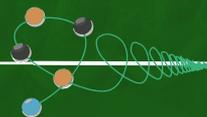


# Temas de bioingeniería:

Modelamiento matemático de membranas flexo-eléctricas inmersas en medios viscoelásticos, biomímesis de células ciliadas externas

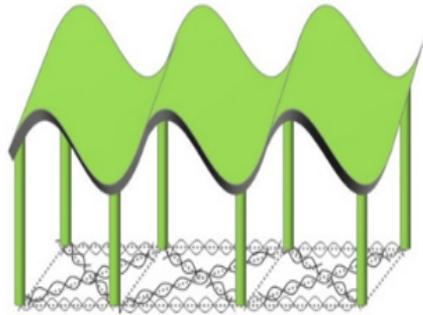
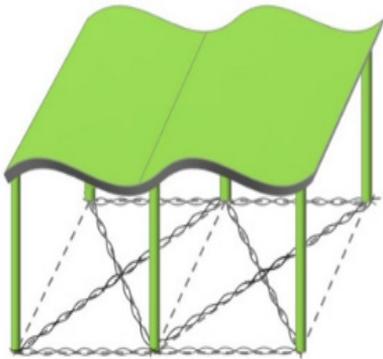
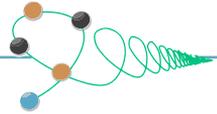
Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia  
Dr. Luis Antonio Ramírez Torres  
Dr. Fausto Calderas García  
I.q. Dominga Ortiz Bautista  
Dra. Mayra Luz Sánchez Villavicencio  
Dr. Gabriel Ascanio Gasca  
Dra. Catalina Soriano Correa  
Dra. Guadalupe Sánchez-Olivares  
Dr. Vicente Jesus Hernández Abad  
I.q. Jazive Hernández Rodríguez  
I.q. Estefania Nava Rivera



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

# Temas de bioingeniería:

## Modelamiento matemático de membranas flexo-eléctricas inmersas en medios viscoelásticos, biomimesis de células ciliadas externas



**Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia**  
**Dr. Luis Antonio Ramírez Torres**  
**Dr. Fausto Calderas García**  
**I.q. Dominga Ortiz Bautista**  
**Dra. Mayra Luz Sánchez Villavicencio**  
**Dr. Gabriel Ascanio Gasca**  
**Dra. Catalina Soriano Correa**  
**Dra. Guadalupe Sánchez-Olivares**  
**Dr. Vicente Jesus Hernández Abad**  
**I.q. Jazive Hernández Rodríguez**  
**I.q. Estefania Nava Rivera**

Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza



Dr. Vicente Jesús Hernández Abad  
**Director**

Dra. Mirna García Méndez  
**Secretaría General**

Dr. José Luis Alfredo Mora Guevara  
**Secretario de Desarrollo Académico**

CD. Yolanda Lucina Gómez Gutiérrez  
**Secretaría de Desarrollo Estudiantil**

Mtro. Luis Alberto Huerta López  
**Secretario Administrativo**

Dra. María Susana González Velázquez  
**Jefa de la División de Planeación  
Institucional**

Dra. Rosalva Rangel Corona  
**Jefa de la División de Vinculación**

Dr. David Nahum Espinosa Organista  
**Jefe de la División de Estudios de Posgrado  
e Investigación**

Lic. Carlos Raziel Leños Castillo  
**Jefe de la Coordinación de Comunicación  
Social y Gestión de Medios**

### Datos para catalogación bibliográfica

Autores: Edtson Emilio Herrera Valencia, Luis Antonio Ramírez Torres, Fausto Calderas García, Dominga Ortiz Bautista, Mayra Luz Sánchez Villavicencio, Gabriel Ascanio Gasca, Catalina Soriano Correa, Guadalupe Sánchez-Olivares, Vicente Jesús Hernández Abad, Jazive Hernández Rodríguez, Estefanía Nava Rivera.

Autor de correspondencia: edtsonhv@comunidad.unam.mx,  
faustocg@unam.mx, luis\_ramirez@comunidad.unam.mx

**Temas de bioingeniería: Modelamiento matemático de membranas flexo-eléctricas inmersas en medios viscoelásticos, biomimesis de células ciliadas externas**

UNAM, FES Zaragoza, junio de 2024.

Peso: 15.2 MB.

ISBN: 978-607-30-9222-7.

Diseño de portada: Carlos Raziel Leños Castillo.  
Formación de interiores: Claudia Ahumada Ballesteros.

Este libro fue dictaminado a través del Comité Editorial de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza y se aprobó en febrero de 2024.

---

### DERECHOS RESERVADOS

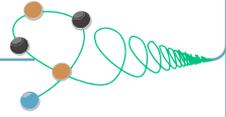
Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del texto o las ilustraciones de la presente obra bajo cualesquiera formas, electrónicas o mecánicas, incluyendo fotocopiado, almacenamiento en algún sistema de recuperación de información, dispositivo de memoria digital o grabado sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

**Temas de bioingeniería: Modelamiento matemático de membranas flexo-eléctricas inmersas en medios viscoelásticos, biomimesis de células ciliadas externas**

D.R. © Universidad Nacional Autónoma de México  
Av. Universidad # 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México, C.U.,  
Alcaldía Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México, México.

**Facultad de Estudios Superiores Zaragoza**  
Av. Guelatao # 66, Col. Ejército de Oriente,  
Alcaldía Iztapalapa, C.P. 09230, Ciudad de México, México.

# Índice



|   |        |
|---|--------|
| <b>PRÓLOGO</b>  | ix     |
| <b>DEDICATORIAS</b>                                     | xiii   |
| <b>AGRADECIMIENTOS</b>                                  | xvii   |
| <b>PARTICIPANTES</b>                                    | xix    |
| <b>RESUMEN</b>  | xxi    |
| <b>SOBRE LOS AUTORES</b>                                | xxiii  |
| Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia                      | xxiii  |
| Dr. Luis Antonio Ramírez Torres                         | xxiv   |
| Dr. Fausto Calderas García                              | xxv    |
| Dra. Mayra Luz Sánchez Villavicencio                    | xxvi   |
| I.Q. Dominga Ortiz Bautista                             | xxvi   |
| Dr. Gabriel Ascanio Gasca                               | xxvii  |
| Dra. Catalina Soriano Correa                            | xxvii  |
| Dra. Guadalupe Sánchez Olivares                         | xxviii |
| Dr. Vicente Jesús Hernández Abad                        | xxix   |
| <b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN A LA FLEXO-ELECTRICIDAD</b> | 1      |
| 1.1 Membranas flexo-eléctricas                          | 2      |
| 1.2 Hipótesis   | 5      |
| 1.3 Objetivos   | 6      |
| 1.3.1 Objetivo General                                  | 6      |
| 1.3.2 Objetivos Particulares                            | 6      |
| 1.4 Distribución del material de estudio                | 6      |
| <b>CAPÍTULO 2. MODELO DE HERRERA-REY</b>                | 9      |
| 2.1 Modelo electro-viscoelástico                        | 10     |
| 2.1.1 Ecuaciones de balance aplicables                  | 12     |

