^{1+1+1+\cdots+1}$$

$$= a^n b^n.$$

Nótese que en el producto $a^n b^n$ los factores de a son iguales al número de factores de b. Como $(ab)^n = a^n b^n$, el producto $(ab)^n$ tiene justamente los mismos factores que $a^n b^n$, aunque no con el mismo orden de agrupamiento.

En palabras, se puede decir que la enésima potencia de un producto es el producto de las enésimas potencias de los factores.

Después de aplicar este teorema en

a) $(3xy)^3$,

b) $(2a^2x^3y^2)^3$ y

c) $[(\ln x)^2(e^{3x})]^3$

se obtiene que

a) $(3xy)^3 = 3^3x^3y^3 = 27x^3y^3$,

b) $(2a^2x^3y^2)^3 = 2^3a^6x^9y^6 = 8a^6x^9y^6$ y

c) $[(\ln x)^2(e^{3x})]^3 = (\ln x)^6e^{9x}$

5.4 Problemas de asimilación

1. ¿Cómo se descompone en factores cada una de las expresiones siguientes?

   a) m^3,

   b) $(ax)^4$,

   c) $(axy)^3$,

   d) $(e^x\, sen\ x)^3$,

   e) $(a + b)^5$ y

   f) 5^n.

   De acuerdo con la definición de potencia y el exponente de ésta,

   - $m^3 = m \cdot m \cdot m$,
   - $(ax)^4 = ax \cdot ax \cdot ax \cdot ax$,
   - $(axy)^3 = axy \cdot axy \cdot axy$,
   - $(e^x\, sen\ x)^3 = e^x\, sen\ x \cdot e^x\, sen\ x \cdot e^x\, sen\ x$,
   - $(a + b)^5 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$ y
   - $5^n = 5(5)(5)(5)(5) \cdots (5)$.

   En $m(mm) = (mm)m$ el valor común es m^3 y en $(ax \cdot ax)(ax \cdot ax) = ax[ax(ax \cdot ax)] = [ax(ax \cdot ax)]ax$ es $(ax)^4$ y así sucesivamente.

2. Expresar en factores cada una de las siguientes expresiones

   a) $(5a)^3$

   b) $(a - b)^3$

   c) $(e^x + 8)^5$

   d) $(x^2\ tan\ x)^2$,

   e) $(e^x\ cos\ 2x)^4$,

3. Por ejemplo. ¿a qué son iguales los siguientes productos de potencias de la misma base?

a) $10^3 10^3$

b) $e^5 e^6$

c) $(5a)^3(5a)^2$

d) $(2xy)^2(2xy)^3$

e) $(3xyz)^3(3xyz)^4$

De acuerdo con el teorema demostrado,

a) $10^3 10^3 = 10^{3+3} = 10^6$,

b) $e^5 e^6 = e^{5+6} = e^{11}$

c) $(5a)^3(5a)^2 = (5a)^{3+2} = (5a)^5$,

d) $(2xy)^2(2xy)^3 = (2xy)^{2+3} = (2xy)^5$ y

e) $(3xyz)^3(3xyz)^4 = (3xyz)^{3+4} = (3xyz)$.

Con los problemas siguientes se pretende la incorporación y fracción del concepto relación con potencia y propiedades; y, de paso, actualizar y desarrollar capacidades. ¡Resuélvelos!

4. También y conforme a este teorema, ¿a qué es igual cada producto indicado?

a) $a^n a^{5n}$,

b) $a^2b^3c^4a^3b^4c^3$,

c) $x^2y^5z^3x^4y^2z^5$,

d) $e^x e^{2x} e^{3x}$,

e) $(\ln x)^2(\ln x)^3(\ln x)^4$,

f) $(sen\ x)^3(\cos x)^2(sen\ x)^5(\cos x)^3$ y

g) $(sen\ 3x)^5(\cos 2x)^3(sen\ x)^2(\cos 2x)^3$.

5. En cada caso, ¿a qué son igual las potencias de los productos indicados?

a) $(-2xy)^4$,

b) $(3a^2b^3)^2$,

c) $(x^3y^4z^5)^3$,

d) $(2ax^2y^3)^4$,

e) $(-3x^3y^4z^2)^3$,

f) $(-2p^3q^2r^3)^4$,

g) $(-t^2v^3w^2)^3$,

h) $-(-3y^2z^3)^3$,

i) $-(2s^2t^3)^2$,

j) $-(-4p^2y^4)^4$,

k) $(-d^mb^nc^p)^5$,

l) $-(-x^ay^b)^x$,

m) $-(k^xm^y)^a$,

n) $(x^my^{n+1})^n$,

o) $(p^rs^t)^x$,

p) $[(a+b)^x]^x$,

q) $(kx^{a+1}y^{n+1})^m$ y

r) $(x^{n+1}y^{n+2})^a$

5.5 Problemas de potencia con monomios

Para efectuar operaciones entre monomios, aparte de realizar, primero, el producto de los signos, segundo, el producto de los coeficientes involucrados, se aplica el teorema para multiplicar potencias de la misma base.

Por ejemplo. ¿a qué es igual el producto de cada una de las siguientes multiplicaciones entre monomios?

a) $(6x^3)(-7x^3)$

b) $(-3y^2)(-5y^2)$

c) $(2x^2y^3)(-6x^3y^4)(-3x^3y^2)$

d) $(-2x^2yz)(-4x^2yz)$

e) $(-3x^2y^2z)(2x^3y)(-2xz^3)$

f) $(-2a^2b)(-2a^2c)(-3bc^2)$

Con base en los conocimientos previos de los signos, producto entre los coeficientes y potencias con las mismas bases, después de efectuar la multiplicación, el producto, en cada caso, es,

a) $(6x^2)(-7x^3) = (+)(-)(6)(7)x^{3+3} = -42x^6$,

b) $(-3y^2)(-5y^2) = (-)(-)(3)(5)y^{2+2} = 15y^4$,

c) $(2x^2y^3)(-6x^3y^4)(-3x^3y^2) = (+)(-)(-)(2)(6)(3)x^{2+3+3}y^{3+4+2} = -36x^8y^9$,

d) $(-2x^2yz)(-4x^2yz) = (-)(-)(2)(4)x^{2+2}y^{1+1}z^{1+1} = 8x^4y^2z^2$

e) $(-3x^3y^2z)(2x^3y)(-2xz^3) = (-)(+)(-)(3)(2)(2)x^{3+3+1}y^{2+1}z^{1+3} = 12x^7y^3z^4$

f) $(-2a^3b)(-2a^3c)(-3bc^2) = (-)(-)(-)(2)(2)(3)a^{2+2}b^{1+1}c^{1+2} = -12a^4b^2c^3$

5.6 Multiplicación entre monomios

Con los siguientes problemas se intenta la incorporación de conocimientos previos, la reafirmación y fijación de conceptos relacionados con multiplicación y potencia; y, de paso, actualizar y desarrollar capacidades. ¡Resuélvelos!

Haz las siguientes multiplicaciones entre monomios.

a) $(-3abc)(-2a^2b)(-5b^3c^2)(2a^2b^3c^4)$

b) $(2ax^2)(-6a^2x^3)(-2a^3)(3x^3)$

c) $(5axy)(3ax^3y^2)(-5ax^3)(-4ay^3)$

d) $(-2ax^3y)(5axz)(3a^3x^2z)(-6axyz)$

e) $(-6a^2b^3y)(2abz)(-7axz^2)(abx^2y^2z)$

f) $(3r^2s^2t)(-8ar^3s^4t)(-2xr^3st^3)$

g) $(p^2qr)(pq^3r^5)(2p^2rs^2t)$

h) $(-ax^2y^3)(2ax^3y)(-3axy^4z)$

i) $(2mnp)(-3m^2n^3p)(-4m^3n^4p^3)$

j) $(-3axy)(-2a^2x^2y^2)(-3a^3x^3y^3)(-a^4x^4y^4)$

La multiplicación entre monomios y la propiedad distributiva son útiles para multiplicar monomios por polinomios. En efecto, se multiplica el monomio por cada término del polinomio. Por ejemplo,

¿Cuál es el producto de cada una de las siguientes multiplicaciones indicadas?

a) $3x(x + y)$

b) $4x(x^2 + 4x + 6)$

c) $3xy(x^2y^2 + 3xy + 8)$

d) $4xyz(x^2y^2z^2 + x^3y^3z^3 + x^4y^4z^4)$

e) $xe^x(x^2 + 3x - 8)$

f) $x^2e^x(xe^2 + 3xe^x - 6)$

g) $x10^x(3x^3 + 4x - 3)$

El producto indicado en cada uno de los incisos anteriores es:

a) $3x(x + y) = 3x^2 + 3xy$

b) $4x(x^2 + 4x + 6) = 4x^3 + 16x^2 + 24x$

c) $3xy(x^2y^2 + 3xy + 8) = 3x^3y^3 + 9x^2y^2 + 24xy$

d) $4xyz(x^2y^2z^2 + x^3y^3z^3 + x^4y^4z^4) = 4x^3y^3z^3 + 4x^4y^4z^4 + 4x^5y^5z^5$

e) $xe^x(x^2 + 3x - 8) = x^3e^x + 3x^2e^x - 8xe^x$

f) $x^2e^x(xe^{2x} + 3xe^x - 6) = x^3e^{3x}x + 3x^3e^{2x} - 6x^2e^x$

g) $x10^x(3x^3 + 4x - 3) = 3x^4 10^x + 4x^2 10^x - 3x10^x$

Estos problemas son el medio por el cual se propicia la reafirmación de la operación de multiplicación y potencia; así como la actualización y desarrollo de capacidades. ¡Resuélvelos!

En cada una de las siguientes multiplicaciones, ¿cuál es el producto?

a) $3xy(x - y - 4)$

b) $5x^2(x^3 - 4x^2 - 8)$

c) $3x^2y^2(x^3y^3 - 5x^2y^2 - 10)$

d) $xyz(3x^2y^2 - 5xz^3 - 7yz^3 + 8)$

e) $x^3e^{3x}(x^2e^{2x} - xe^x - a)$

f) $3xe^x\,(xe^{3x} - e^{2x} + e^x + 7)$

g) $10^{3x}(2 \cdot 10^{2x} - 10^x - 8)$

h) $e^x(e^{-2x} - 3e^{-x} + 3)$

i) $10^{4x}(10^{-3x} - 2 \cdot 10^{-2x} + 3 \cdot 10^{-x} - 4)$

j) $a^2b^2(a^3b^3 - a^2b^2 + ab - 3)$

5.7 Multiplicación de polinomios

Según se dijo, todo polinomio es una expresión algebraica que tiene más de un término. Para multiplicar dos polinomios, se utilizan la multiplicación entre monomios, los tres últimos teoremas y la propiedad distributiva, así como la reducción de términos semejantes, lo cual se muestra a continuación.

1) Haz cada una de los productos indicados.

a) $(x + 4)(x - 5)$

b) $(x - 1)(x^2 + x - 3)$

c) $(x + y)(3x^2y + 2xy^2 + xy)$

d) $(p^2 + q^2)(p^2 + 2pq - q^2)$

e) $(y^2 - x + 1)(y^2 + x - 1)$

f) $(x^3 + 3x^2 + x - 2)(x^2 + x - 2)$

g) $(x^3 - 4x + 6)(x^3 - x - 3)$

h) $(x^2y^2 + 3xy + 6)(x^2y^2 - 2xy + 3)$

i) $(e^2x - e^x + 2)(e^{3x} + 2e^{2x} - e^x + 2)$

j) $(10^{2x} + 10^x - 2)(10^{2x} - 10^x + 5)$

k) $[(\ln x)^2 + 3][(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 + \ln x + 2]$

Luego de efectuar cada uno de estos productos, los resultados son:

a) $(x + 4)(x - 5) = x(x - 5) + 4(x - 5) = x^2 - x - 20$

b) $(x - 1)(x^2 + x - 3) = x(x^2 + x - 3) - 1(x^2 + x - 3)$

$= x^3 + x^2 - 3x - x^2 - x + 3 = x^3 - 4x + 3.$

c) $(x + y)(3x^2y + 2xy^2 + xy)$

$= x(3x^2y + 2xy^2 + xy) + y(3x^2y + 2xy^2 + xy)$

$= 3x^3y + 2x^2y^2 + x^2y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + xy^2.$

$= 3x^3y + 5x^2y^2 + x^2y + 2xy^3 + xy^2.$

d) $(p^2 + q^2)(p^2 + 2pq - q^2) = p^2(p^2 + 2pq - q^2) + q^2(p^2 + 2pq - q^2)$

$= p^4 + 2p^3q - p^2q^2 + p^2q^2 + 2pq^3 - q^4$

$= p^4 + 2p^3q + 2pq^3 - q^4.$

e) $(y^2 - x + 1)(y^2 + x - 1) = y^2(y^2 + x - 1) - x(y^2 + x - 1) + 1(y^2 + x - 1) = y^4 + xy^2 - y^2 - xy^2 - x^2 + x + y^2 + x - 1$

$= y^4 - x^2 + 2x - 1.$

f) $(x^2 + x - 2)(x^3 + 3x^2 + x - 2) = x^2(x^3 + 3x^2 + x - 2) +$

$x(x^3 + 3x^2 + x - 2) - 2(x^3 + 3x^2 + x - 2)$

$= x^5 + 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 4$

$= x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x + 4.$

g) $(x^3 - 4x + 6)(x^3 - x - 3) =$

$= x^3(x^3 - x - 3) - 4x(x^3 - x - 3) + 6(x^3 - x - 3)$

$= x^6 - x^4 - 3x^3 - 4x^4 + 4x^2 + 12x + 6x^3 - 6x - 18$

$= x^6 - 5x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x - 18$

h) $(x^2y^2 + 3xy + 6)(x^2y^2 - 2xy + 3)=$

$= x^2y^2(x^2y^2 - 2xy + 3) + 3xy(x^2y^2 - 2xy + 3) + 6(x^2y^2 - 2xy + 3)$

$= x^4y^4 - 2x^3y^3 + 3x^2y^2 + 3x^3y^3 - 6x^2y^2 + 9xy + 6x^2y^2 - 12xy + 18$

$= x^4y^4 + x^3y^3 + 3x^2y^2 - 3xy + 18.$

i) $(e^{2x} - e^x + 2)(e$^3x $+ 2e^{2x} - e^x + 2) =$

$= e^{2x}(e^{3x} + 2e^{2x} - e^x + 2) - e^x(e^{3x} + 2e^{2x} - e^x + 2) + 2(e^{3x} + 2e^{2x} - e^x + 2)$

$= e^{5x} + 2e^{4x} - e^{3x} + 2e^{2x} - e^{4x} - 2e^{3x} + e^{2x} - 2e^x + 2e^{3x} + 4e^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 4$

$= e^{5x} + e^{4x} - e^{3x} + 7e^{2x} - 4e^x + 4.$

j) $(10^{2x} + 10^x - 2)(10^{2x} - 10^x + 5)=$

$= (10^{2x})(10^{2x} - 10^x + 5) + (10^x)(10^{2x} - 10^x + 5) - 2(10^{2x} - 10^x + 5)$

$= 10^{4x} - 10^{3x} + 5 \cdot 10^{2x} + 10^{3x} - 10^{2x} + 5 \cdot 10^x - 2 \cdot 10^{2x} + 2 \cdot 10^x - 10$

$= 10^{4x} + 2 \cdot 10^{2x} + 7 \cdot 10^x - 10.$

j) $[(\ln x)^2 + 3][(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 + \ln x + 2]$

$=(\ln x)^2 [(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 + \ln x + 2] + 3[(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 + \ln x + 2]$

$=(\ln x)^5 + 2(\ln x)^4 + (\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 + 3(\ln x)^3 + 6(\ln x)^2 + 3\ln x + 6$

$= \ln^5 x + 2\ln^4 \mathrm{x} + 4\ln^3 \mathrm{x} + 8\ln^2 \mathrm{x} + 3 \ln x + 6.$

5.8 Problemas de reafirmación

El propósito de los problemas siguientes es la incorporación de conocimientos y manejo de conceptos relacionados con multiplicación de monomios, binomios y trinomios; así como el desarrollo y actualización de capacidades. ¡Resuélvelos!

1) De cada multiplicación indicada, ¿Cuál es el producto?

a) $(3x-5)(5x+6)$

b) $(2x+4)(3x^2+5x-4)$

c) $(ax^2+b)(ax^2+bx-c)$

d) $(x^2-ax-b)(x^2-2x+b)$

e) $(x^2-bx+2)(x^3-2x^2+ax-b)$

f) $(2x^3y^3-2x^2y^2+3xy+6)(x^3+3x^2y+2xy^2+5y^3)$

g) $(xe^x-3)(x^2e^x-5)$

h) $(x^2e^{2x}-xe^{-x}+5)(x^3e^{3x}-x^2e^x+xe^x-10)$

i) $(\ln x-3)(\ln x+4)$

j) $(\ln^2 x+\ln x+3)(\ln^2 x-2\ln x-2)$

k) $(10^x-5)(10^x+6)$

l) $(10^{2x}-3\cdot 10^x+5)(10^{2x}+2\cdot 10^x-3)$

m) $(10^{2x}-4)(10^x+10)$

n) $(10^{3x}-2\cdot 10^{2x}+3\cdot 10^x-3)(10^{3x}-10^{2x}-3\cdot 10^x+4)$

o) $(e^{2x}-x)(e^{2x}+x)$

p) $(e^{3x}+x)(e^{3x}-y)$

q) $(ye^{3x} - x^2y + 1)(ye^{3x} + x^2y - 1)$

r) $(e^{3xy} - xy)(e^{xy} + xy)$

s) $(x \cdot 10^{2x} - y10^{x} - xy)(xe^{2x} + y \cdot 10^{x} + xy)$

t) $(xye^{2x} + 4xy - 5)(xye^{2xy} - 4xy + 5)$

u) $(xy \cdot 10^{2xy} - 2x^2y + 3)(xye^{2xy} + 2x^{2y} - 3)$

v) $(a - 2)(a^{2n} - 5a^{n} + 6)$

Capítulo 6

Productos notables

Los productos notables es un conjunto de productos entre polinomios y, dada su frecuencia en el álgebra, éstos deben ser conocidos. A continuación se citan tales productos, donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son constantes, $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son variables. También, las letras en las expresiones pueden representar cualquier expresión algebraica. Así mismo, cada producto es consecuencia directa de los axiomas. Se debe reconocer el producto a partir de los factores como los factores a partir del producto, lo cual puede conducir a la regla que los determina.

Para desarrollar los productos notables se utilizará la definición de potencia, propiedad distributiva y reducción de términos semejantes. Cada producto notable es una proposición que se debe probar. En efecto, probar cada producto, ejemplificar y dar una interpretación geométrica de los que están relacionados con una superficie, y solamente una que está relacionado en volumen.

Si $a, b \in \mathrm{R}$, entonces

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

c) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$,

d) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

e) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^3b + 3ab^2 - b^3$,

f) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$,

g) $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$,

h) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$,

i) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ y

j) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, $c \in \mathrm{R}$.

6.1 Producto notable $(a + b)(a + b)$

En a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y por definición de potencia

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b).$$

Luego de utilizar la propiedad distributiva y efectuar el producto, se obtiene,

$$(a + b)^2 = a(a + b) + b(a + b)$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2.$$

Por último, luego de asociar y reducir términos semejantes, se obtiene el modelo que sus términos evidencian, esto es,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

y el cual también es un trinomio.

Este producto notable puede tener una representación gráfica. Ver la figura 6.1 siguiente.

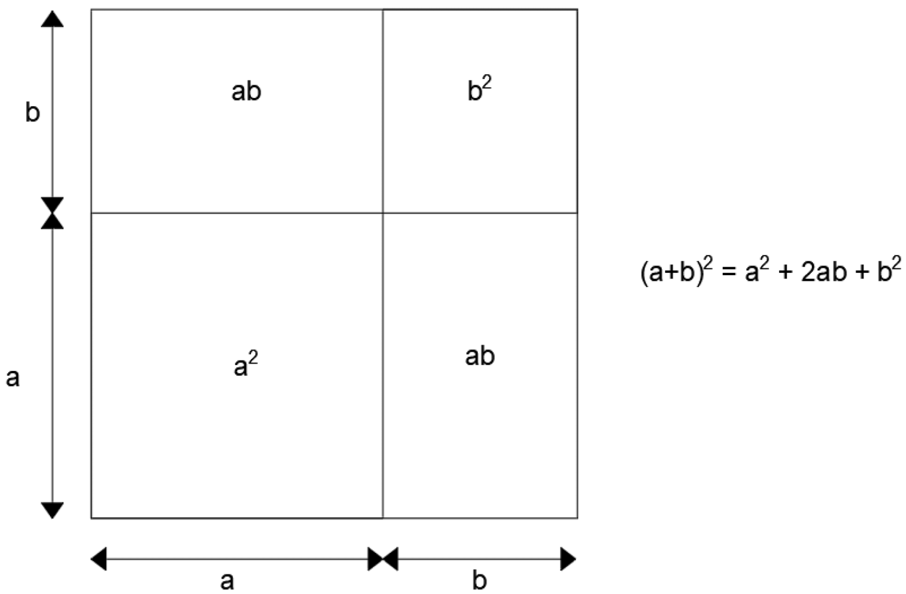


Figura 6.1 Representación geométrica de $(a+b)^2$.

Geométricamente, este producto es el área de una superficie cuadrada de lado *(a + b)*. Además, este cuadrado es equivalente a la suma de cuatro áreas, según la representación gráfica, de dos cuadrados y dos rectángulos.

En este caso, ¿cómo se desarrolla el cuadrado de un binomio?

a) $(3x + y)^2$,

b) $(e^{2x} + 3)^2$,

c) $(10^{3x} + y)^2$,

d) $(x^2y + z^2)^2$ y

e) $(\ln^2 x + x^2)^2$.

Para desarrollar el cuadrado de un binomio, se observan los conceptos que se utilizaron para obtener el modelo. En efecto,

a) $(3x + y)^2 = (3x + y)(3x + y) = 3x(3x + y) + y(3x + y)$

$$= 9x^2 + 3xy + 3xy + y^2$$

$$= 9x^2 + 6xy + y^2.$$

Ahora, de acuerdo con el modelo,

$$(3x + y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(y) + y^2$$

$$= 9x^2 + 6xy + y^2.$$

De igual manera, el producto de $(e^{2x} + 3)^2$ es

$$(e^{2x} + 3)^2 = (e^{2x} + 3)(e^{2x} + 3)= e^{2x}(e^{2x} + 3) + 3(e^{2x} + 3)$$

$$= e^{4x} + 3e^{2x} + 3e^{2x} + 9$$

$$= e^{4x} + 6e^{2x} + 9.$$

Luego de utilizar el modelo, se obtiene,

$$(e^{2x} + 3)^2 = (e^{2x})^2 + 2(3)e^{2x} + 9$$

$$= e^{4x} + 6e^{2x} + 9.$$

Similarmente, el producto de $(10^{3x} + y)^2$ es

$$(10^{3x} + y)^2 = (10^{3x} + y)(10^{3x} + y)$$

$$= 10^{3x}(10^{3x} + y) + y(10^{3x} + y)$$

$$= 10^{6x} + y10^{3x} + y10^{3x} + y^2$$

$$= 10^{6x} + 2y10^{3x} + y^2.$$

Enseguida, sin hacer la multiplicación y usando el modelo, el producto es

$$(10^{3x} + y)^2 = (10^{3x})^2 + 2y10^{3x} + y^2$$

$$= 10^{6x} + 2y10^{3x} + y^2.$$

Antes de terminar y en forma semejante, el producto de $(x^2y + z^2)^2$ es

$$(x^2y + z^2)^2 = (x^2y + z^2)(x^2y + z^2)$$

$$= x^2y(x^2y + z^2) + z^2(x^2y + z^2)$$

$$= x^4y^2 + x^2yz^2 + x^2yz^2 + z^4$$

$$= x^4y^2 + 2x^2yz^2 + z^4.$$

Ahora, de acuerdo con el modelo, el resultado es

$$(x^2y + z^2)^2 = (x^2y)^2 + 2(x^2y)z^2 + (z^2)^2 = x^4y^2 + 2x^2yz^2 + z^4.$$

Por último, el producto $(\ln^2 x + x^2)^2$ es

$$(\ln^2 x + x^2)^2 = (\ln^2 x + x^2)(\ln^2 x + x^2)$$

$$= \ln^2 x(\ln^2 x + x^2) + x^2(\ln^2 x + x^2)$$

$$= \ln^4 x + x^2\ln^2 x + x^2\ln^2 x + x^4$$

$$= \ln^4 x + 2x^2\ln^2 x + x^4.$$

Observando el modelo, el resultado es

$$(\ln^2 x + x^2)^2 = (\ln^2 x)^2 + 2x^2\ln^2 x + (x^2)^2$$

$$= \ln^4 x + 2x^2\ln^2 x + x^4.$$

Los problemas siguientes se proponen para incorporar conocimientos y para el manejo con productos notables. ¡Resuélvelos!

Haz lo que se indica en cada inciso.

a) $(x^n + y^n)^2$

b) $(x^{n+1} + 2y^n)^2$

c) $(x^n y + xy^n)^2$

d) $(\ln^n x + x^3)^2$

e) $(2e^{nx} + 3y^2)^2$

f) $(10^{5x+1} + 8x^2)^2$

g) $(3xy + 5xy)^2$

h) $(kx^n + y^3)^2$

i) $(p^2 + q^3)^2$

j) $(u^2 + 3t^2)^2$

6.2 Producto notable $(a - b)(a - b)$

Ahora, por definición, en

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b).$$

Luego de utilizar la propiedad distributiva, o sea,

$$(a - b)^2 = a(a - b) - b(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2.$$

Por último, luego de agrupar, el resultado es

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

El modelo que hacen evidente los términos es un trinomio.

La representación gráfica o geométrica nos conduce a la interpretación geométrica del producto notable. Ver la figura 6.2 siguiente.

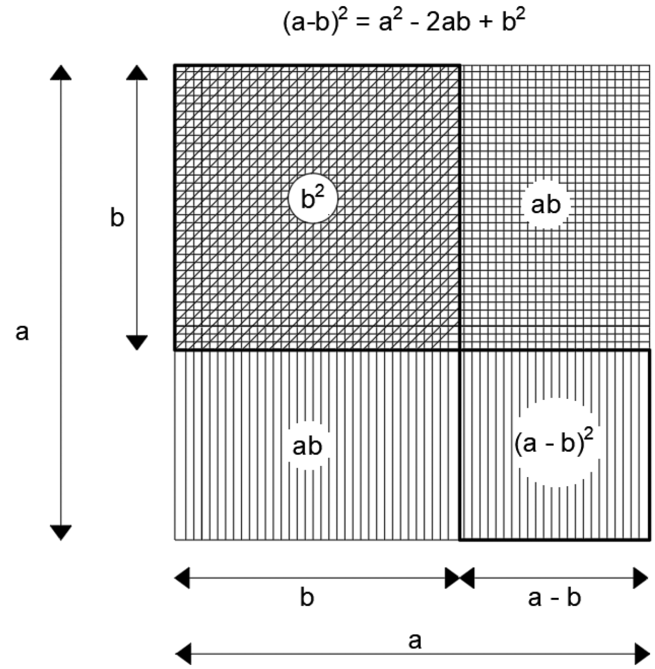


Figura 6.2 Representación geométrica de (a–b)².

Por principio, puede visualizarse en la representación gráfica que el cuadrado de la diferencia de dos números o monomios geométricamente es el área de la superficie de un cuadrado de lado (a – b) unidades de longitud. También se observa que el área de la superficie del cuadrado de la diferencia de dos números o monomios es equivalente al área de la superficie del cuadrado del lado (a) unidades longitud menos el área de la superficie de dos rectángulos de lados (a) y (b) de longitud, la cual tiene un área en común de un cuadrado de lado (b) unidades de longitud, la cual queda restada dos veces, por lo que dicha área debe sumarse.

Consecuentemente, el área de $(a-b)^2$ se puede expresar como un trinomio de segundo grado, es decir

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

En cada caso, desarrollar el cuadrado de la diferencia de dos monomios.

a) $(2a-b)^2$,

b) $(3x^2-y^2)^2$,

c) $(e^{2x}-x)^2$,

d) $(10^{3x} - 5)^2$ y

e) $(\ln^3 x - x)^2$.

En efecto, luego de hacer la multiplicación indicada en a), conforme a los conceptos que se emplearon para obtener el modelo, el resultado es

$$(2a - b)^2 = (2a - b)(2a - b) = 2a(2a - b) - b(2a - b)$$

$$= 4a^2 - 2ab - 2a + b^2$$

$$= 4a - 4ab + b^2.$$

Después de aplicar el modelo, se obtiene el mismo resultado, esto es,

$$(2a - b)^2 = (2a)^2 - 2(2a) + (b)^2$$

$$= 4a^2 - 4ab + b^2.$$

De la misma manera, se multiplica $(3\underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2$, es decir,

$$(3\underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2 = (3\underline{x}^2 - \underline{y}^2)(3\underline{x}^2 - \underline{y}^2) = 3\underline{x}^2(3\underline{x}^2 - \underline{y}^2) - \underline{y}^2(3\underline{x}^2 - \underline{y}^2)$$

$$= 9\underline{x}^4 - 3\underline{x}^2\underline{y}^2 - 3\underline{x}^2\underline{y}^2 + \underline{y}^4$$

$$= 9\underline{x}^4 - 6\underline{x}^2\underline{y}^2 + \underline{y}^4.$$

Sin hacer la multiplicación, se obtiene el mismo resultado, o sea,

$$(3\underline{x}^2 - \underline{y}^2)^2 = (3\underline{x}^2)^2 - 2(3\underline{x}^2)(\underline{y}^2) + (\underline{y}^2)^2$$

$$= 9\underline{x}^4 - 6\underline{x}^2\underline{y}^2 + \underline{y}^4.$$

Similarmente, se procede en $(e^{2x} - x)^2$, o sea

$$(e^{2x} - x)^2 = (e^{2x} - x)(e^{2x} - x)$$

$$= e^{2x}\,(e^{2x} - x) - x(e^{2x} - x)$$

$$= e^{4x} - xe^{2x} - xe^{2x} + x^2$$

$$= e^{4x} - 2xe^{2x} + x^2.$$

Por medio del modelo, se obtiene

$$(e^{2x} - x)^2 = (e^{2x})^2 - 2(e^{2x})(x) + (x)^2$$

$$= e^{4x} - 2xe^{2x} + x^2.$$

En forma semejante, se efectúa la multiplicación en $(10^{3x} - 5)^2$, esto es

$$(10^{3x} - 5)^2 = (10^{3x} - 5)(10^{3x} - 5)$$

$$= 10^{3x}(10^{3x} - 5) - 5(10^{3x} - 5)$$

$$= 10^{6x} - 5 \cdot 10^{3x} - 5 \cdot 10^{3x} + 25$$

$$= 10^{6x} - 10 \cdot 10^{3x} + 25.$$

También, se llega al mismo resultado si se aplica el modelo, es decir

$$(10^{3x} - 5)^2 = (10^{3x})^2 - 2(10^{3x})(5) + (5)^2$$

$$= 10^{6x} - 10 \cdot 10^{3x} + 25$$

Finalmente, para efectuar el producto $(ln^3x - x)^2$ se procede de igual manera que en los anteriores, esto es,

$$(ln^3x - x)^2 = (ln^3x - x)(ln^3x - x)$$

$$= ln^3x(ln^3x - x) - \mathrm{x}(ln^3x - x)$$

$$= ln^6x - xln^3x - xln^3x + x^2$$

$$= ln^6x - 2xln^3x + x^2.$$

Por último, según el modelo,

$$(ln^3x - x)^2 = (ln^3x - x)^2 + 2(ln^3x)(x) + (x)^2$$

$$= ln^6x - 2xln^3x + x^2.$$

Después de desarrollar, en cada caso, el cuadrado de la diferencia de dos monomios o utilizando el modelo, ¿Cuál es el trinomio que se obtiene?

a) $(xy^2 - z^3)^2$

b) $(z^2 - 2x^2y^2)^2$

c) $(x^3 - y^3)^2$

d) $[(x^2 - 4)^2 - (x - y)^2]^2$

e) $[(3a^2 - 2) - \mathrm{b}]^2$

f) $(e^{5x} - 8)^2$

g) $(e^{k+a} - a^2b^2)^2$

h) $[(2y + ln^2x)^2 - 3y^2]^2$

i) $[ln^4x - (2x^3y - 5)^2]^2$

j) $(10^{6x} - xy)^2$

k) $[(10^x - 3)^2 - (10^x - 4)^2]^2$

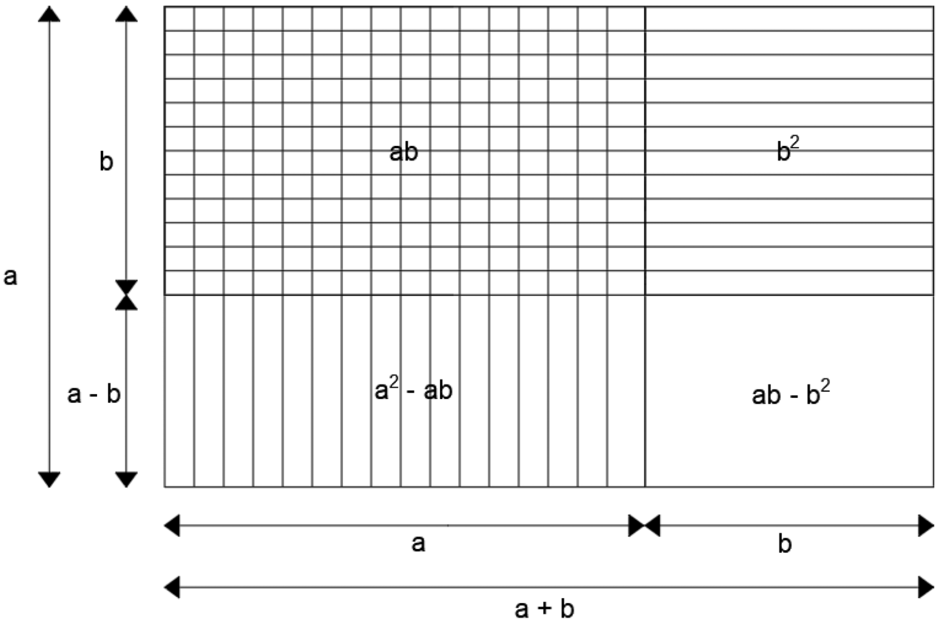
6.3 Producto notable $(a - b)(a + b)$

En $(a - b)(a + b)$, luego de efectuar la multiplicación y aplicar, en el proceso, las propiedades distributiva y asociativa, así como la reducción de términos semejantes, el resultado es

$$\begin{aligned}(a - b)(a + b) &= a(a + b) - b(a + b)\\ &= a^2 + ab - ab - b^2\\ &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Este modelo que patentizan los términos es el producto de dos binomios conjugados.

Para facilitar una interpretación geométrica de este producto, se recurre a la representación gráfica de éste. Ver la figura 6.3 siguiente.



$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ &= a(a - b) + b(a - b) \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 \end{aligned}$$

Figura 6.3 Representación geométrica de (a+b)(a – b).

En la figura 6.3 se puede distinguir un rectángulo que tiene por lados (a + b) unidades de largo y (a – b) unidades de altura, y una superficie de área igual (a + b)(a – b) unidades cuadradas. Esta área es equivalente al área de un cuadrado de a unidades menos el área del rectángulo de lados a y b, más el área del rectángulo, también, de lados a y b, menos el área de un rectángulo de lado b.

Por consiguiente, el área de la superficie acotada por (a + b)(a – b) es equivalente a un área que se expresa como la diferencia de un binomio cuadrado, es decir, $a^2 - b^2$. Esto corresponde justamente al modelo

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

El lado derecho de este modelo se puede visualizar claramente en otra representación gráfica mostrada en la figura 6.4

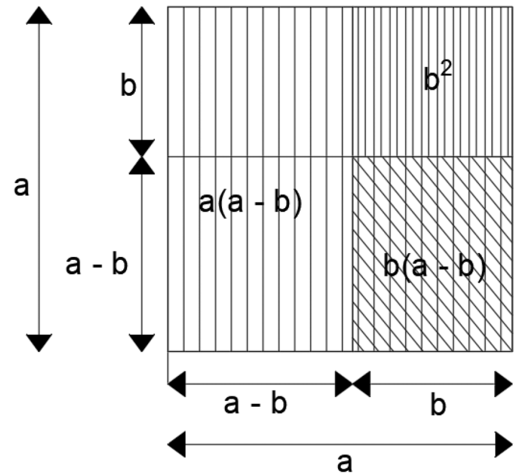


Figura 6.4 Representación geométrica de a(a – b)+b(a – b) = a² – b².

A partir de la información dada, ¿cuál es la expresión correspondiente a la diferencia de un binomio cuadrado?

a) $(3x + b)(3x - b)$

b) $(e^{3x} + xy)(e^{3x} - xy)$

c) $(r^2 + s^3)(r^2 - s^3)$

d) $(10^2p + q^3)(10^2p - q^3)$

Luego de hacer la operación indicada, aplicar la propiedad distributiva y reducir términos semejante en a), el resultado es

$$\begin{aligned}(3x + b)(3x - b) &= 3x(3x - b) + b(3x - b)\\ &= 9x^2 - 3bx + 3xb - b^2\\ &= 9x^2 - b^2\end{aligned}$$

Aplicando el modelo, se obtiene el mismo resultado, es decir,

$$\begin{aligned}(3x + b)(3x - b) &= (3x)^2 - (b)^2\\ &= 9x^2 - b^2.\end{aligned}$$

De igual manera, después de efectuar la multiplicación en b), el resultado es

$$(e^{3x} + xy)(e^{3x} - xy) = e^{3x}(e^{3x} - xy) + xy(e^{3x} - xy)$$

$$= e^{6x} - xye^{3x} + xye^{3x} - x^2y^2$$

$$= e^{6x} - x^2y^2.$$

Sin hacer la multiplicación, es decir, aplicando el modelo, se obtiene el mismo resultado, o sea,

$$(e^{3x} + xy)(e^{3x} - xy) = (e^{3x})^2 - (xy)^2$$

$$= e^{6x} - x^2y^2.$$

Se continúa haciendo la multiplicación en c), o sea,

$$(r^2 + s^3)(r^2 - s^3) = r^2(r^2 - s^3) + s^3(r^2 - s^3)$$

$$= r^4 - r^2s^3 + r^2s^3 - s^6$$

$$= r^4 - s^6.$$

O bien, aplicando el modulo, el resultado es,

$$(r^2 + s^3)(r^2 - s^3) = (r^2)^2 - (s^3)^2$$

$$= r^4 - s^6.$$

Por último, al realizar la multiplicación en d) se obtiene el binomio pedido, es decir,

$$(10^2p + q^3)(10^2p - q^3) = 10^2p(10^2p - q^3) + q^3(10^2p - q^3)$$

$$= 10^4p - q^3 10^2p + q^3 10^2p - q^6$$

$$= 10^4p - q^6.$$

Aplicando el modelo, el resultado es el mismo, esto es,

$$(10^2p + q^3)(10^2p - q^3) = (10^2p)^2 - (q^3)^2$$

$$= 10^4p - q^6.$$

Con los problemas siguientes, se pretende la incorporación del conocimiento previo y la apropiación de los conceptos relacionados con el producto de binomios conjugados; así como la actualización y desarrollo de capacidades. ¡Resuélvelos!

Haz lo que está indicado

a) $(x^2y^2 + z^2)(x^2y^2 - z^2)$

b) $(ax^2 + by^2)(ax^2 - by^2)$

c) $(a^nx^m + b^xy^b)(a^nx^m - b^xy^b)$

d) $(a + b + c)(a + b - c)$

e) $[x + (y + z)][x - (y + z)]$

f) $[x^2 + (x + y)^2][x^2 - (x + y)^2]$

g) $(e^{2x} + 3)(e^{2x} - 3)$

h) $(10^{5x} + y)(10^{5x} - y)$

i) $(10^{5n} + y^m)(10^{5n} - y^m)$

j) $(e^{nx} + x^m)(e^{nx} - x^m)$

6.4 Producto notable $(a + b)^3$

Después de aplicar la definición de potencia, el producto notable $(a + b)^3$ se convierte en

$$(a + b)^3 = (a + b)[(a + b)(a + b)].$$

Ahora, en el proceso de multiplicar, se utilizan las propiedades distributiva y asociativa, así como la reducción de términos semejantes, obteniendo:

$$(a + b)^3 = (a + b)[a(a + b) + b(a + b)]$$

$$= (a + b)(a^2 + ab + ba + b^2)$$

$$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a^3 + 2a^2b + \mathrm{a}b^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

La representación gráfica de este producto sería la de un cuerpo en el espacio de tres dimensiones. Ver la figura 6.5 siguiente.

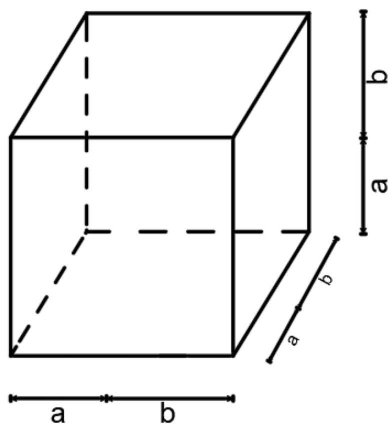


Figura 6.5 Representación geométrica de (a+b)³.

Según la representación gráfica de un cuerpo y las dimensiones de sus aristas, geométricamente, este producto notable es un cuerpo geométrico regular, llamado cubo. El volumen de éste, se obtiene sumando el volumen de cada uno de los cuatro cuerpos que, de acuerdo con el producto, se forman, es decir,

$$V_{(a+b)^3} = V_{a^3} + V_{3a^2b} + V_{3ab^2} + V_{b^3}.$$

Conforme a esta expresión, cada volumen es diferente a los demás.

En cada caso, hacer la multiplicación o aplicar el modelo para obtener el cubo de un binomio.

a) $(5x + 5y)^3$,

b) $(3xy^2 + 2x^2y)^3$,

c) $(xe^{3x} + y^2)^3$ y

d) $(10^{2x} + xy)^3$.

En efecto, en cada caso, después de aplicar la definición de potencia, se inicia la realización de la multiplicación, proceso en el que, principalmente, se hace notar la aplicación de las propiedades distributiva y asociativa, así como la reducción de términos semejantes.

En lugar de multiplicar para obtener el cubo de un binomio, se puede utilizar el modelo.

De acuerdo con lo mencionado, se procede a multiplicar lo que se propone en a), b), c) y d).

a) $(5x + 5y)^3 = (5x + 5y)[(5x + 5y)(5x + 5y)]$

$= (5x + 5y)[5x(5x + 5y) + 5y(5x + 5y)]$

$= (5x + 5y)[25x^2 + 25xy + 25xy + 25y^2]$

$= (5x + 5y)(25x^2 + 50xy + 25y^2)$

$= 5x(25x^2 + 50xy + 25y^2) + 5y(25x^2 + 50xy + 25y^2)$

$= 125x^2 + 250x^2y + 125xy^2 + 125x^2y + 250xy^2 + 125y^3$

$= 125x^2 + 375x^2y + 375xy^2 + 125y^3$.

b) $(3xy^2 + 2x^2y)^3 = (3xy^2 + 2x^2y)[(3xy^2 + 2x^2y)(3xy^2 + 2x^2y)]$

$= (3xy^2 + 2x^2y)[3xy^2(3xy^2 + 2x^2y) + 2x^2y(3xy^2 + 2x^2y)]$

$= (3xy^2 + 2x^2y)[9x^2y^4 + 6x^3y^3 + 6x^3y^3 + 4x^4y^2]$

$= (3xy^2 + 2x^2y)(9x^2y^4 + 12x^3y^3 + 4x^4y^2)$

$= 3xy^2(9x^2y^4 + 12x^3y^3 + 4x^4y^2) + 2x^2y(9x^2y^4 + 12x^3y^3 + 4x^4y^2)$

$= 27x^3y^6 + 36x^4y^5 + 12x^2y^4 + 18x^4y^5 + 24x^5y^4 + 8x^6y^3$

$= 27x^3y^6 + 54x^4y^5 + 36x^5y^4 + 8x^6y^3$.

c) $(xe^{3x} + y^2)^3 = (xe^{3x} + y^2)[(xe^{3x} + y^2)(xe^{3x} + y^2)]$

$= (xe^{3x} + y^2)[xe^{3x}(xe^{3x} + y^2) + y^2(xe^{3x} + y^2)]$

$= (xe^{3x} + y^2)[x^2e^{6x} + xy^2e^{3x} + xy^2e^{3x} + y^4]$

$= (xe^{3x} + y^2)(x^2e^{6x} + 2xy^2e^{3x} + y^4)$

$= xe^{3x}(x^2e^{6x} + 2xy^2e^{3x} + y^4) + y^2(x^2e^{6x} + 2xy^2e^{3x} + y^4)$

$= x^3e^{9x} + 2x^2y^2e^{6x} + xy^4e^{3x} + x^2y^2e^{6x} + 2xy^4e^{3x} + y^6$

$= x^3e^{9x} + 3x^2y^2e^{6x} + 3xy^4e^{3x} + y^6.$

d) $(10^{2x} + xy)^3 = (10^{2x} + xy)[(10^{2x} + xy)(10^{2x} + xy)]$

$= (10^{2x} + xy)[10^{2x}(10^{2x} + xy) + xy(10^{2x} + xy)]$

$= (10^{2x} + xy)[10^{4x} + xy10^{2x} + xy10^{2x} + x^2y^2]$

$= (10^{2x} + xy)(10^{4x} + 2xy10^{2x} + x^2y^2)$

$=10^{2x}(10^{4x} + 2xy10^{2x} + x^2y^2) + xy(10^{4x} + 2xy10^{2x} + x^2y^2)$

$=10^{6x} + 2xy10^{4x} + x^2y^210^{2x} + xy10^{4x} + 2x^2y^210^{2x} + x^3y^3$

$=10^{6x} + 3xy10^{4x} + 3x^2y^210^{2x} + x^3y^3.$

Ahora, si en a), b), c) y d), se aplica el modelo para obtener el cubo de un binomio, el resultado es igual al que ya fue obtenido. Veamos,

a) $(5x + 5y)^3 = (5x)^3 + 3(5x)^2(5y) + 3(5x)\,(5y)^2 + (5y)^3$

$= 125x^3 + 375x^2y + 375xy^2 + 125y^3.$

b) $(3xy^2 + 2x^2y)^3 = (3xy^2)^3 + 3(3xy^2)^2(2x^2y) + 3(3xy^2)\,(2x^2y)^2 + (2x^2y)^3 = 27x^3y^6 + 54x^4y^5 + 36x^5y^4 + 8x^6y^3.$

c) $(xe^{3x} + y^2)^3 = (xe^{3x})^3 + 3(xe^{3x})^2(y^2) + 3(xe^{3x})\,(y^2)^2 + (y^2)^3$

$x^3e^{9x} + 3x^2y^2e^{6x} + 3xy^2e^{3x} + y^6.$

d) $(10^{2x} + xy)^3 = (10^{2x})^3 + 3(10^{2x})^2(xy) + 3(10^{2x})(xy)^2 + (xy)^3$

$= 10^{6x} + 3xy10^{4x} + 3^{2x}y^210^{2x} + x^3y^3.$

Los polinomios siguientes propician la incorporación previa de conocimiento y la reafirmación de los conceptos relacionados con potencias cúbicas de binomios; y de paso, actualizar y desarrollar capacidades. ¡Resuélvelos!

I. Mediante la multiplicación y aplicación del modelo, ¿cuál es el cubo del binomio dado?

a) $(3a^2 + 5xy)^3$

b) $(5x + y)^3$

c) $(r^3 + 3s^3)^3$

d) $(3p^3 + 5q^3)^3$

e) $(5^a + 6^b)^3$

f) $(3xyz + 3)^3$

g) $(5e^x + 3x)^3$

h) $(xe^{2x} + y)^3$

i) $(x^2e^{4x} + 8)^3$

j) $(x10^{6x} + y)^3$

k) $(\mathrm{x}^2 10^x + 1)^3$

6.5 Producto notable $(a - b)^3$

Ahora continuamos con el ejercicio en el que se propone el cubo de una diferencia de números o monomios, es decir, $(a - b)^3$

Para desarrollar el cubo de una diferencia, se aplica la multiplicación y en este proceso, principalmente, se hace notar, la definición de potencia y la aplicación de las propiedades distributiva y asociativa, así como la reducción de términos semejantes, esto es,

$$
\begin{aligned}
(a - b)^3 &= (a - b)[(a - b)(a - b)] \\
&= (a - b)[a(a - b) - b(a - b)] \\
&= (a - b)(a^2 - ab - ab + b^2) \\
&= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) \\
&= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2) \\
&= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\
&= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, el modelo es

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Usando la multiplicación y el modelo, ¿a qué equivale, en cada caso, el cubo de la diferencia de dos monomios?

a) $(5x-2a)^3$,

b) $(3xy-2z^2)^3$,

c) $(x^2e^x-5)^3$ y

d) $(x10^{2x}-y^3)^3$.

Conforme a lo mencionado en los dos últimos párrafos y utilizando, primero la multiplicación y enseguida el modelo, en cada caso, se obtiene lo siguiente.

Por multiplicación:

a) $(5x-2a)^3 = (5x-2a)[(5x-2a)(5x-2a)]$

$= (5x-2a)[(5x)(5x-2a) - 2a(5x-2a)]$

$= (5x-2a)(5x^2 - 10ax - 10ax + 4a^2)$

$= (5x-2a)(5x^2 - 20ax + 4a^2)$

$= 5x(25x^2 - 20ax + 4a^2) - 2a(25x^2 - 20ax + 4a^2)$

$= 125x^3 - 100ax^2 + 20a^2x - 50ax^2 + 40a^2x - 8a^3$

$=125x^3 - 150ax^2 + 60a^2x - 8a^3.$

Por el modelo:

$(5x-2a)^3 = (5x)^3 - 3(5x)^2(2a) + 3(5x)(2a)^2 - (2a)^3$

$= 125x^3 - 150ax^2 + 60a^2x - 8a^3.$

Por multiplicación:

b) $(3xy - 2z^2)^3 = (3xy - 2z^2)[(3xy - 2z^2)(3xy - 2z^2)]$

$= (3xy - 2z^2)[(3xy)(3xy - 2z^2) - 2z^2(3xy - 2z^2)]$

$= (3xy - 2z^2)(9x^2y^2 - 6xyz^2 - 6xyz^2 + 4z^4)$

$= (3xy - 2z^2)(9x^2y^2 - 12xyz^2 + 4z^4)$

$= 3xy(9x^2y^2 - 12xyz^2 + 4z^4) - 2z^2(9x^2y^2 - 12xyz^2 + 4z^4)$

$= 27x^3y^3 - 36x^2y^2z^2 + 12xyz^4 - 18x^2y^2z^2 + 24xyz^4 - 8z^6$

$= 27x^3y^3 - 54x^2y^2z^2 + 36xyz^4 - 8z^6.$

Por el modelo:

$(3xy - 2z^2)^3 = (3xy)^3 - 3(3xy)^2(2z^2) + 3(3xy)\ (2z^2)^2 - (2z^2)^3$

$= 27x^3y^3 - 54x^2y^2z^2 + 36xyz^4 - 8z^6.$

Por multiplicación:

c) $(x^2e^x - 5)^3 = (x^2e^x - 5)[(x^2e^x - 5)(x^2e^x - 5)]$

$= (x^2e^x - 5)[(x^2e^x)(x^2e^x - 5) - 5(x^2e^x - 5)]$

$= (x^2e^x - 5)(x^4e^{2x} - 5x^2e^x - 5x^2e^x + 25)$

$= (x^2e^x - 5)(x^4e^{2x} - 10x^2e^x + 25)$

$= x^2e^x(x^4e^{2x} - 10x^2e^x + 25) - 5(x^4e^{2x} - 10x^2e^x + 25)$

$= x^6e^{3x} - 10x^4e^{2x} + 25x^2e^x - 5x^4e^{2x} + 50x^2e^x - 125$

$= x^6e^{3x} - 15x^4e^{2x} + 75x^2e^x - 125.$

Por el modelo:

$(x^2e^x - 5)^3 = (x^2e^x)^3 - 3(x^2e^x)^2(5) + 3(x^2e^x)(5)^2 - (5)^3$

$= x^6e^{3x} - 15x^4e^{2x} + 75x^2e^x - 125.$

Por multiplicación:

d) $(x10^{2x} - y^3)^3 = (x10^{2x} - y^3)[(x10^{2x} - y^3)(x10^{2x} - y^3)]$

$= (x10^{2x} - y^3)[(x10^{2x})(x10^{2x} - y^3) - y^3(x10^{2x} - y^3)]$

$= (x10^{2x} - y^3)(x^2 10^{4x} - xy^3 10^{2x} - xy^3 10^{2x} + y^6)$

$= (x10^{2x} - y^3)(x^2 10^{4x} - 2xy^3 10^{2x} + y^6)$

$= x10^{2x}(x^2 10^{4x} - 2xy^3 10^{2x} + y^6) - y^3(x^2 10^{4x} - 2xy^3 10^{2x} + y^6)$

$= x^3 10^{6x} - 2x^2y^3 10^{4x} + xy^6 10^{2x} - x^2y^3 10^{4x} + 2xy^6 10^{2x} - y^9$

$= x^3 10^{6x} - 3x^2y^3 10^{4x} + 3xy^6 10^{2x} - y^9.$

Por el modelo:

$(x10^{2x} - y^3)^3 = (x10^{2x})^3 - 3(x10^{2x})^2(y^3) + 3(x10^{2x})(y^3)^2 - (y^3)^3$

$= x^3 10^{6x} - 3x^2y^3 10^{4x} + 3xy^6 x^2 10^{2x} - y^9.$

En cuanto a la representación geométrica de este producto notable, es la de un cuerpo geométrico cuyas aristas miden $(a - b)$ unidades y tiene un volumen igual a $(a - b)$ $(a - b)$ $(a - b)$, el cual es equivalente a la suma de es decir,

$$V_{(a-b)^3} = V_{a^3} - V_{3a^2b} + V_{3ab^2} - V_{b^3}.$$

6.6 Producto notable $(x + a)(x + b)$

El producto propuesto $(x + a)(x + b)$ es el de dos binomios con un término en común y éste se desarrolla aplicando la propiedad distributiva, esto es,

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b)$$

$$= x^2 + bx + ax + ab.$$

Luego de agrupar términos y aplicar la propiedad distributiva, se obtiene,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

La última expresión es el modelo y éste se obtuvo luego de efectuar la multiplicación.

Este producto se puede representar gráficamente. Ver la figura 6.6 siguiente.

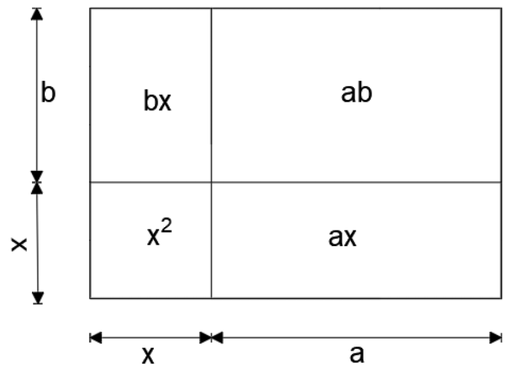


Figura 6.6 Representación geométrica de (x + a)(x + b).

Según se aprecia en la figura 6.6, geométricamente es el área de una superficie limitada por $(x + a)$ y $(x + b)$, la cual, además, es la suma de cuatro áreas, es decir,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + ab$$

$$x^2 + (a + b)x + ab.$$

Mediante la multiplicación o el modelo, ¿a qué es igual lo que se propone en cada inciso?

a) $(x + 8)(x + 3)$,

b) $(y + 3)(y + 5)$,

c) $(x^2 + 1)(x^2 + 3)$ y

d) $(p^3 + 2)(p^3 + 6)$.

Después de aplicar la propiedad distributiva, asociativa y reducción de términos semejantes,

en a) $(x + 8)(x + 3) = x(x + 3) + 8(x + 3) = x^2 + 3x + 8x + 24$

$$= x^2 + (3 + 8)x + 24 = x^2 + 11x + 24;$$

en b) $(y + 3)(y + 5) = y(y + 5) + 3(y + 5) = y^2 + 5y + 3y + 15$

$$= y^2 + (5 + 3)y + 15 = y^2 + 8y + 15;$$

en c) $(x^2 + 1)(x^2 + 3) = x^2(x^2 + 3) + 1(x^2 + 3) = x^4 + 3x^2 + x^2 + 3$

$$= x^4 + (3 + 1)x^2 + 3 = x^4 + 4x^2 + 3 \text{ y}$$

finalmente, en d) $(p^3 + 2)(p^3 + 6) = p^3(p^3 + 6) + 2(p^3 + 6)$

$$= p^6 + 6p^3 + 2p^3 + 12$$

$$= p^6 + (6 + 2)p^3 + 12$$

$$= p^6 + 8p^3 + 12.$$

Ahora, utilizando el modelo,

en a) $(x + 8)(x + 3) = x^2 + (8 + 3)x + 24 = x^2 + 11x + 24$;

en b) $(y + 3)(y + 5) = y^2 + (3 + 5)y + 15 = y^2 + 8y + 15$;

en c) $(x^2 + 1)(x^2 + 3) = x^4 + (1 + 3)x^2 + 3 = x^4 + 4x^2 + 3$ y

finalmente, en d) $(p^3 + 2)(p^3 + 6) = p^6 + (2 + 6)p^3 + 12$

$$= p^6 + 8p^3 + 12.$$

Haz los productos entre binomios que se indican en cada inciso

a) $(x^n + 1)(x^n + 4)$

b) $(x^r + 8)(x^r + 3)$

c) $(x^3 + 3)(x^3 + 7)$

d) $(x^5 + 5)(x^5 + 8)$

e) $(p^2 + 2)(p^{12} + 3)$

f) $(a^4 + 7)(a^4 + 9)$

g) $(q^{13} + 3)(q^{13} + 10)$

h) $(b^6 + 7)(b^6 + 6)$

i) $(t^5 + 6)(t^5 + 5)$

j) $(u^{10} + 4)(u^{10} + 3)$

6.7 Producto notable $(x + a)(x - b)$

Después de emplear la propiedad distributiva, asociativa y simplificar términos,

$$(x + a)(x - b) = x(x - b) + a(x - b)$$

$$= x^2 - bx + ax - ab$$

$$= x^2 + (a - b)x - ab.$$

Este resultado es un trinomio cuadrático cuyos términos muestran un modelo.

Este producto puede ser representado gráficamente por la figura 6.7 siguiente.

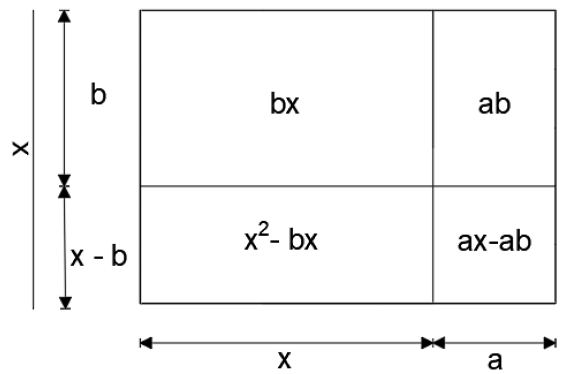


Figura 6.7 Representación geométrica de (x + a)(x–b).

De acuerdo con la representación gráfica de este producto, se ve que éste, geométricamente, es un área de la superficie delimitada por $(x + a)$ y $(x - b)$. También, en esta representación se nota que el área $(x + a)(x - b)$ es equivalente a la suma de las áreas $x^2 - bx$ más $ax - ab$, esto es,

$$(x + a)(x - b) = x^2 - bx + ax - ab$$

$$= x^2 + (a - b)x - ab.$$

En cada caso, por multiplicación y modelo, obtener el trinomio cuadrático correspondiente.

a) $(b + 2)(b - 3)$

b) $(x + 5)(x - 7)$

c) $(x^3 + 5)(x^3 - 3)$

d) $(p^2 + 7)(p^2 - 4)$

Conforme a lo mencionado,

En a) $(b+2)(b-3) = b(b-3) + 2(b-3) = b^2 - 3b + 2b - 6$

$= b^2 + (2-3)b - 6$

$= b^2 - b - 6.$

En b) $(x+5)(x-7) = x(x-7) + 5(x-7) = x^2 - 7x + 5x - 35$

$= x^2 + (5-7)x - 35$

$= x^2 - 2x - 35.$

En c) $(x^3+5)(x^3-3) = x^3(x^3-3) + 5(x^3-3) = x^5 - 3x^3 + 5x^3 - 15$

$= x^6 + (5-3)x^3 - 15$

$= x^6 + 2x^3 - 15.$

Finalmente, en d) $(p^2+7)(p^2-4) = p^2(p^2-4) + 7(p^2-4).$

$= p^4 - 4p^2 + 7p^2 - 28 = p^4 + (7-4)p^2 - 28$

$= p^4 + 3p^2 - 28.$

Ahora, de acuerdo con el modelo, en a) $(b+2)(b-3) = b^2 + (2-3)b - 6$,

en b) $(x+5)(x-7) = x^2 + (5-7)x - 35$,

en c) $(x^3+5)(x^3-3) = x^6 + (5-3)x^3 - 15$ y

finalmente, en d) $(p^2+7)(p^2-4) = p^4 + (7-4)p^2 - 28$.

Mediante la multiplicación y el modelo, haz lo que se indica en cada inciso

a) $(x^2+3)(x^2-4)$

b) $(y^2+6)(y^2-5)$

c) $(t^3+5)(t^3-7)$

d) $(p^4 + 8)(p^4 - 6)$

e) $(v^5 + 7)(v^5 - 9)$

f) $(p^6 + 10)(p^6 - 8)$

g) $(q^7 + 12)(q^7 - 15)$

h) $(w^8 + 11)(w^8 - 8)$

i) $(z^4 + 3a)(z^4 - a)$

j) $(x^n + 5)(x^n - 2)$

k) $(y^{m+1} + 7)(y^{m+1} - 10)$

6.8 Producto notable $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Para hacer la multiplicación , se aplicará las propiedades distributiva, y se reducirán términos semejantes, o sea,

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2)$$

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Este resultado es un binomio cúbico cuyos términos evidencian un modelo.

Con relación a la interpretación geométrica de este producto, se dice que este es un volumen, el cual se puede expresar como $a^3 - b^3$, $a > b$.

Efectuar la multiplicación que se indica en cada inciso, o aplicar el modelo y observar el resultado

a) $(x^2 - a^2)(x^4 + a^2x^2 + a^4)$

b) $(e^{3x} - x)(e^{6x} + xe^{3x} + x^2)$

c) $(10^x - y^2)(10^{2x} + y^2 10^x + y^4)$

Haciendo la multiplicación en a), b), y c), como se procedió para obtener el modelo, el resultado es

a) $(x^2 - a^2)(x^4 + a^2x^2 + a^4) = x^2(x^4 + a^2x^2 + a^4) - a^2(x^4 + a^2x^2 + a^4)$

$$= x^6 + a^2x^4 + a^4x^2 - a^2x^4 - a^4x^2 - a^6$$

$$= x^6 - a^6.$$

b) $(e^{3x} - x)(e^{6x} + xe^{3x} + x^2) = e^{3x}\,(e^{6x} + xe^{3x} + x^2) - x(e^{6x} + \mathrm{x}e^{3x} + x^2)$

$$= e^{9x} + xe^{6x} + x^2e^{3x} - xe^{6x} - x^2e^{3x} - x^3 = e^{9x} - x^3.$$

y finalmente,

c) $(10^x - y^2)(10^{2x} + y^2 10^x + 4) = 10^x(10^{2x} + y^2 10^x + y^4) - y^2(10^{2x} + y^2 10^x + y^4)$

$$= 10^{3x} + y^2 10^{2x} + y^2 10^x - y^2 10^{2x} - y^4 10^x - y^6$$

$$= 10^{3x} - y^6.$$

ahora, después de aplicar el modelo en a), b) y c), se obtiene

$$(x^2 - a^2)(a^4 + a^2x^2 + a^4) = (x^2)^3 - (a^2)^3 = x^6 - a^6,$$

$$(e^{3x} - x)(e^{6x} + \mathrm{x}e^{3x} + x^2) = (e^{3x})^3 - (x)^3 = e^{9x} - x^3 \;\; \text{y}$$

$$(10^x - y^2)(10^{2x} + y^2 10^x + y^2) = (10^x)^3 - (y^2)^3 = 10^{3x} - y^6.$$

Por medio de la multiplicación y el modelo, haz lo que se indica en cada inciso

a) $(x^3 - y^3)(x^6 + x^3y^3 + y^6)$

b) $(x^2 - a^3)(x^4 + a^3x^2 + a^6)$

c) $(y - b^3)(y^2 + b^3y + b^6)$

d) $(xy - z^2)(x^2y^2 + xyz^2 + z^4)$

e) $(x^n - 1)(x^{2n} + x^n + 1)$

f) $(x^n - y^n)(x^{2n} + x^ny^n + y^{2n})$

g) $(e^{2x} - 5)(e^{4x} + 5e^{2x} + 25)$

h) $(xe^{x} - y^{2})(x^{2}e^{2x} + xy^{2}e^{x} + y^{4})$

i) $(10^{3x} - 7)(10^{6x} + 7 * 10^{3x} + 49)$

j) $(y^{2k} - z^{k})(y^{4k} + y^{2k}z^{k} + z^{2k})$

6.9 Producto notable $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

En $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$, luego de aplicar la propiedad distributiva, asociativa y reducir términos semejantes, en la realización de la multiplicación indicada, el resultado es

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Como resultado, los términos en el binomio cúbico hace patente un modelo.

Brevemente, este producto es el volumen.

Haz las multiplicaciones siguientes

a) $(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

b) $(xy + z)(x^2y^2 - xyz + z^2)$

c) $(e^{5x} + 6)(e^{10x} - 6e^{5x} + 36)$

Para hacer las multiplicaciones propuestas, se toman en cuenta las propiedades que se utilizaron para hacer la multiplicación que permitió obtener el modelo.

Por multiplicación:

en a) $(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) = x^2(x^4 - x^6y^2 + y^4) + y^2(x^4 - x^6y^2 + y^4)$

$$= x^6 - x^2y^2 + x^6y^4 + x^4y^2 - x^6y^4 + y^6$$

$$= x^6 + y^6.$$

en b) $(xy + z)(x^2y^2 - xyz + z^2) = xy(x^2y^2 - xyz + z^2) + z(x^2y^2 - xyz + z^2)$

$$= x^3y^3 - x^2y^2z + xyz^2 + x^2y^2z - xyz^2 + z^3$$

$$= x^3y^3 + z^3.$$

y, finalmente, en

c) $(e^{5x} + 6)(e^{10x} - 6e^{5x} + 36) = e^{5x}(e^{10x} - 6e^{5x} + 36) + 6(e^{10x} - 6e^{5x} + 36)$

$$= e^{15x} - e^{10x} + 36e^{5x} + 6e^{10x} - 36e^{5x} + 216 = e^{15x} + 216.$$

En seguida, se aplica el modelo a cada inciso, y se obtiene:

En a) $(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) = (x^2)^3 + (y^2)^3 = x^6 + y^6$.

En b) $(xy + z)(x^2y^2 - xyz + z^2) = (xy)^3 + (z)^3 = x^3y^3 + z^3$.

Finalmente,

en c) $(e^{5x} + 6)(e^{10x} - 6e^{5x} + 36) = (e^{5x})^3 + (36)^3 = e^{15x} + 216$.

Por medio de la multiplicación y modelo hacer las operaciones que se proponen en cada inciso.

a) $(x^3 + a^2)(x^6 - a^2x^3 + a^4)$

b) $(x^2y^3 + z^3)(x^4y^6 - x^2y^3z^3 + z^6)$

c) $(2a^2 + 5)(4a^4 - 10a^2 + 25)$

d) $(p^5 + q^2)(p^{10} - p^5q^2 + q^4)$

e) $(x^n + y^{2n})(x^{2n} - x^ny^{2n} + y^{4n})$

f) $(r^{n+1} + 3)(r^{2n+2} - 3r^{n+1} + 9)$

g) $[e^{2n} + (a + 1)^2][e^{4n} - (a + 1)^ne^{2n} + (a + 1)^4]$

h) $[e^{3n} + (a + b)^3][e^{6n} - (a + b)^3e^{3n} + (a + b)^6]$

i) $(\ln^3 x + e^x)(\ln^6 x - e^x\ln^3 x + e^{2x})$

j) $(10^x + e^{2x})(10^{2x} - 10^xe^{2x} + e^{4x})$

6.10 Producto notable $(a + b + c)(a + b + c)$

Por último, después de aplicar la definición de potencia, las propiedades distributiva, conmutativa y asociativa; así como la reducción de términos, el producto notable $(a + b + c)^2$ se transforma en

$$(a + b + c)^2 = (a + b + c)(a + b + c)$$

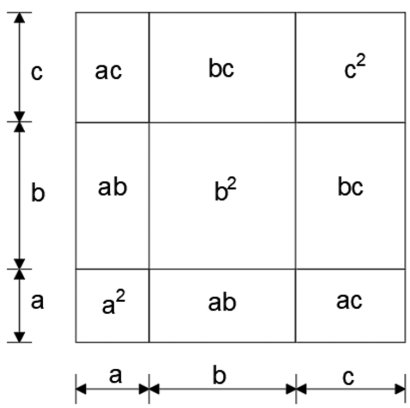
$$= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c)$$

$$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Donde los términos en el resultado hacen innegable un modelo.

Este producto, igual que los otros, se pueden representar gráficamente. Ver la figura 6.8 siguiente.



De acuerdo con la representación gráfica, este producto geométricamente es el área de un cuadrado que tiene por lado $a + b + c$ unidades. Como puede observarse, esta área es equivalente a la suma de nueve áreas.

Calcular el producto que está indicado en cada inciso, empleando, para ello, el modelo o directamente la multiplicación.

a) $(a^2 + b^2 + c^2)^2$

b) $(x + y^2 + z^3)^2$

c) $(e^x + e^{2x} + e^{3x})^2$

d) $(x^2 + y + 5)^2$

Si se emplea la multiplicación, en cada inciso, se hará conforme a lo que se hizo en la obtención del modelo. En efecto,

En a) $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)$

$$= a^2(a^2 + b^2 + c^2) + b^2(a^2 + b^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + a^2b^2 + b^4 + b^2c^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + c^4$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2.$$

En b) $(x + y^2 + z^3)^2 = (x + y^2 + z^3)(x + y^2 + z^3)$

$$= x(x + y^2 + z^3) + y^2(x + y^2 + z^3) + z^3(x + y^2 + z^3)$$

$$= x^2 + xy^2 + xz^3 + xy^2 + y^4 + y^2z^3 + xz^3 + y^2z^3 + z^6$$

$$= x^2 + y^4 + z^6 + 2xy^2 + 2xz^3 + 2y^2z^3.$$

En c) $(e^x + e^{2x} + e^{3x})^2 = (e^x + e^{2x} + e^{3x})(e^x + e^{2x} + e^{3x})$

$$= e^x(e^x + e^{2x} + e^{3x}) + e^{2x}(e^x + e^{2x} + e^{3x}) + e^{3x}(e^x + e^{2x} + e^{3x})$$

$$= e^{2x} + e^{3x} + e^{4x} + e^{3x} + e^{4x} + e^{5x} + e^{4x} + e^{5x} + e^{6x}$$

$$= e^{2x} + e^{4x} + e^{6x} + 2e^{3x} + 2e^{4x} + 2e^{5x}.$$

Finalmente, en d) $(x^2 + y + 5)^2 = (x^2 + y + 5)(x^2 + y + 5)$

$$= x^2(x^2 + y + 5) + y(x^2 + y + 5) + 5(x^2 + y + 5)$$

$$= x^4 +x^2y + 5x^2 + x^2y + y^2 + 5y + 5x^2 + 5y + 25$$

$$= x^4 + y^2 + 25 + 2x^2y + 10x^2 + 10y.$$

Por medio del modelo, el resultado es

En a) $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2)^a + (b^2)^2 + (c^2)^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2.$$

En b) $(x + y^2 + z^3)^2 = (x)^2 + (y^2)^2 + (z^3)^2 + 2xy^2 + 2xz^3 + 2y^2z^3$

$$= x^2 + y^4 + z^6 + 2xy^2 + 2xz^3 + 2y^2z^3.$$

En c) $(e^x + e^{2x} + e^{3x})^2 = (e^x)^2 + (e^{2x})^2 + (e^{3x})^2 + 2e^xe^{2x} + 2e^xe^{3x} + 2e^{2x}e^{3x}$

$$= e^{2x} + e^{4x} + e^{6x} + 2e^{3x} + 2e^{4x} + 2e^{5x}.$$

Finalmente, en d) $(x^2 + y + 5)^2 = (x^2)^2 + (y)^2 + (5)^2 + 2x^2y + 2x^25 + 2y(5)$

$$= x^4 + y^2 + 25 + 2x^2y + 10x^2 + 10y.$$

¿A qué es igual el cuadrado de cada trinomio?

a) $(a^3 + a^2 + a)^2$

b) $(2x^2 + 3y^2 + 4z^2)^2$

c) $(p^3 + 2p^2 + 3p)^2$

d) $(x^n + y^n + z^n)^2$

e) $(e^{4x} + 2e^{3x} + 3e^{2x})^2$

f) $(p + q^2 + r^3)^2$

g) $(ln^3x + ln^2x + ln^1x)^2$

h) $(10^{5x} + 10^{3x} + 2.10^{2x})^2$

i) $(3t^2 + 2v + w^2)^2$

j) $(m^4 + 3m^3 + 4m^2)^2$

6.11 Problemas de reafirmación (Evaluación 1)

Para distinguir, discriminar, fijar e incorporar conceptos, así como para fortalecer y desarrollar capacidades, se propone los problemas siguientes.