|  |    |
|--|----|
| 2.1.2 Ecuación dinámica sin mecanismos inerciales                                      | 21 |
| <b>CAPÍTULO 3. MODELO HERRERA-REY CON MECANISMOS INERCIALES</b>                        | 25 |
| 3.1 Ecuación dinámica incluyendo los mecanismos inerciales                             | 26 |
| 3.2 Espacio de Fourier   | 27 |
| <b>CAPÍTULO 4. VARIABLES Y NÚMEROS ADIMENSIONALES</b>                                  | 31 |
| 4.1 Modelo electro-reológico viscoelástico adimensional                                | 32 |
| 4.2 Variables adimensionales   | 32 |
| 4.3 Modelo electro-reológico adimensional sin inercia                                  | 33 |
| 4.4 Modelo electro-reológico adimensional con inercia                                  | 34 |
| 4.4.1 Números adimensionales   | 35 |
| 4.5 Espacio 3D-Dimensional   | 37 |
| 4.6 Espacio prismático 3D  | 37 |
| 4.6.1 Modo asimétrico  | 38 |
| 4.6.2 Modo simétrico   | 38 |
| <b>CAPÍTULO 5. RESPUESTA OSCILATORIA LINEAL DE LAS CCE</b>                             | 39 |
| 5.1 Flujo oscilatorio sin inercia  | 40 |
| 5.1.1 Potencia disipada  | 42 |
| <b>CAPÍTULO 6. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE FLUJO VOLUMÉTRICO Y ESFUERZO CORTANTE</b> | 43 |
| 6.1 Diagrama de bloques  | 44 |
| 6.2 Primer diagrama de bloque  | 44 |
| 6.3 Segundo diagrama de bloque   | 45 |
| 6.4 Tercer diagrama de bloque  | 46 |
| <b>CAPÍTULO 7. SIMULACIONES COMPUTACIONALES</b>  | 49 |
| 7.1 Respuesta mecánica newtoniana  | 50 |
| 7.2 Respuesta mecánica viscoelástica: función de transferencia del flujo volumétrico   | 52 |
| 7.3 Respuesta mecánica viscoelástica: función de transferencia del esfuerzo cortante   | 53 |
| 7.4 Aplicaciones biológicas (CCE)  | 56 |
| <b>CAPÍTULO 8. CONCLUSIONES</b>  | 59 |
| 8.1 Resumen y principales contribuciones   | 60 |
| 8.2 Contribución al conocimiento   | 61 |
| <b>BIBLIOGRAFÍA</b>  | 63 |

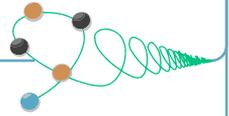


|                          |    |
|--------------------------|----|
| <b>NOTACIÓN</b>          | 69 |
| Letras                   | 69 |
| Vectores y tensores      | 70 |
| Variables adimensionales | 70 |
| Letras Griegas           | 71 |
| Otros Símbolos           | 72 |
| Subíndices               | 72 |
| Abreviaciones            | 72 |
| <b>GLOSARIO</b>          | 75 |





# Índice de figuras



|  |    |
|--|----|
| <b>Figura 1-1.</b> (a) Esquema básico del oído interno y (b) Esquema del fenómeno de flexo-electricidad en las células ciliadas externas del oído humano.  | 1  |
| <b>Figura 1-2.</b> Membrana plasmática de la CCE. (a) Curvatura estática de la membrana, (b) curvatura de la membrana plasmática después de aplicar un campo eléctrico.  | 5  |
| <b>Figura 2-1.</b> Esquema representativo de las CCE para establecer el modelo matemático de Herrera-Rey [14]  | 9  |
| <b>Figura 2-2.</b> Esquema simplificado representativo de las CCE. Adaptado de Herrera-Valencia & Rey (2023) [14].   | 11 |
| <b>Figura 2-3.</b> Analogía mecánica del modelo de la membrana flexo-eléctrica. Adaptado de Herrera-Valencia & Rey (2023) [14].  | 13 |
| <b>Figura 2-4.</b> Viscosidad compleja versus la frecuencia para el modelo Herrera-Rey. El modelo describe un comportamiento decreciente a bajas y a altas frecuencias, y un plateau a frecuencias moderadas.  | 17 |
| <b>Figura 3-1.</b> Norma de la velocidad en un capilar del modelo de Herrera-Rey.  | 25 |
| <b>Figura 4-1.</b> Tres modos materiales usados en las simulaciones computacionales.   | 31 |
| <b>Figura 4-2.</b> Espacio material prismático para los seis posibles modos.   | 38 |
| <b>Figura 5-1.</b> Variación de curvatura de la membrana en las CCE.   | 39 |
| <b>Figura 6-1.</b> Función de transferencia del flujo volumétrico (izquierda), función de transferencia del esfuerzo cortante (derecha).   | 43 |
| <b>Figura 6-2.</b> Primer diagrama de bloque. La variable de entrada (campo eléctrico) con dos señales de salida asociados al esfuerzo en la pared y la curvatura promedio.  | 44 |
| <b>Figura 6-3.</b> Segundo diagrama de bloque. La variable de entrada (esfuerzo en la pared) y la variable de salida (flujo volumétrico). Estas dos describen la función de transferencia asociada al operador fluidez, mecanismos viscoelásticos, inerciales y dispersivos. | 45 |
| <b>Figura 6-4.</b> Tercer diagrama de bloque. La variable de entrada (flujo volumétrico) y la variable de salida (curvatura promedio). Este bloque describe la evolución de la curvatura y la transferencia de momento en las fases líquidas viscoelástica.                  | 47 |

|   |    |
|---|----|
| <b>Figura 6-5.</b> Ilustra la variable de entrada (flujo volumétrico) y de salida (curvatura promedio). Este bloque describe la evolución de la curvatura y la transferencia de momento en las fases líquidas viscoelásticas.   | 48 |
| <b>Figura 6-6.</b> Ilustra la función de transferencia compleja global de las variables de entrada y salida del campo eléctrico y la curvatura promedio.  | 48 |
| <b>Figura 7-1.</b> Respuesta de dos propiedades de flujo de un fluido newtoniano.   | 49 |
| <b>Figura 7-2.</b> Ilustra la función de transferencia compleja del flujo volumétrico versus frecuencia para el modelo newtoniano. En esta figura la frecuencia se puede sustituir por el número adimensional de Womersley.   | 51 |
| <b>Figura 7-3.</b> Ilustra la función de transferencia compleja del esfuerzo cortante versus la frecuencia para el modelo newtoniano. En este punto la frecuencia se puede sustituir por el número de Womersley.  | 51 |
| <b>Figura 7-4.</b> Ilustra la función de transferencia compleja del esfuerzo cortante versus la función de transferencia compleja del flujo volumétrico. A frecuencias bajas, el sistema presenta una misma respuesta dinámica lineal. A moderadas frecuencias la respuesta es directamente proporcional. | 52 |
| <b>Figura 7-5.</b> Ilustra la norma de la función de transferencia del flujo volumétrico versus la frecuencia en función de distintos valores del número adimensional de Deborah  | 53 |
| <b>Figura 7-6.</b> Ilustra la norma de la función de transferencia del esfuerzo cortante versus la frecuencia en función del número adimensional de Deborah.  | 54 |
| <b>Figura 7-7.</b> Ilustra la norma de la función de transferencia del flujo volumétrico versus la norma de la función de transferencia del flujo volumétrico. Las propiedades materiales de este sistema son las reportadas para el modo III.  | 56 |
| <b>Figura 7-8.</b> Resumen de los principales hallazgos en la elaboración de este libro; en la parte inferior-derecha se muestra el espacio paramétrico en 3D en donde el sistema presenta resonancias.   | 57 |
| <b>Figura 8-1.</b> Esquema informativo de este libro.   | 59 |
| <b>Tabla 4-1.</b> Descripción de las variables adimensionales.  | 33 |
| <b>Tabla 4-2.</b> Distintos valores numéricos para los seis modos materiales.   | 37 |



# Prólogo



La primera edición de la presente obra consideramos que es muy importante ya que, por primera vez en la carrera de Ingeniería Química en la FESZ-UNAM, se presenta la solución de un problema de aplicación en el campo de la bioingeniería con conocimientos de Fenómenos de transporte y Reología. Los Fenómenos de transporte son conocimientos adquiridos por los estudiantes en su formación en la carrera de Ingeniería Química de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, pero la Reología no es parte del plan de estudios de la carrera. Por lo anterior, el objetivo de este libro es la de profundizar los conocimientos de los alumnos en el área de Fenómenos de transporte e introducirlos a la Reología de los fluidos complejos; ambos campos del conocimiento se aplican para resolver un problema de flexo-electricidad que se lleva a cabo en las células ciliadas externas que se ubican en el interior del oído humano las cuales son estructuras muy importantes para el proceso de audición. Es un orgullo decir que este libro surge de una colaboración permanente con el departamento de Ingeniería Química de la Universidad de McGill en Montreal, Quebec, Canadá, con mi mentor **el distinguido *James McGill Profesor el Dr. Alejandro D. Rey.***

Hace 10 años tuve la oportunidad de conocer a un ángel argentino, que es una de las personas más brillantes que yo he conocido en mi vida. El profesor Dr. Alejandro Rey, es una de las personalidades más distinguidas en el área de los cristales líquidos biológicos, en particular, su investigación radica en el modelado de materiales avanzados. Esta oportunidad que tuve de estudiar con mi mentor en el departamento de ingeniería química de la universidad de McGill en Montreal, Quebec, Canadá, me cambió la vida y a mi familia. Este es un tributo a la generosidad de corazón del profesor Rey. Estimado mentor, ejemplo de vida y padre académico, muchas gracias.

El grupo de investigadores que elaboran este libro son líderes en sus respectivos campos, lo que permite que el libro sea atractivo para diferentes áreas de la ciencia como son: (i) Medicina, (ii) Biología, (iii) Farmacología, (iv) Química Computacional, (vi) Fenómenos de Transporte y (vii) Reología.

El enfoque de este trabajo versa en tópicos avanzados de Fenómenos de Transporte, sin embargo, contiene lo esencial que un curso introductorio demandaría lo que convierte este material atractivo para profesionistas de diversas áreas que deseen adentrarse en este conocimiento. Asimismo, en este libro se establecen los antecedentes, y el marco teórico detallado y suficiente para comprender el punto fuerte de la investigación: el impacto de la flexo-electricidad en las propiedades de flujo en las células ciliadas externas, los cuales son los motores biológicos para amplificar el sonido. Una persona que por algún suceso social o biológico presenta una falla en las CCE, presenta deficiencias auditivas lo que llevan a problemas psicosociales. La idea de este trabajo es presentar el efecto de una fuerza motriz que estimula a las CCE la cual puede ser modelada mediante las herramientas de Fenómenos de transporte y de Reología de Fluidos Complejos. El concepto es simple y se explica a continuación: debido a los procesos electrofisiológicos del cuerpo humano, el sonido entra por el oído externo, medio e interno; estas ondas se transforman en estímulos mecánicos-eléctricos, los cuales estimulan a las CCE para que empiecen a vibrar y, por ende, a cambiar su curvatura promedio y transformar esta energía por unidad de tiempo en trabajo irreversible que amplifique el sonido. El medio en el que se encuentran las CCE es de naturaleza electrolítica ( $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ ), por lo que se induce un flujo electro-osmótico en el sistema.

Para modelar este problema, se emplea la ecuación de momento lineal, la ecuación de continuidad y el modelo viscoelástico de Herrera-Valencia y Rey [1] deducido mediante una configuración mecánica en paralelo, la cual consiste en dos modelos de Maxwell acoplados con un modelo de sólido elástico de Hooke. El modelo de Herrera-Rey representa un fluido viscoso-viscoelástico-plasto que contiene cuatro propiedades materiales, las cuales pueden ser calculadas mediante experimentos reológicos independientes en estado estacionario y en estado no-estacionario. Asumiendo que los mecanismos inerciales son importantes, la ecuación diferencial resultante es lineal y es presentada como una variante de la ecuación de Navier-Stokes. Suponiendo que se cumple que en el centro del capilar la velocidad es finita (máxima) y que en la interfase entre el líquido y el sólido se cumple la condición de no deslizamiento, se obtiene una expresión para el perfil de velocidades, flujo volumétrico y esfuerzo en la pared. Finalmente, los resultados analíticos se pueden expresar en términos de dos funciones de transferencia complejas. La primera de ellas relaciona el gradiente de presión y el flujo volumétrico, y la segunda el esfuerzo flexo-eléctrico con una componente del esfuerzo cortante,  $rz$ , modificado por los mecanismos inerciales. Lo sorprendente de este trabajo, es que las dos funciones de transferencia están acopladas y esto genera patrones muy interesantes que están determinados por las propiedades materiales a través de números adimensionales. Para aquellos interesados en profundizar en algún tema de este libro, se dispone de una

amplia gama de referencias a artículos científicos actualizados, así como referencias de textos clásicos de Reología y Fenómenos de transporte tanto introductorios como avanzados.

El lector podrá encontrar en este escrito, de una manera explícita y resumida, el *estado del arte*, las motivaciones, las aplicaciones, la descripción, el análisis de las ecuaciones, la interpretación y las conclusiones del modelo desarrollado mediante herramientas de cristales líquidos, fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos a membranas flexo-eléctricas. El modelo de Herrera-Rey se reduce, en el caso de inercia baja, a la ecuación diferencial del oscilador armónico forzado para la curvatura promedio en función de la fuerza motriz (campo eléctrico) y las fases viscoelásticas en la cual se propaga una perturbación. El propósito del escrito versa en su metodología de cálculo de propiedades básicas de flujo para una geometría cilíndrica como lo son: el perfil de velocidades y el flujo volumétrico, por mencionar algunos. Para facilitar su interpretación, se propone un conjunto de variables adimensionales que describa el sistema a través de las propiedades físicas, y permite deducir las condiciones para las cuales dicho sistema disipa la energía electromecánica y permite que una persona pueda amplificar la información que llega al oído. En resumen, la intención de este libro es aportar información, desde el punto de vista de la bioingeniería, a aquellas personas que lamentablemente han disminuido o perdido la capacidad de oír.





# Dedicatoria



A mi amada familia:  
Mayra Luz Sánchez Villavicencio, Camila Isabella Herrera Sánchez

A mi amada hermana  
Gabriela Yolanda Herrera Valencia



Te amamos Camila y estamos orgullosos de ti

우리는 당신을 카밀라를 사랑하고 우리는 당신을 자랑스럽게 생각합니다

A nuestra amada Irma Concepción Villavicencio Cordero



Tus hijos Mayra, Jaime, Mabel, Edna  
Siempre te extrañarán, y donde quiera que estes:  
“Vuela alto MITOS”



A mis amados padres  
Emilio Herrera Caballero y Yolanda Valencia Cortés



Porque siempre han sido mi ejemplo y pilares en mi vida.  
Este libro es un testigo del amor que les tengo.



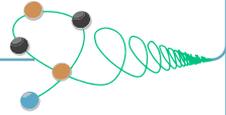
A mi amado padre  
Emilio Herrera Caballero



Este libro está dedicado a mi padre Emilio Herrera Caballero. Muchas veces, me presionaste hasta el límite, me decías que nunca era suficiente lo que hacía. Me constaste muchas anécdotas de tu vida, como cuando te dejaron de hablar en tu trabajo por mantener tus ideales. No te entendía, pero ahora después de tu partida comprendo que nunca te fuiste por el camino fácil, siempre luchaste por lo que tu considerabas justo y nunca cambiaste. Hoy entiendo que eso, se llama congruencia, hoy celebro que lo único que querías, es que yo fuera diferente. En estos días, puedo decir que tuve al mejor padre del mundo y que celebro el ser hijo del “Ave de las tempestades- Emilio Herrera Caballero”. Algún día nos encontraremos de nuevo padre mío y me seguirás contando tus historias a un después de tu partida. Gracias por todo y por qué nos volvamos a encontrar en algún momento.

Te extraño mucho Edtson, Gabriela, Yolanda y Camila.

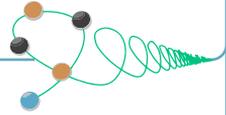
# Agradecimientos



- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM <<IN102823>> <<Modelado Matemático y Simulación Computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bio-Ingeniería >>.
- Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos para Innovar y Mejorar la Educación (PAPIME) de la UNAM <<PE106224>> << Material Educativo para la asignatura de Transferencia de Masa Usando COMSOL MULTIPHYSICS y WOLFRAM MATHEMATICA >>.
- DGAPA-PAPIIT IT-200323, Efectividad antihiper glucemiante de las matrices monolíticas de silicio que contienen glibenclamida preparadas por el método sol-gel-gel, aplicables en el tratamiento de la diabetes mellitus tipo 2.
- Consejo Nacional de Humanidades Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) proyecto No. CF-2023-I-865
- Al laboratorio de Reología y Fenómenos de Transporte de fluidos complejos por las facilidades otorgadas para este proyecto de investigación.
- Al seminario de investigación de Reología y Fenómenos de Transporte de Fluidos Complejos.
- A la carrera de Ingeniería Química de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza de la Universidad Nacional Autónoma de México por la formación recibida.
- Agradecimiento a la Licenciada en administración y Licenciada en Comunicación Gabriela Y. Herrera Valencia por las sugerencias para la edición de esta obra.