1) ¿Qué propiedades se ilustra en cada caso?

a) $ux(a + b) = ux(a) + ux(b)$

b) $(x + y)(2b) = x(2b) + y(2b)$

c) $(a + b)[(x + y)(r + s)] = [(a + b)(x + y)](r + s)$

d) $(b + c)(k) = k(b + c)$

e) Si $3kb = 3kc$, entonces $b = c$

f) Si $k(x + a) = k(b + c)$,entonces $x + a = b + c$

2) ¿Cuál es el inverso multiplicativo de los números siguientes?

a) 10

b) x

c) $\frac{5}{4}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{a+b}$

f) $\frac{1}{y}$

g) $\frac{y}{x}$

h) $\frac{x+y}{x+y}$

i) -8

j) e^x

k) 10^x

l) $\frac{1}{e^{2x}}$

m) $\frac{1}{10^{3x}}$

3) ¿Qué propiedad apoya la conclusión?

a) Si $ax = b$, entonces $x = \frac{b}{a}$.

b) Si $\frac{x}{a} = b$, entonces $x = ab$, $a \neq 0$

c) Si $1 \cdot a = a$, entonces $a = a$

4) ¿Qué significa el exponente en cada expresión dada, y cómo se hace explicito éste?

a) $(ax^2)^6$

b) $(ae^{3x})^4$

c) $(5.10^x)^5$

d) $(\ln x)^4$

e) $(e^x\, sen\, x)^6$

f) $(a + x)^3$

g) $(a^2 + x^2)^4$

h) $(e^x + 5)^5$

i) $(10^{3x} + y)^3$

j) $(4x + 5y)^2$

5) Haz lo conveniente con las expresiones siguientes.

a) $(ax)(ax)(ax) \cdots$

b) $(ax + b)(ax + b)(ax + b) \cdots$

c) $e^{-ti\theta} e^{-ti\theta} e^{-ti\theta} \cdots$

d) $10^x \cdot 10^x \cdot 10^x \cdots$

e) $(\ln x)(\ln x)(\ln x)(\ln x)$

f) $xe^{3x} \cdot xe^{3x} \cdot xe^{3x} \cdot xe^{3x}$

g) $(10^{2x} + 2)(10^{2x} + 2)(10^{2x} + 2)(10^{2x} + 2)$

h) $(e^x \ln x)(e^x \ln x)(e^x \ln x)$

i) $(pqr)(pqr)(pqr)(pqr)(pqr)$

6) ¿A qué es igual cada producto indicado?

a) $e^5 e^6 e^7$

b) $(3a)(3a)(3a)(3a)$

c) $(3abc)(3abc)(3abc)$

d) $(4xyz)(4xyz)(6xyz)$

e) $(x^{n+1})(x^{n+2})(x^{n+3})$

f) $(e^{3x})(\ln x)(e^{2x})(\ln^2 x)$

g) $(3x + e^x)(3x + e^x)\ (3x + e^x)^3$

h) $(e^{kx})(x^2)(e^{kx})(x^3)$

i) $(ab^2)(a^2b)(a^3b^2)$

j) $(10^{3x})(10^{2x})(10^x)$

7) Realizar las siguientes multiplicaciones

a) $(-2abc)(-5a^2b)(-3b^2c^3)(-2bc)$

b) $(5ax)(-2a^2x^2)(-a^2)(-5x^3)$

c) $(-2e^{2x})(3xe^x)(-2x)(x^3e^x)$

d) $(5 \cdot 10^x)(-3 \cdot 10^{2x})(-5 \cdot 10^x)(-10^x)$

e) $(4e^{kx})(-5xe^{kx})(-4x^2e^{kx})(5e^{kx})$

f) $(-2x^{n+1})(x^ny^{n+2})(-3x^{n+2}y)(2x^3y^n)$

g) $(5pqr)(-2p^nq^mr^k)(5p^2q^3r^5)(-6p^3r^2)$

h) $(-4 \ln x)(-3x\ ln^2\ x)(-ln^3\ x)(5x)$

i) $(7xyz)(-4x^2y^3z^3)(5x^3y^4z^4)(-5x^2y^5z)$

j) $(-5a^4b^4c^4)(2a^3b^3c^3)(-6a^2b^2c^2)(5abc)$

8) ¿A qué es igual el producto indicado?

a) $a^2(a - b - c)$

b) $-3x(x^4 - 3x^3 + 4)$

c) $-2xy(-2xyz + 3x^2y^2z^2 + 2xyz^3 - k)$

d) $x^3e^2x(2xe^x - 3x^2e^{2x} - x^3 + 4)$

e) $-xyz(2x^3y^3z^3 + 3x^2y^2z^2 - 2xyz + 4)$

f) $10^{2x}(3 \cdot 10^{3x} - 2 \cdot 10^{2x} + 10^x - 3)$

g) $5^x(2 \cdot 5^{2x} + 3 \cdot 5^x - 4)$

h) $a^2(3a^3b - 2a^2b + ab - 3)$

i) $yxe^x(y^2x^2e^{2x} - yxe^x - 7)$

j) $xlnx(x^3ln^3x - x^2ln^2x - x\ lnx - 3)$

9) ¿A qué es igual las potencias indicadas de cada producto dado?

a) $(-3ab)^3$

b) $(5a^2b^2c^3)^4$

c) $(-x^2yz^3)^3$

d) $-(x^3y^2y^4)^2$

e) $(-3p^3qr^4)^4$

f) $(abc)^n$

g) $(x^my^nz^k)^4$

h) $(k^5m^6)^p$

i) $[(x + y)^3]^k$

j) $(10^{3x}e^{kx})^a$

10) Hacer cada producto indicado

a) $(2a - 3)(3a + 7)$

b) $(2x + 5)(2x^2 - 2x + 6)$

c) $(ax - yb)(5x^2y + 5xy^2 - 8)$

d) $(x^2e^{2x} - xe^x + 4)(xe^{3x} - xe^x + 3)$

e) $(x \ln x - 4)(x \ln x + 8)$

f) $(x10^{3x} - 4)(x10^{3x} + 5)$

g) $(x^2y^2 + 3xy - 3)(x^2y^2 + 3xy + 4)$

h) $(5x^{n+1} - 2x^n + 4)(5x^{n+1} + 2x^n - 5)$

i) $(x^2y^2 + 8)(x^2y^2 - 8)$

j) $(e^x lnx + 7)(e^x lnx - 7)$

11) Realizar el cuadrado de cada binomio

a) $(x^{n+1} + y^{n+1})^2$

b) $(x^{n+2} + 2y^{n+1})$^2

c) $(x^{n+1}y^n + x^ny^{n+1})^2$

d) $(ln^{n+1}(x) + x^4)^2$

e) $(2e^{mx} + 4y^3)^2$

f) $(10^{5x+2} + 8x^3)^2$

g) $(4xy + 6xy)^2$

h) $(kx^{n+1} + y^4)^2$

i) $(p^3 + q^4)^2$

j) $(u^3 + 4t^3)^2$

12) Hallar el cuadrado de la diferencia de dos binomios

a) $(x^2y^3 - z^4)^2$

b) $(z^3 - 2x^3y^3)^2$

c) $(x^4 - y^4)^2$

d) $[(x^3 - 5)^2 - (x^2 - y^2)]^2$

e) $[(4a^3 - 3)^2 - b^2]^2$

f) $(e^{6x} - 9)^2$

g) $(e^k - ab^3)^2$

h) $(ln^2x - 4y^3)^2$

i) $(ln^4x - 2xy^3)^2$

j) $(5^{3x} - ab)^2$

13) Realiza la multiplicación que está indicada

a) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$

b) $(5x^3 + 6y^3)(5x^3 - 6y^3)$

c) $(a^kx + b^ky)(a^kx - b^ky)$

d) $[(a^2 + b^2) + c^2][(a^2 + b^2) - c^2]$

e) $[5 + (x + y)][5 - (x + y)]$

f) $[a^2 + (x + y)^2][a^2 - (x + y)^2]$

g) $(e^{5x} + a)(e^{5x} - a)$

h) $(10^k + y^k)(10^k - y^k)$

i) $(10^x + x^k)(10^x - x^k)$

j) $(e^{kx} + a)(e^{kx} - a)$

14) Calcular el cubo del binomio dado

a) $(a + 5)^3$

b) $(5x + 6)^3$

c) $(y + a^3)^3$

d) $(3p^3 + 5)^3$

e) $(3xy + b)^3$

f) $(xe^x + 8)^3$

g) $(xln\, x + 5)^3$

h) $(x10^{2x} + 2)^3$

i) $(x5^x + c)^3$

15) Obtener el cubo de la diferencia de dos monomios

a) $(x^2 - 6)^3$

b) $(3x^2 - 7)^3$

c) $(y^2 - b)^3$

d) $(3p^3 - 4)^3$

e) $(5xy - k)^3$

f) $(5e^x - 7)^3$

g) $(10^{2x} - x)^3$

h) $(ln^3x - a)^3$

i) $(x^2e^x - y)^3$

j) $(4xy - c)^3$

16) Haz los productos indicados

a) $(x^{n+1} + 3)(x^{n+1} + 4)$

b) $(x^k + 7)x^k + 5)$

c) $(y^4 + 3)(y^4 + 6)$

d) $(p^3 + 5)(p^3 + 7)$

e) $(q^2 + 3)(q^2 + 7)$

f) $(b^2 + 7)(b^2 + 4)$

g) $(q + 1)(q + 3)$

h) $(y + 2)(y + 5)$

i) $(x + 4)(x + 7)$

j) $(u^3 + 3)(u^3 + 5)$

17) Efectuar lo que se indica en cada caso

a) $(x^3 + 4)(x^3 - 5)$

b) $(y + 7)(y - 2)$

c) $(e^x + 10)(e^x - 10)$

d) $(ln^3x + 4)(ln^3x - 2)$

e) $(p + 3)(p - 1)$

f) $(q^2 + 2)(q^2 - 7)$

g) $(z^3 + 5)(z^3 - 2)$

h) $(10^{2x} + 2)(10^{2x} - 2)$

i) $(p^k + 3)(p^k - 7)$

j) $(q^3 + a)(q^3 - b)$

18) Haz lo que se indica en cada inciso

a) $(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$

b) $(xy - z)(x^2y^2 + xyz + z^2)$

c) $(y^3 - b^2)(y^6 + b^2y^3 + b^4)$

d) $(x^{2n} - 4)(x^{4n} + 4x^{2n} + 16)$

e) $(x^{n-1}) - 5)(x^{2n-2} + 5x^{n-1} + 25)$

f) $(xe^x - 2)(x^2e^{2x} + 2xe^x + 4)$

g) $(e^x - ln\ x)(e^{2x} + e^x ln\ x + ln^2\ x)$

h) $(10^x - a)(10^{2x} + a10^x + a^2)$

i) $(p - q^2\ )(p^2 + pq^2 + q^4)$

j) $(t^3 - v^2)(t^6 + t^3v^2 + v^4)$

19) Hacer lo que se propone en cada inciso

a) $(a^3 + b^3)(a^4 - a^3b^3 + b^6)$

b) $(2 + x^2y)(4 - 2x^2y + x^4y^2)$

c) $(a + y)(a^2 - ay + y^2)$

d) $(x^n + y^k)(x^{2n} - x^ny^k + y^{2k})$

e) $(7 + p)(49 - 7p + p^2)$

f) $(8 + e^{2k})(64 - 8e^{2k} + e^{4k})$

g) $[4 + (x + y)^2][16 - 4(x + y)^2 + (x + y)^4]$

h) $[5 + (e^x + 4)^2][25 - 5(e^x + 4)^2 + (e^x + 4)^4]$

i) $(10^{2x} + 2x)(10^{4x} - 2x \cdot 10^{2x} + 4x^2)$

j) $(e^{2x} + 10^{3x})(e^{4x} - e^{2x}10^{3x} + 10^{6x})$

20) Calcular el cuadrado de cada trinomio

a) $(3x^3 + 2x^2 + x)^2$

b) $(x^2 + y^3 + z^4)^2$

c) $(p + q + r)^2$

d) $(x^2 + y^3 + 2z^4)^2$

e) $(e^x + x + 6)^2$

f) $(10^{3x} + 10^{2x} + 10^x)^2$

g) $(t^3 + 2v^2 + w)^2$

h) $(x^3 + x + 8)^2$

i) $(ln^4x + ln^3x + 4)^2$

j) $(m + n + p)^2$

21) Haz lo que está indicado

a) $(a + b - c)^2$

b) $(a - b + c)^2$

c) $(-a + b + c)^2$

d) $(e^{3x} + e^{2x} - e^x)^2$

e) $(10^x - y + z)^2$

f) $(a^2 + b^2 - c^2)^2$

g) $(x^2 - y^2 + z^2)^2$

h) $(-p^2 + q^2 + r^2)^2$

i) $(e^x + x - 5)^2$

j) $(ln^2x - x + b)^2$

Capítulo 7

División

La división es una operación que no se postula sino que se define. Esta definición no debe ser superior a ningún axioma, pero si debe estar sustentada en ellos. El inverso multiplicativo es el axioma o propiedad en el que se soporta tal definición, porque la definición no existe si el divisor no tiene inverso multiplicativo, por ejemplo, $\frac{a}{0}$ es imposible porque $a \cdot 0^{-1}$ no es igual a 1. El inverso multiplicativo de cualquier número real, excepto el cero, si existe es único. Por ejemplo, los inversos multiplicativos de 5, a y $(3x + 1)^{-1}$, son respectivamente, 5^{-1}, a^{-1} y $(3x + 1)^{-1}$, tal que

$$5 \cdot 5^{-1} = 1,\ a \cdot a^{-1} = 1 \quad \text{y} \quad (3x + 1) \cdot (3x + 1)^{-1} = 1.$$

La división es la operación inversa de la multiplicación o también es una operación en términos de la multiplicación, $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$, $b \neq 0$, de tal manera que los axiomas o propiedades en los que se fundamenta la multiplicación son también en los que se sustenta la división.

Sean a, b y c números reales tal que $a \div b = \frac{a}{b}$, si y sólo si, $bc = a$, $b \neq 0$. ¿Por qué $b \neq 0$? El número b es el divisor, por lo que éste no debe ser cero porque no tiene inverso multiplicativo y, consecuentemente, la división no está definida.

Entonces, si $b \neq 0$, el cociente $\frac{a}{b} = c$ es un número único y b es un factor o divisor de a tal que $a = bc$. Esta es la forma factorizada de a, en la que c también es un factor de a.

El cociente es, pues, uno y no otro, porque al dividir el dividendo entre el divisor, se obtiene c y sólo c.

Debe notarse que la división involucra dos conceptos, el de división y fracción, $a \div b = \frac{a}{b}$, mientras que el inverso multiplicativo permite expresar un cociente en forma de producto, es decir, $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right)$, ab^{-1}, $b \neq 0$.

Para justificar $b \neq 0$, se parte de $\frac{a}{b} = c \iff a = bc$ y después de hacer $a = 0$, la igualdad toma la forma $bc = 0$.

Ahora, si $b = 0$, c puede ser cualquier número, lo cual va en contra de la unicidad de c.

A continuación, al hacer $a \neq 0$, la igualdad se convierte en $bc = a$, $a \neq 0$

Ahora si $b = 0$, entonces a también debe ser cero, lo que no ocurre, generándose, a cambio, una contradicción.

Por lo tanto, la división de cualquier número real, excepto cero, entre cero es imposible.

Si cero se divide entre cualquier número diferente de cero, el cociente es cero.

Para probar que esta proposición es verdadera, se parte de la igualdad $bc = a$

Con $a = 0$, esta igualdad se convierte en $bc = 0$

Ahora, si $b \neq 0$, entonces $c = 0$.

En consecuencia, $c = \frac{a}{b} = \frac{0}{b} = 0$.

Al ampliar la división, esta consta de dividendo, divisor, cociente y residuo. Cada uno de estos, se denota, respectivamente, por a, b, c y r.

Con estos elementos, la definición ampliada de la división toma la forma

$$\begin{array}{r|l} & \;c \\ \cline{2-2} b & \;a \\ & \;r \end{array}$$

a partir de la cual $a = bc + r$ ó $\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b}$, cuya expresión es el algoritmo de la división.

Asimismo, la división puede ser exacta o inexacta, es exacta cuando el residuo es cero e inexacto en caso contrario.

$\frac{a}{b} = c$, aparte de ser la forma en que se expresa una división, donde a es el dividendo, b el divisor y c el cociente, es un número racional, pero ahora a es un número entero y se llama numerador de c; b es un entero diferente de cero y se llama denominador de c. Las fracciones pueden ser propias e impropias; si las fracciones propias se convierten en decimales, este es un decimal puro y a la inversa se obtiene la fracción propia; en cambio, si son las fracciones impropias las que se convierte en decimales, éste contiene parte entera y decimal. La parte decimal puede contener el último número o ser periódica conmensurable.

Continuamos, primero, entre positivos y negativos, escribir diez números racionales y segundo, convertir los siguientes números, según sea el caso, a decimales o fracciones.

a) $-\frac{5}{8}$

b) $\frac{8}{5}$

c) $\frac{5}{7}$

c) $\frac{7}{5}$

e) $0.77\overline{7}$

f) $0.69\overline{69}$

g) $\frac{7}{9}$

h) -0.125

i) $\frac{5}{2}$

j) 2.345

De los seis números racionales expresadas como fracciones $-\frac{5}{8}$, $\frac{5}{7}$ y $\frac{7}{9}$, son fracciones propias porque su valor decimal es mayor que cero y menor que uno, mientras que $\frac{8}{5}$, $\frac{7}{5}$ y $\frac{5}{2}$ son fracciones impropias porque el numerador es mayor al denominador y su valor decimal es mayor a la unidad. Al convertir las tres primeras en decimales, se obtiene:

$$-\frac{5}{8} = -0.625 \qquad \begin{array}{r|l} & 0.625 \\ \hline 8 & 50 \\ & \;\;20 \\ & \;\;\;\;40 \end{array}$$

$$\frac{5}{7} = 0.714285\overline{714285} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.71428 \\ \hline 7 & 50 \\ & \;\;10 \\ & \;\;\;\;30 \\ & \;\;\;\;\;\;20 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;60 \end{array}$$

$$\frac{7}{9} = 0.77\overline{7} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.777 \\ \hline 9 & 70 \\ & \;\;70 \\ & \;\;\;\;70 \end{array}$$

Los siguientes tres racionales impropios en decimal son

$$\frac{7}{5} = 1.4 \qquad \begin{array}{r|l} & 1.4 \\ \hline 5 & 7 \\ & 2\,0 \end{array}$$

$$\frac{8}{5} = 1.6 \qquad \begin{array}{r|l} & 1.6 \\ \hline 5 & 8 \\ & 3\,0 \end{array}$$

$$\frac{5}{2} = 2.5 \qquad \begin{array}{r|l} & 2.5 \\ \hline 2 & 5 \\ & 1\,0 \end{array}$$

Otros diez números racionales que se piden sean clasificados como fracciones propias e impropias.

$$-\frac{4}{5},\ -0.1,\ 1.2,\ 2\frac{3}{5},\ 0.22\overline{2},\ 0.001,\ 0.21\overline{2},\ 2\frac{7}{5},\ 0.75,\ 3\frac{7}{5}$$

7.1 Conversión de números decimales a fracción

Para la conversión de los números decimales a fracción, $0.77\overline{7}$ y $0.69\overline{69}$ son periódicas, y -0.125 es negativo con una última cifra. Se designa una variable α.

Sea α el número buscado y $0.77\overline{7}$ el número por convertir, entonces

$$\alpha = 0.77\overline{7} \qquad (1)$$

Enseguida esta igualdad se multiplica por 10, obteniendo

$$10\alpha = 0.7\overline{7} \qquad (2)$$

Restando la primera de la segunda, (2) – (1) el resultado es

$$10\alpha - \alpha = 0.7\overline{7} - 0.7\overline{7}$$

$$9\alpha = 7$$

Por lo tanto, $\alpha = \frac{7}{9}$ es el número racional buscado.

Para comprobar, se hace la división, obteniendo

$$\frac{7}{9} = 0.77\overline{7}$$

En forma similar, se convierte el número decimal $0.69\overline{69}$

Se hace $\beta = 0.69\overline{69}$

Después de multiplicar la igualdad por 100, se obtiene

$$100\beta = 0.69\overline{69}$$

Luego de restar la primera de la segunda, se obtiene.

$$99\beta = 0.69$$

Por consiguiente,

$$\beta = \frac{69}{99} = \frac{23}{33}.$$

Por último, para convertir -0.125, se establece la igualdad

$$\alpha = -0.125 \qquad ó \qquad -\alpha = 0.125$$

Enseguida se expresa como

$$-\alpha = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}.$$

Se determina el común denominador, se hace la suma y se simplifica, esto es,

$$-\alpha = \frac{100 + 20 + 5}{1000} = \frac{125}{1000}.$$

Se eligen los números adecuados para dividir tanto al numerador como al denominador y simplificar

$$\begin{array}{cc|c} 125 & 1000 & 2 \\ \hline 125 & 500 & 2 \\ 125 & 250 & 2 \\ 125 & 125 & 5 \\ 25 & 25 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{array}$$

El resultado es

$$\alpha = -\frac{1}{8}$$

7.2 Conversión de números fraccionarios a decimal

Otra forma de cómo expresar números racionales se detalla a continuación. Para tal fin se hace la conversión del número 15/9. El proceso se inicia dividiendo 15 entre 9, es decir,

$$\begin{array}{r} 1 \\ 9 \overline{\smash{)}\,15} \\ 6 \end{array}$$

Cuyo resultado se puede expresar como $15 = 9 \cdot 1 + 6$, ó $\frac{15}{9} = 1 + \frac{6}{9}$

Se continúa dividiendo

$$\begin{array}{r} 6 \\ 9 \overline{\smash{)}\,60} \\ 6 \end{array}$$

y enseguida este resultado se expresa como $6 \cdot 10 = 9 \cdot 6 + 6$ ó $6 = \frac{9 \cdot 6}{10} + \frac{6}{10}$.

Este resultado se agrega en la expresión $\frac{15}{9} = 1 + \frac{6}{9}$, obteniendo

$$\frac{15}{9} = 1 + \frac{1}{9}\left(\frac{9 \cdot 6}{10} + \frac{6}{10}\right) \qquad \text{ó} \qquad \frac{15}{9} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{6}{9 \cdot 10}$$

Ahora, se divide 60 entre 9, esto es,

$$9\,\overline{)\,60}^{\;6}$$
$$6$$

a continuación este resultado se expresa como

$$6 \cdot 10 = 9 \cdot 6 + 6 \qquad \text{ó} \qquad 6 = \frac{9 \cdot 6}{10} + \frac{6}{10}.$$

Este resultado se agrega a la expresión

$$\frac{15}{9} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{1}{9 \cdot 10}\left(\frac{9 \cdot 6}{10} + \frac{6}{10}\right) \qquad \text{ó}$$

$$\frac{15}{9} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{9 \cdot 6}{10^2} + \frac{6}{9 \cdot 10^2}$$

De acuerdo con el compartimiento que se observa se puede escribir

$$\frac{15}{9} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{1}{9 \cdot 10^2}\left(\frac{9 \cdot 6}{10} + \frac{6}{10}\right)$$

$$= 1 + \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{9 \cdot 10^3}$$

$$\frac{15}{9} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{1}{9 \cdot 10^3}\left(\frac{9 \cdot 6}{10} + \frac{6}{10}\right)$$

$$= 1 + \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{9 \cdot 10^4} \qquad \cdots$$

$$\frac{15}{9} = 1 + \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{10^5} + \cdots + \frac{6}{10^n} + \cdots$$

Sea, ahora, 1/3 el número que se convertirá en decimal.

Después de dividir 1 entre 3, se obtiene

$$3\,\overline{)\,1.0}^{\;0.3}$$
$$1$$

este resultado se puede expresar como

$$1 = 3(0.3) + 0.1 \qquad \text{ó} \qquad \frac{1}{3} = 0.3 + \frac{0.1}{3}$$

Enseguida se divide (0.1)(10) entre 3, o sea

$$\begin{array}{r|l} & 0.3 \\ \hline 3 & 1.0 \\ & 1 \end{array}$$

cuyo resultado se expresa también como

$$(0.1)(10) = 3(0.3) + 0.1 \qquad \text{ó}$$

$$0.1 = \frac{3(0.3)}{10} + \frac{0.1}{10}$$

Este resultado se sustituye en la expresión

$$\frac{1}{3} = 0.3 + \frac{0.1}{3}$$

obteniendo

$$\frac{1}{3} = 0.3 + \frac{1}{3}\left(\frac{3(0.3)}{10} + \frac{0.1}{10}\right)$$

$$\frac{1}{3} = 0.3 + \frac{0.3}{10} + \frac{0.1}{30}$$

Similarmente, se divide (0.1)(10) entre 3, obteniendo $10(0.1) = 3(0.3) + 0.1$ ó

$$0.1 = \frac{3(0.3)}{10} + \frac{0.1}{10}$$

Este resultado se agrega en la expresión y se obtiene

$$\frac{1}{3} = 0.3 + \frac{0.3}{10} + \frac{1}{30}\left(\frac{3(0.3)}{10} + \frac{0.1}{10}\right)$$

ó

$$\frac{1}{3} = 0.3 + \frac{0.3}{10} + \frac{0.1}{10^2} + \frac{0.1}{3 \cdot 10^2}$$

La regularidad que exhibe esta expresión facilita la adición de términos, o sea,

$$\frac{1}{3} = 0.3 + \frac{0.3}{10} + \frac{0.3}{10^2} + \frac{0.1}{3 \cdot 10^2}\left(\frac{3(0.3)}{10} + \frac{0.1}{10}\right)$$

$$\frac{1}{3} = 0.3 + \frac{0.3}{10} + \frac{0.3}{10^2} + \frac{0.3}{10^3} + \frac{0.1}{3 \cdot 10^3}$$

Así, sucesivamente hasta

$$\frac{1}{3} = 0.3 + \frac{0.3}{10} + \frac{0.3}{10^2} + \frac{0.3}{10^3} + \cdots + \frac{0.3}{10^n}$$

El número que a continuación se convertirá en decimales es 5/7

Después de dividir 5 entre 7, se obtiene

$$\begin{array}{r|l} & \underline{\;0.7\;} \\ 7 & 5.0 \\ & \;\;\;1 \end{array}$$

$$5 = 7(0.7) + 0.1$$

Luego de dividir 0.1(10) entre 7 se obtiene 0.1(10) = 7(0.1) + 0.3

Enseguida, este resultado se sustituye en la expresión $\frac{5}{7} = 0.7 + \frac{1}{7}(0.1)$, obteniendo

$$\frac{5}{7} = 0.7 + \frac{1}{7}\left(\frac{7(0.1)}{10} + \frac{0.3}{10}\right)$$

$$= 0.7 + \frac{0.1}{10} + \frac{0.3}{7 \cdot 10}$$

En forma semejante, al dividir 0.3(10) entre 7, el resultado es

$$0.3(10) = 7(0.4) + 0.2 \quad \text{ó} \quad 0.3 = \frac{7(0.4)}{10} + \frac{0.2}{10}$$

Al sustituir este resultado en la expresión

$$\frac{5}{7} = 0.7 + \frac{0.1}{10} + \frac{0.3}{7 \cdot 10}$$

se obtiene

$$\frac{5}{7} = 0.7 + \frac{0.1}{10} + \frac{1}{7 \cdot 10}\left(\frac{7(0.4)}{10} + \frac{0.2}{10}\right)$$

ó

$$\frac{5}{7} = 0.7 + \frac{0.1}{10} + \frac{0.4}{10^2} + \frac{0.2}{7 \cdot 10^2}$$

Para continuar se divide 0.2(10) entre 7 y se obtiene 0.2(10) = 7(0.2) + 0.6 ó

$$0.2 = \frac{7(0.2)}{10} + \frac{0.6}{10}$$

Este resultado se sustituye en la última expresión del párrafo anterior y se obtiene

$$\frac{5}{7}=0.7+\frac{0.1}{10}+\frac{0.4}{10^2}+\frac{1}{7\cdot 10^2}\left(\frac{7(0.2)}{10}+\frac{0.6}{10}\right)$$

$$\frac{5}{7}=0.7+\frac{0.1}{10}+\frac{0.4}{10^2}+\frac{0.2}{10^3}+\frac{0.6}{7\cdot 10^3}$$

Se sigue con la división de (0.6)(10) entre 7, obteniendo (0.6)(10) = 0.7(0.8) + 0.4 ó

$$0.6=\frac{7(0.8)}{10}+\frac{0.4}{10}$$

Al agregar este resultado en la última expresión del párrafo anterior, se obtiene

$$\frac{5}{7}=0.7+\frac{0.1}{10}+\frac{0.4}{10^2}+\frac{0.2}{10^3}+\frac{1}{7\cdot 10^3}\left(\frac{7(0.8)}{10}+\frac{0.4}{10}\right)$$

$$\frac{5}{7}=0.7+\frac{0.1}{10}+\frac{0.4}{10^2}+\frac{0.2}{10^3}+\frac{0.8}{10^4}+\frac{4}{7\cdot 10^4}$$

De igual manera, se calculan los términos que siguen, es decir,

$$\frac{5}{7}=0.7+\frac{0.1}{10}+\frac{0.4}{10^2}+\frac{0.2}{10^3}+\frac{0.8}{10^4}+\frac{1}{7\cdot 10^4}\left(\frac{7(0.5)}{10}+\frac{0.5}{10}\right)$$

$$\frac{5}{7}=0.7+\frac{0.1}{10}+\frac{0.4}{10^2}+\frac{0.2}{10^3}+\frac{0.8}{10^4}+\frac{0.5}{10^5}+\frac{0.5}{7\cdot 10^5}$$

$$\frac{5}{7}=0.7+\frac{0.1}{10}+\frac{0.4}{10^2}+\frac{0.2}{10^3}+\frac{0.8}{10^4}+\frac{0.5}{10^5}+\frac{1}{7\cdot 10^5}\left(\frac{7(0.7)}{10}+\frac{0.1}{10}\right)$$

$$\frac{5}{7}=0.7+\frac{0.1}{10}+\frac{0.4}{10^2}+\frac{0.2}{10^3}+\frac{0.8}{10^4}+\frac{0.5}{10^5}+\frac{0.7}{10^6}+\frac{0.1}{7\cdot 10^6}$$

Así, hasta

$$\frac{5}{7}=0.7+\frac{0.1}{10}+\frac{0.4}{10^2}+\frac{0.2}{10^3}+\frac{0.8}{10^4}+\frac{0.5}{10^5}+\frac{0.7}{10^6}+\frac{0.1}{10^7}+\frac{0.4}{10^8}+\frac{0.2}{10^9}+\frac{0.8}{10^{10}}+\frac{0.5}{10^{11}}$$

Claramente se nota la periodicidad del número dado.

Finalmente, para convertir el número racional $\frac{a}{b}$ en un decimal, inicialmente, se divide a entre b, obteniendo $a = bc + r_0$

$$\frac{a}{b}=c+\frac{r_0}{b}$$

Se continua, dividiendo $10r_0$ entre b, resultando

$$10r_0 = ba_1 + r_1$$

$$r_0 = \frac{ba_1}{10} + \frac{r_1}{10}$$

Después de sustituir este resultado en

$$\frac{a}{b} = c + \frac{1}{b}r_0$$

se obtiene

$$\frac{a}{b} = c + \frac{1}{b}\left(\frac{ba_1}{10} + \frac{r_1}{10}\right)$$

$$\frac{a}{b} = c + \frac{a_1}{10} + \frac{r_1}{b \cdot 10}$$

Similarmente, después de dividir $10r$, entre b, el resultado es

$$10r_1 = ba_2 + r_2 \quad \text{ó} \quad r_1 = \frac{ba_2}{10} + \frac{r_2}{10}$$

Al sustituir este resultado en la última expresión del párrafo anterior, se obtiene

$$\frac{a}{b} = c + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{b \cdot 10}\left(\frac{ba_2}{10} + \frac{r_2}{10}\right)$$

$$\frac{a}{b} = c + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{r_2}{b \cdot 10^2}$$

En forma semejante se calculan más términos, esto es,

$$\frac{a}{b} = c + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{b \cdot 10^2}\left(\frac{ba_3}{10} + \frac{r_3}{10}\right)$$

$$\frac{a}{b} = c + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{r_3}{b \cdot 10^3}$$

$$\frac{a}{b} = c + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{1}{b \cdot 10^3}\left(\frac{ba_4}{10} + \frac{r_4}{10}\right)$$

$$\frac{a}{b} = c + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \frac{r_4}{b \cdot 10^4}$$

Así, hasta

$$\frac{a}{b} = c + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

7.3 Problemas de asimilación

Para reafirmar los conceptos y procedimientos para convertir números racionales a decimales y viceversa, y de paso, fortalecer y desarrollar capacidades, se propone resolver el problema siguiente.

Convertir, según sea el caso, racionales a decimales o decimales a racionales.

a) $0.44\overline{4}$

b) 3/7

c) 0.0009

d) 7/13

e) $0.59\overline{59}$

f) 17/15

g) $2.12\overline{12}$

h) $2\,\frac{7}{13}$

i) 0.1315

j) $3\,\frac{5}{7}$

k) 0.625

l) $-\frac{3}{5}$

m) $0.323\overline{323}$

n) $-\frac{3}{8}$

o) 48.07692308

p) 1/6

q) 0.2345

r) 5/6

s) $0.25\overline{25}$

t) 5 1/7

u) $0.\overline{365}$

v) 1/8

w) 0.875

x) 13/3

y) $0.36\overline{36}$

z) 5/11

7.4 Propiedades de la división

Si a, b, c, d ∈ R, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow ad = bc$. Esto significa que si el producto de los extremos es igual al producto de los medios, las fracciones son equivalentes. Esto es cierto para las igualdades y las desigualdades.

Para probar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es cierta, ésta, se expresa como $ab^{-1} = d^{-1}c$ y ambos lados de igualdad se multiplican por los inversos multiplicativos de b^{-1} y d^{-1}, y aplicando el neutro multiplicativo de b^{-1} y d^{-1}, se obtiene

$$ab^{-1}bd = dd^{-1}bc$$

$$ad \cdot 1 = 1 \cdot bc$$

$$ad = bc$$

Apoyado en esta conclusión,

$$\frac{5}{2} = 10/4 \iff 5 \cdot 4 = 2 \cdot 10,$$

$$\frac{2a}{b} = \frac{2c}{d} \iff 2ad = 2bc \text{ y}$$

$$\frac{x+3}{8} = \frac{3}{2} \iff 2 \cdot (x+3) = 8 \cdot 3.$$

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{3} \iff 3 < 8,$$

$$\frac{7}{3} < \frac{5}{2} \iff 14 < 15 \text{ y}$$

$$\frac{x}{3} < \frac{3}{5} \iff 5x < 9.$$

También es propiedad de la división

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Para probar que esta proposición es verdadera, se parte del lado izquierdo de la igualdad, es decir, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ y por definición de división

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a\left(\frac{1}{b}\right)c\left(\frac{1}{d}\right).$$

Luego de aplicar las propiedades asociativa y conmutativa, el resultado es

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (ac)\left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\right)$$

Después de utilizar $(bd)(bd)^{-1}$, asociar y conmutar, se obtiene

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=(ac)\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d}\right)(bd)(bd)^{-1}$$

$$=(ac)(bd)^{-1}\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d}\right)(bd)$$

$$=ac\left(\frac{1}{bd}\right)\left(\frac{1}{b}\cdot b\right)\left(\frac{1}{d}\cdot d\right)$$

Ahora, por los inversos y neutros multiplicativos, se obtiene

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=ac\left(\frac{1}{bd}\right)$$

Finalmente, por división

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Una consecuencia de esta propiedad es la proposición

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}$$

Sirvan de ejemplos la solución de los problemas siguientes para ilustrar el uso de estas dos proposiciones.

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{(5)(2)}{(3)(7)}$$

$$\frac{2a}{b}\cdot\frac{a}{2c}=\frac{(2a)(a)}{(b)(2c)}$$

$$\frac{6x}{3y}\cdot\frac{2a}{3b}=\frac{(6x)(2a)}{(3y)(3b)}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{b}=\frac{2a}{3b}$$

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{(5)(6)}$$

$$\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{3b}=\frac{1}{(2a)(3b)}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{3b}$$

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{7a}$$

Si a, b, c $\in$ R, entonces $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ es otra proposición que se debe probar. Para tal efecto, se parte de $\frac{ac}{bc}$.

De acuerdo con

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c}=\frac{ac}{bc}, \qquad \frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c}$$

Por el inverso multiplicativo de c y el neutro multiplicativo,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c}=\frac{a}{b}$$

Esta proposición asegura que si el numerador y denominador de una fracción se multiplica por el mismo número, la igualdad no se altera. Por ejemplo,

$$\frac{5}{6}=\frac{2(5)}{2(6)} \qquad \frac{3x}{a}=\frac{(3x)3}{(a)3}$$

$$\frac{25}{20}=\frac{5(5)}{4(5)}=\frac{5}{4} \qquad \frac{6a}{3b}=\frac{3(2a)}{3(b)}=\frac{2a}{b},\ b\neq 0$$

$$\frac{a}{b}=\frac{(bc)}{(b)}=c, \quad a=bc,\ b\neq 0 \qquad \frac{a}{b}=\frac{a}{ac}=\frac{1}{c},\ c\neq 0,\ b=ac$$

Sean a, b, c y d números reales, entonces

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

es una proposición que involucra la suma de números racionales y que como propiedad de la división se debe probar.

De acuerdo con la definición de división

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

se puede escribir como

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=a\left(\frac{1}{b}\right)+c\left(\frac{1}{d}\right)=ab^{-1}+cd^{-1}.$$

Aplicando

$$dd^{-1}=1 \text{ y } bb^{-1}=1,$$

se obtiene

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=ab^{-1}dd^{-1}+cd^{-1}bb^{-1}.$$

Después de conmutar, agrupar y aplicar la propiedad distributiva, el resultado es

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(ad)(bd)^{-1}+bc(bd)^{-1}$$

$$=(ad+bc)(bd)^{-1}$$

Después de emplear el neutro multiplicativo y el inverso multiplicativo de $(bd)^{-1}$ se obtiene

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(ad+bc)(bd)^{-1}\left(\frac{bd}{bd}\right)$$

$$=(ad+bc)(bd)\left(\frac{1}{bd}\right)$$

Por consiguiente, por definición de la división se obtiene

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Apoyado en esta proposición

$$\frac{5}{3}+\frac{2}{7}=\frac{5(7)+2(3)}{(3)(7)}$$

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{8}=\frac{10+21}{24}=\frac{31}{24} \quad \text{y}$$

$$\frac{x}{2a^2}+\frac{y}{6a}=\frac{3x+ay}{6a^2}.$$

También,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b}$$

donde a, b y c son números reales es una proposición que debe probarse. En efecto, por definición de la división

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=a\left(\frac{1}{b}\right)+c\left(\frac{1}{b}\right)$$

Luego de aplicar la propiedad distributiva, se obtiene

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=(a+c)\left(\frac{1}{b}\right)$$

Por último, por definición de la división,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b}$$

Haciendo uso de esta proposición,

$$\frac{8}{5}+\frac{7}{5}=\frac{8+7}{5}$$

$$\frac{2a}{b}+\frac{3c}{b}=\frac{2a+3c}{b}$$

$$\frac{2x}{5}+\frac{7y}{5}=\frac{2x+7y}{5}$$

También puede comprobarse que

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

y que

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{a}{b}dd^{-1}+\frac{c}{d}bb^{-1}$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

Debe notarse que cada número racional puede escribirse en una y sólo en una de las formas

$$\frac{a}{b},\ \frac{-a}{b},\ \frac{0}{b}$$

Respecto al signo menos, la proposición

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$$

donde a y b $\in$ R, no se demuestra.

La propiedad de la división que involucra un cociente de dos fracciones de números reales se expresa como

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a/b}{c/b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Para probar que esta proposición es verdadera, se parte de

$$\frac{a/b}{c/b}$$

y después de utilizar la definición de división, se obtiene que

$$\frac{a/b}{c/b} = \frac{a}{b}\left(\frac{1}{\frac{c}{d}}\right)$$

Luego de emplear el inverso multiplicativo de $\frac{c}{d}$ y el neutro multiplicativo, se obtiene

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\left(\frac{1}{\frac{c}{d}}\right)\frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{\frac{d}{c}}{1}$$

Por consiguiente, como cualquier número entre 1 es el mismo número,

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}$$

Basado en esta proposición,

$$\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{2}} = \frac{5(2)}{6(7)} = \frac{10}{42}$$

$$\frac{\frac{3a}{b}}{\frac{c}{4b}} = \frac{3a}{b} \div \frac{c}{4b} = \frac{3a(4b)}{b(c)} = \frac{12ab}{bc} = \frac{12a}{c}$$

$$\frac{\frac{a+b}{c+e}}{\frac{a+c}{d+c}} = \frac{a+b}{c+e} \div \frac{a+c}{d+c} = \frac{a+b}{c+e}\,\frac{d+c}{a+c} = \frac{ad+ac+bd+bc}{ac+ae+cc+ce}$$

7.5 Fracciones irreducibles

Toda expresión de la forma a/b, $b \neq 0$, puede ser una fracción o un número racional, si b es un número positivo y, según sea a/b, a es positivo o negativo. Se dice que a/b es irreducible si el m.c.d de a y b es 1.

Si a/b no es irreducible es porque a y b tienen factores en común y el m.c.d de a y b es diferente de 1.

Por ejemplo, *3/5* es irreducible porque el m.c.d. es igual a *1*. En cambio, *812/2088* es reducible porque el m.c.d. > *1*. En efecto, para probar esta aseveración, primero se determinan los factores primos de *812* y *212*, lo cual se muestra en la tabla que sigue

812	2088	2
406	1044	2
203	522	2
203	261	3
203	87	3
203	29	7
29	29	29
1	1	

Luego de conocer los factores primos del numerador y denominador, para calcular el m.c.d., se eligen los números adecuados, en este caso, los factores primos son 2, 2 y 29, y el m.c.d = 2 · 2 · 29 = 116, cuyo valor es diferente de 1.

Si el mcd = 116, entonces

$$\frac{\frac{812}{116}}{\frac{2088}{116}} = \frac{7}{18}$$

donde 7/18 es una fracción irreducible, porque el mcd = 1.

7.6 Potencia de una fracción

Otra proposición útil para manejar potencias, pero ahora de una fracción, en forma particular, tiene la forma

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^{1+1+1+1+1}}{b^{1+1+1+1+1}} = \frac{a^5}{b^5}$$

En consecuencia,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Según esta conclusión, para hallar la potencia de una fracción se eleva el numerador y el denominador a esa potencia. Por ejemplo, ¿cuáles son las potencias de las fracciones dadas en cada inciso?

a) $\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^3$,

b) $\left(\dfrac{3x^2}{5y^3}\right)^4$,

c) $\left(\dfrac{3ax^2y^3z^4}{5bp^2z^2}\right)^3$ y

d) $\left(\dfrac{y^k}{x^k}\right)^5$.

Luego de aplicar la proposición probada, las potencias de cada fracción dada en el inciso a) es

$$\left(\frac{a}{b^2}\right)^3 = \frac{a^3}{b^6}$$

$$\left(\frac{a}{b^2}\right)^3 = \left(\frac{a}{b^2}\right)\left(\frac{a}{b^2}\right)\left(\frac{a}{b^2}\right) = \frac{a^3}{b^6}$$

en b)

$$\left(\frac{3x^2}{5y^3}\right)^4 = \frac{81x^8}{625y^{12}}$$

$$\left(\frac{3x^2}{5y^3}\right)^4 = \left(\frac{3x^2}{5y^3}\right)\left(\frac{3x^2}{5y^3}\right)\left(\frac{3x^2}{5y^3}\right)\left(\frac{3x^2}{5y^3}\right) = \frac{81x^8}{625y^{12}}$$

en c) es

$$\left(\frac{3ax^2y^3z^4}{5bp^2z^2}\right)^3 = \frac{27a^3x^6y^{39}z^{12}}{125b^3p^6z^6}$$

$$\left(\frac{3ax^2y^3z^4}{5bp^2z^2}\right)^3 = \left(\frac{3ax^2y^3z^4}{5bp^2z^2}\right)\left(\frac{3ax^2y^3z^4}{5bp^2z^2}\right)\left(\frac{3ax^2y^3z^4}{5bp^2z^2}\right) = \frac{27a^3x^6y^{39}z^{12}}{125b^3p^6z^6}$$

y, finalmente, en d) es

$$\left(\frac{y^k}{x^k}\right)^5 = \frac{y^{5k}}{x^{5k}}$$

$$\left(\frac{y^k}{x^k}\right)^5 = \left(\frac{y^k}{x^k}\right)\left(\frac{y^k}{x^k}\right)\left(\frac{y^k}{x^k}\right)\left(\frac{y^k}{x^k}\right)\left(\frac{y^k}{x^k}\right) = \frac{y^{5k}}{x^{5k}}$$

Determine lo que está indicado en cada inciso

a) $\left(\dfrac{a^2b^2}{3c}\right)^2$

b) $\left(\dfrac{X^2e^{2x}}{2y^3}\right)^3$

c) $\left(\dfrac{p^2q}{x^2}\right)^4$

d) $\left(\frac{5\cdot 10^x}{2x^2y}\right)^5$

e) $\left(\frac{a\ \ln^2 x}{bx}\right)^3$

f) $\left(\frac{-2ab}{5xy}\right)^3$

g) $\left(\frac{5x^2y}{-2a}\right)^4$

h) $\left(-\frac{4xy^2}{ae^x}\right)^6$

i) $\left(\frac{-5a^2x}{-2by^2}\right)^3$

j) $\left(\frac{-2xy}{a^2p^3}\right)^2$

7.7 Problemas de asimilación

Ahora, relacionando la potencia de fracciones con productos notables, se pueden plantear y resolver problemas como los siguientes.