# Participantes



## Unidades de investigación participantes:

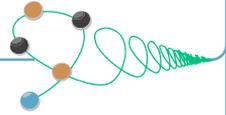
- Unidad de investigación en bioingeniería: UI-FESZ-2023
- Líneas de investigación participantes:
- Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos: LUI-FESZ-420415.
- Reología teórica y experimental de fluidos estructurados: LUI-FESZ-570619.
- Estructura electrónica de sistemas de interés biológico: LUI-FESZ-671122.
- Ciencias farmacéuticas: LI-FESZ-210506.
- Proyecto de investigación participante:
- Simulación numérica del mezclado de suspensiones coloidales en un tanque de agitación continua (CSTR): FESZ-RP/23-204-02.

## Laboratorios participantes:

- Laboratorio de reología y fenómenos de transporte, Unidad de Investigación Multidisciplinaria de Investigación Experimental Zaragoza (UMIEZ), p/1-7, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.
- Laboratorio de investigación farmacéutica. ET-PA-16, Planta piloto, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.



# Resumen



La flexo-electricidad en las membranas timpánicas es un efecto de acoplamiento electromecánico entre la curvatura promedio de la membrana y la polarización eléctrica macroscópica la cual es esencial para la fisiología de la audición en los seres humanos. La flexo-electricidad aplicada a las membranas utiliza un campo eléctrico impuesto para crear flexión entre ellas, dicho mecanismo es usado por las Células Ciliadas Externas (CCE) que se ubican en el oído interno. Motivados por el funcionamiento de las CCE, en este trabajo se modela la respuesta mecánica oscilatoria de una membrana flexo-eléctrica circular inmersa entre dos fases viscoelásticas sujetas por un campo eléctrico armónico de pequeña amplitud de frecuencia arbitraria. El modelo se basa en la integración de: (i) la ecuación de forma de la membrana flexo-eléctrica aplicada a una membrana circular unida a la superficie interior de un capilar circular entre dos fluidos viscoelásticos y (ii) el flujo volumétrico de las fases viscoelásticas que tienen contacto con la membrana flexoeléctrica generado por el campo eléctrico, ya que dicho campo produce una distorsión en la membrana la cual a su vez induce un flujo volumétrico, el cual depende completamente de las propiedades materiales de las fases.

**Palabras claves:** Flexo-electricidad, Reología, Modelo de Maxwell, Modelo Electro-reológico, Electromotilidad, Células Ciliadas Externas.



# Sobre los autores



## Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia

El **Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia** es profesor Titular B de Carrera Definitivo de la Carrera de Ingeniería Química. Es Ingeniero Químico por la Facultad de Química de la UNAM. Tiene una licenciatura en Matemáticas Aplicadas por la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (UAM-I). Es maestro en Ingeniería por la Facultad de Química, UNAM con el mejor promedio de generación y postulado a la medalla Alfonso Caso. Posee Estudios de Maestría en Física con especialidad en Física Estadística por parte de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa. Es doctor en Ingeniería Química por la Facultad de Química, UNAM con mención honorífica. Por sus estudios doctorales fue postulado a la Medalla Alfonso Caso por parte de la Facultad de Química de la UNAM. Realizó una estancia de Investigación de un año en el Centro de Investigación en Polímeros (COMEX) mediante una generosa beca del Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal. Realizó tres estancias postdoctorales de dos años cada una en la universidad de McGill en Montreal Quebec Canadá en el departamento de Ingeniería Química. La primera de ellas debido a una generosa beca de Gobierno de México (CONACYT), la segunda de ellas por parte del Gobierno Federal de Canadá y la tercera por parte de la provincia de Quebec, en Canadá. Su experiencia en la docencia incluye Fenómenos de Transporte Momento, Energía y Masa, Mecánica, Electromagnetismo y Matemáticas. Sus áreas de investigación son: Fenómenos de Transporte: (i) Momento, (ii) Energía, (iii) Masa, (iv) Reología de Fluidos Complejos con énfasis en cristales Líquidos Biológicos, (v) Flujo Pulsátil Sanguíneo y (vi) Membranas Biológicas.

Es autor de 35 artículos de investigación indexados en el JCR, tres capítulos en libros publicadas en Wiley, Springer, Elsevier, 3 Libros especializados en flujo pulsátil fenómenos de transporte y reología de fluidos estructurados. Sus trabajos de investigación han sido citados más de 710 veces. Ha impartido pláticas en congresos en Italia, Canadá (Ontario, Alberta y Quebec) sobre Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos. Ha dirigido 80 servicios sociales, 50 tesis de licenciatura y co-asesor de dos tesis de maestría y una de doctorado. Actualmente es responsable del curso de Bio-Matemáticas del Posgrado en Ciencias Biológicas de la UNAM, es tutor del posgrado en ciencias biológicas y ciencias

químicas de la UNAM. Dos de sus alumnos se encuentran haciendo su doctorado en el departamento de Ingeniería Química de la Universidad de McGill, Montreal, Quebec, Canadá. Ha participado como jurado en exámenes de Licenciatura, Maestría y Doctorado. Actualmente es responsable de la Unidad de Investigación en Bio-Ingeniería, de la Línea de Investigación en Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos y responsable del laboratorio de Reología y Fenómenos de Transporte de Fluidos Complejos de la Unidad Multidisciplinaria de Investigación Experimental Zaragoza (UMIEZ) de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.

Actualmente fue distinguido con el Nivel PRIDE -D del sistema de estímulos de la Universidad Nacional Autónoma de México.

## Dr. Luis Antonio Ramírez Torres

El **Dr. Luis Antonio Ramírez Torres** es profesor Asociado C de Carrera Interino de la carrera de Ingeniería Química en la FESZ-UNAM. Es ingeniero químico egresado de la Facultad de Química, UNAM. Es Maestro en Ciencia e Ingeniería de Materiales por parte del Instituto de Investigación en Materiales - UNAM donde obtuvo mención honorífica y cuya tesis fue postulada a la medalla Alfonso Caso. Es miembro de la Sociedad Mexicana de Reología (SMR) desde el 2020 hasta la actualidad. Ha sido profesor de Asignatura de la carrera de Ingeniería Química en la FESZ-UNAM de las asignaturas de Transferencia de Masa, Separación Mecánica y Mezclado, Química III, Matemáticas II y Bioestadística, además, imparte un curso de Biomatemáticas a nivel posgrado.

Posee más de **6 años de experiencia en docencia** en distintos niveles (secundaria, preparatoria y universidad). Trabajó como *Ingeniero de Procesos A* en una firma de ingeniería (*Plugrama Ingeniería S.A. de C.V.*). Ha impartido más de 15 cursos para estudiantes y profesores a nivel universitario, y se ha capacitado en más de 40 cursos de Fenómenos de Transporte, Reología y Mecánica de Biomateriales, Química Analítica, Simulación numérica, Matemáticas Avanzadas, Termodinámica estadística, dibujo asistido por computadora, educación en línea, tutoría universitaria (diplomado), docencia universitaria, uso de software de simulación de procesos y uso de software para creación de documentos.

Ha participado en más de 32 encuentros, talleres y congresos. Ha sido director de dos tesis de Licenciatura y asesor en 15. Ha publicado 7 artículos de investigación y difusión en revistas arbitradas con factor de impacto y pertenecientes al JCR. El Dr. Ramírez-Torres, es responsable del proyecto de investigación FESZ-RP/23-204-02 llamado *Simulación numérica del mezclado de suspensiones coloidales en un tanque de agitación continua (CSTR)*, además, es participante en el proyecto de Investigación PAPIIT/DGAPA IN102823 intitulado *Modelado*

*Matemático y Simulación Computacional de Fluidos Complejos con Aplicación a Bio-Ingeniería*, adicionalmente, es colaborador en las líneas de investigación: *Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos* LI-FESZ-420415 y de la línea de investigación *Reología Teórica y Experimental de Fluidos Estructurados* LI-FESZ-570619.