Las potencias indicadas, se pueden resolver haciendo directamente las multiplicaciones o utilizando, según sea el caso, el modelo correspondiente.

1) ¿A qué es igual cada una de las potencias indicadas?

a) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$

b) $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{a}\right)^2$

c) $\left(x+\frac{a}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$

d) $\left(x+\frac{b}{5}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

e) $\left(\frac{x}{4}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{4}-\frac{2}{3}\right)$

f) $\left(\frac{x^2}{a}+\frac{a}{2}\right)^3$

g) $\left(\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}\right)^3$

h) $\left(\frac{3}{a}-\frac{2}{b}\right)\left(\frac{9}{a^2}+\frac{6}{ab}+\frac{4}{b^2}\right)$

i) $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}\right)$

j) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2$

Sin hacer explicitas las propiedades, las cuales se deben recordar, en cada inciso, se emplea la multiplicación para obtener cada potencia, esto es,

a) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)=\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)$

$=\frac{a^2}{4}+\frac{ab}{4}+\frac{ab}{4}+\frac{b^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{4}$

b) $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{a}\right)^3=\left(\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{a}\right)\left(\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{a}\right)=\frac{x^2}{3}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{a}\right)-\frac{y^2}{a}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{a}\right)$

$=\frac{x^4}{9}-\frac{x^2y^2}{3a}-\frac{x^2y^2}{3a}+\frac{y^4}{a^2}=\frac{x^4}{9}-\frac{x^2y^2}{3a}+\frac{y^4}{a^2}$

c) $\left(x+\frac{a}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=(x)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{a}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$

$=x^2-\frac{x}{3}+\frac{ax}{3}-\frac{a}{9}=x^2+\left(\frac{a}{3}-\frac{1}{3}\right)x-\frac{a}{9}$

d) $\left(x+\frac{b}{5}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{b}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)=x^2+\frac{x}{2}+\frac{bx}{5}+\frac{b}{10}$

$=x^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{5}\right)x+\frac{b}{10}$

e) $\left(\frac{x^2}{a}+\frac{a}{2}\right)^3=\left(\frac{x^2}{a}+\frac{a}{2}\right)\left[\left(\frac{x^2}{a}+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{a}{2}\right)\right]$

$=\left(\frac{x^2}{a}+\frac{a}{2}\right)\left[\left(\frac{x^2}{a}\right)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{a}{2}\right)+\frac{a}{2}\left(\frac{x^2}{a}+\frac{a}{2}\right)\right]$

$=\left(\frac{x^2}{a}+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{x^4}{a^2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{4}\right)=\left(\frac{x^2}{a}+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{x^4}{a^2}+x^2+\frac{a^2}{4}\right)$

$=\frac{x^2}{a}\left(\frac{x^4}{a^2}+x^2+\frac{a^2}{4}\right)+\frac{a}{2}\left(\frac{x^4}{a^2}+x^2+\frac{a^2}{4}\right)$

$=\frac{x^6}{a^3}+\frac{x^4}{a}+\frac{a^2x^2}{4a}+\frac{ax^4}{2a^2}+\frac{ax^2}{2}+\frac{a^3}{8}$

$$= \frac{x^6}{a^3} + \frac{x^4}{a} + \frac{ax^2}{4} + \frac{x^4}{2a} + \frac{ax^2}{2} + \frac{a^3}{8}$$

$$= \frac{x^6}{a^3} + \frac{3x^4}{2a} + \frac{3ax^2}{4} + \frac{a^3}{8}$$

f) $\left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right)^3 = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right)\left[\left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right)\left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right)\right]$

$$= \left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right)\left[\frac{x^2}{a}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right) - \frac{y^2}{b}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right)\left(\frac{x^4}{a^2} - \frac{x^2y^2}{ab} - \frac{x^2y^2}{ab} + \frac{y^4}{b^2}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}\right)\left(\frac{x^4}{a^2} - \frac{2x^2y^2}{ab} + \frac{y^4}{b^2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{a}\left(\frac{x^4}{a^2} - \frac{2x^2y^2}{ab} + \frac{y^4}{b^2}\right) - \frac{y^2}{b}\left(\frac{x^4}{a^2} - \frac{2x^2y^2}{ab} + \frac{y^4}{b^2}\right)$$

$$= \frac{x^6}{a^3} - \frac{2x^4y^2}{a^2b} + \frac{x^2y^4}{ab^2} - \frac{x^4y^2}{a^2b}) + \frac{2x^2y^4}{ab^2} - \frac{y^6}{b^3}$$

$$= \frac{x^6}{a^3} - \frac{3x^4y^2}{a^2b} + \frac{3x^2y^4}{ab^2} - \frac{y^6}{b^3}$$

g) $\left(\frac{3}{a} - \frac{2}{b}\right)\left(\frac{9}{a^2} + \frac{6}{ab} + \frac{4}{b^2}\right) = \left(\frac{3}{a}\right)\left(\frac{9}{a^2} + \frac{6}{ab} + \frac{4}{b^2}\right) - \left(\frac{2}{b}\right)\left(\frac{9}{a^2} + \frac{6}{ab} + \frac{4}{b^2}\right)$

$$= \frac{27}{a^3} + \frac{18}{a^2b} + \frac{12}{ab^2} - \frac{18}{ba^2} - \frac{12}{ab^2} - \frac{8}{b^3}$$

$$= \frac{27}{a^3} - \frac{8}{b^3}$$

h) $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2}\right) = \left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \left(\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2}\right)$

$$= \frac{x^3}{a^3} - \frac{x^2y}{a^2b} + \frac{xy^2}{ab^2} + \frac{yx^2}{ba^2} - \frac{xy^2}{ab^2} + \frac{y^3}{b^3}$$

$$= \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3}$$

i) $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) =$

$$\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) + \left(\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) + \left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)$$

$$= \frac{x^2}{a^2} + \frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} + \frac{zy}{bc} + \frac{z^2}{c^2}$$

$$= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2xz}{ac} + \frac{2yz}{bc}$$

2) Calcular lo que se indica en cada inciso.

a) $\left(\frac{3}{x}+\frac{5}{y}\right)^2$

b) $\left(\frac{3x}{a}+\frac{by}{2}\right)^2$

c) $\left(\frac{2x}{a}-\frac{3y}{b}\right)^2$

d) $\left(\frac{3x^2}{5}-\frac{y}{b}\right)^2$

e) $\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{a}{b}\right)$

f) $\left(y+\frac{a}{3}\right)\left(y-\frac{a}{c}\right)$

g) $\left(p+\frac{b}{c}\right)\left(p+\frac{3}{5}\right)$

h) $\left(t+\frac{a}{3}\right)\left(t+\frac{b}{5}\right)$

i) $\left(\frac{x^2}{a}+\frac{b}{c}\right)\left(\frac{x^2}{a}-\frac{b}{c}\right)$

j) $\left(\frac{y^3}{b}+\frac{a}{b}\right)\left(\frac{y^3}{b}-\frac{a}{b}\right)$

k) $\left(\frac{y^2}{2}+\frac{a}{2}\right)^3$

l) $\left(\frac{a}{k}-\frac{x^3}{b}\right)^3$

m) $\left(\frac{x^2}{a}-\frac{b^2}{c}\right)\left(\frac{x^4}{a^2}+\frac{b^2x^2}{ac}+\frac{b^4}{c^2}\right)$

n) $\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}\right)\left(\frac{p^2}{a^2}-\frac{pq}{ab}+\frac{q^2}{b^2}\right)$

o) $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}\right)^2$

7.8 Reducción de fracciones de igual base

Otro teorema o proposición útil para dividir números o expresiones es el que está relacionado con la división de potencias de igual base.

Antes de generalizar se puede plantear las siguientes situaciones.

$$\frac{a^4}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^2$$

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1$$

$$\frac{a^4}{a^6} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$$

Por consiguiente, de la primera,

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \text{ si } \; n > m$$

de la segunda

$$\frac{a^n}{a^m} = 1, \text{ si } \; n = m$$

y, por último,

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ si } \; m > n$$

Puede observarse que si el exponente del numerador es mayor que el exponente del denominador, resultado es un cociente con exponente positivo. Por ejemplo,

$$\frac{a^5b^4}{a^2b^3} = a^5a^{-2}b^4b^{-3} = a^3b$$

Si tanto el exponente del numerador como el exponente del denominador son iguales, entonces

$$\frac{a^5}{a^5} = 1, \; \frac{a^n}{a^n} = 1$$

Consecuentemente,

$$a^na^{-n} = 1 \quad \text{ó} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{y} \quad a^0 = 1$$

Por último, si en $\frac{a^n}{a^m}$, m > n, entonces el exponente del cociente es negativo. Por ejemplo,

$$\frac{a^2b^3}{a^5b^6} = a^2a^{-5}b^3b^{-6} = a^{-3}b^{-3}$$

Haz las siguientes divisiones

a) $\dfrac{a^3b^4c^5}{a^2b^3c^4}$

b) $\dfrac{-8x^5y^3}{4x^2y}$

c) $\dfrac{-3p^3q^2r}{-p^2qr}$

d) $\dfrac{10a^3e^3x}{-5a^7e^x}$

e) $\dfrac{8x^3y^6}{8x^3y^6}$

Luego de dividir, conforme al teorema y sus consecuencias, el cociente de cada división propuesta es:

a) $\dfrac{a^3b^4c^5}{a^2b^3c^4} = a^{3-2}b^{4-3}c^{5-4} = abc$

b) $\dfrac{-8x^5y^3}{4x^2y} = -2x^{5-2}y^{3-1} = -2x^3y^2$

c) $\dfrac{-3p^3q^2r}{-p^2qr} = 3p^{3-2}q^{2-1}r^{1-1} = 3pq$

d) $\dfrac{10a^3e^3x}{-5a^7e^x} = -2a^{3-7}e^{3x-x} = -2a^{-4}e^{2x} = \dfrac{-2e^{2x}}{a^4}$

e) $\dfrac{8x^3y^6}{8x^3y^6} = 8^{1-1}x^{3-3}y^{6-6} = 8^0x^0y^0 = 1$

Puede observarse que en cada expresión racional obtenida está en su forma mínima, porque el numerador y el denominador no tienen factor común diferente de 1 y –1. Al procedimiento de reducir al mínimo una expresión, se denomina reducción al mínimo de la expresión racional y ésta se justifica en una de las propiedades de la división, es decir, en la que establece que para todo a, b $\in$ R, ak/bk = a/b si k, b son distintos de cero.

Resolver las siguientes divisiones equivale a obtener otra expresión reducida al mínimo.

1) $-\dfrac{abc}{a^3b^3c^3}$

2) $\dfrac{-3x^2y^3z^4}{-6x^3y^4z^5}$

3) $\dfrac{-24p^2q^3}{8}$

4) $\dfrac{-36x^6}{-9x^7}$

5) $\dfrac{-10^{3x}x^3}{5 \cdot 10^{4x}x^2}$

6) $\dfrac{-x^2e^{-3x}}{x^{-3}e^{2x}}$

7) $\dfrac{-15a^{-2}b^3}{-3a^{-5}b^{-1}}$

8) $\dfrac{25x^{-5}y^{-4}}{-5x^{-3}y^{-5}}$

9) $\dfrac{-36p^{-3}q^{4}}{-4p^{2}q^{5}}$

10) $\dfrac{-49x^{-5}y^{-2}z^{-3}}{-7x^{-3}y^{-2}z^{-4}}$

11) $\dfrac{-4x^{2}y^{-3}}{-4x^{2}y^{-3}}$

12) $\dfrac{xln^{3}x}{x^{3}ln^{4}x}$

7.9 Problemas de asimilación

Ahora, efectuar la multiplicación indicada y dividir, es lo mismo que reducir a su mínima expresión cada una de las siguientes expresiones.

1) Reduce a su mínima expresión las multiplicaciones siguientes.

a) $\left(\dfrac{3x}{5y}\right)\left(\dfrac{x^{2}y}{3}\right)$

b) $\left(\dfrac{ab^{2}}{c^{2}}\right)\left(\dfrac{ac^{2}}{b^{2}}\right)$

c) $\left(\dfrac{xe^{3x}}{ab}\right)\left(\dfrac{a^{2}b^{2}}{x^{2}e^{3x}}\right)$

d) $\left(\dfrac{5xy}{3}\right)\left(\dfrac{x^{2}}{5x^{3}y^{3}}\right)$

Después de aplicar $\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{d}\right)=\dfrac{ac}{bd}$, en cada caso, la mínima expresión o cociente es:

a) $\left(\dfrac{3x}{5y}\right)\left(\dfrac{x^{2}y}{3}\right)=\dfrac{3x^{3}y}{15y}=\dfrac{1}{5}x^{3}y^{1-1}=\dfrac{x^{2}}{5}$

b) $\left(\dfrac{ab^{2}}{c^{2}}\right)\left(\dfrac{ac^{2}}{b^{2}}\right)=\dfrac{a^{2}b^{2}c^{2}}{b^{2}c^{2}}=a^{2}b^{0}c^{0}=a^{2}$

c) $\left(\dfrac{xe^{3x}}{ab}\right)\left(\dfrac{a^{2}b^{2}}{x^{2}e^{3x}}\right)=\dfrac{a^{2}b^{2}xe^{3x}}{abx^{2}e^{3x}}=abx^{-1}e^{0}=\dfrac{ab}{x}$

d) $\left(\dfrac{5xy}{3}\right)\left(\dfrac{x^{2}}{5x^{3}y^{3}}\right)=\dfrac{5x^{3}y}{15x^{3}y^{3}}=\dfrac{1}{3y^{2}}$

2) Reducir a su mínimo las expresiones siguientes.

a) $\left(\dfrac{3xy}{ab}\right)\left(\dfrac{a^{2}x^{2}}{24xy^{2}}\right)$

b) $\left(\dfrac{6xe^{5x}}{7}\right)\left(\dfrac{42}{x^{2}e^{2x}}\right)$

c) $\left(\dfrac{a^{2}b^{3}}{x^{2}y^{3}}\right)\left(\dfrac{a^{2}x^{3}y^{3}}{ab}\right)$

d) $\left(\frac{2xy10^{3x}}{5x^3y^2}\right)\left(\frac{a^5xy^2}{6x^3y^210^{2x}}\right)$

e) $\left(\frac{-ap^3x^2}{5a^2b^3}\right)\left(\frac{20a^4b^3p}{p^3q^3}\right)$

Las multiplicaciones pueden ser de más de dos factores, porque ésta no es binaria exclusivamente.

7.10 División de polinomios entre monomio

Se considera ahora la división de un polinomio entre un monomio. Con este fin, para obtener el cociente, se divide cada término del polinomio por el monomio. Para ilustrar más de una situación, se plantea el problema siguiente.

Obtener el cociente en su forma mínima de

a) $(5x^4y + 25x^3y + 125x^3y^4) \div (5x^2y)$

b) $(2\underline{x}^3y^3 + 6x^2y^2 + 18xy) \div (2xy)$

c) $(x^3 + 2x^2 + 3x + 6) \div (2x)$

d) $(e^{3x} + 3e^{2x} + 3e^x + 4) \div (e^x)$

e) $(x^2 + x + 1)^2 \div (x^2)$

f) $((ln\ x)^3 + (ln\ x)^2 + ln\ x + 1) \div (ln\ x)$

En cada caso, después de efectuar la división, el cociente en su forma mínima es:

a) $\frac{5x^4y + 25x^3y^2 + 125x^3y^4}{5x^2y} = \frac{5x^4y}{5x^2y} + \frac{25x^3y^2}{5x^2y} + \frac{125x^3y^4}{5x^2y} = x^2 + 5xy + 25xy^3$

b) $\frac{2x^3y^3 + 6x^2y^2 + 18xy}{2xy} = \frac{2x^3y^3}{2xy} + \frac{6x^2y^2}{2xy} + \frac{18xy}{2xy} = x^2y^2 + 3xy + 9$

c) $\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 6}{2x} = \frac{x^3}{2x} + \frac{2x^2}{2x} + \frac{2x}{2x} + \frac{6}{2x} = \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2} + \frac{3}{x}$

d) $\frac{e^{3x} + 3e^{2x} + 3e^x + 4}{e^x} = \frac{e^{3x}}{e^x} + \frac{3e^{2x}}{e^x} + \frac{3e^x}{e^x} + \frac{4}{e^x} = e^{2x} + 3e^x + 3 + \frac{4}{e^x}$

e) $\frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^2} = \frac{x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x}{x^2} = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x^2}$

$$= \frac{x^4}{x^2} + \frac{2x^3}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2x + 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

f) $\left(\frac{(lnx)^3 + (lnx)^2 + lnx + 1}{lnx}\right) = \frac{(lnx)^3}{lnx} + \frac{(lnx)^2}{lnx} + \frac{lnx}{lnx} + \frac{1}{lnx} = ln^2x + lnx + 1 + \frac{1}{lnx}$

Obtener el cociente en su forma mínima

a) $(5x^5y + 10x^4y^2 + 15x^3y^3 + 20x^2y^4 + 25xy^5) \div (5x^3y^3)$

b) $(2x^6y^6 + 4x^3y^3 + 6x^2y^2 + xy) \div (2x^3y^3)$

c) $(3x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 12x + 15) \div (3x^3)$

d) $(4e^{4x} + 8e^{3x} + 12e^{2x} + 20e^x + 24) \div (4e^{2x})$

e) $(2x^2 + x)^2 \div (2x^3)$

f) $(2x + 1)^3 \div (6x^2)$

g) $(ln^2x + 2)^2 \div 2lnx$

7.11 División de polinomios entre polinomios

Antes de dividir un polinomio por otro polinomio, se harán ciertas precisiones del grado de un término. Con relación a una letra, el grado de un término es el exponente de esa letra. Así, los términos $5x^2y^3$ y ax^5y^4 son de segundo y quinto grado en x mientras que de tercer y cuarto grado en y. El grado de un término también se define como la suma de los exponentes de dos o más letras. Por ejemplo, el grado del término $5x^2y^3$ en x e y es 5, mientras que el de ax^5y^4 en x e y es 9. El grado de un polinomio en x es el de su término que contiene el grado más alto de x.

Antes de abordar la división entre polinomios, se debe recordar este concepto. Con este propósito y en forma general, si p(x) es el dividendo, q(x) el divisor, c(x) el cociente y R el residuo. Entonces, de

$$p(x) = q(x)c(x) + R \qquad \begin{array}{r|l} & c(x) \\ \hline q(x) & p(x) \\ & R \end{array} \qquad \frac{p(x)}{q(x)} = c(x) = \frac{R}{q(x)}$$

Esta expresión es el algoritmo de la división y también se puede expresar como $\frac{p(x,y)}{q(x,y)} = c(x,y) = \frac{R}{q(x,y)}$, cuando p y q son funciones de dos variables.

En forma particular, el problema siguiente será el medio para mostrar el cómo de la división de un polinomio por otro.

Encontrar el residuo de las divisiones siguientes

a) $p(x, y) = x^3 + y^3$, $\quad q(x,y) = x^2 - xy + y^2$

b) $p(x, y) = 2x^3 + x^2y - 4xy^2 + 3y^3$, $\quad q(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$

c) $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 6$, $\quad q(x) = x - 2$

d) $p(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 8$, $\quad q(x) = x + 3$

e) $p(x) = x^5 + 3x^3 + x + 8$, $\quad q(x) = x + 4$

f) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 4$, $\quad q(x) = 2x + 3$

g) $p(x) = x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5$, $\quad q(x) = x^2 + x + 2$

Dependiendo del grado del divisor y del dividendo, el residuo puede ser cero o un número diferente de cero, un monomio o un polinomio o una división cuyo cociente es infinito. Antes de iniciar el proceso, tanto el dividendo como el divisor se deben ordenar conforme a potencias descendentes de una letra a propósito.

Luego de hacer la división en a), el residuo es cero, porque

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + y \\ \cline{2-2}
x^2 - xy + y^2 & x^3 + y^3 \\
 & -x^3 + x^2y - xy^2 \\ \cline{2-2}
 & 0 \quad x^2y - xy^2 + y^3 \\
 & \quad -x^2y + xy^2 - y^3 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 0 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

Recuerda que

1) Dividir variable de mayor grado

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$

2) Después multiplicar y cambiar signo

$$(x^2 - xy + y^2)(-x) = -x^3 + x^2y - xy^2$$

3) Sumar y reducir términos semejantes

4) Continuar la división con el siguiente término hasta agotar términos

$\frac{x^2y}{x^2} = y$

y el resultado se puede escribir como

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2} = x + y + \frac{0}{x^2 - xy + y^2}$$

Igual en b), es decir, el residuo es cero, porque

$x^2 - 2xy + y^2$	$2x^3 + x^2y - 4xy^2 + 3y^3$
$\frac{2x^3}{x^2} = 2x$	$-2x^3 + 2x^2y - 2xy^2$
$\frac{3x^2y}{x^2} = 3y$	$3x^2y - 6xy^2 + 3y^3$ $-3x^2y + 6xy^2 - 3y^3$
	0

y el resultado se puede expresar como

$$\frac{2x^3 + x^2y - 4xy^2 + 3y^3}{x^2 - 2xy + y^2} = 2x + 3y + \frac{0}{x^2 - 2xy + y^2}$$

En c) el residuo es -4, porque

$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 6$	$x - 2$
$-x^4 + 2x^3$	$\frac{x^4}{x} = x^3$
$0 - x^3 + 2x^2$ $x^3 - 2x^2$	$-\frac{x^3}{x} = -x^2$
$0 - 5x + 6$ $5x - 10$	$\frac{-5x}{x} = -5$
$0 - 4$	

y

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 6}{x - 2} = x^3 - x^2 - 5 - \frac{4}{x - 2}$$

En d) el residuo es 32, porque

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + x - 8 \\ \hline
x + 3 & x^3 + 4x^2 - 5x + 8 \\
 & -x^3 - 3x^2 \\ \hline
 & \quad 0 \qquad x^2 - 5x \\
 & \qquad\quad -x^2 - 3x \\ \hline
 & \qquad\qquad 0 \quad -8x + 8 \\
 & \qquad\qquad\qquad 8x + 24 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad\quad 32
\end{array}
$$

y

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 5x + 8}{x + 3} = x^2 + x - 8 + \frac{32}{x + 3}$$

En e) el residuo es – 1212, porque

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^4 - 4x^3 + 19x^2 - 76x + 305 \\ \hline
x + 4 & x^5 + 3x^3 + x + 8 \\
 & -x^5 - 4x^4 \\ \hline
 & \quad 0 - 4x^4 + 3x^3 \\
 & \qquad 4x^4 + 16x^3 \\ \hline
 & \qquad 0 \; + 19x^3 + 0x^2 \\
 & \qquad\quad -19x^3 - 76x^2 \\ \hline
 & \qquad\qquad -76x^2 + x \\
 & \qquad\qquad\quad 76x^2 + 304x \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 305x + 8 \\
 & \qquad\qquad\quad -305x + 1220 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 0 \qquad -1212
\end{array}
$$

ó

$x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 0x^2 + x + 8$	$x + 4$
$-x^5 - 4x^4$	$\frac{x^5}{x} = x^4$
$0 - 4x^4 + 3x^3$ $+ 4x^4 + 16x^3$	$\frac{-4x^4}{x} = -4x^3$
$0 + 19x^3 + 0x^2$ $19x^3 - 76x^2$	$\frac{19x^3}{x} = 19x^2$
$0 - 76x^2 + x$ $76x^2 + 304x$	$\frac{-76x^2}{x} = -76x$
$0 + 305x + 8$ $-305x - 1220$	$\frac{305x}{x} = 305$
-1212	

y

$$\frac{x^5+3x^3+x+8}{x+4}=x^4-4x^3+19x^2-76x+305-\frac{1212}{x+4}$$

En f) el residuo es –11/2, porque

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+0x+1/2 \\ \hline
2x+3 & 2x^3+3x^2+x-4 \\
 & -2x^3-3x^2 \\ \hline
 & \quad 0-0x^2+x \\
 & \quad 0x^2+0x \\ \hline
 & \quad\; 0\ +x-4 \\
 & \qquad\; -x-3/2 \\ \hline
 & \qquad\quad 0-11/2
\end{array}$$

ó

$2x^3+3x^2+x-4$	$2x+3$
$-2x^3-3x^2$	$\frac{2x^3}{2x}=x^2$
$0 \quad 0x^2+x$ $-0x^2-0x$	$\frac{0x^2}{2x}=0x$
$0+x-4$ $-x-3/2$	$\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$
$0-11/2$	

y

$$\frac{2x^3+3x^2+x-4}{3x+3}=x^2+\frac{1}{2}-\frac{11/2}{2x+3}$$

Finalmente, en g), el residuo es $11x-3$, porque

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3+3x^2-8x+4 \\ \hline
x^2+x+2 & x^5+4x^4-3x^3+2x^2-x+5 \\
 & -x^5-x^4-2x^3 \\ \hline
 & \;0+3x^4-5x^3+2x^2 \\
 & \quad -3x^4-3x^3+6x^2 \\ \hline
 & \qquad 0\ -8x^3-4x^2-x \\
 & \qquad\quad 8x^3+8x^2+16x \\ \hline
 & \qquad\qquad 4x^2+15x+5 \\
 & \qquad\qquad -4x^2-4x-8 \\ \hline
 & \qquad\qquad\; 0 \quad 11/2-3
\end{array}$$

ó

$x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5$	$x^2 + x + 2$
$-x^5 - x^4 - 2x^3$	$\frac{x^5}{x^2} = x^3$
$0 \quad 3x^4 - 5x^3 + 2x^2$ $-3x^4 - 3x^3 - 6x^2$	$\frac{3x^4}{x^2} = 3x^2$
$0 - 8x^3 - 4x^2 - x$ $8x^3 + 8x^2 + 16x$	$\frac{-8x^3}{x^2} = -8x$
$0 + 4x^2 + 15x + 5$ $-4x^2 - 4x - 8$	$\frac{4x^2}{x^2} = 4$
$0 + 11x - 3$	

y

$$\frac{x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 5}{x^2 + x + 2} = x^3 + 3x^2 - 8x + 4 + \frac{11x - 3}{x^2 + x + 2}$$

El residuo que se pide en el inciso c), es decir, el que se obtiene al dividir *p(x)* entre *q(x)*, se puede calcular acortando la operación. En efecto, esto se logra abreviando la división común, lo cual se consigue escribiendo solamente los coeficientes y dejando de lado las x. Después de hacerlo, el resultado es

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & 0 & -5 & \\ \hline
1\ -2 & 1 & -3 & 2 & -5 & 6 \\
 & -1 & 2 & & & \\ \hline
 & 0 & -1 & 2 & & \\
 & & 1 & -2 & & \\ \hline
 & & 0 & 0 & -5 & \\
 & & & 0 & 0 & \\ \hline
 & & & 0 & -5 & 6 \\
 & & & & 5 & -10 \\ \hline
 & & & & 0 & -4
\end{array}$$

Por medio de la regla de Ruffini, igualmente se calcula el residuo. Luego de aplicarla, se obtiene

$$\begin{array}{rrrrr|l}
1 & -3 & 2 & -5 & 6 & 2 \\
 & 2 & -2 & 0 & -10 & \\ \hline
1 & -1 & 0 & -5 & -4 &
\end{array}$$

A este arreglo también se le denomina división sintética. Debe notarse que no está explícito el proceso para llegar a esta regla.

Por último, el residuo puede calcularse precisamente por el teorema del residuo. Éste, sin demostrarse, se enuncia enseguida. Si p(x) se divide entre $x - r$, entonces p(r) es el resido, donde p(x) es un polinomio y r $\in$ R.

Muchas veces resulta más conveniente realizar la división que calcular p(r).

Consecuentemente, en el problema que nos ocupa

$$p(2) = 2^4 - 3(2^3) + 2(2^2) - 5(2) + 6$$

$$= 16 - 24 + 8 - 10 + 6 = -4$$

Tanto en la división sintética o regla de Ruffini como en el teorema del residuo, el divisor debe ser de la forma $x - r$. De otra manera la división sintética igual que el teorema no se puede aplicar.

Si el divisor tiene la forma $ax - b$, éste, para aplicar la división y el teorema, se ajusta, es decir, $ax - b = a(x - b/a)$

Con respecto a la letra x, si el grado del divisor es mayor que uno y el grado de p(x) es mayor o igual que el del divisor, el residuo ya no es un número, sino un binomio, un trinomio o un polinomio, dependiendo del grado de p(x) y q(x).

Por último, si p(x) es igual a una constante y q(x) es de primer grado en x. Entonces el cociente es una serie. Por ejemplo, si p(x) = 1 y q(x) = x + 1, entonces

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^2 + \cdots,$$

porque

$$\begin{array}{r|l}
\underline{1} & 1 + x \\ \cline{2-2}
-1 - x & 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \\ \hline
0 - x & \\
x + x^2 & \\ \hline
0 + x^2 & \\
-x^2 - x^3 & \\ \hline
0 - x^3 &
\end{array}$$

¿Qué concluye, si $p(x) = 1$ y $q(x) = 3x + 2$ ó si $p(x) = 1$ y $q(x) = x2 + x + 1$?

En el inciso d), aparte de que el residuo se calculó por división común, éste también se puede calcular por división abreviada, regla de Ruffini y por el teorema del residuo. Luego de realizarlo, el resultado es

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -8 & \\
\cline{2-5}
1\ \ 3 & 1 & 4 & -5 & 8 \\
 & -1 & -3 & & \\
\cline{2-5}
 & 0 & 1 & -5 & \\
 & & -1 & -3 & \\
\cline{2-5}
 & & 0 & -8 & 8 \\
 & & & 8 & 24 \\
\cline{2-5}
 & & & 0 & 32
\end{array}
$$

ó

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
1 & 4 & -5 & 8 & 1 & 3 & \\
\cline{5-7}
-1 & -3 & & & 1 & 1 & -8 \\
\hline
0 & 1 & -5 & & & & \\
 & -1 & -3 & & & & \\
\cline{1-4}
 & 0 & -8 & 8 & & & \\
 & & 8 & 24 & & & \\
\cline{1-4}
 & & 0 & 32 & & &
\end{array}
$$

$$p(-3) = (-3)^3 + 4(-3)^2 - 5(-3) + 8$$

$$= -27 + 36 + 15 + 8$$

$$= 32$$

En el inciso e), después de utilizar la división abreviada, regla de Ruffini y teorema del residuo, el residuo es

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -4 & 19 & -76 & 305 & \\
\cline{2-7}
1\ \ 4 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 8 \\
 & -1 & -4 & & & & \\
\cline{2-7}
 & 0 & -4 & 3 & & & \\
 & & 4 & 16 & & & \\
\cline{2-7}
 & & 0 & 19 & 0 & & \\
 & & & -19 & -76 & & \\
\cline{2-7}
 & & & 0 & -76 & 1 & \\
 & & & & 76 & 304 & \\
\cline{2-7}
 & & & & 0 & 305 & 8 \\
 & & & & 0 & -305 & -1220 \\
\cline{2-7}
 & & & & & 0 & -1212
\end{array}
$$

$$p(-4) = (-4)^5 + 3(-4)^3 + (-4) + 8$$

$$= -624 - 468 - 4 + 8 = -1212.$$

La división común ya fue utilizada para calcular el residuo en f), ahora se utilizará la división en la que se omiten las x y se escriben solo los coeficientes y ceros en los términos que falten. Después de hacer la división, el resultado es,

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 1/2 & \\ \hline
2\ \ 3 & 2 & 3 & 1 & -4 \\
 & -2 & -3 & & \\ \hline
 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & 0 & 0 & \\ \hline
 & & 0 & 1 & -4 \\
 & & & -1 & -3/2 \\ \hline
 & & & 0 & -11/2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
2 & 3 & 1 & -4 & 2 & 3 & \\ \cline{5-7}
-2 & -3 & & & 1 & 0 & 1/2 \\ \hline
0 & 0 & 1 & & & & \\
 & 0 & 0 & & & & \\ \hline
 & 0 & 1 & -4 & & & \\
 & & -1 & -3/2 & & & \\ \hline
 & & 0 & -11/2 & & &
\end{array}
$$

Para calcular el residuo por la regla de Ruffini o teorema del residuo, no se puede utilizar directamente $2x + 3$, es necesario expresar ésta como $2x + 3 = 2(x + 3/2)$ y $x - r = x - (-3/2)$, de modo que $r = -3/2$. Después de aplicar la regla de Ruffini, se obtiene

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & 3 & 1 & -4 & -3/2 \\ \cline{5-5}
 & -3 & 0 & -3/2 & 2 \\ \hline
2 & 0 & 1 & -11/2 &
\end{array}
$$

Donde $-11/2$ es el residuo y el coeficiente es

$$\frac{2x^2 + 0x + 1}{2} = x^2 + 1/2$$

De otra manera,

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + x - 4}{2x + 3} = \frac{2x^3 + 3x^2 + x - 4}{2\left(x + \frac{3}{2}\right)}$$

$$\frac{x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x - 2}{x + \frac{3}{2}}$$

Como $x - r = x - (-3/2)$, de modo que $r = -3/2$

Luego de aplicar la regla de Ruffini, se obtiene,

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{3}{2} \\ & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-11}{4} & \end{array}$$

Tal parece que el residuo no es el mismo, pero se sabe que

$$\frac{2x^3+3x^2+x-4}{2x+3} = \frac{x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x-2}{x+\frac{3}{2}} = x^2+\frac{1}{2}-\frac{11/4}{x+3/2}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(2x^3+3x^2+x-4)}{2x+3} = x^2+\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}11/2}{x+3/2}$$

$$\frac{2x^3+3x^2+x-4}{2x+3} = \frac{2x^3+3x^2+x-4}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} = x^2+\frac{1}{2}-\frac{11/2}{2(x+3/2)}$$

$$= \frac{2x^3+3x^2+x-4}{2x+3} = x^2+\frac{1}{2}-\frac{11/2}{2x+3}$$

Aunque el residuo pudo obtenerse multiplicando por 2, es decir, $-(11/4)(2) = -11/2$. El dos es porque este es el número que divide al número 3.

Finalmente, para aplicar el teorema del residuo se utiliza $-3/2$, porque $2x + 3 = 2(x + 3/2)$ y $x - r = x - (-3/2)$, de modo que $r = -3/2$. Luego,

$$p(-3/2) = 2(-3/2)^3 + 3(-3/2)^2 + (-3/2) - 4$$

$$= -2\left(\frac{27}{8}\right)+\frac{27}{4}-\frac{3}{2}-\frac{8}{2}$$

$$= -\frac{27}{4}+\frac{27}{4}-\frac{3}{2}-\frac{8}{2} = -\frac{11}{2}$$

En g) el residuo ya no es un número y la regla de Ruffini y el teorema del residuo ya no son aplicables, porque el divisor es una expresión de segundo grado. Aparte de aplicar la división común, se puede utilizar la división en la que solo se utilizan los coeficientes, es decir,

$$
\begin{array}{ccc|cccccc}
 & & & 1 & 3 & -8 & 4 & & \\
\cline{4-9}
1 & 1 & 2 & 1 & 4 & -3 & 2 & -1 & 5 \\
 & & & -1 & -1 & -2 & & & \\
\cline{4-7}
 & & & 0 & 3 & -5 & 2 & & \\
 & & & & -3 & -3 & -6 & & \\
\cline{5-8}
 & & & & 0 & -8 & -4 & -1 & \\
 & & & & & 8 & 8 & 16 & \\
\cline{6-9}
 & & & & & 0 & 4 & 15 & 5 \\
 & & & & & & -4 & -4 & -8 \\
\cline{7-9}
 & & & & & & 0 & 11 & -3
\end{array}
$$

ó

$$
\begin{array}{cccccc|l}
1 & 4 & -3 & 2 & -1 & 5 & 1\ \ 1\ \ 2 \\
\cline{7-7}
-1 & -1 & -2 & & & & 1\ \ 3\ \ -8\ \ 4 \\
\cline{1-3}
0 & 3 & -5 & 2 & & & \\
 & -3 & -3 & -6 & & & \\
\cline{2-4}
 & 0 & -8 & -4 & -1 & & \\
 & & 8 & 8 & 16 & & \\
\cline{3-5}
 & & 0 & 4 & 15 & 5 & \\
 & & & -4 & -4 & -8 & \\
\cline{4-6}
 & & & 0 & 11 & -3 &
\end{array}
$$

Determinar $p(x)/q(x) = c(x) + R/q(x)$, donde $p(x)$ es el dividendo, $q(x)$ el divisor y R el residuo

a) $p(x) = 3x^2 + 5x + 8$ $\quad$ $q(x) = x^2 + 2x + 5$

b) $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 7$ $\quad$ $q(x) = x^3 + 3x^2 + x + 2$

c) $p(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 2x - 7$ $\quad$ $q(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$

d) $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 8$ $\quad$ $q(x) = x - 2$

e) $p(x) = x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x + 3$ $\quad$ $q(x) = 3x + 2$

f) $p(x) = x^5 + 7x^4 - 3x^3 + x + 3$ $\quad$ $q(x) = x + 5$

g) $p(x) = x^6 - 3x^5 + x + 3$ $\quad$ $q(x) = 2x - 1$

h) $p(x) = x_1^n - x^n$ $\quad$ $q(x) = x_1 - x$

i) $p(x) = 2$ $\quad$ $q(x) = x - 3$

j) $p(x) = 1$ $\quad$ $q(x) = x + 1$

Capítulo 8

Factorización de expresiones

Antes de continuar con las propiedades de las fracciones o expresiones racionales, se revisará el proceso de descomponer en sus factores una expresión algebraica.

Si se multiplican dos o más factores, se obtiene una expresión algebraica y si se descompone una expresión algebraica en sus factores también se tiene una expresión. La descomposición en factores es completa si cada factor algebraico es un factor primo y éste es primo si no tiene factores no triviales. Todos los polinomios tienen descomposición en factores. El que un polinomio sea reducible o no, depende de la naturaleza de los coeficientes, esto significa, por ejemplo, que los complejos no pueden reducir en los reales y los irracionales en los racionales. Todo polinomio reducible es un producto de polinomios irreducibles. Todo polinomio lineal es irreducible. En la descomposición de una expresión algebraica en factores se invierte el proceso de formar tales expresiones.

La propiedad distributiva es importante en la descomposición de expresiones algebraicas en factores, como también lo es la propiedad asociativa y el concepto de expresión algebraica. ¿Cómo se descomponen en factores cada una de las expresiones siguientes? Antes de ver el cómo, inténtalo y factorizalas.

a) $a^2x + ab$

b) $ax^2 + xb$

c) $(ax/b) - (a^2/b)(y)$

d) $x^2 - xy + bx - by$

e) $x^3 + 4x^2 - 4x - 16$

f) $x^4y^2 + 2ab^2yx^2 + a^2b^4$

g) $e^{6x} - 2x^2y^2e^{3x} + x^4y^4$

h) $x^6e^{3x} - 3b^2x^4e^{2x} + 3b^4x^2e^x - b$

i) $x^6 + y^6$

j) $x^4 + (b^2 - c)x^2 - b^2c$

En cuanto a la descomposición, el concepto de factor común es tan importante como lo es el de producto. Estos conceptos juntos con la propiedad asociativa y distributiva son importantes en el proceso de factorización. En efecto, luego de factorizar la expresión dada en cada inciso, los resultados son:

a) $a^2x + ab = a\left(\frac{a^2b}{a} + \frac{ab}{a}\right) = a(ax + b)$.

b) $3a + 21ab^2 + 18a^2b = 3a\left(\frac{3a}{3a} + \frac{21ab^2}{3a} + \frac{18a^2b}{3a}\right) = 3a(1 + 7b^2 + 6ab)$.

c) $ax^2 + bx = x\left(\frac{ax^2}{x} + \frac{bx}{x}\right) = x(ax + b)$.

d) $\frac{ax}{b} - \frac{a^2y}{b} = \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}\,\frac{b}{a}\,x + \frac{a^2}{b}\,\frac{b}{a}\,y\right) = \frac{a}{b}(x - ay)$.

e) $x^2 - xy + bx - by = (x^2 - xy) + (bx - by) = x(x - y) + b(x - y)$, de donde

$x^2 - xy + bx - by = (x + y)(x - y)$

f) $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = x^2(x + 4) - 4(x + 4) = (x^2 - 4)(x + 4)$, de aquí que

$x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = (x + 2)(x - 2)(x + 4)$.

g) $x^4y^2 + 2ab^2yx^2 + a^2b^4 = (x^2y + ab^2)^2$

porque si $\sqrt{x^4y^2} = x^2$y, $\sqrt{(a^2b^4)} = ab^2y2(ab^2)(x^2y)$, entonces $(x^2y + ab^2)^2$

h) $e^6x - 2x^2y^2e^{3x} + x^4y^4 = (e^{3x} - x^2y^2)^2$ y porque si $\sqrt{(e^{6x})} = e^3$, $\sqrt{(x^4y^4)} = x^2y^2$ y $2(e^{3x})(x^2y^2)$, entonces $(e^{3x} - x^2y^2)^2$, porque si $\sqrt{(e^{6x})} = e^{3x}$, $\sqrt{(x^4y^4)} = x^2y^2$ y $2e^x(x^2y^2)$, entonces $(e^{3x} - x^2y^2)^2$.

El signo menos que antecede al término x^2y^2, se debe a la alternancia de signos en el trinomio, la cual comienza en el primer término con signo más.

i) $x^6e^{3x} - 3b^2x^4e^{2x} + 3b^4x^2e^x - b^6 = (x^2e^x - b^2)^2$, porque si $\sqrt[3]{x^6e^{3x}} = x^2e^x$ y $\sqrt[3]{b^6} = b^2$, $-3(x^2e^x)^2\,(x^2)$ y $3(b^2)^2(x^2e^x)$, entonces $(x^2e^x - b^2)^3$

El signo negativo de b^6, se debe a la alternancia de signos en el trinomio, el cual comienza con el signo más.

j) $x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$, porque si $\sqrt[3]{x^6} = x^2$ y $\sqrt[3]{y^6} = y^2$, entonces $(x^2 + y^2)(x^4xy^2 + y^4)$.

El signo menos que antecede a x^2y2, hace posible que los términos entre x^6 y y^6, se cancelen.

k) $x^4 + (b^2 - c)x^2 - b^2c = (x^2 + b^2)(x^2 - c)$, porque si $\sqrt{x^4} = x^2$, se cumple la suma $(b^2 - c)$ y el producto $(-b^2c)$, entonces $(x^2 + b^2\ )(x^2 - c)$.

l) $x^2 + 3x - 10 = x^2 + (5 - 2)x - 10 = (x + 5)(x - 2)$, porque, si

$\sqrt{x^2} = x$, $(5 - 3) = 2$ y $(-2)(5)$, entonces $(x + 5)(x - 2)$.

m) $x^2 + 8x + 15 = x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$, porque si $\sqrt{x^2} = x$, $(5+ 3) = 8$ y $(5)(3) = 15$, entonces $(x + 5)(x + 3)$.

Después de factorizar cada término del binomio escrito en a), se nota que hay un factor común, a. Este factor común es divisor de cada término y se escribe antecediendo a un paréntesis y dentro de éste se escribe el cociente de dividir cada término del binomio entre el factor común. Este factor es tal que al multiplicarlo por cada término que está en el paréntesis se obtiene el binomio que se factoró.

En b), el monomio que divide a cada término del trinomio es $3a$, por lo que éste es el factor común. Consecuentemente, $3a$ se escribe como coeficiente de un paréntesis y dentro se ponen los cocientes de dividir cada término por el factor común.

En d), el factor común es a/b.

El factor común está en todos los términos de la expresión algebraica y se toma con su menor exponente.

En e), la factorización es por agrupamiento. Puede notarse que los dos primeros términos tienen el factor común x y los dos últimos el factor común b. Los términos se agruparon de tal manera que éstos tuvieran un factor común y que después de sacar a éste de cada grupo, las expresiones que quedaran dentro de los paréntesis fueran diferentes. Así ocurrió.

En f), la descomposición se hizo igual que en e), por agrupación, pero al final apareció un binomio conjugado, el cual también se factorizó.

En g), la expresión algebraica corresponde a un trinomio cuadrado perfecto, es decir, el que corresponde a la potencia cuadrada de un binomio, o sea $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, porque si $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{b^2}$ y $2ab$, entonces $(a + b)^2$.

En h), el trinomio corresponde a la potencia cuadrada de $(a - b)$, esto es, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, porque si $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{b^2} = b$ y $2ab$, entonces $(a - b)^2$. El signo menos de b, tiene relación con la alternancia de signos en el trinomio, ésta comienza en el primer término con signo más.

En i), el polinomio corresponde a la potencia cúbica de $(a - b)$, es decir, $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, porque si $\sqrt[3]{a^3} = a$ y $\sqrt[3]{b^3} = b$; y entonces $(a - b)^3$. El signo menos que antecede a b^3, tiene relación con la alternancia de los signos del polinomio, la cual comienza en el primer término con el signo más.

En j), el binomio corresponde al producto $(a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$, porque si $\sqrt[3]{a^3} = a$ y $\sqrt[3]{b^3} = b$; y entonces $(a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2)$. La alternancia de signos en el trinomio cuadrado, comenzando con más, permite eliminar los términos que aparecen entre a^3 y b^3.

En k), la expresión algebraica tiene relación con el producto de dos binomios que tienen un término en común y de signos contrarios, o sea $(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$.

En l), el trinomio tiene relación con $(x + b)(x - c) = x^2 + (b - c)x - bc$, porque si $\sqrt{x^2} = x$, $(b - c)$ y $(-bc)$, entonces, $(x + b)(x - c)$.

En m), el trinomio tiene relación con $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$, porque si $\sqrt{x^2} = x$, se cumple $(a + b)$ y ab, entonces $(x + a)(x + b)$.

Descomponer en factores las expresiones algebraicas siguientes (factorizar)

a) $x^2(a + b) - y^2(a + b)$

b) $x^3(y - z) - y^3(y - z)$

c) $y^2(x^2 - 1) - x^2(x^2 - 1)$

d) $(2x - 1)(y - x) + (x + 3)(y - x)$

e) $(a^2 + b^2 - 2)(x^2 + 2) - x^2 - 2$

f) $(2 + a)(x - y) + (3 + b)(x - y) + (2a + 3b)(x - y)$

g) $3ax - ay - 3bx + by$

h) $2xy - xz - 2y^2 - yz$

i) $9x^2 - y^2$

j) $p^3q^3 - r^3s^3$

k) $4x^2 + y^4 + z^6 + 4xy^2 + 4xz^3 + 2y^2z^3$

l) $e^{6x} + 2xe^{3x} + x^2$

m) $a^2b^2 - 2abp + p^2$

n) $27x^3 + 9x^2e^{3x} + 9xe^{6x} + e^{9x}$

o) $y^6 - 3y^4e^x + 3y^2e^{2x} - e^{2x}$

p) $(x - a)^4 - 8(x - a)^2 + 16$

q) $(y - b)^6 + 2(y - b)^3 + e^{2x}$

r) $(x - 3)^4 + 4(x - 3)^2 - 5$

s) $(x + 2)^6 + 10(x + 2)^3 + 2$

Escribir los polinomios siguientes en factores irreducibles

a) $p(x) = (x^2 - 4)(x + 1)(x^2 + 3x + 2)$

b) $p(x) = (x^2 - 6x + 9)(x^2 + 5x + 6)(x + 3)$

c) $p(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 10x + 25)(x + 5)(x^2 + 9x + 14)$

d) $p(x) = (x + 1)(x^2 + 14x + 49)(x^2 - 10x + 25)$

e) $p(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 4x + 3)(x^2 - 1)$

Antes de escribir los polinomios en factores irreducibles, se debe recordar que los factores lineales son irreducibles y que también son irreducibles por no pertenecer al campo en que se está trabajando.

La forma de cada polinomio factorizado es:

a) $p(x) = (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x + 1)(x + 2) = (x + 2)^2(x + 1)^2(x - 2).$

b) $p(x) = (x - 3)^2(x + 3)(x + 2)(x + 3) = (x - 3)^2(x + 3)^2(x + 2).$

c) $p(x) = (x^2 + 1)(x + 5)^3(x + 2)(x + 7)$, $(x^2 + 1) no \in R.$

d) $p(x) = (x + 1)(x + 7)^2(x - 5)^2.$

e) $p(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$

$= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)^2(x + 3)(x - 1),$

$(x^2 + x + 1) no \in R.$

Descomponer los polinomios dados en factores irreducibles

f) $p(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 6x + 9)$

g) $p(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 7x + 6)$

h) $p(x) = (x^2 + 5x + 4)(x^2 - 1)(x^2 + 8x + 7)$

i) $p(x) = (x^2 + 9x + 14)(x^2 + 14x + 49)$

j) $p(x) = (x^2 + 6x + 5)(x^2 - 6x + 9)$

8.1 Simplificación de fracciones

Si a, b y $k \in$ R, tal que $a/b = a/b$, entonces $ak/bk = a/b$. Igualmente, si a, b y $k \in$ R, tal que $ak/bk = a/b$, entonces $a/b = a/b$.

Estas dos proposiciones son fundamentales para simplificar fracciones, tanto aritméticas como algebraicas. Para simplificar o reducir fracciones a su forma mínima, se descomponen tanto numerador como denominador en sus factores primos respectivos y se cancelan los términos semejantes.

Cada expresión dada, ¿cómo se reduce a sus términos más simples o mínimos?

a) $\dfrac{36a^3 3x^2 y}{6ax^4 y^3}$

b) $\dfrac{a^2x^3 - a^2y^3}{ax - ay}$

c) $\dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 8x + 15}$

d) $\dfrac{a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 - b^2y^2}{ax - ay - bx - by}$

e) $\dfrac{4x^2 + 16x + 15}{2x^2 + 11x + 12}$

f) $\dfrac{9x^2 + 27x + 20}{3x^2 + 14x + 15}$

g) $\dfrac{2x^2 + 7x + 6}{3x^2 + 8x + 4}$

h) $\dfrac{4x^2 + 8x + 3}{4x^2 + 12x + 5}$

i) $\dfrac{16x^2 + 32x + 15}{16x^2 - 9}$

Para reducir cada expresión dada a sus términos más simples, se procede conforme a lo dicho en el párrafo anterior. Luego de hacerlo, se obtiene,

a) $\frac{36a^3 3x^2y}{6ax^4y^3} = \frac{6 \cdot 6 \cdot a \cdot a^2 \cdot x^2y}{6 \cdot a \cdot x^2x^2 \cdot y \cdot y^2} = \frac{6a^2}{x^2y^2}$

b) $\frac{a^2x^3 - a^2y^3}{ax - ay} = \frac{a^2(x^3 - y^3)}{a(x - y)} = \frac{a \cdot a(x - y)(x^2 + \mathrm{xy} + y^2)}{a(x - y)} = a(x^2 + xy + y^2)$

c) $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 8x + 15} = \frac{(x - 4)(x + 3)}{(x + 3)(x + 5)} = \frac{x - 4}{x + 5}$

d) $\frac{a^2x^2 - a^2y^2 - b^2x^2 - b^2y^2}{ax - ay - bx - by} = \frac{a^2(x^2 - y^2) - b^2(x^2 - y^2)}{a(x - y) - b(x - y)} = \frac{(a^2 - b^2)(x^2 - y^2)}{(a - b)(x - y)}$

$= \frac{(a + b)(a - b)(x + y)(x - y)}{(a - b)(x - y)} = (a + b)(x + y)$

e) $\frac{4x^2 + 16x + 15}{2x^2 + 11x + 12} = \frac{(2x^2) + 16x + 15}{2\left(\frac{2x^2 + 11x + 12}{2}\right)}$ $\quad k = 2x, \quad x = k/2$

$= \frac{k^2 + 16\frac{k}{2} + 15}{\frac{4x^2 + 11(2x) + 12}{2}} = \frac{k^2 + 8k + 15}{\frac{(2x + 8)(2x + 3)}{2}} = \frac{(k + 5)(k + 3)}{\frac{(2x + 8)(2x + 3)}{2}} = \frac{(2x + 5)(2x + 3)}{\frac{2(x + 4)(2x + 3)}{2}} = \frac{2x + 5}{x + 4}$

f) $\frac{9x^2 + 27x + 20}{3x^2 + 14x + 15} = \frac{(3x^2) + 27x + 20}{\frac{2x^2 + 3(14x) + 45}{3}}$ $\quad k = 3x, \quad x = k/3$

$= \frac{k^2 + 27(k/3) + 20}{\frac{9x^2 + 3(14x) + 45}{3}} = \frac{k^2 + 9k + 20}{\frac{(3x + 9)(3x + 5)}{3}} = \frac{(k + 4)(k + 5)}{(x + 3)(3x + 5)} = \frac{(3x + 4)(3x + 5)}{x + 3(3x + 5)} = \frac{3x + 4}{x + 3}$

Reducir cada expresión a sus términos más simples

a) $\frac{12a^3x^2y^3z^4}{24ax^5y^2z^4}$

b) $\frac{x^6y^6 - a^3b^3}{x^2y^2 - ab}$

c) $\frac{(x + 1)(x^2 + 7\mathrm{x} + 12)(x^2 + 2x - 15)}{(2x + 2)(x^2 + 5x + 6)(x^2 - 2x - 3)}$

d) $\frac{(2x^2 + 3x + 1)(9x^2 + 18x + 5)}{(x^2 + 3x + 2)(3x^2 + 11x + 10)}$

e) $\frac{(x^2 + 8x + 15)(x^2 + 9x + 18)}{(x^2 + 5x + 6)(x^2 + 8x + 12)}$

f) $\frac{a^2(2x - 1) - 2x + 1}{ab + b}$

g) $\frac{ax + bx - ay - by}{x^2 - y^2}$

h) $\dfrac{t^6 - 1}{t^4 + t^2 + 1}$

i) $\dfrac{t^4 - 16}{t^3 + 8}$

j) $\dfrac{t^4 - 16}{t^3 - 8}$

k) $\dfrac{x \ln x + 3x - y \ln x - 3y}{x^2 + xy}$

l) $\dfrac{x^2 e^{2x} - x^2 - y^2 e^{2x} + y^2}{(x + y)(e^{-x} + 1)}$

8.2 Adición de fracciones

Al sumar fracciones numéricas, se obtendrá una fracción también numérica, la cual es un número. La suma puede ser, después de simplificarla, una fracción propia o impropia. En cambio, si se suman fracciones algebraicas, la suma puede ser, luego de simplificarla, una fracción propia o impropia.

La adición de fracciones es una operación útil para reducir y simplificar expresiones, con lo cual se incide en la comprensión y manejo de otros conceptos matemáticos.

Tomando en cuenta tus conocimientos previos ¿en qué conceptos, procedimientos y propiedades relacionadas con esta operación te apoyarías para resolver el problema siguiente?

¿Cómo reduces a su forma mínima cada una de las expresiones dadas?

a) $\dfrac{3x^2}{x + 2} + \dfrac{9x + 6}{x + 2}$

b) $\dfrac{ax}{x^2 - 1} + \dfrac{a}{1 - x^2}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2 + x - 6} + \dfrac{3x}{x^2 + x - 6}$

d) $\dfrac{1}{x^2 - x - 2} + \dfrac{3}{x^3 + 2x^2 - x}$

e) $\dfrac{x}{x^2 - 6x + 9} + \dfrac{3}{x^2 - 6x + 9} + \dfrac{5}{x^2 + x - 12}$

f) $\dfrac{5x - 1}{10 - x} + \dfrac{x + 5}{3x - 30}$

g) $\dfrac{2xy + y^2}{x^3 - y^3} + \dfrac{x}{x^2 + xy + y^2}$

h) $\dfrac{3}{x^2+4x+3}+\dfrac{3}{x^2+5x+4}$

i) $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{a}{a+2}+\dfrac{a}{a+3}$

Después de haber llegado a una conclusión, leer lo siguiente.

Si a, b y d $\in$ R, entonces $a/d + b/d = (a+b)/d$ y

Si a, b, c y d $\in$ R, entonces

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ab+bc}{bc}$$

son dos propiedades útiles para sumar fracciones algebraicas, como puede observarse, en la primera, el denominador de cada fracción es el mismo, mientras que en la segunda es diferente. Estas proposiciones ya fueron demostradas. En lugar de sumar fracciones positivas, igualmente, se pueden sumar fracciones negativas.

Para sumar fracciones con el mismo denominador, según puede observar, se suman algebraicamente los numeradores y se deja en la fracción que se forma el denominador común. Ahora, para sumar fracciones que no tengan el mismo denominador, se debe observar la segunda proposición, es decir, primero, se obtiene el mínimo común denominador (m.c.d.) y, segundo, éste se divide entre cada uno de los denominadores y se multiplica también por cada uno de los numeradores y se suman algebraicamente. El mínimo común denominador (m.c.d.) de los denominadores de las fracciones dadas es un polinomio de grado mínimo divisible entre cada uno de los denominadores. Para determinar el mínimo común denominador, primero se factoriza en sus factores primos cada uno de los denominadores. Enseguida, se escribe el mínimo común denominador, el cual es un producto formado por cada uno de los diferentes factores primos de los denominadores y luego se eleva cada factor a la mayor potencia con la que aparezca en alguno de los denominadores factorizados.

El m.c.d., no puede tener un factor que no aparezca en alguno de los denominadores.

Con esta información, cada expresión dada en los incisos se reduce a su forma mínima. Después de hacerlo, el resultado es

a) $\dfrac{3x^2}{x+2}+\dfrac{9x+6}{x+2}=\dfrac{3x^2+9x+6}{x+2}$

$$\frac{3(x^2+3x+2)}{x+2}=\frac{3(x+2)(x+2)}{x+2}=3(x+1)$$

b) $\dfrac{ax}{x^2-1}+\dfrac{a}{1-x^2}=\dfrac{ax}{x^2-1}+\dfrac{a}{x^2-1}$

$$\frac{ax+a}{x^2-1}=\frac{a(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{a}{x-1}$$

c) $\dfrac{x^2}{x^2+x-6}+\dfrac{3x}{x^2+x-6}=\dfrac{x^2+3x}{x^2+x-6}$

$=\dfrac{x(x+3)}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{x}{x-2}$

d) $\dfrac{1}{x^2-x-2}+\dfrac{3}{x^3+2x^2-x}=\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}+\dfrac{2}{x(x^2+2x+1)}$

$=\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}+\dfrac{1}{x(x+1)^2}=\dfrac{x(x+1)+3(x-2)}{x(x-2)(x+1)^2}$

$=\dfrac{x^2+x+3x-6}{x(x-2)(x+1)^2}=\dfrac{x^2+4x-6}{x(x-2)(x+1)^2}$

e) $\dfrac{x}{x^2-6x+9}+\dfrac{3}{x^2-6x+9}+\dfrac{5}{x^2+x-12}$

$=\dfrac{x}{(x-3)^2}-\dfrac{3}{(x-3)^2}+\dfrac{5}{(x+4)(x-3)}$

$=\dfrac{x(x+4)-3(x+4)+5(x-3)}{(x+4)(x-3)^2}$

$=\dfrac{(x-3)(x+4)+5(x-3)}{(x+4)(x-3)^2}=\dfrac{(x-3)[(x+4)+5]}{(x+4)(x-3)(x-3)}$

$=\dfrac{x+4+5}{(x+4)(x-3)}+\dfrac{x+9}{x^3+x^2-12}$

f) $\dfrac{5x-1}{10-x}+\dfrac{x+5}{3x-30}=\dfrac{5x-1}{10-x}+\dfrac{x+5}{3(10-x)}$

$=\dfrac{3(5x)-1+x+5}{3(10-x)}=\dfrac{15x-3+x-5}{3(10-x)}=\dfrac{16x-2}{3(10-x)}=\dfrac{2(8x+2)}{3(x-10)}$

g) $\dfrac{2xy+y^2}{x^3-y^3}+\dfrac{x}{x^2+xy+y^2}=\dfrac{2xy+y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}+\dfrac{x}{x^2+xy+y^2}$

$=\dfrac{2xy+y^2+x(x-y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\dfrac{2xy+y^2+x^2-xy}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

$=\dfrac{x^2+xy+y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\dfrac{1}{x-y}$

h) $\dfrac{3}{x^2+4x+3}+\dfrac{3}{x^2+5x+4}=\dfrac{3}{(x+3)(x+1)}+\dfrac{3}{(x+4)(x+1)}$

$=\dfrac{3(x+4)+3(x+3)}{(x+3)(x+4)(x+1)}=\dfrac{3x+12+3x+9}{(x+3)(x+4)(x+1)}=\dfrac{6x+21}{(x+3)(x+4)(x+1)}$

i) $\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{a}{a+2}-\dfrac{a}{a+3}$

$$=\frac{a(a+2)(a+3)+a(a+1)(a+3)-a(a+1)(a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$

$$=\frac{a(a^2+5a+6)+a(a^2+4a+3)-a(a^2+3a+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$

$$=\frac{a^3+5a^2+6a+a^3+4a^2+3a-a^3-3a^2-2a}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$

$$=\frac{2a^2+4a+a^3+4a^2+3a}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{a^3+6a^2+7a}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{a(a^2+6a+7)}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$

Reducir a su forma mínima la expresión dada

a) $\dfrac{2x+3}{x-2}+\dfrac{5x+3}{x-2}$

b) $\dfrac{2x}{x+3}+\dfrac{6}{x+3}$

c) $\dfrac{3x}{x-5}+\dfrac{5x-2}{x-5}+\dfrac{2x+1}{x-5}$

d) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{5}{x-3}$

e) $\dfrac{1}{x^2+2x+1}+\dfrac{2}{x^2+3x+2}+\dfrac{3}{x^2+4x+3}$

f) $\dfrac{x^2}{x+y}-x+y$

g) $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}-x$

h) $\dfrac{p^2}{q}-\dfrac{q^2}{p}$

i) $\dfrac{a}{ab-ax-by+bx}+\dfrac{5}{b-x}+\dfrac{7}{a-b}$

j) $\dfrac{3t+1}{4t-4}+\dfrac{5-t}{t^2-3t-4}$

k) $\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{6}{(x+1)^2}+\dfrac{7}{(x+1)^3}$

l) $\dfrac{5x+4}{x^2+2x+5}+\dfrac{6x+7}{(x^2+2x-5)^2}$

8.3 Fracciones complejas

Hasta aquí las fracciones consideradas han sido simples, es decir, de la forma (a/b), pero hay otras que tienen la forma $\frac{a/b}{c}$, $\frac{a}{b/c}$, ó a/b / c/d, y a las que se les denomina complejas. Precisando, una fracción compleja es una fracción que contiene una o más fracciones en su numerador o denominador, o en ambos. Estas fracciones se pueden transformar a fracciones simples.

Sí a, b, c y $d \in R$, entonces

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Esta proposición, ya demostrada, constituye un procedimiento útil para convertir fracciones complejas a simples.

Para continuar con las fracciones complejas, se formula el siguiente problema.

Reducir cada fracción a su forma más simple

a) $\dfrac{20x^4x}{12xy^4} \div \dfrac{9x^2y}{4x^3y^3}$

b) $\dfrac{pq^4}{q^3r} \div \dfrac{5}{q^2r^3}$

c) $\dfrac{2a^2b^3}{6a^3b} \div a^2d$

d) $\dfrac{y^2 - y - 6}{y^2 - y - 2} \div \dfrac{y^2 + 3y + 2}{y^2 - 2y - 3}$

e) $\dfrac{x^2}{y} \div \dfrac{x}{y^3}$

f) $\dfrac{2x - 2y}{a + b} \div \dfrac{x^2 - y^2}{a^2 - b^2}$

g) $\dfrac{3x^2 + 11x + 6}{a^2 - a - 6} \div \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{a^2 - a - 6}$

h) $\dfrac{p + q}{3p} \div \dfrac{p^2 + 2pq + q^2}{6p}$

i) $\dfrac{\frac{p}{q} - k}{\frac{p}{q} + k}$

j) $$\dfrac{\dfrac{p^2}{q^2}-1}{\dfrac{p}{q}+1}$$

k) $$\dfrac{\dfrac{x-y}{x+y}-\dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{1}{x-1}}$$

8.4 Comparativa entre procedimientos alternos

Otro procedimiento para convertir fracciones complejas a simple, consiste en multiplicar el numerador y denominador por el mínimo común denominador (m.c.d.) de cada una de las fracciones.

Se nota que en el primer procedimiento, la multiplicación es un elemento importante y en el segundo el mínimo común denominador.

Con esta información, se reduce a la forma más simple cada una de las expresiones propuestas en el problema dado anteriormente. Tomando como base los problemas propuestos en la sección anterior, y esperando que las respuestas obtenidas por ti coincidan con las aquí mostradas, pasemos a revisar los procedimientos y resultados por separado.

$$\frac{\dfrac{20x^4y}{12xy^4}}{\dfrac{9x^2y}{4x^3y^3}}=\frac{20x^4y}{12xy^4}\div\frac{9x^2y}{4x^3y^3}=\frac{20x^4y}{12xy^4}\cdot\frac{4x^3y^3}{9x^2y}$$

$$=\frac{2^2\cdot 5\cdot 2^2x^7y^4}{2^2\cdot 3\cdot 3^2x^3y^5}=\left(\frac{2^2x^3y^4}{2^2x^3y^4}\right)\left(\frac{20x^4}{27y}\right)=\frac{20x^4}{27y}$$

Solución al problema a) Procedimiento I.

$$\frac{pq^4}{q^3r}\div\frac{5}{q^2r^3}=\frac{pq^4}{q^3r}\cdot\frac{q^2r^3}{5}=\frac{pq^6r^3}{5q^3r}=\left(\frac{q^2r^3}{q^2r^3}\right)\left(\frac{pq^3r^2}{5}\right)=\frac{pq^3r^2}{5}$$

Solución al problema c) Procedimiento I.

$$\frac{2a^2b^3}{6a^3b}\div a^2d=\frac{2a^2b^3}{6a^3b}\cdot\frac{1}{a^2d}=\frac{2a^2b^3}{2\cdot 3a^5bd}=\left(\frac{2a^2b}{2a^2b}\right)\left(\frac{b^2}{3a^3d}\right)=\frac{b^2}{3a^3d}$$

Solución al problema d) Procedimiento I.

$$\frac{y^2-y-6}{y^2-y-2} \div \frac{y^2+3y+2}{y^2-2y-3} = \frac{y^2-y-6}{y^2-y-2} \cdot \frac{y^2-2y-3}{y^2+3y+2}$$

$$= \frac{(y-3)(y+2)(y-3)(y+1)}{(y-2)(y+1)(y+2)(y+1)} = \frac{(y-3)(y-3)}{(y-2)(y+1)}$$

Solución al problema e) Procedimiento I.

$$\frac{x^2}{y} \div \frac{x}{y^3} = \frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^3}{x} = xy^2$$

Solución al problema f) Procedimiento I.

$$\frac{2x-2y}{a+b} \div \frac{x^2-y^2}{a^2-b^2} = \frac{2x-2y}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{x^2-y^2} = \frac{2(x-y)(a^2-b^2)}{(a+b)(x^2-y^2)}$$

$$= \frac{2(x-y)(a+b)(a-b)}{(a+b)(x+y)(x-y)} = \frac{2(a-b)}{x+y}$$

Solución al problema g) Procedimiento I.

$$\frac{3x^2+11x+6}{a^2-a-6} \div \frac{2x^2+7x+3}{a^2-a-6} = \frac{3x^2+11x+6}{a^2-a-6} \div \frac{a^2-a-6}{2x^2+7x+3}$$

$$= \frac{\frac{9x^2+11(3x)+18}{3}}{(a-3)(a+2)} = \frac{(a-3)(a+2)}{\frac{4x^2+7(2x)+6}{2}}$$

$$= \frac{\frac{(3x+9)(3x+2)}{3}}{(a-3)(a+2)} = \frac{(a-3)(a+2)}{\frac{(2x+6)(2x+1)}{2}}$$

$$= \frac{(x+3)(3x+2)(a-3)(a+2)}{(a-3)(a+2)(x+3)(2x+1)} = \frac{3x+2}{2x+1}$$

Solución al problema h) Procedimiento I.

$$\frac{p+q}{3p} \div \frac{p^2+2pq+q^2}{6p} = \frac{p+q}{3p} \div \frac{6p}{(p+q)^2}$$

$$= \frac{3 \cdot 2}{3} \cdot \frac{(p)(p+q)}{p(p+q)^2}$$

$$= \frac{3}{3} \cdot \frac{(p)(p+q)}{p(p+q)}\left(\frac{2}{p+q}\right) = \frac{2}{p+q}$$

Solución al problema i) Procedimiento I.

$$\frac{\frac{p}{q}-k}{\frac{p}{q}+k}=\frac{\frac{p-kq}{q}}{\frac{p+kq}{q}}=\frac{p-kq}{q}\cdot\frac{q}{p+kq}=\frac{p-kq}{p+kq}$$

Solución al problema j) Procedimiento I.

$$\frac{\frac{p^2}{q^2}-1}{\frac{p}{q}+1}=\frac{\frac{p^2-q^2}{q^2}}{\frac{p+q}{q}}=\frac{p^2-q^2}{q^2}\frac{q}{p+q}=\frac{(p+q)(p-q)q}{(p+q)\cdot q\cdot q}=\frac{p-q}{q}$$

Solución al problema k) Procedimiento I.

$$\frac{\frac{x-y}{x+y}-\frac{1}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y}-\frac{1}{x-1}}=\frac{\frac{x-y-1}{x+y}}{\frac{x+y-1}{x-y}}=\frac{x-y-1}{x+y}\frac{x-y}{x+y-1}$$

$$=\frac{(x-y-1)(x-y)}{(x+y-1)(x+y)}$$

Solución al problema a) Procedimiento II.

$$\frac{\frac{20x^4y}{12xy^4}}{\frac{9x^2y}{4x^3y^3}}=\frac{\frac{20x^4y}{12xy^4}(12x^3y^4)}{\frac{9x^2y}{4x^3y^3}(12x^3y^4)}=\frac{20x^6}{27x^2y}=\frac{20x^4}{27y}$$

Solución al problema b) Procedimiento II.

$$\frac{\frac{pq^4}{q^3r}}{\frac{5}{q^2r^3}}=\frac{\frac{pq^4}{q^3r}(q^3r^3)}{\frac{5}{q^2r^3}(q^3r^3)}=\frac{pq^4r^2}{5q}=\frac{pq^3r^2}{5}$$

Solución al problema c) Procedimiento II.

$$\frac{\frac{2a^2b^3}{6a^3b}}{\frac{a^2d}{1}}=\frac{\frac{2a^2b^3}{6a^3b}(6a^3b)}{a^2d(6a^3b)}=\frac{2a^2b^3}{6a^3bd}=\frac{b^2}{3a^3d}$$

Solución al problema d) Procedimiento II.

$$\frac{\dfrac{y^2-y-6}{y^2-y-2}}{\dfrac{y^2+3y+2}{y^2-2y-3}}=\frac{\dfrac{(y-3)(y+2)}{(y+1)(y-2)}\cdot(y-3)(y-2)(y+1)}{\dfrac{(y+2)(y+1)}{(y-3)(y+1)}\cdot(y-3)(y-2)(y+1)}$$

$$=\frac{(y-3)(y+2)(y-3)}{(y+2)(y+1)(y-2)}=\frac{(y-3)(y-3)}{(y+1)(y-2)}$$

Solución al problema e) Procedimiento II.

$$\frac{\dfrac{x^2}{y}}{\dfrac{x}{y^3}}=\frac{\dfrac{x^2}{y}\cdot(y^3)}{\dfrac{x}{y^3}\cdot(y^3)}=\frac{x^2y^2}{x}=xy^2$$

Solución al problema f) Procedimiento II.

$$\frac{\dfrac{2x-2y}{a+b}}{\dfrac{x^2-y^2}{a^2-b^2}}=\frac{\dfrac{2x-2y}{a+b}\cdot(a+b)(a-b)}{\dfrac{x^2-y^2}{(a+b)(a-b)}\cdot(a+b)(a-b)}$$

$$=\frac{2(x-y)(a-b)}{x^2-y^2}=\frac{2(x-y)(a-b)}{(x+y)(x-y)}=\frac{2(a-b)}{x+y}$$

Solución al problema g) Procedimiento II.

$$\frac{\dfrac{3x^2+11x+6}{a^2-a-6}}{\dfrac{2x^2+7x+3}{a^2-a-6}}=\frac{\dfrac{3x^2+11x+6}{a^2-a-6}\cdot(a^2-a-6)}{\dfrac{2x^2+7x+3}{a^2-a-6}\cdot(a^2-a-6)}$$

$$\frac{3x^2+11x+6}{2x^2+7x+3}=\frac{(x+3)(3x+2)}{(x+3)(2x+1)}=\frac{3x+2}{2x+1}$$

Solución al problema h) Procedimiento II.

$$\frac{\dfrac{p+q}{3p}}{\dfrac{p^2+2pq+q^2}{6p}}=\frac{\dfrac{p+q}{3p}\cdot(6p)}{\dfrac{(p+q)^2}{6p}\cdot(6p)}$$

$$=\frac{2(p+q)}{(p+q)^2}=\frac{2}{p+q}$$

Solución al problema i) Procedimiento II.

$$\frac{\frac{p}{q}-k}{\frac{p}{q}+k}=\frac{\left(\frac{p}{q}-k\right)\cdot(q)}{\left(\frac{p}{q}+k\right)\cdot(q)}=\frac{p-kq}{p+kq}$$

Solución al problema j) Procedimiento II

$$\frac{\frac{p^2}{q^2}-1}{\frac{p}{q}+1}=\frac{\left(\frac{p^2}{q^2}-1\right)\cdot(q^2)}{\left(\frac{p}{q}+1\right)\cdot(q^2)}=\frac{p^2-q^2}{p+q}=\frac{(p+q)(p-q)}{q(p+q)}=\frac{p-q}{q}$$

Solución al problema k) Procedimiento II

$$\frac{\frac{x-y}{x+y}-\frac{1}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y}-\frac{1}{x-1}}=\frac{\left(\frac{x-y}{x+y}-\frac{1}{x+y}\right)\cdot(x+y)(x-y)}{\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{(x-y)(x-y)-(x-y)}{(x+y)(x+y)-(x+y)}=\frac{(x-y)(x-y-1)}{(x+y)(x+y-1)}$$

8.5 Problemas de reafirmación

1) Reducir cada expresión dada a su forma más simple.

a) $\dfrac{\frac{x-y}{a^2-4}}{\frac{x^2-y^2}{a+2}}$

b) $\dfrac{y^3-x^3}{y^2-x^2}\div\dfrac{y+x}{y-x}$

c) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^3+y^3}\div\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

d) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}-1}{\frac{a-b}{a+b}-1}$

e) $\dfrac{x^2 + \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}}$

f) $\dfrac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b^2}{a^2}}{\dfrac{a^2 - ab + b^2}{a - b}}$

g) $\dfrac{b - \dfrac{1}{a}}{b^2 - \dfrac{1}{a^2}}$

h) $\dfrac{(x - y)^2 - \dfrac{1}{(x - y)^2}}{(x - y) - \dfrac{1}{x + 1}}$

i) $\dfrac{x^2 + \dfrac{27}{x}}{x - 3x + \dfrac{9}{x}}$

j) $\dfrac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} - 2}{\dfrac{a}{2b} - \dfrac{b}{2a}}$

2) Determine el conjunto solución de las ecuaciones siguientes.

a) $\dfrac{\dfrac{x}{5} - \dfrac{2}{6}}{\dfrac{x}{5} + \dfrac{3}{4}} = 2$

b) $\dfrac{\dfrac{t}{4} - 8}{\dfrac{t}{4} - 2} = 7$

c) $\dfrac{\dfrac{x + 3}{4} - 2}{\dfrac{x + 3}{2} - 3} = 6$

d) $\dfrac{\dfrac{5}{x - 2} - 5}{\dfrac{6}{x + 5} + 4} = 8$

e) $\dfrac{x+4}{x+5}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{2}{5}$

f) $\dfrac{\dfrac{x-4}{4}}{\dfrac{x+4}{10}}=2$

g) $\dfrac{\dfrac{5}{x+2}}{\dfrac{6}{x+3}}=7$

h) $\dfrac{3x+1}{5x+3}+\dfrac{4}{5}=8$

i) $\dfrac{5}{7+\dfrac{1}{x+4}}=5$

j) $\dfrac{2}{\dfrac{1}{3x-5}+\dfrac{2}{3}}=6$

8.6 Problemas resueltos con fracciones

Una consecuencia del conocimiento y manejo de las fracciones simples y complejas es la determinación del conjunto solución de ecuaciones que tengan esta forma.

La pregunta siguiente está relacionada directamente con estos conceptos.