## Dr. Fausto Calderas García

El **Dr. Fausto Calderas García** es ingeniero químico por la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza (FES-Z), UNAM. Es maestro en Ciencia e Ingeniería de Materiales por parte del Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM. Es doctor en Ingeniería química por parte de la UNAM. Es experto en el área de reología con veinte años de experiencia en manejo de reómetros capilares, de esfuerzo controlado y de deformación controlada. Es autor de más de 50 artículos en revistas internacionales con factor de impacto en las áreas de nuevos materiales, reología y fluidos complejos; tiene más de 800 citas en la literatura especializada, 4 artículos en revistas de divulgación y tiene tres capítulos en libros sobre reología y nanocompuestos poliméricos con editoriales internacionales, además tiene tres patentes registradas, una de ellas sobre un aditamento de pulsos ultrasónicos para realizar mediciones simultáneas de reología. Ha sido revisor certificado de más de 50 artículos en revistas internacionales. Ha impartido cursos técnicos de capacitación a empresas para manejo de reómetros de vulcanización y tecnología del hule. Ha dirigido y co-asesorado 10 tesis de licenciatura, 4 de maestría y 1 de doctorado. Imparte cursos de ingeniería química en la Facultad de estudios superiores Zaragoza y en la Facultad de Química de la UNAM. Ha presentado sus trabajos en más de 50 congresos internacionales y nacionales. Actualmente fue promovido al Nivel II en el Sistema Nacional de Investigadores de CONAHICYT. Es presidente de la sociedad mexicana de reología (SMR), que es la representación de la Sociedad de Reología (SR) en México. Es miembro de la sociedad de procesamiento de polímeros (Polymer Processing Society, PPS) y co-organizó el 34° congreso de esa sociedad (PPS-34) que se celebró por primera vez en México, en la ciudad de Cancún en diciembre del 2017. Actualmente está interesado en los temas de mezclado de fluidos complejos, nanocompuestos poliméricos, geles para alimentos, secado por convección de antioxidantes, modelado y caracterización de fluidos reológicos (sangre, disoluciones poliméricas, polímeros fundidos), flujo elongacional de fluidos modelo, etc. Colabora con grupos de investigación del área de alimentos, de farmacia, de nuevos materiales, reología entre otros. Es responsable de la línea de investigación "Reología teórica y reometría de fluidos estructurados" (LI-FESZ-570619).



## Dra. Mayra Luz Sánchez Villavicencio

La **Dra. Mayra Luz Sánchez Villavicencio** es Bióloga Experimental por la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (UAM-I). Maestra y Doctora en Biología Experimental por la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa (UAM-I). Áreas de especialización: Ecología: tratamiento de aguas de uso secundario. Farmacología: técnicas de biología molecular, plantas medicinales, diabetes, obesidad. Ha publicado 11 artículos como primera autora y en colaboración en revistas nacionales e internacionales con factor de impacto. Realizó una estancia internacional en la Universidad de Montreal, en Montreal, QC Canadá. Colabora con diferentes grupos interdisciplinarios tanto en el área de etnobotánica y productos naturales para la salud del departamento de biología de la Universidad de Ottawa, así como en el área de Ingeniería Química y Materiales de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza del departamento de Ingeniería Química de la UNAM. Es miembro del sistema Nacional de Investigadores por el periodo 2016-2019. Asistente de investigación en el laboratorio de productos naturales y enfermedades metabólicas en el departamento de fisiología y farmacología en la Facultad de Medicina de la Universidad de Montreal de agosto 2017 a mayo 2019 fue profesora de tiempo parcial del departamento de Hidrobiología de la Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa de 2005 a 2007. Temas actuales de interés: enfermedades metabólicas, vías de señalización de Resistencia a la insulina, diabetes, obesidad y modelado matemáticos de sistemas biológicos de interés para ciencias exactas e ingeniería.

## I.Q. Dominga Ortiz Bautista

La **I.Q. Dominga Ortiz Bautista** es egresada de la FES-Zaragoza, UNAM, con estudios de Maestría en Ingeniería en sistemas energéticos por la Facultad de Ingeniería, UNAM, con diplomados en la FES-Zaragoza. Con 27 años de antigüedad, tiene experiencia Académico-Administrativa, desempeñándose en la Facultad de Estudios Zaragoza, UNAM. Impartiendo actualmente, las asignaturas de Laboratorio de Ciencia Básica I, Flujo de Fluidos, Laboratorio y Taller de proyectos. Y en el ámbito administrativo se ha desempeñado como, responsable del Servicio *Social*, Coordinadora de Ciclo Intermedio y Jefa de Carrera de Ingeniería Química. Ha dirigido Tesis y Coordinadora de servicios sociales con más de 30 trabajos en la Carrera de Ingeniería Química. Con participación en proyectos PAPIME UNAM, con publicación de trabajos en revistas y memorias de Congresos.

## Dr. Gabriel Ascanio Gasca

El **Dr. Gabriel Ascanio Gasca** es ingeniero mecánico y maestro en ingeniería por la Facultad de Ingeniería de la UNAM y doctor en ingeniería química por la Escuela Politécnica de Montreal, Canadá. Realizó una estancia sabática en la empresa Fresenius-Kabi en Alemania. Actualmente es Investigador Titular C de tiempo completo adscrito al Instituto de Ciencias Aplicadas y Tecnología (ICAT) de la UNAM. Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores en el nivel 2 y es nivel D del Programa de Primas de Desempeño Académico de la UNAM. Sus líneas de investigación tratan sobre la Ingeniería de Fluidos, Reología Extensional e Instrumentación Mecánica. Ha publicado 92 artículos en revistas indexadas de circulación internacional, además de capítulos en libros y trabajos en congresos, los cuales han recibido más de 1720 citas, además de contar con 8 patentes nacionales e internacionales. Ha sido responsable de proyectos financiados por el gobierno federal, por la UNAM y por el sector industrial. Ha dictado más de 20 conferencias en la industria e instituciones educativas, tanto en México como en el extranjero. Ha sido profesor en la Facultad de Ingeniería, en el Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería (UNAM), en la Universidad Internacional de Andalucía (España) y en la Universidad Tecnológica de Ambato (Ecuador). Ha dirigido 54 tesis a nivel doctorado, maestría y licenciatura. Actualmente es coordinador del Grupo de Ingeniería de Proceso del ICAT y Editor en Jefe del Journal of Applied Research and Technology, la cual forma parte del Sistema de Clasificación de Revistas Mexicanas de Ciencia y Tecnología y está indexada en Scopus, Scielo, Redalyc y Latindex.

## Dra. Catalina Soriano Correa

La **Dra. Catalina Soriano Correa** posee una licenciatura en Química por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, BUAP. Tiene una Maestría en Química por la Universidad Autónoma Metropolitana- Iztapalapa (UAM-I), es Doctora en Ciencias por la UAM-Iztapalapa. Actualmente es profesora de Carrera Titular C de tiempo completo. Es responsable de la línea de investigación: “estructura electrónica de sistema de interés biológico”, que tiene como objetivos la formación de recursos humanos, así como generar conocimiento en las áreas químico-biológicas básicas y aplicadas, que aporta información que permite explicar la relación existente entre las propiedades fisicoquímicas, electrónicas, estructurales, moleculares y de reactividad química de moléculas de interés biológico, para el desarrollo y diseño de moléculas con potencial farmacológico en el contexto de los postulados de la mecánica cuántica y de la Teoría de la Información. Los proyectos que conforman la línea de investigación contribuyen en la



resolución de problemas de salud pública, tales como: cáncer, enfermedades infecciosas, antibacteriales, crónico-degenerativas y enfermedades olvidadas (Chagas y Leishmania), así como el estudio de la liberación de fármacos. Algunos de los proyectos comprenden también estudios experimentales, que corroboran las predicciones teóricas en el diseño de nuevas moléculas; lo que permite el intercambio académico y la vinculación con otros grupos de trabajo nacionales y extranjeros. Es responsable de una patente (Péptido con actividad anticancerígena). Es miembro de la Comisión Dictaminadora de la Carrera de Química Farmacéutico Biológica de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza desde 2018 a la fecha. Ha sido autor y coautor de artículos y capítulos de libro publicados en revistas arbitradas internacionales y con factor de impacto. Asimismo, ha dirigido tesis a nivel licenciatura, maestría y doctorado. Ha presentado más de cien trabajos en congresos nacionales e internacionales. La Dra. Catalina Soriano Correa es profesora de las materias de Fisicoquímica I y II en la carrera de QFB, es miembro del sistema nacional de investigadores Nivel I y tutora del doctorado en el posgrado en Ciencias Biológicas y en el posgrado en Ciencias Químicas de la Universidad Nacional Autónoma de México, Tutora en los posgrados en Ciencias Biológicas y Biología Experimental de la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, Tutora en el posgrado en el Centro de Investigación Cerebrales (CICE), Universidad Veracruzana, Profesora invitada de la maestría en Ciencias en Farmacología de la Escuela Superior de Medicina-Instituto Politécnico Nacional.