¿Cómo se encuentra el conjunto solución de las ecuaciones siguientes?

a) $\dfrac{\dfrac{t+1}{4}-1}{\dfrac{t+1}{6}+3}=1$

b) $\dfrac{\dfrac{6}{x+1}+2}{\dfrac{5}{x+1}+3}=5$

c) $\dfrac{2-\dfrac{8}{x}}{x-4}=8$

d) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{4}=2$

e) $\dfrac{3x}{4}+\dfrac{2x+3}{12}=3$

En cada caso, luego de calcular el m.c.d., utilizar las propiedades de las fracciones, asociatividad y distributividad, cancelación, inverso multiplicativo y aditivo, el resultado es,

a) $\dfrac{\left(\dfrac{t+1}{4}-1\right)(12)}{\left(\dfrac{t+1}{6}+3\right)(12)}=1$ m.c.d: 12

$$\frac{\left(\dfrac{t+1}{4}\right)(12)-(1)(12)}{\left(\dfrac{t+1}{6}\right)(12)+(3)(12)}=1$$

$$\frac{3t+3-12}{2t+2+36}=1$$

$$\frac{3t-9}{2t+38}=1$$

$$3t-9=2t+38$$

$$t=47$$

Comprobación:

Después de sustituir 47 en la ecuación dada, se debe obtener una igualdad, es decir,

$$\frac{\left(\dfrac{47+1}{4}\right)-1}{\left(\dfrac{47+1}{6}\right)+3}=1$$

$$\frac{12-1}{8+3}=\frac{11}{11}=1$$

b) $\dfrac{\dfrac{3}{x+1}+2}{\dfrac{5}{x+1}+3}=5$ m.c.d: 12

$$\frac{\left(\dfrac{3}{x+1}+2\right)(x+1)}{\left(\dfrac{5}{x+1}+3\right)(x+1)}=5$$

$$\frac{\frac{3(x+1)}{x+1}+2(x+1)}{\frac{5(x+1)}{x+1}+3(x+1)}=5$$

$$\frac{3+2x+2}{5+3x+3}=5$$

$$\frac{2x+5}{3x+8}=5$$

$$2x+5=5(3x+8)$$

$$2x+5=15x+40$$

$$-35=13x$$

$$x=-35/13$$

Comprobación: Luego de sustituir x = –35/13 en la ecuación resuelta, se obtiene que

$$\frac{\left(\frac{3}{-35/13+13/13}+2\right)}{\left(\frac{5}{-35/13+13/13}+3\right)}=5$$

$$\frac{\frac{39}{-22}+\frac{44}{22}}{\frac{-65}{22}+\frac{66}{22}}=5$$

$$\frac{\frac{5}{22}}{\frac{1}{22}}=5$$

$$\frac{5}{22}\,\frac{22}{1}=5$$

Como 5 = 5, por lo que –35/13 es la respuesta.

c) $\dfrac{2-\frac{8}{x}}{x-4}=8$ m.c.d: x

$$\frac{\left(2-\frac{8}{x}\right)x}{(x-4)x}=8$$

$$\frac{2x-8}{x(x-4)}=8$$

$$\frac{2(x-4)}{x(x-4)}=8$$

$$\frac{2}{x}=8$$

$$x=1/4$$

Comprobación: Luego de sustituir x = ¼ en la ecuación resuelta, se obtiene que

$$\frac{2-\frac{8}{1/4}}{1/4-16/4}=8$$

$$\frac{2-32}{-15/4}=8$$

$$\frac{-30}{-15/4}=8$$

$$\frac{120}{15}=8$$

Como se cumple la igualdad, $x = 1/4$ es la respuesta.

d) $\frac{1}{x+2}+\frac{3}{4}=2$ m.c.d: $4(x + 2)$

$$\frac{4+3(x+2)}{4(x+2)}=2$$

$$\frac{4+3x+6}{4x+8}=2$$

$$\frac{3x+10}{4x+8}=2$$

$$3x+10=2(4x+8)$$

$$3x+10=8x+16$$

$$-6=5x$$

$$x=-6/5$$

Comprobación: Sustituyendo el valor de x = –6/5 en la ecuación dada, se obtiene

$$\frac{1}{-6/5 + 10/5} + \frac{3}{4} = 2$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 2$$

$$\frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2$$

$$\frac{8}{4} = 2$$

8/4 = 2 significa que el valor obtenido de x es correcto.

e) $\frac{3x}{4} + \frac{2x + 3}{12} = 3$ m.c.d: 12

$$\frac{(3x)(12)}{4(12)} + \frac{(2x + 3)(12)}{12(12)} = 3$$

$$\frac{9x}{12} + \frac{2x + 3}{12} = 3$$

$$\frac{11x + 3}{12} = 3$$

$$11x + 3 = 36$$

$$x = \frac{33}{11}$$

$$x = 3$$

Comprobación: Si x = 33/11, entonces, después de sustituir este valor de x en la ecuación dada, se obtiene que

$$\frac{(3)(3)}{4} + \frac{(2)(3) + 3}{12} = 3$$

$$\frac{9}{4} + \frac{9}{12} = 3$$

$$\frac{27}{12} + \frac{9}{12} = 3$$

$$\frac{36}{12} = 3$$

36/12 = 3 significa que el valor obtenido de x es correcto.

8.7 Problemas de evaluación

Los problemas siguientes se proponen para incorporar, fijar y relacionar conceptos y, de paso, fortalecer y desarrollar capacidades.

1) Determinar las potencias siguientes

a) $\left(\frac{-kx}{5}\right)^3$

b) $\left(\frac{-4x^k}{b}\right)^4$

c) $\left(\frac{-2y^3}{4b}\right)^5$

d) $\left(\frac{-3ap^2}{-4q}\right)^3$

e) $\left(\frac{-6a^n}{5x}\right)^6$

f) $\left(\frac{-e^{3x}}{4^a}\right)^3$

g) $\left(\frac{-2\cdot 10^{2x}}{5x}\right)^3$

h) $\left(\frac{e^{2x}}{4^a}\right)^2$

i) $\left(\frac{-a^k}{x^ky^k}\right)_1^n, \ n = par$

j) $\left(\frac{-p^2}{2q}\right)_1^n, \ n = impar$

2) Determinar la potenciada indicada

a) $\left(\frac{2x}{b}+\frac{5}{a}\right)^2$

b) $\left(\frac{e^{3x}}{a}+\frac{1}{6}\right)^2$

c) $\left(\frac{10^{2x}}{4}+\frac{3}{4}\right)^2$

d) $\left(\frac{p^2}{2}+\frac{q}{b}\right)^2$

e) $\left(\frac{5}{t^2}+\frac{6}{x^2}\right)^2$

f) $\left(\frac{5x}{a}-\frac{7}{b}\right)^2$

g) $\left(\frac{e^{2x}}{5}+\frac{a}{b}\right)^2$

h) $\left(\frac{10^x}{a}-\frac{b}{c}\right)^2$

i) $\left(\frac{p}{q}+\frac{4x^2}{y}\right)^2$

j) $\left(\frac{ln^3 x}{a}-\frac{b}{c}\right)^2$

3) Realizar lo que se indica

a) $\left(x+\frac{a}{b}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$

b) $\left(p+\frac{5}{2}\right)\left(p-\frac{3}{5}\right)$

c) $\left(q+\frac{a}{b}\right)\left(q-\frac{c}{d}\right)$

d) $\left(t+\frac{3}{4}\right)\left(t-\frac{7}{3}\right)$

e) $\left(v+\frac{5}{6}\right)\left(v-\frac{a}{b}\right)$

f) $\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{5}{3}\right)$

g) $\left(t+\frac{a}{b}\right)\left(t-\frac{c}{d}\right)$

h) $\left(v+\frac{3}{8}\right)\left(v+\frac{5}{2}\right)$

i) $\left(p+\frac{a}{5}\right)\left(p+\frac{b}{3}\right)$

j) $\left(w+\frac{3}{8}\right)\left(w+\frac{a}{4}\right)$

4) Hacer las operaciones indicadas

a) $\left(\frac{a}{b}+\frac{c^2}{d^2}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{c^2}{d^2}\right)$

b) $\left(\frac{p}{q}+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{p}{q}-\frac{a^2}{a^2}\right)$

c) $\left(\frac{e^{3x}}{a}+\frac{5}{9}\right)\left(\frac{e^{3x}}{a}-\frac{5}{9}\right)$

d) $\left(\frac{10^x}{a}+\frac{a}{b}\right)\left(\frac{10^x}{a}-\frac{a}{b}\right)$

e) $\left(\frac{xy}{a}+\frac{z^2}{b}\right)\left(\frac{xy}{a}-\frac{z^2}{b}\right)$

f) $\left(\frac{e^x}{a}-\frac{b}{c}\right)\left(\frac{e^{2x}}{a^2}+\frac{be^{2x}}{ac}+\frac{b^2}{c^2}\right)$

g) $\left(\frac{10^{3x}}{5}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{10^{6x}}{25}+\frac{2\cdot 10^x}{15}+\frac{4}{9}\right)$

h) $\left(\frac{e^{2x}}{b}+\frac{5}{8}\right)\left(\frac{e^{4x}}{b^2}-\frac{5e^{2x}}{8b}+\frac{25}{64}\right)$

i) $\left(\frac{10^x}{a}+\frac{b^2}{c}\right)\left(\frac{10^{2x}}{a^2}-\frac{b^2 10^x}{ac}+\frac{b^4}{c^2}\right)$

j) $\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{p^4}{a^4}-\frac{3p^2}{2a^2}+\frac{9}{4}\right)$

5) Resolver la potencia indicada.

a) $\left(\frac{e^x}{a}+\frac{b}{c}\right)^3$

b) $\left(\frac{10^{2x}}{a}+\frac{3}{4}\right)^3$

c) $\left(\frac{x^n}{a}+\frac{y^k}{b}\right)^3$

d) $\left(\frac{1}{a}+\frac{9}{3}+\frac{5}{4}\right)^2$

e) $\left(\frac{p^2}{4}+\frac{p}{3}+\frac{5}{4}\right)^2$

f) $\left(\frac{10^x}{a}-\frac{5}{7}\right)^3$

g) $\left(\frac{e^x}{a} - \frac{3}{7}\right)^3$

h) $\left(\frac{p^k}{5} - \frac{q^n}{8}\right)^3$

i) $\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{5}{z}\right)^2$

j) $\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{2}\right)^2$

6) Determine el cociente de cada división dada o reducir a su forma mínima.

a) $\frac{-3xe^{3x}}{x^3e^{5x}}$

b) $\frac{3a^2ln^4x}{-15a^3ln^3x}$

c) $\frac{a^2b^3c^5}{ab^4c^7}$

d) $\frac{-4x^2y^5}{2x^{-2}y^{-4}}$

e) $\frac{-x^{-4}y^{-5}}{x^{-2}y^{-3}}$

f) $\frac{-24x^{-3}e^{-4x}}{-8x^2e^{-6x}}$

g) $\frac{-p^2q^3}{3pq^{-4}}$

h) $\frac{-2 \cdot 10^{-3x}}{5 \cdot 10^{-x}}$

i) $\frac{-3p^2q^3}{12p^2q^{-2}}$

j) $\frac{-5^{-1}x^2y^{-2}}{-15^{-1}x^3y^4}$

7) Reducir a su forma mínima las expresiones dadas.

a) $\left(\frac{3xy^2}{ax^3}\right)\left(\frac{a^3x^2y}{6x^3y^2}\right)$

b) $\left(\frac{-4ap^3}{x^2p}\right)\left(\frac{-x^2p^2}{ap^5}\right)$

c) $\left(\frac{5x^2e^{4x}}{xy^3}\right)\left(\frac{-3x^3y^2}{x^3e^{2x}}\right)$

d) $\left(\frac{-ap^2 10^{3x}}{a^3p^3}\right)\left(\frac{-ap^3}{a^5 10^{5x}}\right)$

e) $\left(\frac{-6x^2yz}{ax^3z^2}\right)\left(\frac{-3a^3x^2y}{xz^3}\right)$

8) Hacer las divisiones siguientes.

a) $(6x^4y + 12x^3y^2 + 18x^2y^3 + 24xy^4) \div 6x^3y^3$

b) $(7xy + 21x^2y^2 + 28x^3y^3) \div 7x^2y^2$

c) $(x^2 + 10x + 25)^2 \div 5x^2$

d) $(e^{2x} + 10e^x + 25) \div 5e^x$

e) $(2\text{x} + 1)^3 \div 6x^2$

f) $(ln\ x + 1)^3 \div 2ln^2\ x$

g) $(e^{2x} + 1)^2 \div 2e^{3x}$

9) Encontrar el residuo de las divisiones siguientes (p/q)

a) $p(x, y) = x^3\text{y}^3$, $q(x, y) = x + y$

b) $p(x, y) = 2x^3 + x^2y - 4xy^2 + 3y^3$, $q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$

c) $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 8$, $q(x) = x - 3$

d) $p(x) = 2x^5 + 3x^3 + x - 6$, $q(x) = 2x - 1$

e) $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 3$, $q(x) = 3x + 2$

f) $p(x) = 5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 3$, $q(x) = x - 5$

g) $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 6$, $q(x) = x^2 + 2x + 3$

h) $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x - 6$, $q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

i) $p(x) = 5x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 8$, $q(x) = 2x^2 + 3x + 3$

j) $p(x) = x^4 - 3x^2 + x - 3$, $q(x) = x^2 + 3$

10) Descomponer en factores

a) $3a + 6a^2 - 30a^2$

b) $2x^2y^2 - 10x^2y^3 + 20x^3y^4$

c) $6x^2y - 15x^3y^2 + 21x^4y^3$

d) $3a^2x - a^3b - 3b^2x + ab^2$

e) $p^2(a^2 + 2ab + b^2) - q^2a^2 - 2abq^2 - b^2q^2$

f) $(x - y)(a^2 - b^2) - a^2 + b^2$

g) $a^8x^8 - 8$

h) $x^4 - 3 + x^2 - 2x$

i) $x^3 + 3x^2 - 9x - 27$

j) $(x - 3)^2 + 12(x - 3) + 36$

k) $3(x + 5)^2(x - 5) + 5(x + 5)(x - 5)^2$

l) $(x + 4)^2 + 6(x + 4) + 9$

m) $30x^2 - 5bx + 6ax - ab$

n) $125x^6 - 75x^4y + 15x^2x^2 - y^3$

o) $8x^6 + 12x^4e^x + 6x^2e^{2x} + e^{3x}$

p) $e^{6x} + 17e^{3x} + 72$

q) $e^{4x} - e^{2x} - 12$

r) $(x + y)^4 - e^{2x}$

s) $(x + y)(a - b) + (x + z)(a - b) + (y + z)(a - b)$

11) Descomponer en factores irreducibles

a) $P(x) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 4x + 4)$

b) $P(x) = (x + 1)(x^2 + 6x + 9)(x^2 + 1)(x^2 - 12x + 36)$

c) $P(x) = (x^2 + 9x + 18)(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + 9x + 14)$

d) $P(x) = (x^2 + x + 6)(x^2 + 1)(x^2 + 9x + 20)(x^2 + 8x + 16)$

e) $P(x) = (x + 1)(x^2 + 4x + 49)(x^2 + 1)(x^2 + 8x + 15)$

12) Reducir las expresiones siguientes a su forma mínima

a) $\dfrac{3ap^3q^4}{6a^3p^4q^3}$

b) $\dfrac{x^3-4x}{x+2}$

c) $\dfrac{15x-24}{10x-16}$

d) $\dfrac{16x^2-25y^2}{4x+5y}$

e) $\dfrac{(x+2)^2+12(x+2)+36}{x^2+8x}$

f) $\dfrac{e^{2x}+5}{e^{4x}+9e^{2x}+20}$

g) $\dfrac{e^{2x}-16}{e^{2x}+4e^{x}}$

h) $\dfrac{ln^2\,x+5\,ln\,x+6}{x\,ln\,x+3x}$

i) $\dfrac{ln^2\,x-9}{a\,ln\,x+3a}$

j) $\dfrac{ln^2\,x+(x+y)ln\,x+xy}{b\,ln\,x+x}$

13) Reducir a su forma mínima las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{3x+1}{x+1}-\dfrac{2x+1}{x+1}+\dfrac{4x+1}{x+1}$

b) $\dfrac{3x+2}{x+5}-\dfrac{2x+5}{x+5}-\dfrac{3x-4}{x+5}$

c) $\dfrac{x-1}{x+2}-\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-3}{x+4}$

d) $\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}+\dfrac{4}{x+4}$

e) $\dfrac{x+3}{x^2+10x+25}-\dfrac{4}{x^2+8x+15}$

f) $\dfrac{x+5}{x^2+5x+4}+\dfrac{x+2}{x^2+6x+5}-\dfrac{x^2}{x^2+7x+6}$

g) $\dfrac{x+y}{x(x-y)-5(x-y)}+\dfrac{2x+y}{x^2-xy}$

h) $\dfrac{x-y}{x^2-xy-5x+5y}+\dfrac{5}{x-y}$

i) $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{1}{x^2+4x+4}-\dfrac{1}{x^2-4x+4}$

j) $\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}+\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$

k) $\dfrac{3x+5}{x^2+x+4}+\dfrac{5x+8}{(x^2+x+4)^2}$

l) $\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{6}{(x+3)^2}+\dfrac{7}{(x+3)^3}$

14) Reduce cada expresión dada a la fracción mínima.

a) $\dfrac{\dfrac{3x+3}{x^2-1}}{\dfrac{x+3}{x+1}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8}}{\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+6x+8}}$

c) $\dfrac{\dfrac{p-3}{3q}}{\dfrac{p+3}{6q}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}}$

e) $\dfrac{b^2-36}{\dfrac{a-6}{b}}$

f) $\dfrac{\dfrac{q}{p^2+q^2}-\dfrac{1}{q}}{\dfrac{p}{p^2+q^2}-\dfrac{1}{p}}$

g) $\dfrac{\dfrac{p^2-q^2}{q}+q}{\dfrac{p^2-q^2}{6p}-p}$

h) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}-1}{\dfrac{a}{a-b}+1}$

i) $\dfrac{\dfrac{x+5}{2x}}{\dfrac{x^2-25}{x}}$

j) $\dfrac{\dfrac{m^2}{n}-n}{\dfrac{m+n}{n}}$

15) Determine el valor de x que satisface las ecuaciones dadas.

a) $\dfrac{2x+3}{x+4}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{\dfrac{2x+3}{5}}{\dfrac{2x+7}{7}}=3$

c) $\dfrac{\dfrac{3}{3x+5}}{\dfrac{5}{3x+8}}=2$

d) $\dfrac{\dfrac{5x}{7}+2}{\dfrac{3x}{5}+3}=\dfrac{3}{4}$

e) $\dfrac{\dfrac{3x+2}{5}}{\dfrac{5x}{3}}-8=\dfrac{7}{3}$

f) $\dfrac{\dfrac{7}{3x}}{\dfrac{5}{2x+3}}-7=\dfrac{3}{5}$

g) $\dfrac{\dfrac{2x}{7}-\dfrac{3}{4}}{\dfrac{5}{7}}=\dfrac{7}{3}$

h) $\dfrac{7}{\dfrac{5x}{3}-\dfrac{3}{5}}=\dfrac{3}{5}$

i) $\dfrac{\dfrac{2x}{3}-\dfrac{2}{5}}{\dfrac{3x}{4}+\dfrac{2}{7}}=\dfrac{6}{7}$

j) $\dfrac{\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{3}{4}}{\dfrac{2}{2x+1}-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{3}{4}$

Capítulo 9

Radicales

Consideremos, ahora, entre otras, las siguientes definiciones y proposiciones.

Definiciones. Para todo $a \in R$, $a \neq 0$, $n \in N$,

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{n-n} = a^0 = 1$$

Proposiciones probadas. Para todo $a \in R$, $a \neq 0$, y todo n, $m \in I$,

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \qquad b \in R, b \neq 0$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \qquad n > m$$

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{n-m}}, \qquad m > n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = 1, \qquad m = n$$

A continuación estas definiciones y proposiciones, se generalizan a exponentes racionales. Aunque a veces resulta más ventajosa expresar una cantidad en radicales que en exponentes fraccionarios. Así como la suma y la multiplicación tienen inversa, también la potencia tiene inversa. A ésta, se le denomina extracción de una raíz. Para todo $a \in R$, $a \neq 0$, x es una raíz enésima del número a, si x es tal que $x^n = a$. Por ejemplo, 5 y –5 son raíces cuadradas de 25, porque $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$. Igualmente, 2 y –2 son raíces cuartas de 16, porque $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$. Mientras que –4 y 4, respectivamente, son las raíces cúbicas de –64 y 64, porque $(-4)^3 = -64$ y $(4)^3 = 64$.

Según estos ejemplos, puede notarse que hay dos raíces reales de 25, dos raíces cuartas reales de 16 y una raíz cúbica real negativa de –64 y una raíz cúbica real positiva de 64. En consecuencia, para distinguir una raíz de otra, se estatuye el concepto de raíz enésima principal. En efecto, si $a > 0$ y $n \in$ N, entonces, la raíz n-enésima principal es la positiva. Si $a < 0$, n es impar, entonces, la raíz n-sima principal es negativa. Mientras que si n es par y $a < 0$, la raíz principal no se puede definir en los reales, porque no existe un número que elevado, por ejemplo, al cuadrado, origine tal número. Para tal efecto, ¿Cuál es el número real que elevado al cuadrado haga posible la ecuación $x^2 = -25$?

Si $a > 0$ y n $\in$ N, entonces, el símbolo $\sqrt[n]{a}$ significa raíz n-sima principal de a, en la que $n > 1$ es el índice, a el radicando y el símbolo $\sqrt{\ }$ indica que se va a extraer una raíz y se le denomina signo radical y a toda la expresión se le llama radical. Se acostumbra no hacer explicito el orden del radical cuando se trata de extraer la raíz cuadrada, es decir, $\sqrt[2]{\ } = \sqrt{\ }$.

La raíz n-sima principal de un número real es un número racional tal que elevado a la potencia n se obtiene como resultado el primer número. En forma simbólica,

$$\sqrt[n]{a} = b \leftrightarrow b^n = a. \text{ Por ejemplo,}$$

$$\sqrt{16} = 4 \leftrightarrow 4^2 = 16,$$

$$\sqrt[3]{-125} = -5 \leftrightarrow (-5)^3 = -125, \text{ y}$$

$$\sqrt[4]{1296} = 6 \leftrightarrow 6^4 = 1296.$$

En estos resultados,4, –5 y 6 son, respectivamente, la raíz cuadrada principal de 16, –5 es la raíz cúbica principal de –125 y 6 es la raíz cuarta principal de 1296.

Los números reales que no son racionales son irracionales, los primeros se pueden representar por medio de decimales conmensurables o mediante un decimal inconmensurable y periódico, y los últimos por ninguna de estas representaciones, es decir, son inconmensurables y no periódicos.

En general, todo número que tiene raíz n-sima exacta, representación decimal conmensurable o por medio de un decimal inconmensurable periódico es un número racional, porque pueden ser representados por un número de la forma a/b. Cuando no ocurre esto, se trata de números que no son, por ejemplo, cuadrados de enteros positivos, o mejor no son potencias n-simas de enteros positivos. Por ejemplo, $\sqrt[n]{p}$, donde $n > 1$ y p es un número primo. Si $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$ y $\sqrt[5]{23}$ han de tener significado, no será en los números racionales, sino en un concepto ampliado de los números que incluyan los números irracionales, los cuales no pueden ser expresados en la forma a/b, en donde a y b son enteros. La unión entre los números racionales e irracionales forman el conjunto de los números reales, cuyas propiedades que posee, gradualmente, se han venido estudiando.

9.1 Localización de raíces cuadradas irracionales en la recta.

Las raíces cuadradas irracionales no son exactas y los decimales que las expresan no terminan ni se repiten, por lo que no pueden ser medidas por números racionales.

Para encontrar las longitudes iguales, por ejemplo, a $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{17}$, y $\sqrt{19}$; se utiliza el teorema de Pitágoras. La determinación de cada longitud, se inicia con $\sqrt{2}$ y, para tal efecto, después de establecer este teorema, es decir $c^2 = a^2 + b^2$, se buscan dos números de tal manera, que la suma de los cuadrados de éstos sean el número 2, o sea $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, de donde $c = \sqrt{2}$. Como $a = 1$ y $b = 1$, la figura geométrica con la que $\sqrt{2}$ está relacionado es un cuadrado que tiene una diagonal igual a $\sqrt{2}$. Este número, aparte de ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo, también es el radio de un círculo.

Los lados del cuadrado que se emplean para determinar $\sqrt{2}$, se intersecan con los ejes x e y, en $y = 1$ y $x = 1$. El punto de intersección de las rectas $y = 1$ y $x = 1$ que se muestra en la figura 9.1 determinan el radio de una circunferencia que interseca a la recta numérica en el punto que está a la distancia $\sqrt{2}$ del origen.

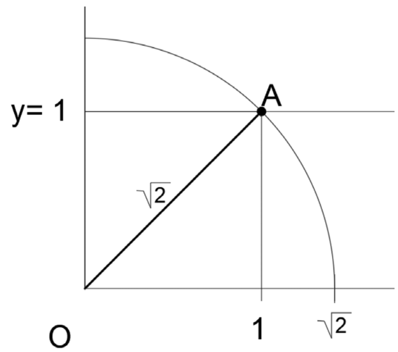


Figura 9.1 Representación gráfica de $\sqrt{2}$.

Para encontrar la distancia a la que se encuentra B del origen, se usa la raíz cuadrada antes obtenida, un nuevo triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras. Para obtener el nuevo triángulo se traza una perpendicular que pase por el punto ($\sqrt{2}$, 0) e intercepte la recta de referencia $y = 1$. Entre el origen y este punto de intersección está la distancia que se busca y la cual se determinará por el teorema de Pitágoras. Esta distancia, aparte de ser la hipotenusa del triángulo, es el radio de una circunferencia que interseca a la recta numérica en el punto que se encuentra a la distancia $\sqrt{3}$ del origen. Después de calcular la distancia, el resultado es

$$OB^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$

$$= 2 + 1$$

$$= 3$$

$$OB = \sqrt{3}$$

Para calcular las distancia restantes se hace lo mismo que se hizo para calcular $\overline{OB}$. Si $\overline{OD}$, $\overline{OF}$, $\overline{OJ}$, $\overline{OL}$, $\overline{OP}$ y $\overline{OR}$ representan a las longitudes restantes. Entonces

$$\overline{OC} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\overline{OD} = \sqrt{(\sqrt{4})^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\overline{OE} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 1^2} = \sqrt{6},$$

$$\overline{OF} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 1^2} = \sqrt{7},$$

$$\overline{OG} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + 1^2} = \sqrt{8},$$

$$\overline{OH} = \sqrt{(\sqrt{8})^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$\overline{OI} = \sqrt{(\sqrt{9})^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$

$$\overline{OJ} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 + 1^2} = \sqrt{11},$$

$$\overline{OK} = \sqrt{(\sqrt{11})^2 + 1^2} = \sqrt{12},$$

$$\overline{OL} = \sqrt{(\sqrt{12})^2 + 1^2} = \sqrt{13},$$

$$\overline{OM} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$

$$\overline{ON} = \sqrt{(\sqrt{14})^2 + 1^2} = \sqrt{15},$$

$$\overline{OO} = \sqrt{(\sqrt{15})^2 + 1^2} = \sqrt{16} = 4,$$

$$\overline{OP} = \sqrt{(\sqrt{16})^2 + 1^2} = \sqrt{17},$$

$$\overline{OQ} = \sqrt{(\sqrt{17})^2 + 1^2} = \sqrt{18}, \quad \text{y}$$

$$\overline{OR} = \sqrt{(\sqrt{18})^2 + 1^2} = \sqrt{19}$$

Las distancias calculadas para cada raíz son:

x	Raíz(x)
0	0
1	1
2	1.41421356
3	1.73205081
4	2
5	2.23606798
6	2.44948974
7	2.64575131
8	2.82842712
9	3
10	3.16227766
11	3.31662479
12	3.46410162
13	3.60555128
14	3.74165739
15	3.87298335
16	4
17	4.12310563
18	4.24264069
19	4.35889894
20	4.47213595

Después de observar este resultado, se encuentran que las raíces calculadas no son todas irracionales, lo cual se debe a la forma de proceder en el cálculo. De estas raíces, dos de las irracionales pedidas son:

$$\overline{OD} = \sqrt{5},$$

$$\overline{OF} = \sqrt{7},$$

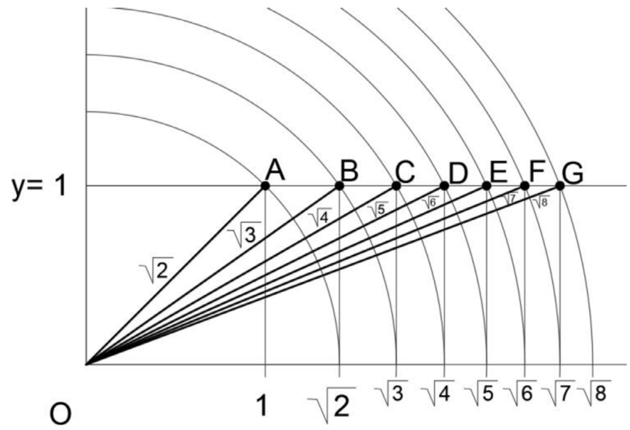


Figura 9.2 Representación gráfica de $\sqrt{2}$ a $\sqrt{8}$.

Siguiendo el mismo procedimiento se obtienen

$$\overline{OJ} = \sqrt{11},$$

$$\overline{OL} = \sqrt{13},$$

$$\overline{OP} = \sqrt{17} \quad \text{y}$$

$\overline{OR} = \sqrt{19}$; más las dos antes calculadas: $\overline{OA} = \sqrt{2}$ y $\overline{OB} = \sqrt{3}$.

Aparte de las raíces pedidas, existen otras que también son irracionales y otras que son racionales. La determinación y localización geométrica de estas raíces irracionales, se muestran en la figura 9.3 siguiente.

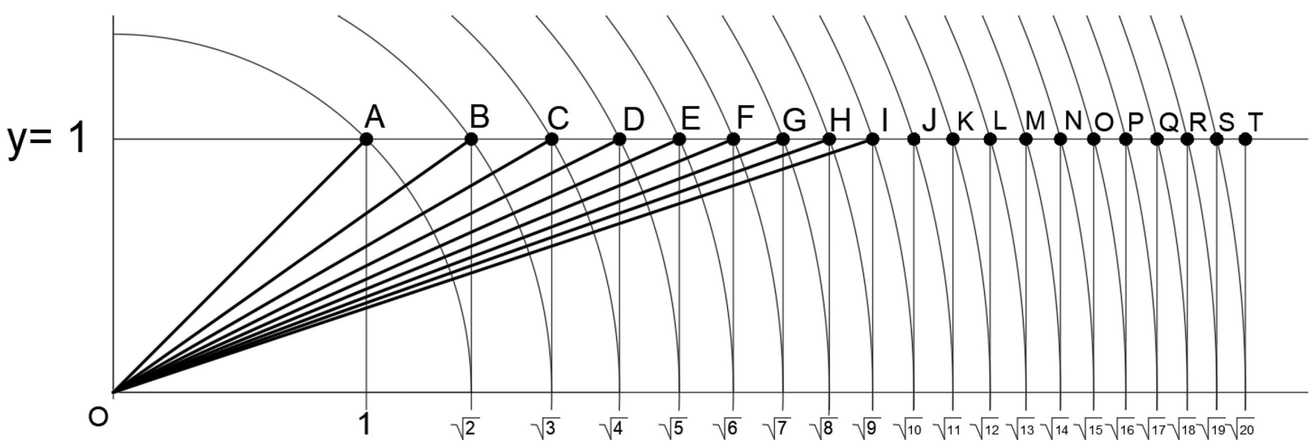


Figura 9.3 Representación gráfica de $\sqrt{2}$ a $\sqrt{20}$.

Ahora definimos un exponente racional, pero no sin antes, tener en claro que no hay raíz cuadrada real de un número negativo, ni raíz cuarta real de un número negativo, …

Si $n \in N$, entonces $1/n$ es un exponente racional tal que $(a^{1/n})^n = a$.

Si esto es verdadero, entonces de $b^n = a$, $a^{1/n}$ es una raíz n-sima de a. En consecuencia, si $a \in R$ y $n \in N$, entonces $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Por ejemplo,

$$(36)^{1/2} = \sqrt{36} = 6 \qquad \text{y} \qquad (x^2)^{1/2} = \sqrt{x^2} = x;$$

$$(-64)^{1/3} = \sqrt[3]{-64} = -4 \qquad \text{y} \qquad [(a+b)^3]^{1/3}) = \sqrt[3]{(a+b)^3} = a + b;$$

$$\left(\frac{32}{243}\right)^{1/5} = \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{2}{3} \qquad \text{y} \qquad (x^{10})^{1/5} = \sqrt[5]{x^{10}} = x^2.$$

Después de esto, se generalizan los teoremas sobre los exponentes racionales y se hace notar que éstos se pueden expresar en función de fracciones y radicales. Luego, se hará lo mismo con una cantidad o expresión algebraica. En este proceso se probará que los teoremas son válidos tanto para exponentes racionales como para enteros.

9.2 Exponente racional

¿Qué observaciones se pueden hacer en la expresión $4^{5/2}$?

Entre otras, el exponente racional está formado por números naturales, $\sqrt{4}$ es un número real, 2 y 5 son números primos entre sí, lo cual es una restricción; la expresión dada se puede expresar como $4^{5/2} = (4^{1/2})^5$ y si la expresión $(a^m)^n = a^{mn}$ es válida para exponentes racionales así como para exponentes enteros, entonces $4^{5/2}$, se puede definir como antes se había expresado, es decir,

$$4^{5/2} = (4^{1/2})^5$$

Por consiguiente, $a^{m/n} = (a^{1/n})^m$ ó

$$4^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

En esta expresión, se advierte que $a^{1/n}$ es una raíz de potencia m, que el denominador es raíz y el numerador potencia.

Conforme a esta definición, ¿a qué es igual cada una de las expresiones siguientes?

a) $32^{2/5}$,

b) $(-27)^{2/3}$,

c) $[(a+b)^2]^{3/2}$,

d) $[(a/b)^3]^{2/3}$,

e) $(8/64)^{4/3}$,

f) $[(ab)^5]^{2/5}$,

g) $(25)^{-3/2}$ y

h) $(125)^{-2/3}$.

Luego de aplicar la definición a cada una de las expresiones dadas, las respuestas son:

a) $32^{2/5} = (\sqrt[5]{32})^2 = 2^2 = 4$,

b) $(-27)^{2/3} = (\sqrt[3]{-27})^2 = (-3)^2 = 9$,

c) $[(a+b)^2]^{3/2} = (\sqrt{(a+b)^2})^3 = (a+b)^3$,

d) $[(a/b)^3]^{2/3} = (\sqrt[3]{(a/b)^3})^2 = (a/b)^2$,

e) $(8/64)^{4/3} = (\sqrt[3]{8/64})^4 = (2/4)^4 = 16/256$,

f) $[(\mathrm{ab})^5]^{2/5} = (\sqrt[5]{(ab)^5})^2 = (ab)^2$,

g) $(25)^{-3/2} = \dfrac{1}{(25)^{3/2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{25})^3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$ y

h) $(125)^{-2/3} = \dfrac{1}{(125)^{2/3}} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{125})^2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$.

Después de aplicar la definición, ¿cuál es la respuesta?

a) $(81)^{5/2}$,

b) $[(a-b)^4]^{3/4}$,

c) $(-64)^{5/3}$,

d) $\left(\dfrac{a^4b^4}{c^4}\right)^{3/4}$,

e) $(1/36)^{5/2}$,

f) $(a^2b^4c^6)^{3/2}$,

g) $(a^3b^6c^9)^{-4/3}$ y

h) $(9/4)^{-7/2}$.

Luego de observar las expresiones siguientes y efectuar las operaciones indicadas, ¿qué concluyes?

a) $(9^{1/2})^3 = (9^3)^{1/2}$

b) $[(-8)^{1/3}]^2 = [(-8)^2]^{1/3}$

c) $[(4/9)^{1/2}]^3 = [(4/9)^3]^{1/2}$

Luego de hacer las operaciones, los resultados son

a) $(9^{1/2})^3 = (9^3)^{1/2}$	b) $[(-8)^{1/3}]^2 = [(-8)^2]^{1/3}$	c) $[(4/9)^{1/2}]^3 = [(4/9)^3]^{1/2}$
$3^3 = 729^{1/2}$	$(-2)^2 = (64)^{1/3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{64}{729}\right)^{1/2}$
$27 = 27$	$4 = 4$	$8/27 = 8/27$

Luego de observar la forma y resultados, entre otros, se puede concluir que los exponentes racionales son conmutativos y que se puede estatuir, en forma general,

$$(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n} \quad \text{ó} \quad (\sqrt{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

También puede observarse que $a^{m/n}$ es la raíz n-sima principal de a^m.

Aplique $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ en las expresiones siguientes.

a) $4^{3/2}$,

b) $(-8)^{2/3}$,

c) $(16/9)^{3/2}$,

d) $(a^2)^{3/2}$,

e) $(a^8b^8)^{3/4}$ y

f) $\left(\frac{a^3}{b^9}\right)^{4/3}$.

Luego de aplicar esta expresión, se obtiene

a) $4^{3/2} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt{64} = 8$,

b) $(-8)^{2/3} = \sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$,

c) $(16/9)^{3/2} = \sqrt{(16/9)^3} = \sqrt{(16/9)^2(16/9)} = \dfrac{16}{9}\sqrt{(16/9)} = \left(\dfrac{16}{9}\right)\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{64}{27}$,

d) $(a^2)^{3/2} = \sqrt{(a^2)^3} = \sqrt{a^6} = a^3$,

e) $(a^8b^8)^{3/4} = \sqrt[4]{(a^8b^8)^3} = \sqrt[4]{a^{24}b^{24}} = a^3a^6$ y

f) $\left(\dfrac{a^3}{b^9}\right)^{4/3} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{a^3}{b^9}\right)^4} = \sqrt[3]{\dfrac{a^{12}}{b^{36}}} = \dfrac{a^4}{b^{12}}$.

Luego de aplicar $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, ¿cuál es el resultado de lo que se propone en cada inciso?

a) $8^{5/3}$,

b) $(a^8)^{5/2}$,

c) $(-8)^{2/3}$,

d) $(-a^9)^{2/3}$,

e) $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{3/4}$,

f) $\left(\dfrac{a^8}{b^4}\right)^{3/4}$,

g) $-16^{3/2}$,

h) $\left(\dfrac{a^3b^6}{c^9}\right)^{2/3}$,

i) $(-4)^{3/2}$ y

j) $[(a+b)^{16}]^{3/8}$.

Si $a \in R$, y m y n son enteros pares positivos, $(a^m)^{1/n} = |a|^{m/n}$. Con esta definición se evitan ciertas ambigüedades.

Para cuando $m = n$, $(a^n)^{1/n} = |a|$, si n es un entero par positivo o, en forma equivalente,

$\sqrt[n]{a^n} = |a|$ si n no es par.

Cuando n es 2, $\sqrt{a^2} = |a|$.

De acuerdo con $(a^m)^{1/n} = |a|^{m/n}$, $[(-4)^2]^{1/4} = |-4|^{2/4} = 4^{1/2} = 2$.

De $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

Sean m y n enteros positivos primos entre sí. Entonces $-m/n$ es un número racional negativo. Para que a^{mn} sea válido para $-m/n$, $a^{-m/n} = (a^{1/n})^{-m}$, donde $a^{1/n}$ es un número real y por $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^{-m/n} = (a^{1/n})^{-m}$, se puede expresar como

$$(a^{1/n})^{-m} = \frac{1}{(a^{1/n})^m}, \quad a \neq 0$$

Por consiguiente,

$$(a)^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$$

es una definición que satisface las propiedades de los exponentes enteros.

9.3 Problemas de asimilación

Calcular lo que se propone en cada inciso.

a) $27^{-2/3}$,

b) $(a^3)^{-4/3}$,

c) $25^{-3/2}$,

d) $(a^4b^6)^{-3/2}$,

e) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-4/3}$ y

f) $\left(\frac{a^{10}}{b^5}\right)^{-2/5}$.