## Dra. Guadalupe Sánchez Olivares

La **Dra. Guadalupe Sánchez Olivares** es Investigadora titular en materiales poliméricos en CIATEC, A.C., desde el año 2010, obtuvo el grado de Maestría y Doctorado en Ingeniería Química por la Universidad Nacional Autónoma de México. Fue propuesta para obtener la medalla Alfonso Caso de la UNAM por mejor tesis de Maestría. Es miembro del sistema nacional de investigadores (SNII) nivel 1, miembro de la Sociedad Mexicana de Reología y de la Sociedad Internacional de Procesamiento de Polímeros. Realizó una estancia Postdoctoral en el Federal Institute for Materials Research and Testing, Berlín, Alemania y una estancia de investigación en el Politecnico Di Torino, Alessandria, Italia, con grupos de investigación con prestigio internacional en el campo de materiales poliméricos retardantes al fuego. Sus principales líneas de investigación son: estudio del comportamiento ante el fuego de materiales poliméricos compuestos, nanocompuestos y biocompuestos, textiles y cuero, así como el estudio de la reología de materiales retardantes al fuego. Su producción científica incluye: 26 artículos científicos en revistas indexadas por el *Journal Citation Reports* (JCR), 4 en revistas arbitradas, 3 capítulos, 7 artículos de divulgación, 3 patentes nacionales otorgadas, 1 solicitud de patente internacional y 6 solicitudes de patente nacionales. Ha

participado en diversos congresos científicos nacionales e internacionales. Es revisora de revistas científicas internacionales indexadas por el JCR. Participa en la elaboración de proyectos de normas mexicanas a través del Instituto de Normalización Textil. Ha dirigido tesis de Licenciatura y Posgrado, al igual que, proyectos de investigación de ciencia de frontera y desarrollo tecnológico para la industria.

## Dr. Vicente Jesús Hernández Abad

El **Dr. Vicente Jesús Hernández Abad** nació en la Ciudad de México el 28 de enero de 1974. El **Dr. Hernández Abad** es Químico Farmacéutico Biólogo con mención honorífica por la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza (FES-Z). Posee una maestría en ciencias especializada en farmacia y biofarmacia por la Facultad de Química de la UNAM postulado y ganador de la medalla Alfonso Caso. Posee un doctorado en farmacia. Actualmente es profesor de Carrera Titular C de tiempo completo, es nivel C del PRIDE. Es Miembro del Sistema Nacional de Investigadores, nivel 1 (1997-Actualidad). Desde 1997 hasta la fecha ha impartido de manera ininterrumpida los módulos de Biofarmacia y Desarrollo Analítico (teoría) en la carrera de Químico Farmacéutico y Biólogo de la Facultad la FESZ. Ha impartido diferentes actividades académicas y formado parte de comités tutores de Posgrado. Fue coordinador de 2001 a 2014 del Programa de Especializaciones en Farmacia Industrial. Autor y coordinador de los diplomados: Administración Farmacéutica y Cromatografía de Líquidos de Alta Resolución. Ha impartido cátedra, por convenios institucionales, en la Red Panamericana para la Armonización de la Reglamentación Farmacéutica (Organización Panamericana de la Salud), en la Dirección General de Medicamentos y Tecnologías para la Salud (Secretaría de Salud) en el Instituto Nacional de Pediatría y en la Facultad de Farmacia de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Ha participado en el Consejo Interno asesor de Estudios de Posgrado, en el Comité de Investigación, así como en el Comité Editorial de la FES Zaragoza. Fungió como secretario del H. Consejo Técnico de la FES Zaragoza durante casi ocho años, siendo actualmente su presidente. Es presidente de la Comisión del Mérito Universitario del H. Consejo Universitario de la UNAM. Fue integrante de los Comités Académicos de Posgrado de: las Especializaciones en Farmacia Industrial, las Maestrías en Enfermería y Trabajo Social, de Ciencias de la Administración, Maestría y Doctorado en Psicología, así como de la Maestría y doctorado en Ciencias Médicas, Odontológicas y de la Salud. Ha ocupado diversos cargos en la FES Zaragoza de forma ininterrumpida. En el periodo 1998-2001 fue Coordinador del área Química de la Carrera de QFB. Coordinador de Desarrollo Tecnológico de 2001 a 2003. Jefe de la División de Estudios de Posgrado e Investigación de 2003 a 2010. Fungió como secretario general de 2010 a 2018. Director de la FES Zaragoza



desde noviembre de 2018. Es jefe de la Línea de Investigación en Ciencias Farmacéuticas, con énfasis en Desarrollo Farmacéutico. Dirigió la certificación en ISO del laboratorio a su cargo. Ha sido responsable o participado en 15 proyectos de investigación con financiamiento. Ha publicado 25 artículos en revistas arbitradas e indizadas. Es árbitro del Journal of Ethnopharmacology y de Drug Development and Industrial Pharmacy, así como evaluador de proyectos de CONACYT y PAPIIT. Ha generado productos que se encuentran en proceso de patentamiento y cuenta con una patente concedida. Autor de diversos materiales educativos: cinco libros de texto, dos capítulos de libros, tres manuales, siete videos, tres aulas virtuales y dos aplicaciones para dispositivos inteligentes. Ha presentado 100 trabajos libres en eventos académicos y 54 conferencias en diversos foros. Dirigió el servicio social de 47 alumnos, asesoró o dirigió la tesis de más de 120 egresados de licenciatura y posgrado. Sus actividades fuera de la UNAM se han orientado hacia la conducción de grupos multidisciplinarios e interinstitucionales encaminados al fortalecimiento y la mejora continua de la educación. Participó en el grupo técnico que elaboró la propuesta de política farmacéutica para México en 2005. En la Asociación Farmacéutica Mexicana A.C. ha ocupado diversos cargos de elección: fue su presidente en 2010-2011 y fue Coordinador de su Consejo de Expresidentes. Es evaluador líder fundador del Consejo Mexicano para la Acreditación de la Educación Farmacéutica desde 2006. Es editor, desde 2015, de la Revista Mexicana de Ciencias Farmacéuticas. Fue electo en 2017 primer vicepresidente de la Fundación para la Educación Farmacéutica en México A.C. Recibió el Premio Nacional de Ciencias Farmacéuticas “Dr. Leopoldo Río de la Loza” 2017 que otorga la Asociación Farmacéutica Mexicana A.C., en el área de Educación.