Después de hacer los cálculos, los resultados son

a) por definición,

$$27^{-2/3} = \frac{1}{(27)^{2/3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Aplicando las propiedades de los exponentes a exponentes racionales

$$27^{-2/3} = (27^{-2/3})^2 = \left(\frac{1}{27^{1/3}}\right)^2 = (1/3)^2 = 1/9 \text{ ó}$$

$$27^{-2/3} = (27^{-2})^{1/3} = \left(\frac{1}{27^2}\right)^{1/3} = (1/729)^{1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{729}} = 1/9.$$

De igual manera, los siguientes:

b) $(a^3)^{-4/3}$

$$(a^3)^{-4/3} = \frac{1}{(a^3)^{4/3}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{a^3}\,)^4} = \frac{1}{a^4}.$$

Por las propiedades de los exponentes

$$(a^3)^{-4/3} = [(a^3)^{-1/3}]^4 = \left[\frac{1}{(a^3)^{1/3}}\right]^4 = \frac{1}{a^4} \text{ ó}$$

$$(a^3)^{-4/3} = [(a^3)^{-4}]^{1/3} = \left[\frac{1}{(a^3)^4}\right] = \left(\frac{1}{a^{12}}\right)^{1/3} = \frac{1}{a^4}.$$

c) $25^{-3/2} = \dfrac{1}{(25)^{3/2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{25}\,)^3} = \dfrac{1}{125}.$

Por las propiedades de los exponentes aplicada a exponentes racionales

$$25^{-3/2} = [(25)^{-1/2}]^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{25}}\right)^3 = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \text{ ó}$$

$$25^{-3/2} = [(25)^3]^{1/2} = \left(\frac{1}{25^3}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{(25^2)(25)}} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}.$$

d) $(a^4b^6)^{-3/2} = \dfrac{1}{(a^4b^6)^{3/2}} = \dfrac{1}{(\sqrt{a^4b^6}\,)^3} = \dfrac{1}{(a^2b^3)^3} = \dfrac{1}{a^6b^9}$

Por aplicación de las propiedades de los exponentes

$$(a^4b^6)^{-3/2} = [(a^4b^6)^{-1/2}]^3 = \left(\frac{1}{(a^4b^6)^{1/2}}\right)^3 = \left(\frac{1}{a^2b^3}\right)^{1/2} = \frac{1}{a^6b^9} \text{ ó}$$

$$(a^4b^6)^{-3/2} =[(a^4b^6)^{-3}]^{1/2} = \left(\frac{1}{(a^4b^6)^3}\right)^3 = \left(\frac{1}{a^{12}b^{18}}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{a^{12}b^{18}}} = \frac{1}{a^6b^9}\ .$$

e) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-4/3} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{8}{27}\right)^{4/3}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}\right)^4} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^4} = \dfrac{1}{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{81}{16}.$

Por las propiedades de los exponentes

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{-4/3} = \left[\left(\frac{8}{27}\right)^{-1/3}\right]^4 = \left[\frac{1}{\left(\frac{8}{27}\right)^{1/3}}\right]^4 = \left(\frac{1}{2/3}\right)^4 = \frac{1}{16/81} = \frac{81}{16} \quad \text{ó}$$

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{-4/3} = \left[\left(\frac{8}{27}\right)^{-4}\right]^{1/3} = \left[\frac{1}{\left(\frac{8}{27}\right)^4}\right]^{1/3} = \left[\frac{1}{\frac{8^3 \cdot 8}{27^3 \cdot 27}}\right]^{1/3} = \frac{1}{\frac{8 \cdot 2}{27 \cdot 3}} = \frac{81}{16}.$$

f) $\left(\frac{a^{10}}{b^5}\right)^{-2/5} = \frac{1}{\left(\frac{a^{10}}{b^5}\right)^{2/5}} = \frac{1}{\left(\sqrt[5]{\frac{a^{10}}{b^5}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2} = \frac{b^2}{a^4}.$

Por las propiedades de los exponentes

$$\left(\frac{a^{10}}{b^5}\right)^{-2/5} = \left[\left(\frac{a^{10}}{b^5}\right)^{-1/5}\right]^2 = \left[\frac{1}{\left(\frac{a^{10}}{b^5}\right)^{1/5}}\right]^2 = \left(\frac{1}{\frac{a^2}{b}}\right)^2 = \frac{1}{\frac{a^4}{b^2}} = \frac{b^2}{a^4} \quad \text{ó}$$

$$\left(\frac{a^{10}}{b^5}\right)^{-2/5} = \left[\left(\frac{a^{10}}{b^5}\right)^{-2}\right]^{1/5} = \left[\frac{1}{\left(\frac{a^{10}}{b^5}\right)^2}\right]^{1/5} = \left[\frac{1}{\frac{a^{20}}{b^{10}}}\right]^{1/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{\frac{a^{20}}{b^{10}}}} = \frac{1}{\frac{a^4}{b^2}}.$$

Aplicando la definición de exponentes racionales negativos y las propiedades de los exponentes a exponentes racionales, calcular lo que se propone en cada inciso.

a) $8^{-5/3}$,

b) $(a^3)^{-2/3}$,

c) $4^{-3/2}$,

d) $(a^4)^{-5/2}$,

e) $\left(\frac{27}{8}\right)^{-5/3}$,

f) $\left(\frac{a^{10}}{b^5}\right)^{-3/5}$,

g) $\left(\frac{16}{25}\right)^{-5/2}$,

h) $(a^8b^4)^{-3/2}$,

i) $-125^{-5/3}$ y

j) $-(a^{27}b^{9})^{2/3}$.

La propiedad $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ relaciona el exponente racional con un radical y ésta se aplica para probar la siguiente proporción empleando las propiedades de los exponentes.

Si $a, b \in R$, entonces

$$\sqrt[mn]{a^{n+m}} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

donde cada propiedad que forma esta proposición será válida para enteros positivos m y n, siempre y cuando $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ sean números reales. Por ejemplo, $\sqrt{-4}$ y $\sqrt[4]{(-3)(4)}$ no son válidas en los reales y $\sqrt{\frac{a}{0}}$ se indetermina, mientras que $\sqrt[3]{(-3)(a)}$, $\sqrt[5]{\frac{-125}{5}}$ y $\sqrt{\frac{0}{5}}$ si son verdaderos en los reales.

Ahora, veamos cómo se desprenden las propiedades de los radicales propuestos en la proposición antes enunciada de las definiciones anteriores y propiedades de los exponentes.

$$\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \qquad b \neq 0;$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} = a^{1/nm} = \sqrt[mn]{a} \quad \text{y}$$

$$\sqrt[mn]{a^{n+m}} = (a^{n+m})^{1/mn} = a^{\frac{n}{mn}+\frac{m}{mn}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{1/m}a^{1/n} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[n]{a}.$$

A continuación, utilizando estas propiedades y las antes vistas, se harán operaciones y simplificaciones. Un radical ha sido completamente simplificado o reducido a su forma más simple si cada letra aparece sólo una vez y con exponente positivo; los factores con raíz perfecta aparecen fuera del radical y bajo éste no hay fracciones; el radical debe tener el mínimo índice.

En el proceso de simplificar una fracción con radicales es importante racionalizar el numerador o denominador, lo cual simplifica cambiar la forma de la fracción, a una fracción equivalente que carezca de radical el numerador o denominador, lo cual significa que el numerador o denominador irracional se cambio a racional. El proceso de racionalizar el numerador o denominador puede ser útil para facilitar el cálculo de operaciones y sacar conclusiones en límites y derivadas, por ejemplo.

1) ¿Cómo racionaliza cada uno de las expresiones siguientes?

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

b) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}$,

c) $\dfrac{5}{7\sqrt{3}}$,

d) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$,

e) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$,

f) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-5\sqrt{y}}$,

g) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$,

h) $\dfrac{\sqrt{h+9}-3}{h}$,

i) $\sqrt{\dfrac{7a}{3b}}$,

j) $\dfrac{24ab^3}{\sqrt[3]{36a^2b^4}}$, y

k) $\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

Según las expresiones dadas, para contestar la pregunta, en algunas se racionaliza el denominador y en otras numerador y denominador. Luego de hacerlo, el resultado es

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

b) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}=\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{a\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}}=\dfrac{a\sqrt[3]{a^2}}{2}$,

c) $\dfrac{5}{7\sqrt{3}}=\dfrac{5}{7\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{7\cdot 3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{21}$,

d) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{3-7}$,

e) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{7\cdot 5}) + (\sqrt{7\cdot 3})}{5-3} = \dfrac{\sqrt{35}+\sqrt{21}}{2}$,

f) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-5\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-5\sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+5\sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})}{x-25y} = \dfrac{x+5\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{x}\sqrt{y}+5y}{x-25y} =$

$\dfrac{x+5y+6\sqrt{xy}}{x-25y}$,

g) $\sqrt{\dfrac{7}{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{7\cdot 3}}{\sqrt{3^2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$

ó $\sqrt{\dfrac{7}{3}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7^2}}{\sqrt{3\cdot 7}} = \dfrac{7}{\sqrt{21}}$,

h) $\dfrac{\sqrt{h+9}-3}{h} = \dfrac{\sqrt{h+9}-3}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{h+9}+3}{\sqrt{h+9}+3} = \dfrac{h+9-9}{h\,(\sqrt{h+9}+3)} = \dfrac{h}{h\,(\sqrt{h+9}+3)} = \dfrac{1}{\sqrt{h+9}+3}$,

i) $\sqrt{\dfrac{7a}{3b}} = \dfrac{\sqrt{7a}}{\sqrt{3b}} \cdot \dfrac{\sqrt{3b}}{\sqrt{3b}} = \dfrac{\sqrt{7a\cdot 3b}}{\sqrt{(3b)^2}} = \dfrac{\sqrt{21ab}}{3b}$

ó $\sqrt{\dfrac{7a}{3b}} = \dfrac{\sqrt{7a}}{\sqrt{3b}} \cdot \dfrac{\sqrt{7a}}{\sqrt{7a}} = \dfrac{\sqrt{(7a)^2}}{\sqrt{7a\cdot 3b}} = \dfrac{7a}{\sqrt{21ab}}$ y

j) $\dfrac{24ab^3}{\sqrt[3]{36a^2b^4}} = \dfrac{3\cdot 2^3ab^3}{\sqrt[3]{2^2 3^2 a^2 b^4}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2\cdot 3ab^2}}{\sqrt[3]{2\cdot 3ab^2}} = \dfrac{3\cdot 2^3ab^3\sqrt[3]{6ab^2}}{\sqrt[3]{2^3 3^3 a^3 b^6}} = \dfrac{3\cdot 2^3ab^3\sqrt[3]{6ab^2}}{2\cdot 3ab^2} = 4a\sqrt[3]{6ab^2}$

ó $\dfrac{24ab^3}{\sqrt[3]{36a^2b^4}} = \dfrac{24ab^3}{(36a^2b^4)^{1/3}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{(36a^2b^4)^2}}{(36a^2b^4)^{2/3}} = \dfrac{24ab^3\sqrt[3]{(36a^2b^4)^2}}{36a^2b^4} = \dfrac{2^3 3ab^3\sqrt[3]{(36a^2b^4)^2}}{3^2 2^2 a^2 b^4}$

$= \dfrac{2b\sqrt[3]{(3\cdot 2ab^2(3\cdot 2ab)^3}}{3a} = \dfrac{2\cdot 3\cdot 2ab\sqrt[3]{6ab^2}}{3a} = 4a\sqrt[3]{6ab^2}$

2) Racionaliza las expresiones siguientes.

a) $\dfrac{5}{8\sqrt{3}}$,

b) $\dfrac{b}{a\sqrt{c}}$,

c) $\sqrt{\dfrac{x^2+3}{y^2+8}}$,

d) $\sqrt[3]{\dfrac{x^5x^6}{4z^2}}$,

e) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$,

f) $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+5\sqrt{y}}$,

g) $\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,

h) $\sqrt[3]{\dfrac{36a^2a^3}{54x^2y^2}}$,

i) $\dfrac{72a^2b^3c}{\sqrt[4]{1296a^2b^3b^6}}$,

j) $\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$,

k) $\dfrac{y\sqrt{3x}}{9\sqrt{8x}}$ y

l) $\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+5}}$.

Todas las literales representan números positivos.

3) Después de saber que todas las literales son números positivos, simplifique el radical.

a) $\sqrt{324a^5b^6b^3}$,

b) $\sqrt[3]{-8x^3y^5}$,

c) $\sqrt{x^2(a^4-b^4)}$,

d) $\sqrt[3]{\dfrac{27x^4y^6}{1080a^6b^3}}$,

e) $\sqrt{\dfrac{x+10+\frac{25}{x}}{4x^3}}$,

f) $\sqrt[4]{\dfrac{48x^4y^5}{144a^6y^8}}$,

g) $\sqrt[5]{\dfrac{243x^6y^8}{a^5b^3}}$ y

h) $\sqrt[6]{\dfrac{a^6b-a^6b}{z^7}}$.

El resultado de simplificar cada radical, se muestra enseguida.

a) $\sqrt{324a^5b^6c^3} = (2^2 3^4 a^5 b^6 c^3)^{1/2}$

$$= (2^2)^{1/2}(3^4)^{1/2}(a^5)^{1/2}(b^6)^{1/2}(c^3)^{1/2}$$

$$= 2 \cdot 3^2(a^4a)^{1/2}b^3(c^2c)^{1/2} = 18a^2b^3c(a)^{1/2}(a)^{1/2}$$

$$= 18a^2b^3c(ac)^{1/2} = 18a^2b^3c\sqrt{ac}$$

b) $\sqrt[3]{-8x^3y^5} = (-1^2 2^3 x^3 y^5)^{1/3} = [(-1)^3]^{1/3}(2^3)^{1/3}(x^3)^{1/3}(y^3\,y^2)^{1/3}$

$$= -2xy(y^2)^{1/3} = 2xy\sqrt[3]{y^2}$$

c) $\sqrt{x^2(a^4 - b^4)} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{x^2 - x^2} = x\sqrt{(x^2 + x^2)(x^2 - x^2)}$

$$= x\sqrt{(x^2 + x^2)(a + b)(a + b)}$$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{27x^4y^6}{1080a^6b^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{3^3x^4y^6}{3^3 \cdot 2^3 \cdot 5a^6b^3}} = \dfrac{(3^3x^4y^6)^{1/3}}{(3^3 2^3 5a^6b^3)^{1/3}}$

$$= \frac{(3^3)^{1/3}(x^3x)^{1/3}(y^6)^{1/3}}{(3^3)^{1/3}(2^3)^{1/3}5^{1/3}(a^6)^{1/3}(b^3)^{1/3}} = \frac{3x\sqrt[3]{x}\,y^2}{3 \cdot 2\sqrt[3]{5}\,a^2b}$$

$$= \frac{xy^2\sqrt[3]{x}}{2a^2b\sqrt[3]{5}} = \frac{xy^2\sqrt[3]{x}}{2a^2b\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}$$

$$= \frac{xy^2\sqrt[3]{25x}}{2a^2b\sqrt[3]{5^3}} = \frac{xy^2\sqrt[3]{25x}}{10a^2b}$$

e) $\sqrt{\dfrac{x + 10 + \frac{25}{x}}{4x^3}} = \sqrt{\dfrac{x^2 + 10x + 25}{4x^4}} = \sqrt{\dfrac{(x+5)^2}{4x^4}} = \dfrac{\sqrt{(x+5)^2}}{\sqrt{4x^4}} = \dfrac{x+5}{\sqrt{2^2x^4}} = \dfrac{x+5}{2x^2}$

f) $\sqrt[4]{\dfrac{48x^4y^5}{144a^6y^8}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^4 \cdot 3 \cdot x^4y^5}{2^4 \cdot 3^2 \cdot a^6y^8}} = \dfrac{(2^4 \cdot 3 \cdot x^4y^5)^{1/4}}{(2^4 \cdot 3^2 \cdot a^6y^8)^{1/4}} = \dfrac{(2^4)^{1/4}3^{1/4}(x^4)^{1/4}(y^4y)^{1/4}}{(2^4)^{1/4}(3^2)^{1/4}(a^4a^2)^{1/4}y^2}$

$$= \frac{2xy\sqrt[4]{3}\,\sqrt[4]{y}}{2\sqrt[4]{9}\,a\sqrt[4]{a^2}y^2} = \frac{xy\sqrt[4]{3y}}{ay^2\sqrt[4]{9a^2}} = \frac{xy\sqrt[4]{3y}}{ay^2\sqrt[4]{9a^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^2a^2}}{\sqrt[4]{3^2a^2}}$$

$$= \frac{x\sqrt[4]{27a^2y}}{ay\sqrt[4]{3^4a^2}} = \frac{x\sqrt[4]{27a^2y}}{ay(3a)} = \frac{x\sqrt[4]{27a^2y}}{3a^2y}$$

g) $\sqrt[5]{\dfrac{243x^6y^8}{a^5b^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{3^5x^6y^8}{a^5b^3}} = \left(\dfrac{3^5x^6y^8}{a^5b^3}\right)^{1/5} = \dfrac{(3^5)^{1/5}(x^5x)^{1/5}(y^5y^3)^{1/5}}{(a^5)^{1/5}(b^3)^{1/5}}$

$$= \frac{3xy\sqrt[5]{x}\sqrt[5]{y^3}}{a\sqrt[5]{b^3}} = \frac{xy\sqrt[5]{xy^3}}{a\sqrt[5]{b^3}} = \frac{xy\sqrt[5]{xy^3}}{a\sqrt[5]{b^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[5]{b^2}}$$

$$= \frac{3xy\sqrt[5]{b^2xy^3}}{a\sqrt[5]{b^5}} = \frac{3xy\sqrt[5]{b^2xy^3}}{a\,b}$$

h) $$\sqrt[6]{\frac{a^6b - a^6b}{z^7}} = \frac{[a^6(b-c)]^{1/6}}{z^7} = \frac{(a^6)^{1/6}(b-c)^{1/6}}{(z^6z)^{1/6}} = \frac{a\sqrt[6]{(b-c)}}{z\sqrt[6]{z}} = \frac{a\sqrt[6]{(b-c)}}{z\sqrt[6]{z}} \cdot \frac{\sqrt[6]{z^5}}{\sqrt[6]{z^5}}$$

$$= \frac{a\sqrt[6]{z^5(b-c)}}{z\sqrt[6]{z^6}} = \frac{a\sqrt[6]{z^5(b-c)}}{z^2}$$

4) Simplificar las expresiones siguientes, siendo todas las literales cantidades positivas.

a) $\sqrt{1286}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{162}{320}}$

c) $\sqrt[4]{187a^5b^4c^7}$

d) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

e) $\sqrt{\dfrac{3}{25} + \dfrac{1}{4}}$

f) $\sqrt[3]{\dfrac{375}{54}}$

g) $\sqrt[5]{\dfrac{192x^5y^6z^7}{145a^5bc^8}}$

h) $\sqrt[6]{\dfrac{6561xy^7z^9}{162a^7x^8z^5}}$

i) $\sqrt[3]{\dfrac{2592x^4y^6z^7}{2304ab^3c^7}}$

j) $\sqrt{\dfrac{48a^3b^4b^6}{144x^3y^6z^3}}$

k) $\sqrt{x + 14 + \dfrac{49}{x}}$

l) $\sqrt[3]{x + 3 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$

m) $\sqrt[5]{-96x^5yy^9}$

n) $\dfrac{8}{\sqrt{75a^3b^4}}$

o) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{192x^4yz^2}}$

p) $\sqrt[4]{\dfrac{1280x^5y^6z^4}{a^4b^5}}$

9.4 Suma y sustracción de radicales

Para sumar y restar radicales, se agrupan todos los radicales semejantes y se reducen en un solo término; los radicales semejantes son los que tienen el mismo índice y mismo radicando. Para sumar y restar fracciones, se debe, además, racionalizar la fracción.

Simplificar las expresiones

a) $5\sqrt{50} + 3\sqrt{8} - \sqrt{18}$

b) $3\sqrt{45} - 3\sqrt{20} + \sqrt{32}$

c) $2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{16}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{12}} - \sqrt{3}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{18}} + 3\sqrt{2}$

f) $\sqrt{x^5} + \sqrt{36x^5}$

g) $\sqrt[3]{8(x+a)} + \sqrt[3]{27(x+a)} - \sqrt[3]{x+a}$

h) $\sqrt{8a^3b^2} + \sqrt{18a^3b^2} - \sqrt{32a^3b^2}$

i) $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} - \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} - \sqrt{\dfrac{4a^2}{a^2-b^2}}$

Después de simplificar cada expresión, se obtiene

a) $5\sqrt{50} + 3\sqrt{8} - \sqrt{18} = 5\sqrt{5^2 \cdot 2} + 3\sqrt{2^2 \cdot 2} - \sqrt{3^2 \cdot 2}$

$$= 5\sqrt{5^2}\sqrt{2} + 3\sqrt{2^2}\sqrt{2} - \sqrt{3^2}\sqrt{2}$$

$$= 25\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$$

$$= (25 + 6 - 3)\sqrt{2} = 28\sqrt{2}$$

b) $3\sqrt{45} - 3\sqrt{20} + \sqrt{32} = 3\sqrt{3^2 \cdot 5} - 2\sqrt{2^2 \cdot 5} + \sqrt{2^4 \cdot 2}$

$$= 3\sqrt{3^2}\sqrt{5} - 2\sqrt{2^2}\sqrt{5} + \sqrt{2^4}\sqrt{2}$$

$$= 9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 4\sqrt{2} = (9 - 4)\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$$

$$= 5\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$$

c) $2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 2}$

$$= 2\sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{2}$$

$$= (6 + 2)\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{7}$$

$$= 8 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{7}$$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{12}} - \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{3^3 \cdot 3}} - \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{2}{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{3} = \frac{(1 + 1 - 3)\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{18}} + 3\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3^2 \cdot 2}} + 3\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3^2}\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} + 3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 18\sqrt{2}}{6}$$

$$= \frac{(3 - 1 + 18)\sqrt{2}}{6} = \frac{20\sqrt{2}}{6} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

f) $\sqrt{x^5} + \sqrt{36x^5} = \sqrt{x^5} + \sqrt{6^2x^5} = \sqrt{x^5} + 6\sqrt{x^5}$

$$= (1 + 6)\sqrt{x^5} = 7\sqrt{x^5}$$

g) $\sqrt[3]{8(x+a)} + \sqrt[3]{27(x+a)} - \sqrt[3]{x+a}$

$$= \sqrt[3]{2^3(x+a)} + \sqrt[3]{3^3(x+a)} - \sqrt[3]{x+a}$$

$$= \sqrt[3]{2^3}\,\sqrt[3]{(x+a)} + \sqrt[3]{3^3}\,\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x+a}$$

$$= 2\sqrt[3]{(x+a)} + 3\sqrt[3]{(x+a)} - \sqrt[3]{(x+a)}$$

$$= (2+3-1)\sqrt[3]{(x+a)} = 4\sqrt[3]{(x+a)}$$

h) $\sqrt{8a^3b^2} + \sqrt{18a^3b^2} - \sqrt{32a^3b^2}$

$$= (2^2 \cdot 2a^3b^2)^{1/2} + (3^2 \cdot 2a^3b^2)^{1/2} - (2^4 \cdot 2a^3b^2)^{1/2}$$

$$= (2^2)^{1/2}(2)^{1/2}(a^2a)^{1/2}(b^2)^{1/2} + (3^2)^{1/2}(2)^{1/2}(a^2a)^{1/2}(b^2)^{1/2} + (2^4)^{1/2}(2)^{1/2}(a^2a)^{1/2}(b^2)^{1/2}$$

$$= 2\sqrt{2}\,(a)\sqrt{a}\,(b) + 3\sqrt{2}\,a\sqrt{a}\,b - 4\sqrt{2}\,a\sqrt{a}\,b$$

$$= 2ab\sqrt{2a} + 3ab\sqrt{2a} - 4ab\sqrt{2a}$$

$$= (2ab + 3ab - 4ab)\sqrt{2a}$$

$$= ab\sqrt{2a}$$

$$=\mathrm{ab}\sqrt{2a}$$

i) $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}} - \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}} - \sqrt{\dfrac{4a^2}{a^2-b^2}}$

$$= \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} - \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} + \frac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} \cdot \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}} - \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} \cdot \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}} + \frac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{\sqrt{(a+b)^2}} - \frac{\sqrt{(a+b)(a-b)}}{\sqrt{(a-b)^2}} + \frac{\sqrt{4a^2(a^2-b^2)}}{\sqrt{(a^2-b^2)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b} + \frac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2}$$

$$= \frac{(a-b)\sqrt{a^2-b^2} - (a+b)\sqrt{a^2-b^2} + 2a\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2}$$

$$= \frac{2(a-b)\sqrt{a^2-b^2}}{a^2-b^2} = \frac{2(a-b)\sqrt{a^2-b^2}}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{(a+b)}$$

Todas las literales son cantidades positivas.

Reducir los términos semejantes. Todas las literales son cantidades positivas.

a) $5\sqrt{108} + 3\sqrt{300} - \sqrt{27}$

b) $3\sqrt{500} - 2\sqrt{405} + \sqrt{20}$

c) $3\sqrt{432} + 5\sqrt{675} - 2\sqrt{1728}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{7}{\sqrt{125}} - \sqrt{5}$

e) $\frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{75}} + 2\sqrt{3}$

f) $3\sqrt[3]{125a^3xy} + 3\sqrt[3]{27a^6b^3x^4y^2} - 3\sqrt[3]{64xy}$

g) $5\sqrt[3]{64(x+3)^2} + 3\sqrt[3]{64(x^2+6x+9)} - 2\sqrt{27(x+3)(x+3)}$

h) $2\sqrt[4]{16a^4b^4c} + 2\sqrt{81a^4b^4c} - 3\sqrt{16a^4b^4c}$

i) $2\sqrt{4ab} + 3\sqrt{9ab} - 2\sqrt[3]{8ab} - 2\sqrt[3]{125ab}$

9.5 Multiplicación y división de radicales

Cuando se multiplican dos o más radicales, y éstos son semejantes, el resultado es inmediato. Mientras que si son de distinto índice, deben convertirse antes en radicales con igual índice. Para efectuar la multiplicación se aplica $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$ y el empleo de expresiones equivalentes.

Para dividir dos radicales se utiliza $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Se reducen a un mismo índice si estos tienen distinto índice y luego se efectúa la división.

Efectuar las multiplicaciones indicadas y simplificar.

a) $\sqrt{3}\,\sqrt{5}\,\sqrt{4}$

b) $\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c}$

c) $\sqrt[3]{xy}\,\sqrt[3]{x^3y}$

d) $\sqrt[3]{a+b}\,\sqrt[3]{a-b}$

e) $\sqrt{25}\,\sqrt[3]{8}\,\sqrt[4]{16}$

f) $\sqrt{2x^2y}\,\sqrt[3]{2x^2y^3}\,\sqrt[4]{6x^3y^3}$

g) $\sqrt[3]{9x^2}\,\sqrt[4]{3x^2y^2}$

h) $(\sqrt{x}+a)(\sqrt{x}-a)$

i) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})$

j) $\sqrt{2a}\,\sqrt{4a}\,\sqrt[3]{5a}$

Conforme a lo dicho y después de hacer las multiplicaciones, el resultado es

a) $\sqrt{3}\,\sqrt{5}\,\sqrt{4} = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 4} = \sqrt{60}$

b) $\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c} = \sqrt{abc}$

c) $\sqrt[3]{xy}\,\sqrt[3]{x^3y} = \sqrt[3]{x^4y^2}$

d) $\sqrt[3]{a+b}\,\sqrt[3]{a-b} = \sqrt[3]{(a+b)(a-b)} = \sqrt[3]{a^2-b^2}$

e) $\sqrt{25}\,\sqrt[3]{8}\,\sqrt[4]{16} = (25)^{1/2}(8)^{1/3}(16)^{1/4} = (25)^{6/12}(8)^{4/12}(16)^{3/12}$

$$= [(25)^6(8)^4(16)^3] = \sqrt[12]{(25)^6(8)^4(16)^3}$$

$$= \sqrt[12]{5^{12}2^{12}2^{12}} = (5)(2)(2) = 20$$

f) $\sqrt[3]{9x^2}\,\sqrt[4]{3x^2y^2} = (3x^2y)^{1/2}(2x^2y^3)^{1/3}(6x^3y^3)^{1/4}$

$$= (3x^2y)^{6/12}(2x^2y^3)^{4/12}(6x^3y^3)^{3/12}$$

$$= (3^6x^{12}y^6)^{1/12}(2^4x^8y^{12})^{1/12}(6^3x^9y^9)^{1/12}$$

$$= (3^6x^{12}y^6 2^4x^8y^{12}6^3x^9y^9)^{1/12}$$

$$= (3^6 2^4 6^3 x^{29}y^{27})^{1/12}$$

$$= (3^9 2^7 x^{29} y^{27})^{1/12}$$

$$= (3^9 2^7)^{1/12}(x^{29})^{1/12}(y^{27})^{1/12}$$

$$= \sqrt[12]{3^9 \cdot 2^7}(x^{24} \cdot x^5)^{1/12}(y^{24} \cdot y^3)^{1/12}$$

$$= \sqrt[12]{3^9 \cdot 2^7}\,\sqrt[12]{x^{24}}\,\sqrt[12]{x^5}\,\sqrt[12]{y^{24}}\,\sqrt[12]{y^3}$$

$$= \sqrt[12]{3^9 \cdot 2^7}\,x^2\,\sqrt[12]{x^5}\,y^2\,\sqrt[12]{y^3}$$

$$= x^2 y^2\,\sqrt[12]{3^9 \cdot 2^7 x^5 y^3}$$

g) $(\sqrt{x} + a)(\sqrt{x} - a) = (9x^2)^{1/3}(3x^2y^2)^{1/4} = (9x^2)^{4/12}(3x^2y^2)^{3/12}$

$$= (9^4 x^8)^{1/12}(3^3 x^6 y^6)^{1/12}$$

$$= (9^4 x^8 3^3 x^6 y^6)^{1/12}$$

$$= (9^4 3^3 x^{14} y^6)^{1/12}$$

$$= (3^{11} x^{14} y^6)^{1/12}$$

$$= (3^{11})^{1/12}(x^{12}x^2)^{1/12}(y^6)^{1/12}$$

$$= x^{12}\,\sqrt[12]{3^{11} x^2 y^6}$$

h) $(\sqrt{x} + a)(\sqrt{x} - a) = x - a^2$

i) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$

j) $\sqrt{2a}\,\sqrt{4a}\,\sqrt[3]{5a} = \sqrt{8a^2}\,\sqrt[3]{5a} = \sqrt{2^2 2a^2}\,\sqrt[3]{5a} = 2a\sqrt{2}\,\sqrt[3]{5a}$

$$= 2a(2)^{1/2}(5a)^{1/3} = 2a(2)^{3/6}(5a)^{2/6}$$

$$= 2a(2^3 5^2 a^2)^{1/6}$$

$$= 2a\sqrt[6]{2^3 5^2 a^2}$$

Haz lo que se indica y simplifica.

a) $\sqrt[3]{20}\,\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{4xy}\,\sqrt{3xy^2}$

c) $\sqrt{a-b}\ \sqrt{a+b}$

d) $\sqrt[3]{a-b}\ \sqrt{a^2+ab+b^2}$

e) $\sqrt[a]{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\sqrt[3]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

g) $\sqrt{a}\ \sqrt[3]{b}\ \sqrt[4]{c}$

h) $\sqrt[4]{2a^2b}\ \sqrt[4]{4a^2b}$

i) $\sqrt[3]{3xy^2}\ \sqrt[6]{4x^2y}$

j) $\sqrt{6ab}\ \sqrt[4]{6ab^2}$

k) $\sqrt{2x}\ \sqrt[3]{3xy}\ \sqrt[4]{4x^2y^2}$

l) $\sqrt[3]{4ab}\ \sqrt[4]{6a^2b^3}$

m) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$

n) $(\sqrt{x}+a)^2$

Después de hacer las divisiones siguientes, expresar el resultado en su forma más simple.

a) $\dfrac{8\sqrt{20}}{3\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}}{\sqrt[3]{\dfrac{3}{8}}}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{3x^2y^2}}{\sqrt[4]{2x^3y}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{24axy}}{\sqrt{3a^2xy}}$

e) $\dfrac{\sqrt[4]{24a^2b^6}}{\sqrt[4]{3ab^3}}$

Para hallar la forma más simple de cada expresión dada, se debe distinguir si tienen o no el mismo índice y racionalizar para obtener el radical en su forma más simple, es decir, el denominador libre de radicales. Después de hacerlo, el resultado es

a) $\dfrac{8\sqrt{20}}{3\sqrt{2}} = \dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{20}{2}} = \dfrac{8}{3}\sqrt{10}$

$$\text{ó } \frac{8\sqrt{20}}{3\sqrt{2}} = \frac{8}{3}\,\frac{\sqrt{20}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{40}}{3(2)} = \frac{8\sqrt{40}}{3(2)} = \frac{8\sqrt{2^2\cdot 2\cdot 5}}{3(2)} = \frac{8\cdot 2\sqrt{10}}{3(2)} = \frac{8\sqrt{10}}{3}$$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}}{\sqrt[3]{\dfrac{3}{8}}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}\div\dfrac{3}{8}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3}{8}} = \sqrt[3]{\dfrac{24}{12}} = \sqrt[3]{2}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{3x^2y^2}}{\sqrt[4]{2x^3y}} = \dfrac{(3x^2y^2)^{1/3}}{(2x^3y)^{1/4}} = \dfrac{(3x^2y^2)^{4/12}}{(2x^3y)^{3/12}} = \dfrac{\sqrt[12]{(3x^2y^2)^4}}{\sqrt[12]{(2x^3y)^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^4x^8y^8}{2^3x^9y^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{3^4y^5}{2^3x}}$

$$= \frac{\sqrt[12]{3^4y^5}}{\sqrt[12]{2^3x}} = \frac{\sqrt[12]{2^9x^{11}}}{\sqrt[12]{2^9x^{11}}} = \frac{\sqrt[12]{3^4 2^9x^{11}y^5}}{\sqrt[12]{2^{12}x^{12}}}$$

$$= \frac{\sqrt[12]{3^4 2^9x^{11}y^5}}{2x}$$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{24axy}}{\sqrt{3a^2xy}} = \dfrac{(24axy)^{1/3}}{(3a^2xy)^{1/2}} = \dfrac{(24axy)^{2/6}}{(3a^2xy)^{3/6}} = \dfrac{(2^6 3^2a^2x^2y^2)^{1/6}}{(3^3a^6x^3y^3)^{1/6}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^6 3^2a^2x^2y^2}{3^3a^6x^3y^3}}$

$$= \sqrt[6]{\frac{2^6}{3a^4xy}} = \frac{2}{\sqrt[6]{3a^4xy}} = \frac{\sqrt[6]{3^5a^{20}x^5y^5}}{\sqrt[6]{3^5a^{20}x^5y^5}}$$

$$= \frac{2\sqrt[6]{3^5a^{20}x^5y^5}}{\sqrt[6]{(3^5a^4xy)^6}} = \frac{2\sqrt[6]{3^5a^{18}a^2x^5y^5}}{3a^4xy}$$

$$= \frac{2a^3\sqrt[6]{3^5a^2x^5y^5}}{3a^4xy} = \frac{2\sqrt[6]{3^5a^2x^5y^5}}{3axy}$$

e) $\dfrac{\sqrt[4]{24a^2b^6}}{\sqrt[4]{3ab^3}} = \sqrt[4]{\dfrac{24a^2b^6}{3ab^3}} = \sqrt[4]{8ab^3}$

Haz las divisiones siguientes y simplifique.

a) $\dfrac{4\sqrt[3]{20}}{3\sqrt[3]{12}}$

b) $\dfrac{3\sqrt{ab}}{2\sqrt{a^2c}}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{3xy}}{\sqrt[4]{24x^2y^5}}$

d) $\dfrac{\sqrt[5]{125a^2b^2}}{\sqrt[5]{25abc}}$

e) $\dfrac{\sqrt{4x^3y^2}}{\sqrt[3]{16x^2y^3}}$

f) $\dfrac{\sqrt[4]{16a^2b}}{\sqrt{10abx}}$

g) $\dfrac{\sqrt[6]{a^2-a^2}}{\sqrt[6]{a^4-b^4}}$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{2xy}}{\sqrt[4]{4x^2y^3}}$

i) $\dfrac{\sqrt[5]{a/b^2}}{\sqrt[5]{a/c^2}}$

j) $\dfrac{\sqrt{a+a}}{\sqrt[5]{a-b}}$

k) $\dfrac{\sqrt[5]{8}}{\sqrt[3]{3(a^2-b^2)}}$

l) $\dfrac{\sqrt[6]{3x^2y^2}}{3\sqrt[3]{5x^3y^5}}$

m) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+5}}{\sqrt{\sqrt{x}-5}}$

Capítulo 10

Ecuación lineal de primer grado

Toda expresión de la forma $ax + b = 0$ y sus equivalentes, donde $a, b \in R$, $a \neq 0$, se denomina ecuación lineal o de primer grado en la variable x.

Una ecuación de este tipo puede ser condicionadas y no condicionadas; y, además, pueden o no tener solución.

A las ecuaciones no condicionadas, se les llama identidades y ésta es válida para todo valor de x en el dominio de la expresión algebraica. Por ejemplo,

$$3x + 1 = 1 + 3x$$

es una identidad y es válida en todos los reales.

Las ecuaciones condicionadas, cuando tiene solución o raíz, sólo es válida para un valor de x. Por ejemplo, la ecuación $x - 5 = 0$, es una ecuación condicionada, pues a éste sólo un valor de x la satisface. Una ecuación de este tipo puede no tener solución.

Las ecuaciones, también pueden ser numéricas y literales. Por ejemplo, $2x + 5 = x - 7$ es numérica, porque sólo aparece una literal, la incógnita; $ax + 5b = c$, es literal, porque aparecen literales, aparte de la x. En un caso dado, a, b y c pueden ser consideradas como incógnitas y, consecuentemente despejarse.

Las ecuaciones $2x + 7 = 3x - 1$ y $ax + b = cx + d$ son enteras; siempre y cuando a, b, c y d no sean racionales. Mientras las ecuaciones

$$\frac{2x}{x+3} - 7 = 8 + \frac{3x}{x+3} \quad \text{y} \quad \frac{ax+b}{cx+d} = 3$$

son racionales.

Ahora, si $a = 0$, b y x están en R, entonces $ax + b = 0$, si y sólo si $x = -a^{-1}b$, cuya proposición debe ser verificada.

Para verificar la conclusión de esta proposición se parte de $ax + b = 0$, con $a = 0$, aunque puede partirse de $x = -a^{-1}b$ y se utiliza el método de ecuaciones equivalentes, es decir, las ecuaciones que tiene la misma solución.

Después de agregar a ambos lados de la igualdad el inverso aditivo de b, se obtiene

$$ax + b + (-b) = 0 + (-b)$$

$$ax + 0 = 0 + (-b)$$

Por la existencia de la identidad aditiva, la ecuación anterior se reduce a

$$ax = -b$$

Ahora, multiplicando ambos lados de la ecuación por el inverso multiplicativo de a y por conmutatividad, asociatividad y por la existencia de la multiplicativa; se obtiene

$$(a^{-1})ax = -(a^{-1})b$$

$$((a^{-1})a)x = -b(a^{-1})$$

$$(1)x = -ba^{-1}$$

$$x = -ba^{-1}$$

la cual es la solución única dada. Así que, el conjunto solución es

$$\{-ba^{-1}\}$$

Se debe tener en cuenta que hay operaciones que aplicadas a los dos lados de una ecuación introducen o eliminan raíces.

En cada caso, ¿qué valor de la variable satisface la ecuación dada?

1) $2(x + 3) + 2 = 3(x + 2) + 5$

Ambas expresiones de las componentes de la igualdad tiene como dominio de definición los números reales; si de ésta se toma el número 0 y éstas se valoran con tal número, el resultado es 8 y 11, lo cual muestra que son diferentes; luego, la ecuación dada es una proposición abierta condicionada y como tal se resolverá.

Por la propiedad distributiva, esta ecuación se reduce a

$$2x + 6 + 2 = 3x + 6 + 5$$

luego de asociar y sumar números, el resultado es

$$2x + 8 = 3x + 11$$

Por el inverso aditivo de 8 y la identidad aditiva, se obtiene

$$2x + 8 + (-8) = 3x + 11 + (-8)$$

$$2x + 0 = 3x + 3$$

$$2x = 3x + 3$$

Ahora, por simetría, se obtiene

$$3x + 3 = 2x$$

Después de sumar el inverso aditivo de 3 y por la existencia de la identidad aditiva, se obtiene

$$3x + 3 + (-3) = 2x + (-3)$$

$$3x + 0 = 2x - 3$$

$$3x = 2x - 3$$

Luego de sumar a los dos elementos de la igualdad el inverso aditivo de 2x y sabiendo que existe la identidad aditiva, se obtiene

$$3x + (-2x) = 2x + (-2x) - 3$$

$$3x - 2x = 2x - 2x - 3$$

$$x = -3$$

Comprobación. Luego de remplazar a x por – 3 en la ecuación propuesta y resolver las operaciones, se obtiene

$$2(-3 + 3) + 2 = 3(-3 + 2) + 5$$

$$2 = -9 + 6 + 5$$

$$2 = 2$$

la cual es una identidad.