# CAPÍTULO 1

## Introducción a la flexo-electricidad

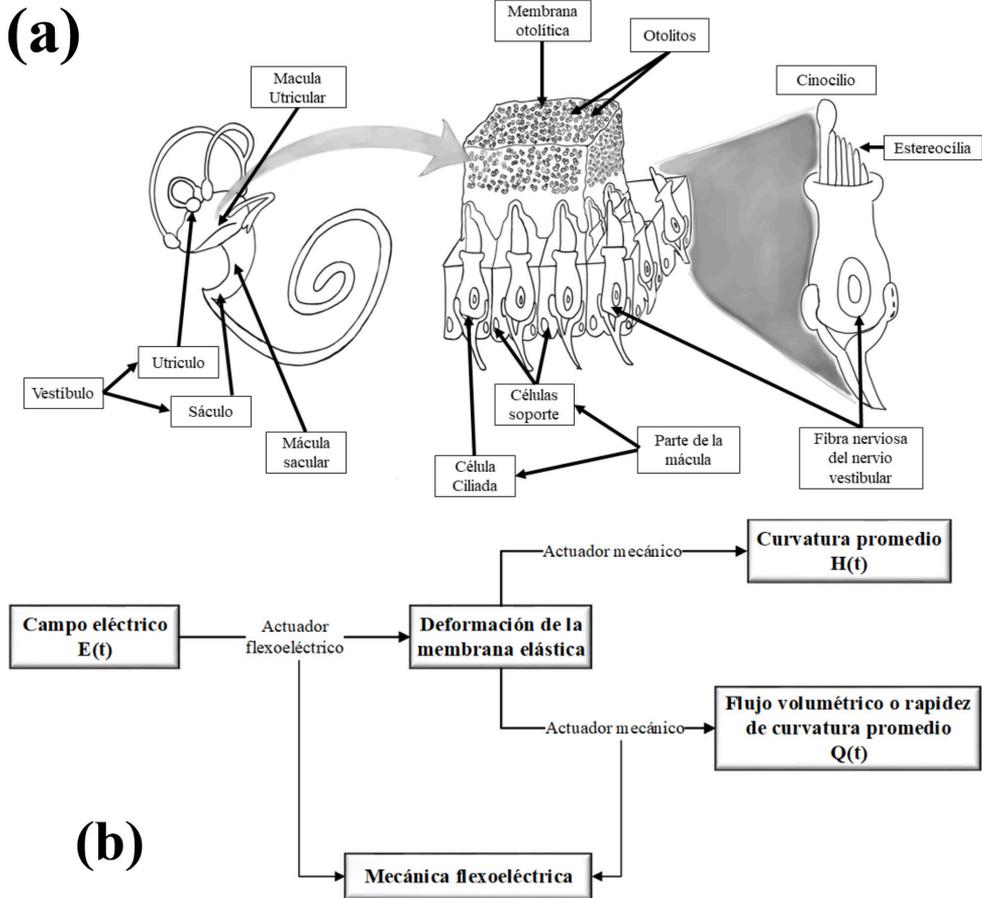
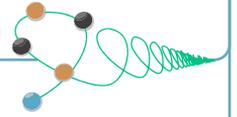


Figura I-1. (a) Esquema básico del oído interno y (b) Esquema del fenómeno de flexo-electricidad en las células ciliadas externas del oído humano.

## 1.1 Membranas flexo-eléctricas

Uno de los sistemas biológicos más estudiados y menos comprendido, desde el punto de vista mecánico-eléctrico, es el sistema auditivo de los mamíferos. Este utiliza la capacidad de las células a deformarse las cuales son activadas debido a los campos eléctricos internos. Este fenómeno, estudiado por el profesor distinguido de la Universidad de McGill Dr. Alejandro D. Rey, se conoce como flexo-electricidad.

La flexoelectricidad, es la capacidad que tienen ciertos materiales para cambiar su curvatura promedio por efecto de un agente externo, en particular, un campo eléctrico externo [2]. Este fenómeno, involucra un efecto llamado polarización el cual es un fenómeno que acopla un cambio de curvatura con la orientación de las cargas eléctricas presentes en el material [2]. Este sistema, sorpresivamente, puede ser descrito mediante la teoría de cristales líquidos nemáticos aplicada a la materia suave [1].

Adicionalmente, el efecto flexoeléctrico es clave para la comprensión de la amplificación del sonido en el oído interno a través de las células ciliadas externas (CCE), las cuales son conocidas como los motores biológicos que pueden ajustar las frecuencias naturales y amplificar el sonido en los mamíferos [1, 3-13].

El cambio de la curvatura promedio como función de los mecanismos eléctricos es ampliamente reconocido por su aplicación como sensores biológicos, i.e., es materia suave que detecta los campos eléctricos debido al cambio de curvatura promedio [3-9, 12, 14, 15] y, debido a esto, la flexo-electricidad es un área de interés en la reología de cristales líquidos nemáticos (o materia suave condensada) [3-9, 12, 14, 15].

La flexo-electricidad y la piezo-electricidad son fenómenos físicos que se presentan en la materia suave. Los dos sistemas se activan con el campo eléctrico, el primero de ellos cambia la curvatura promedio del material vía la polarización de las cargas, y el segundo la deformación del material, especialmente en los materiales cristalinos y cerámicos [3-9, 12, 14, 15].

Ejemplos de este tipo de materia suave biológica, en donde se presenta orientación y cambios estructurales por efecto de las fuerzas externas, son mencionados a continuación: (i) proteínas producidas por la seda de insectos, en especial en las arañas y en los gusanos de seda, (ii) en materiales aplicados a la regeneración ósea, ingeniería del tejido humano a través del colágeno y, finalmente, (iii) en las células ciliadas externas de los mamíferos,

que amplifican las ondas sonoras por efecto de un acoplamiento entre los mecanismos eléctricos y mecánicos [1, 3-9, 12, 14-18].

Uno de los puntos claves en los materiales flexo-eléctricos es la caracterización de los coeficientes flexo-eléctricos en la materia suave tipo cristal líquido [4, 6, 12, 19-22]. Otro de los puntos importantes es que las membranas biológicas pueden ser tratadas como cristal líquido, i.e. cuando la orientación de la membrana  $\mathbf{k}$ , coincide con el vector director  $\mathbf{n}$  asociado a la orientación, i.e.,  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ , por lo que se dice que la membrana biológica se comporta como un cristal líquido nemático.

Para membranas biológicas caracterizadas con la física de los cristales líquidos, el valor numérico del coeficiente flexo-eléctrico está en el orden de 3 a 20 pC/m. Harden *et al.* (2010) [21] han reportado coeficientes flexo-eléctricos de 35 nC/m en cristales líquidos tipo banana empleados en transductores mecánico eléctricos [20, 23, 24].

Las células ciliadas externas (CCE) son sistemas complejos que acoplan simultáneamente procesos electro-mecánicos fisiológicos, los cuales pueden ser caracterizados mediante fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos [13, 14]. Su comportamiento está basado en un efecto llamado electro-motilidad (capacidad de un sistema vivo para cambiar su estado de movimiento por efecto de un campo eléctrico).

El oído humano esta dividido en oído externo, medio e interno [25]. En el último, se encuentran las células ciliadas externas (CCE), particularmente en la cóclea, en donde el sonido es amplificado hasta un valor máximo de 50 decibeles (50 db). Nótese que este maravilloso dispositivo (cóclea) provee a los mamíferos la capacidad de oír en un amplio intervalo de frecuencias [20, 23, 24].

Una manera de interpretar físicamente a las células ciliadas es en términos de la energía disipada y la energía almacenada. Las células ciliadas cambian su curvatura por efecto de los campos eléctricos internos (fenómenos electro-fisiológicos). Al cambiar su curvatura intercambian momento con los fluidos intra y extra celulares. La energía intercambiada por el movimiento de las CCE está asociada a la rapidez de intercambio del trabajo irreversible con los fluidos, i.e., a la potencia disipada (energía que se transforma) por las CCE y que es clave para los procesos de pérdida auditiva, inducida por el desgaste de estos amplificadores biológicos.

El entendimiento de las CCE y la electro-motilidad requiere de teorías sofisticadas basadas en física de materiales, fenómenos de transporte, dinámica computacional de fluidos



complejos, física de cristales líquidos, etc. [13, 14, 26]. En esta obra, se presenta un nuevo enfoque desde el punto de la ciencia del flujo y la deformación de la materia (reología), con énfasis en ecuaciones viscoelásticas lineales, i.e., en el régimen de bajas deformaciones [14, 17, 26].