La identidad muestra que –3 es la solución o raíz de la ecuación dada. Así que, el conjunto solución es {–3}

2) $\dfrac{2x}{x-3} + 1 = 3 + \dfrac{3x}{x-3}$

Dado que 3 no está en el dominio de definición de las expresiones algebraicas, este número no puede ser solución o raíz de la ecuación. Después de remplazar a x por 4 en ambas expresiones algebraicas, se encuentra que el número obtenido del lado izquierdo de la igualdad es diferente al número obtenido a la derecha de la misma. Consecuentemente, la ecuación dada es condicionada.

La ecuación dada se puede expresar como

$$2x(x-3)^{-1}+1=3+3x(x-3)^{-1}$$

Ahora, se multiplican ambos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de $(x-3)^{-1}$, y luego de utilizar las propiedades asociativas, distributivas y conmutativa, se obtiene

$$[2x(x-3)^{-1}+1]\{(x-3)^{-1}\}^{-1}=[3+3x(x-3)^{-1}]\{(x-3)^{-1}\}^{-1}$$

$$2x(x-3)^{-1}\{(x-3)^{-1}\}^{-1}+1\{(x-3)^{-1}\}^{-1}=3\{(x-3)^{-1}\}^{-1}+3x(x-3)^{-1}\{(x-3)^{-1}\}^{-1}$$

$$2x(1)+x-3=3(x-3)+3x(1)$$

Por existencia de la identidad multiplicativa, esta ecuación se transforma en

$$2x+x-3=3(x-3)+3x$$

Por la propiedad distributiva de la sustracción, se obtiene

$$2x+x-3=3x-9+3x$$

Por la propiedad asociativa y reducción de términos semejantes, esta ecuación se reduce a

$$3x-3=6x-9$$

Por simetría, la ecuación se escribe como

$$6x-9=3x-3$$

Luego de sumar a los dos lados de la igualdad el inverso aditivos de -9 y sabiendo que existe la identidad aditiva; y resolviendo las operaciones, el resultado es

$$6x+0=3x+6$$

$$6x=3x+6$$

Para continuar, a ambos lados de la igualdad se suma el inverso aditivo de $3x$ y sabiendo que existe la identidad aditiva, y resolviendo las operaciones, el resultado es

$$6x + (-3x) = 3x + (-3x) + 6$$

$$6x - 3x = 0 + 6$$

$$3x = 6$$

Enseguida, se multiplica a los dos componentes de la igualdad por el inverso multiplicativo de 3 y por las propiedades conmutativa y asociativa, se tiene que

$$3x(3)^{-1} = 6(3)^{-1}$$

$$3(3^{-1})x = 6/3$$

Finalmente por la identidad multiplicativa y la división,

$$x = 2$$

Comprobación. Luego de cambiar a x por 2 en la ecuación propuesta y operar, el resultado es

$$-4 + 1 = 3 - 6$$

El resultado prueba que 2 es la solución o raíz de la ecuación propuesta, en consecuencia, el conjunto solución es {2}.

3) $\dfrac{t+1}{t-1} + \dfrac{t}{t+1} = \dfrac{2t^2}{t^2-1}$

De acuerdo con los términos racionales, –1 y 1 no pueden ser raíces de la ecuación, porque no están en el dominio de las expresiones algebraicas. Al remplazar a t por 3 en la ecuación, se encuentra que el número obtenido en el lado izquierdo de la igualdad es diferente al obtenido del lado derecho de la misma, lo cual significa que la ecuación dada es una proposición condicionada.

Ahora, luego de multiplicar a los dos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de $\dfrac{1}{t^2-1}$, utilizar las propiedades distributiva, asociativas y resolver las operaciones, el resultado es

$$(t + 1)(t + 1) + t(t - 1) = 2t^2$$

Luego de aplicar la propiedad distributiva, se obtiene

$$t(t + 1) + 1(t + 1) + t^2 - t = 2t^2$$

$$t^2 + t + t + 1 + t^2 - t = 2t^2$$

Después de asociar términos semejantes y resolver operaciones, el resultado es

$$2t^2 + t + 1 = 2t^2$$

Por la propiedad cancelativa de la igualdad, la última ecuación se reduce a

$$t + 1 = 0$$

Por último, por el inverso aditivo de 1 y por la identidad aditiva, se obtiene

$$t = -1$$

Comprobación. Después de sustituir a t por –1 en la ecuación propuesta, se obtiene

$$\frac{-1+1}{-1-1} + \frac{-1}{-1+1} = \frac{2(-1)^2}{(-1)^2 - 1}$$

La cual, como se esperaba, es una expresión indeterminada, ya que –1 no está en el dominio de definición de las expresiones algebraicas. Por lo tanto, la ecuación dada no tiene solución y, consecuentemente, es un enunciado falso. Así que, el conjunto solución es el vacío.

Si la ecuación dada no está correctamente resuelta, la conclusión no es la debida. ¡resuélvela y concluye!

4) $ax + a(x^2 + b) = b + x(b + ax)$

Resolviendo para x, a y b son elementos conocidos.

Por la propiedad distributiva, se obtiene

$$ax + ax^2 + ab = b + xb + ax^2$$

Por la propiedad cancelativa de la igualdad a por el inverso aditivo de ax^2 , se obtiene

$$ax + ab = b + xb$$

Por los inversos aditivos de ab y bx, se obtiene

$$ax - xb = b - ab$$

Aplicando la propiedad distibutiva de la resta, el resultado es

$$x(a - b) = b - ab$$

A continuación, ambos lados de la igualdad se multiplican por el inverso de $(a - b)$ y por la existencia de la identidad multiplicativa, se tiene que

$$x = \frac{b - ab}{a - b}$$

Comprobación. Para verificar, se sustituye a x por $\frac{b - ab}{a - b}$ en la expresión propuesta, y se resuelven las operaciones, esto es,

$$a\left(\frac{b - ab}{a - b}\right) + a\left(\frac{b - ab}{a - b}\right)^2 + ab = b + b\left(\frac{b - ab}{a - b}\right) + \left(\frac{b - ab}{a - b}\right)^2$$

$$a(b - ab)(a - b) + a(b - ab)^2 + ab(a - b)^2 = b(a - b)^2 + b(b - ab)(a - b) + a(b - ab)^2$$

$$a(ab - b^2 - a^2b + ab^2) + a(b^2 - 2ab^2 + a^2b^2) + ab(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= b(a^2 - 2ab + b^2) + b(ab - b^2 - a^2b + ab^2) + a(b^2 - 2ab^2 + a^2b^2)$$

$$a^2b - ab^2 - a^3b + a^2b^2 + ab^2 - 2a^2b^2 + a^3b^2 + a^3b - 2a^2b^2 + ab^3$$

$$= a^2b - 2ab^2 + b^3 + ab^2 - b^3 - a^2b^3 + ab^2 + ab^2 - 2a^2b^2 + a^3b^2$$

$$a^2b - 3a^2b^2 + a^3b^2 + ab^3 = a^2b - 3a^2b^2 + ab^2 + a^3b^2$$

La identidad obtenida es la señal de que la cantidad obtenida es la raíz o solución en la ecuación resuelta. Por consiguiente, el conjunto solución es

$$\left\{\frac{b - ab}{a - b}\right\}$$

Para separar a o b, se sigue el mismo procedimiento, en ambos, se obtiene la ecuación $ax + ab = b + bx$ y, consecuentemente, de ésta, se puede despejar a o b.

Resolver lo siguiente.

Hallar el conjunto solución de las ecuaciones dadas.

a) $\frac{2x}{3} + 4 = x - 7$

b) $(x - 2)^2 + 4 = x^2 - 2x + 7$

c) $\frac{8t - 3}{2} + 6 = \frac{3t + 1}{5}$

d) $\frac{7x + 4}{3} + 2 = 3$

e) $\frac{2}{x+2} - \frac{5}{x+3} = \frac{2x+3}{x^2+5x+6}$

f) $\frac{8}{x-3} - \frac{8}{x+3} = \frac{5x+2}{x^2-9}$

g) $\frac{t+5}{t-3} - \frac{t-7}{t+3} = \frac{2t^2-3t+2}{t^2-9}$

h) $\frac{2t}{t+2} - \frac{3}{t-2} = \frac{2t+5}{t+2}$

i) $\frac{x-9}{3x+1} + 3 = \frac{x+10}{3x+1} + 1$

j) $\dfrac{\frac{t+2}{5} - 1}{\frac{t+2}{6} + 3} = 1$

k) $+\frac{a}{b} = 5$

l) Resolver para a, x

$$\frac{x+a}{b} + \frac{(x+a)^2}{3x+1} = \frac{x^2+(a+b)x+ab}{b^2}$$

m) $\frac{x+k}{x+b} = \frac{x+c}{x+2}$, resolver para x, b

Después de resolver la ecuación, se debe hacer la comprobación.

Capítulo 11

Valor absoluto y desigualdad

Para resolver ecuaciones con valor absoluto, debes haber comprendido la definición de valor absoluto y sus propiedades.

La comprensión de la resolución de la ecuación

$$|x| = a, \quad a \geq 0$$

Es fundamental para resolver las ecuaciones con valor absoluto. En este sentido, la igualdad $|x| = a$ significa que $x = a$ o que $-x = a$, porque el valor absoluto de x, $|x|$, es el mismo x o bien $-x$, es decir,

$$|x| = \begin{cases} x \\ -x \end{cases}$$

Como puede observar, $x = a$ y $x = -a$; de donde la solución es $x = a$ ó $x = -a$

Después de comprobar, se encuentra que $a = a$ y $-a = a$. En consecuencia, el conjunto solución es

$$|a| = \{-a, a\}$$

Ver la figura 10.1 siguiente.

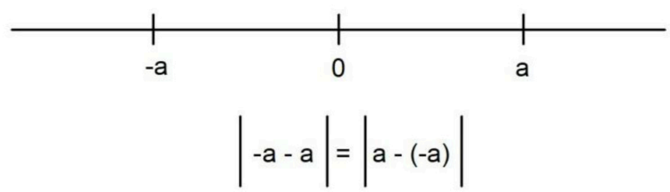


Figura 10.1 Representación gráfica de $|a|$.

En esta ecuación, el conjunto de números x que satisfacen a $|x| = a$ es el conjunto de números cuya distancia a cero es a.

a) $|x - 4| = 3$

Esta ecuación significa que $x - 4 = 3$ o que $-(x - 4) = 3$, porque

$$|x| = a$$

Es decir, el valor absoluto de $x - 4$ es el mismo que $(x - 4)$ o bien $-(x - 4)$. Después de resolver $x - 4 = 3$, $x = 7$; y $x - 4 = -3$, $x = 1$. Como puede observarse, $x = 7$ y $x = 1$, de donde la solución es $x = 7$ ó $x = 1$.

Luego de comprobar, se encuentra que $7 - 4 = 3$ y $1 - 4 = 3$. Por consiguiente, el conjunto solución es $\{1, 7\}$.

En la ecuación $|x - 4| = 3$, el conjunto de números que satisfacen esta ecuación es el conjunto de números cuya distancia a 4 es 3. Ver la figura 10.2 siguiente.

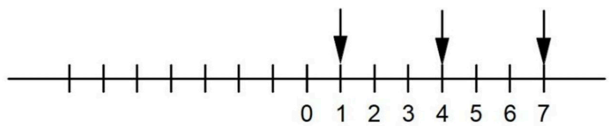


Figura 10.2 Representación gráfica de $|x - 4| = 3$.

b) $|x + 4| = 3$

Esta igualdad significa que $x + 4 = 3$ o que $-(x + 4) = 3$, porque

$$x + 4 = \begin{cases} x + 4 \\ -(x + 4) \end{cases}$$

Después de resolver las ecuaciones $x + 4 = 3$ y $-(x + 4) = 3$, se obtiene que $x = -1$ y $x = -7$.

Para comprobar, se reemplaza a x por -1 y -7, respectivamente, se obtiene $|-1 + 4| = 3$ y $|-7 + 4| = 3$. Por consiguiente, el conjunto solución es $\{-7, -1\}$.

El conjunto de números que satisfacen a $|x + 4| = 3$ es el conjunto de números cuyas distancia a -4 es 3. Ver figura 10.3 siguiente.

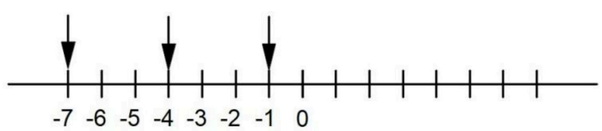


Figura 10.3 Representación gráfica de $|x + 4| = 3$.

c) $|2x - 5| = 4 - x$

$|2x - 5| = 4 - x$ significa que $2x - 5 = 4 - x$ o que $-(2x - 3)= 4 - x$. Después se resuelven las ecuaciones siguientes.

$$\begin{array}{lcl} 2x - 5 = 4 - x & ó & 2x - 5 = -(4 - x) \\ 3x = 9 & & 2x - 5 = x + 4 \\ x = 3 & & x = 1 \end{array}$$

Como $x = 3$ y $x = 1$, están en $x \leq 4$, y además, se cumple que $|2(3) - 5| = 4 - 3$ y $|2(1) - 5| = 4 - 1$. Entonces, el conjunto solución es $\{1, 3\}$.

d) $|2x - 1| = |2 - x|$

Esta ecuación es equivalente a las ecuaciones $2x - 1 = 2 - x$, o $-(2x - 1) = 2 - x$. Enseguida se resuelven las ecuaciones, esto es,

$$2x - 1 = 2 - x \qquad\qquad 2x - 1 = 2 - x$$

$$3x = 3 \qquad\qquad 2x - 1 = x - 2$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = -1$$

Para comprobar, se reemplaza a x por 1 ó -1 en la ecuación propuesta, esto es $|2(1) - 1|=|2 - 1|$ y $|2(-1) - 1| = |2 - (-1)|$. Eliminando paréntesis, $|1| = |1|$ y $|-3| = |3|$. Por consiguiente, el conjunto solución es $\{-1, 1\}$.

e) $\left|\dfrac{3x-1}{x-5}\right| = 1$

Si al resolver la ecuación dada, se obtiene a 5 como solución, ésta será una proposición falsa, porque tal número no está en el dominio de definición de la expresión algebraica dada.

La ecuación dada es equivalente a las ecuaciones

$$\frac{3x-1}{x-5} = 1 \qquad \text{ó} \qquad -\left(\frac{3x-1}{x-5}\right) = 1$$

es decir, la ecuación dada será satisfecha si

$$\left(\frac{3x-1}{x-5}\right) = 1 \qquad\qquad -\left(\frac{3x-1}{x-5}\right) = 1$$

$$3x - 1 = x - 5 \qquad\qquad \left(\frac{3x-1}{x-5}\right) = -1$$

$$2x = -4 \qquad\qquad 3x - 1 = -x + 5$$

$$x = -4/2 \qquad\qquad 3x + x = 5 + 1$$

$$x = -2 \qquad\qquad 4x = 6$$

$$x = 6/4 = 3/2$$

Después de remplazar a x por –2 ó 3/2 en la ecuación dada, y resolver las operaciones, se obtiene

$$\left(\frac{3(-2)-1}{-2-5}\right)=1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{3\left(\frac{3}{2}\right)-1}{\frac{3}{2}-5}\right)=1$$

En consecuencia, el conjunto solución es {–2, 3/2}

No todas las ecuaciones con valor absoluto tienen solución. La comprobación es el medio de saberlo.

11.1 Desigualdades

Para resolver desigualdades, cuantas veces sea necesario se recurrirá a la definición de desigualdad y a sus propiedades.

En cada caso, hallar el conjunto solución de la desigualdad dada.

a) $\frac{x}{2}+3<\frac{x}{3}-7$

Según se observa, las expresiones que forman la desigualdad están definidas en todos los reales, es decir, la desigualdad propuesta es no condicionada. Esta desigualdad se puede expresar como $x2^{-1}+3<x3^{-1}-7$.

Ahora ambos lados de la desigualdad se multiplican por los inversos multiplicativos de 2^{-1} y 3^{-1}, y luego de aplicar las propiedades asociativa, distributiva, conmutativa y sabiendo que existe la identidad multiplicativa, el resultado es

$$3x+18<2x-42$$

Por los inversos aditivos de 18 y $2x$, se obtiene que

$$x<-60$$

De donde, el conjunto solución es $x \in (-\infty, -60)$ o $x \notin [-60, \infty)$

También, se puede resolver mediante común denominador como se muestra enseguida, es decir

$$\frac{x+6}{2}<\frac{x-21}{3}$$

a/b < c/d ⇔ ad < bc	$3(x + 6) < 2(x - 21)$
ley distributiva	$3x + 18 < 2x - 42$
por transposición de términos semejantes	$3x - 2x < -42 - 18$
por reducción de términos semejantes	$x < -60$

De acuerdo con esto, el conjunto solución es un intervalo expresado como $x \in (-\infty, -60)$ o $x \notin [-60, \infty)$.

Otra opción es multiplicar ambos componentes de la desigualdad por 6, que es el mínimo común múltiplo de 2 y 3. Esto es,

$$\left(\frac{x}{2} + 3 < \frac{x}{3} - 7\right)6$$

$$\frac{6x}{2} + 18 < \frac{6x}{3} - 42$$

$$3x + 18 < 2x - 42$$

$$\text{y} \quad x < -60$$

b) $x/4 + 2/5 \geq x/5 + 2$

La desigualdad propuesta no es condicionada, según se observa. De acuerdo con el común denominador o mcm, se obtiene

$$\frac{5x + 8}{20} \geq \frac{x + 10}{5}$$

Productos cruzados	$5(5x + 8) \geq 20(x + 10)$
propiedad distributiva	$25x + 40 \geq 20x + 200$
por transposición de términos semejantes e inversos aditivos	$25x - 20x \geq 200 - 40$
por reducción de términos semejantes	$5x \geq 160$
Por el inverso multiplicativo de 5 y por la existencia de la identidad multiplicativa	$x \geq 160/5$
Por división	$x \geq 32$

Comprobación. Para $x = 32$, $\frac{32}{4} + \frac{2}{5} = \frac{32}{5} + 2$, lo cual es cierto 8.4 = 8.4; y para $x = 33$, $\frac{33}{4} + \frac{2}{5} > \frac{33}{5} + 2$, también se cumple 8.65 > 8.6. Por consiguiente, el conjunto solución es el intervalo expresado como $x \in (32, \infty)$ o $x \notin (-\infty, 32)$.

Ahora, para otra solución, los dos componentes de la desigualdad se multiplican por 20, que es el mínimo común múltiplo (mcm) de 4 por 5, o sea

$$\frac{20(x)}{4} + \frac{20(2)}{5} \geq \frac{20(x)}{5} + 20(2)$$

$$5x + 8 \geq 4x + 40$$

$$5x - 4x \geq 40 - 8$$

$$x \geq 32$$

c) $\frac{2x+3}{x-2} < 1$

Como puede observarse, esta desigualdad no está definida en 2, es decir, 2 no está en el dominio de definición de la expresión algebraica, lo cual significa que esta es condicionada.

Para resolver esta desigualdad, se multiplica por $(x - 2) \neq 0$, pero deben considerarse dos casos debido a que la dirección de la desigualdad que resulte depende de si $(x - 2) < 0$ ó $(x - 2) > 0$.

Para cuando $x - 2 < 0$, se tiene que $x < 2$ y como la desigualdad al ser multiplicada por un número negativo cambia, ésta se expresa como

$$2x + 3 > x - 2$$

$$2x - x < -2 - 3$$

$$x < -5$$

de donde, el conjunto solución es el intervalo expresado como

$$x \in (-5, 2)$$

el cuál es la intersección de $x > -1$ (solución parcial con $x < 2$).

Ahora, $x - 2$ es positivo, o sea, $x - 2>0$ y como la desigualdad al ser multiplicada por un número positivo no cambia de dirección, ésta se expresa como

$$2x + 3 < x - 2$$

$$2x - x < -2 - 3$$

$$x < -5$$

Como no hay intersección entre $x < -5$ (solución parcial) y $x > 2$ (restricción). Entonces el intervalo solución es

$$x \in (-5, 2) \quad \text{ó} \quad x \notin (-\infty, -5]U[2, \infty)$$

11.2 Problemas de asimilación

1) En cada caso, hallar el conjunto solución de la desigualdad dada.

a) $\dfrac{2x+3}{x-2} \geq 1$

b) $x^2 < 9$

c) $x^2 \geq 16$

d) $x^2 < -x + 20$

La solución al problema a) parte de la observación de que 2 no está en el dominio de definición de la expresión, debido a la indeterminación al dividir por cero, de modo que esta desigualdad es condicionada.

Para $x - 2 < 0$ ó $x < 2$. Después de multiplicar a ambos lados de la desigualdad por $(x - 2)$, bajo la condición dada, se obtiene la desigualdad con signo invertido, es decir,

$$2x + 3 \leq x - 2, \text{ de donde}$$

$$2x - x \leq -2 - 3$$

$$x \leq -5$$

Como la intersección entre $x \leq -5$ (solución parcial) y $x < 2$ (restricción) es el intervalo $x \leq$-5. Entonces, el intervalo expresado como $x \in (-\infty, -5]$ es la solución parcial en $x < 2$.

Para continuar, se multiplican los dos lados de la desigualdad por $x - 2$, observando que $x - 2 > 0$ ó $x > 2$, o sea,

$$2x + 3 \geq x - 2$$

Como se observa, el signo de desigualdad no cambia, lo cual se debe a que toda desigualdad que se multiplica por un número positivo, éste no cambia de dirección.

Después de resolver esta desigualdad, el intervalo es $2x - x \geq -2 - 3$

$$x \geq -5$$

La intersección entre $x \geq -5$ (solución parcial) y $x > 2$ (restricción) está dada por $x \in (2, \infty)$. Luego, la solución parcial es $x \in (2, \infty)$.

Por lo tanto, la solución de la desigualdad está dada por $x \in (-\infty, -5]\ U\ (2, \infty)$. Ver la figura 11.1 siguiente.

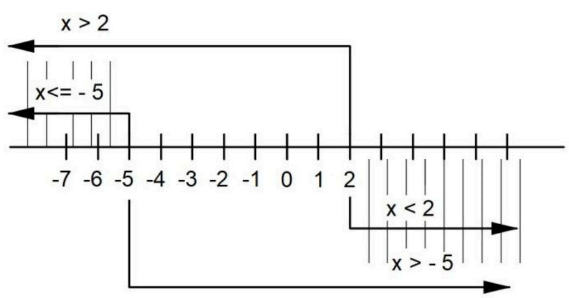


Figura 11.1 Solución gráfica de $x \in (-\infty, -5]\ U\ (2, \infty)$ ó $x \notin (-5, 2)$.

Después de remplazar a x por –5, –6, 3 y 4 en $\dfrac{2x+3}{x-2} \geq 1$, se encuentra que esta se cumple; lo que no ocurre por ejemplo con los valores –4,–3 y 2.

En lo que sigue, para aclarar, se resuelven desigualdades de segundo grado.

b) $x^2 - 9$

En la solución al problema b) se debe considerar las desigualdades cuadráticas**.** Toda desigualdad que se puede reducir a $Q < 0$ y $Q \leq 0$; $Q > 0$ y $Q \geq 0$, donde Q es un polinomio de segundo grado, se denomina desigualdad cuadrática.

Para hallar el conjunto solución, se utiliza la propiedad $a^2 < b \leftrightarrow -\sqrt{b} < x < \sqrt{b}$, o sea $x^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Así, la solución es el intervalo expresado como $x \in (-3, 3)$, o bien,$x \notin (-\infty, -3]\ U\ [3, \infty)$

Esta desigualdad, se puede resolver haciendo la transportación del número 9 o sumando a los dos lados de la desigualdad el inverso aditivo de 9, es decir,

$$x^2 - 9 < 0$$

Luego de factorizar, se obtiene

$$(x-3)(x+3) < 0$$

De $x - 3 > 0$ y $x + 3 > 0$; $x - 3 < 0$ y $x + 3 < 0$; $x - 3 < 0$ y $x - 3 > 0$; se selecciona la pareja $x - 3 < 0$ y $x + 3 > 0$, es decir, $x < 3$ y $x > -3$. Las dos desigualdades son válidas en el intervalo $(-3, 3)$ ó $-3 < x < 3$, lo que significa que este intervalo es la solución, o bien,

$$x \notin (-\infty, -3]\ U\ [3, \infty)$$

Al resolver $x^2 \leq 9$, ¿en qué cambia el intervalo de solución?

c) $x^2 \geq 16$

Sabiendo que $a^2 > b$ equivale a $a \geq \sqrt{b}$ o $a \leq -\sqrt{b}$. Entonces, $x^2 \geq 16$ equivale a $x \geq \sqrt{16} = 4$ ó $x \leq -\sqrt{16} = -4$. La figura 11.2 muestra el trazo de la desigualdad en un rango de $[-8, 8]$.

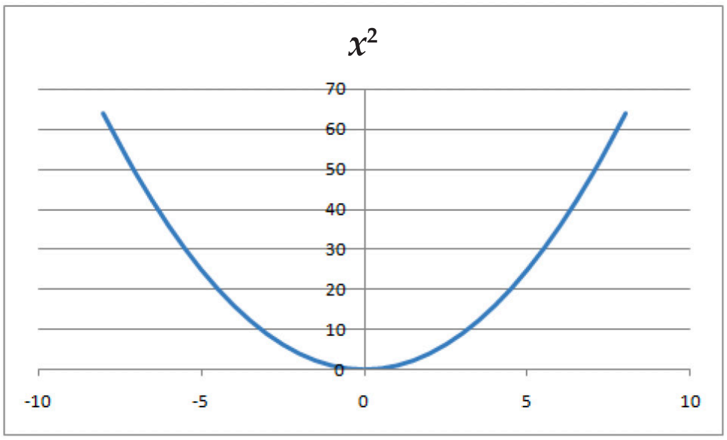


Figura 11.2 Gráfica de la función $f(x) = x^2$.

Por consiguiente, la solución es la unión de estos dos conjuntos, o sea,

$$x \in (-\infty, -4]\ U\ [4,\infty), \text{ o } x \notin (-4, 4)$$

Para resolver esta desigualdad de otra manera, se transpone o se utiliza el inverso aditivo de 16, esto es, $x^2 - 16 \geq 0$. A continuación, esta expresión algebraica se factoriza, o sea, $(x - 4)(x + 4) \geq 0$. Esta desigualdad sólo se cumple cuando $x - 4 \geq 0$ y $x - 4 \geq 0$; o $x - 4 \leq 0$ y $x - 4 \leq 0$; pero no cuando $x - 4 \geq 0$ y $x - 4 \leq 0$.

De acuerdo con $x - 4 \geq 0$ y $x + 4 \geq 0$, $x \geq 4$ y $x \geq -4$. Se observa que las dos desigualdades son válidas en el intervalo en el que ambas se interceptan, es decir, en $x \geq 4$, cuyo intervalo es una solución parcial. Ahora, si $x - 4 \leq 0$ y $x + 4 \leq 0$ ó $x \leq 4$ y $x \leq -4$, se ve que éstas se interceptan en $x \leq -4$, cuyo intervalo es una solución parcial. La figura 11.3 muestra el cumplimiento o no cumplimiento de la desigualdad. Las zonas sombreadas si cumplen.

x	x - 4	x + 4	x - 4 < = 0	x + 4 < = 0	x^2 - 16 >= 0	cumple
-6	-10	-2	si	si	20	si
-5	-9	-1	si	si	9	si
-4	-8	0	si	si	0	si
-3	-7	1	si	no	-7	no
-2	-6	2	si	no	-12	no
-1	-5	3	si	no	-15	no
0	-4	4	si	no	-16	no
1	-3	5	si	no	-15	no
2	-2	6	si	no	-12	no
3	-1	7	si	no	-7	no
4	0	8	si	no	0	si
5	1	9	no	no	9	si
6	2	10	no	no	20	si

Figura 11.3 Valores de x que cumplen condición.

Por consiguiente, La solución de la desigualdad es la unión de los conjuntos $x \geq 4$ y $x \leq -4$, es decir, $x \in (-\infty, -4]\ U\ [4, \infty)$, o bien, $x \notin (-4, 4)$. Ver figura 11.4 siguiente:

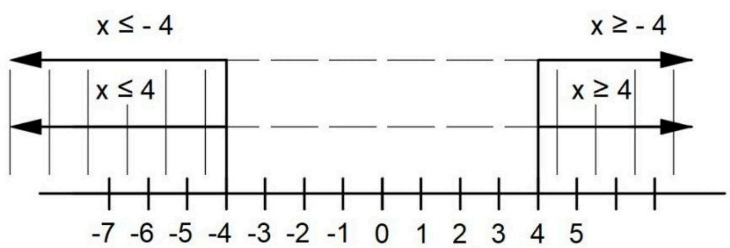


Figura 11.4 Representación gráfica de la solución.

d) $x^2 < -x + 20$

Después de transponer términos o usar inversos aditivo, la desigualdad queda expresada como Después de transponer términos o usar inversos aditivo, la desigualdad queda expresada como $x^2 + x - 20 < 0$. Después de factorizar, esta desigualdad se escribe como $(x - 4)(x + 5) < 0$. Esta desigualdad se cumple si y sólo si $x - 4 < 0$ y $x + 5 > 0$; pero no para cuando $x - 4 < 0$ y $x + 5 < 0$; $x - 4 > 0$ y $x + 5 > 0$. Cuando $x - 4 < 0$ y $x + 5 > 0$, $x < 4$ y $x > -5$. De donde, el conjunto solución son los números reales que están en la intersección de $x < 4$ y $x > -5$, es decir, con

$$x \in (-5, 4) \text{ o } x \notin (-\infty, -5]\ U\ [4, \infty).$$

Para cuando $x - 4 > 0$ y $x + 5 < 0$, se tiene que $x > 4$ y $x < -5$. Entonces, se puede observar que entre estos conjuntos no hay intersección y, consecuentemente, la solución corresponde al conjunto vacío. Ver figura 11.5 siguiente:

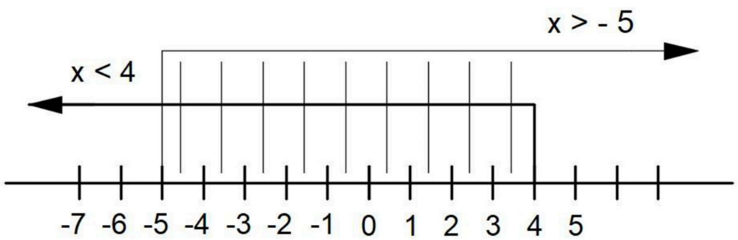


Figura 11.5 Representación gráfica de la solución.

¿En qué se modifica la solución cuando la desigualdad tiene la forma forma $x^2 \leq -x + 20$?

11.3 Desigualdades con valor absoluto

Para resolver desigualdades con valor absoluto debes tener en cuenta lo siguiente.

a) $|x| \leq a$

Si $x \geq 0$, entonces $|x| = x$ y $0 \leq x \leq a$.

Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $-x \leq a$ o $-a \leq x$. De donde $-a \leq x < 0$

Por consiguiente, si $|x| < a$, entonces $-a < x < a$.

b) $|x| \geq a$

Para $x > 0$, entonces $|x| = x$ y $x \geq a$

Para $x <0$, entonces $|x| = -x$ y $-x \geq a$ ó $x \leq -a$

Por consiguiente, $| \ | \geq a \leftrightarrow x \geq a$ ó $x \leq -a$.

Por extensión, si $|x| > a$, entonces $x > a$ ó $x < -a$.

c) $|x + 3| < 9$

De acuerdo con lo recientemente dicho,

$|x + 3| < 9 \leftrightarrow -9 < x + 3 < 9$

Después de sumar el inverso aditivo de 3 a los elementos de la desigualdad, se tiene que $-9 -3 < x + 3 -3 < 9 - 3$ ó $-12 < x < 6$. Luego x $\in (-12, 6)$ ó x $\notin (-\infty, -12]\ U\ [6, \infty)$.

Como $-9 < x + 3 < 9$, se puede expresar de tal manera que $-9 < x + 3$ ó $x + 3 < 9$, luego $-12 < x$ y $x \leq 6$, de donde $-12 \leq x \leq 6$.

d) $|2x - 3| \geq 6$

Sabemos que $|2x - 3| \geq 6 \Leftrightarrow 2x - 3 \geq 6$ ó $2x - 3 \leq -6$.

$2x - 3 \geq 6$ $\quad$ $2x - 3 \leq -$ $\quad$ (por transposición de términos o suma de inversos aditivos)

$2x \geq 9$ $\quad$ $2x \leq -3$

$x \geq 9/2$ $\quad$ $x \leq -\frac{3}{2}$ $\quad$ (por división o por inversos multiplicativos y por la identidad multiplicativa)

Por consiguiente, la solución es la unión de intervalos expresados como

$x \in (-\infty, -3/2]\ U\ [9/2, \infty)$ ó $x \notin (-3/2, 9/2)$

$|(2x - 1)/(x - 3)| \leq 5$

Esta desigualdad, según se observa, no está definida en 3, por lo que ésta es condicionada.

De acuerdo con lo mencionado,

$|(2x - 1)/(x - 3)| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq (2x - 1)/(x - 3) \leq 5$ ó $-5 \leq (2x - 1)/(x - 3)$, $(2x - 1)/(x - 3) \leq 5$.

Ahora, si $-5 \leq (2x - 1)/(x - 3)$ $(2x - 1)/(x - 3) \leq 5$, se multiplica por el denominador $(x - 3)$, se deben considerar dos casos, es decir, $x - 3 > 0$ ó $x - 3 < 0$, el primero es positivo y el segundo es negativo.

Para cuando $x - 3 > 0$. Si $x - 3 > 0$ ó $x > 3$. Entonces

$-5(x - 3) \leq 2x - 1$	$2x - 1 \leq 5(x - 3)$
$-5x + 15 \leq 2x - 1$	$2x - 1 \leq 5x - 15$
$15 + 1 \leq 2x + 5x$	$15 - 1 \leq -2x + 5x$
$16 \leq 7x$	$14 \leq 3x$
$\frac{16}{7} \leq x$	$\frac{14}{3} \leq x$

Por definición de igualdad $x \geq \frac{16}{7}$ y $x \geq \frac{14}{3}$

La solución parcial es el intervalo que resulta de la intersección de los intervalos $x \geq \frac{16}{7}$ y $x \geq \frac{14}{3}$ con la restricción $x > 3$, es decir, $x \geq \frac{14}{3}$ ó $x \in \left[\frac{14}{3}, \infty\right)$

Para cuando $x - 3 < 0$. Si $x - 3 < 0$ entonces $x < 3$. Luego

$$
\begin{array}{ll}
-5(x-3) \geq 2x - 1 & 2x - 1 \geq 5(x-3) \\
-5x + 15 \geq 2x - 1 & 2x - 1 \geq 5x - 15 \\
15 + 1 \geq 5x + 2x & 15 - 1 \geq -2x + 5x \\
16 \geq 7x & 14 \geq 3x \\
\frac{16}{7} \geq x & \frac{14}{3} \geq x \\
x \leq \frac{16}{7} & x \leq \frac{14}{3}
\end{array}
$$

Por consiguiente, la solución parcial es el intervalo que se obtiene de la intersección de los intervalos $x \leq 16/7$ y $x \leq 14/3$ con la restricción $x < 3$, es decir, $x \leq 16/7$ o $x \in \left(-\infty, \frac{16}{7}\right]$.

Finalmente, la solución de la desigualdad es

$x \in \left(-\infty, \frac{16}{7}\right] U \left[\frac{14}{3}, \infty\right)$ ó $x \left(\frac{16}{7}, \frac{14}{3}\right)$

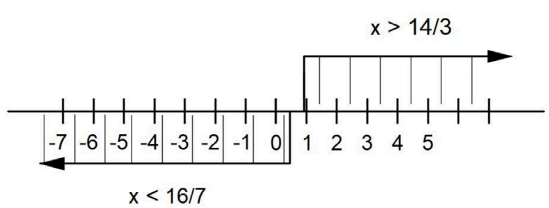


Figura 11.6 Representación gráfica de la solución.

11.4 Problemas de reafirmación

1) En cada caso, hallar el conjunto solución

a) $|x + 5| = 8$

b) $|x - 7| = 1$

c) $|5x - 10| = 0$

d) $|3x - 2| = \mathrm{x}$

e) $|x + 8| = 10 - x$

f) $|x - 2| = 2x - 1$

g) $|3x - 1| = x - 2,\ x - 2 \geq 0$

h) $|2x + 5| = |x + 6|$

i) $|3x - 1| = |2x + 3|$

j) $|2x + 3| = |3x - 2|$

k) $\left|\dfrac{3x - 7}{2x - 1}\right| = 4$

l) $\left|\dfrac{2x - 1}{x - 8}\right| = 3$

2) Hallar el conjunto solución de las desigualdades siguientes.

a) $\dfrac{x}{3} + 5 > \dfrac{x}{5} - 4$

b) $3x + \dfrac{2}{3} < x - \dfrac{3}{4}$

c) $\dfrac{3x}{5} + \dfrac{4}{3} < \dfrac{2x}{3} + \dfrac{2}{15}$

d) $\dfrac{5x + 2}{x - 1} < 6$

e) $\dfrac{3x - 5}{2x - 1} < 6$

3) En cada caso, hallar el conjunto solución.

a) $\dfrac{2x + 3}{x + 4} < 2$

b) $\dfrac{2x - 1}{x - 2} \leq 3$

c) $\dfrac{x + 7}{x - 2} > 4$

d) $\dfrac{3x-5}{2x+1} \geq 5$

e) $x^2 - 25 > 0$

f) $x^2 - 25 \geq 0$

g) $x^2 - 1 < 0$

h) $x^2 - 1 \leq 0$

i) $\left|\dfrac{2x+1}{x+2}\right| < 6$

j) $\left|\dfrac{2x+1}{x-2}\right| \geq 3$

Bibliografía

- E. Purcell y D. Varberg. (2007). ***Cálculo.*** Prentice Hall.
- Fernández, J. (2016). ***Un acercamiento a los fundamentos del cálculo. El infinito y los números reales.*** UNAM.
- James Steward. (2010). ***Cálculo de una variable: Conceptos y contextos***. Cengage Learning.
- Silva, J., Lazo, A. (2000). ***Fundamentos de Matemáticas.*** Limusa Noruega Editores.
- Swokowski, E. (1991). ***Introducción al Cálculo con Geometría Analítica.*** Grupo Editorial Iberoamérica.
- Swokowski, E., Cole, J. (2009). ***Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.*** Cengage Learning.

Los números reales y sus propiedades

Tomas Vargas Ramírez
José Antonio Zamora Plata

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza,
Campus I. Av. Guelatao No. 66 Col. Ejército de Oriente,
Campus II. Batalla 5 de Mayo s/n Esq. Fuerte de Loreto.
Col. Ejército de Oriente.
Iztapalapa, C.P. 09230 Ciudad de México.
Campus III. Ex fábrica de San Manuel s/n,
Col. San Manuel entre Corregidora y Camino a Zautla,
San Miguel Contla, Santa Cruz Tlaxcala.

http://www.zaragoza.unam.mx

9 786073 048965