Existen dos mecanismos físicos para entender la amplificación del sonido por efecto de las CCE. El primero de ellos es la energía disipada la cual es un efecto de la transferencia de momento de la membrana a las fases viscoelásticas (fricción). El segundo punto, es la elasticidad de la membrana (almacenamiento de energía), es decir, la energía que presenta esta para cambiar su curvatura por efecto de una disminución en la energía interna y, finalmente, regresar al estado inicial. Estos dos mecanismos describen el fenómeno de la electro-motilidad en las CCE. Una manera de entender su funcionamiento es cuando las frecuencias del campo externo empatan con las frecuencias internas del material biológico (de la membrana).

En general, las CCE funcionan mediante la aplicación de un campo eléctrico, dicho campo hace que la membrana flexo-eléctrica oscile por efecto de mecanismos mecano/flexo-eléctricos [3-9, 12, 14, 15]. El negativo de la rapidez de evolución de la curvatura promedio induce un flujo volumétrico, el cual depende de las propiedades viscoelásticas de los fluidos que rodean a la membrana flexo-eléctrica [1, 13, 14, 17, 18].

En resumen, los puntos clave de este sistema se pueden resumir de la siguiente manera:

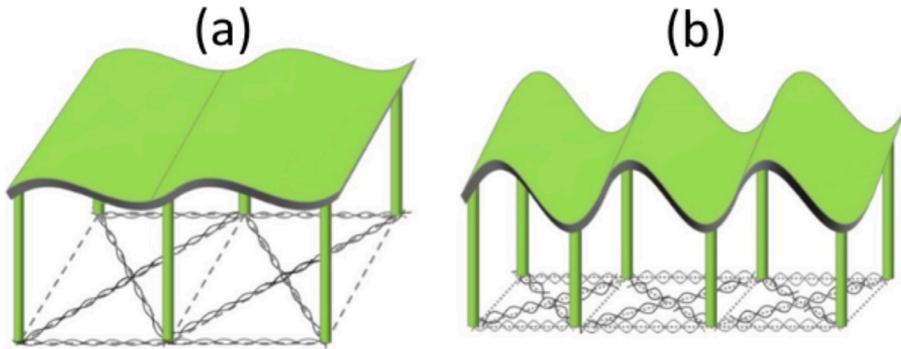
- (i) La potencia liberada por la membrana debido al contacto de las fases viscoelásticas por efecto del campo eléctrico impuesto.
- (ii) La energía elástica almacenada en la membrana.
- (iii) La caracterización de las curvas resonantes a través de la frecuencia, valor máximo de las curvas resonantes y anchura de las curvas resonantes [1, 8, 9, 12, 14, 16-18, 27-30].

Las células ciliadas externas (CCE) son sensoriales y poseen características únicas. Dentro del oído de los mamíferos se disponen en tres hileras en el lado externo del túnel de Corti, y están acondicionadas para realizar la transducción mecánico-eléctrica, como las células ciliadas internas (CCI), pero no transmiten ninguna característica del estímulo sonoro al cerebro.

En contraste con las CCI, las CCE utilizan la transducción inversa (electro-mecánico), i.e., un mecanismo activo que le permite reenviar la energía para aumentar la sensibilidad y

selectividad en la frecuencia resonante. Una nota importante, es que la cóclea humana tiene entre  $10000 < CCE < 12000$  aproximadamente [3-9, 12, 14, 15].

En la **Figura 1-2(a)** se puede apreciar la curvatura estática de la membrana plasmática de las CCE antes de ser estimuladas por un campo eléctrico, posteriormente, en la **Figura 1-2(b)** se observa el cambio de la curvatura de la membrana debido al campo eléctrico.



**Figura 1-2.** (Membrana plasmática de la CCE. (a) Curvatura estática de la membrana, (b) curvatura de la membrana plasmática después de aplicar un campo eléctrico.

## 1.2 Hipótesis

La aplicación de un campo eléctrico al sistema (membrana flexo-eléctrica) produce un efecto de curvatura en la membrana, la cual a su vez induce un flujo volumétrico a través del capilar el cual contiene fluidos viscoelásticos, produciendo una disipación de energía que se relaciona con el efecto de amplificación que crean las membranas plasmáticas en las células ciliadas externas.



## 1.3 Objetivos

### 1.3.1 Objetivo General

Contribuir al entendimiento del comportamiento electro-mecano-reológico de las membranas flexo-eléctricas en medios viscoelásticos para su aplicación como modelo representativo de las CCE.

### 1.3.2 Objetivos Particulares

- a) Deducir un modelo matemático que describa la curvatura de la membrana biológica, en función de las propiedades viscoelásticas, flexo-eléctricas y elásticas del sistema.
- b) Mediante un campo eléctrico, obtener expresiones para la función de transferencia compleja que relaciona la variable de entrada (fuerzas flexo-eléctricas) y la variable de salida (flujo volumétrico).
- c) Establecer los mecanismos que afectan la dinámica lineal del sistema a través de los grupos y números adimensionales característicos del sistema.
- d) Establecer las condiciones que permitan que el sistema estudiado tenga una aplicación biológica en particular en las células ciliadas externas.

## 1.4 Distribución del material de estudio

El contenido de esta obra se ha dividido de la siguiente manera:

En el **Capítulo 1** se introduce al lector al concepto fundamental conocido como flexo-electricidad, electro-motilidad y su conexión con las células ciliadas externas del oído interno presentes en los mamíferos.

En el **Capítulo 2** se presenta el modelo reológico lineal que describe la dinámica de la membrana flexo-eléctrica inmersa en fluidos viscoelásticos sin tomar en cuenta los mecanismos inerciales de los mismos.

En el **Capítulo 3** se presenta el modelo reológico lineal que describe la dinámica de la membrana flexo-eléctrica inmersa en los fluidos viscoelásticos tomando en cuenta sus mecanismos inerciales.

En el **Capítulo 4** se estudian las variables y los grupos adimensionales que describen los mecanismos macroscópicos que generan las curvas resonantes a través de las propiedades materiales de los fluidos viscoelásticos (parámetros reológicos).

En el **Capítulo 5** se estudia la respuesta al flujo oscilatorio de baja amplitud de deformación entre el campo eléctrico y la curvatura promedio o flujo volumétrico.

En el **Capítulo 6** se estudia el sistema dinámico lineal, mediante la transformada de Fourier, a través de las funciones de transferencia características del sistema. La primera de ellas relaciona el campo eléctrico y el flujo volumétrico, y la segunda entre el campo eléctrico y el esfuerzo cortante modificado por los mecanismos inerciales.

En el **Capítulo 7** se estudian las predicciones de los modelos deducidos mediante simulaciones computacionales en el programa *Wolfram Mathematica* con licencia institucional de la UNAM.

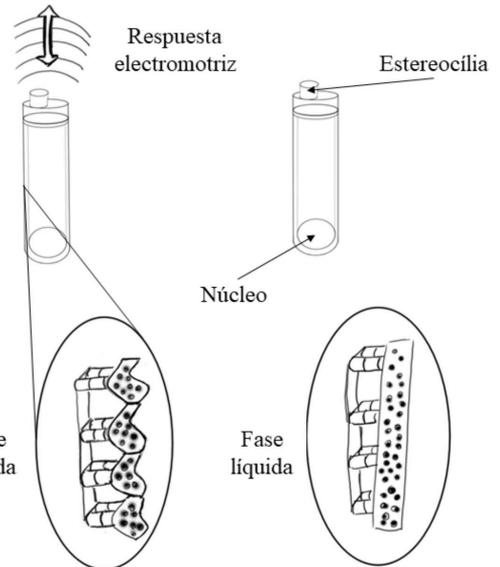
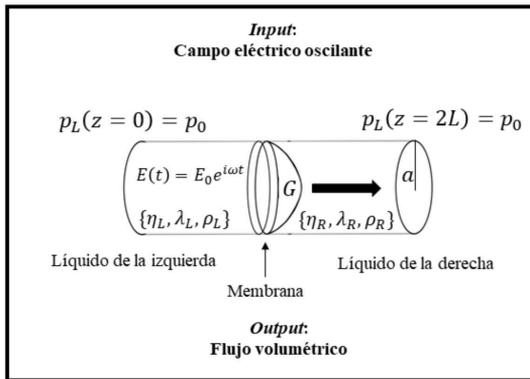
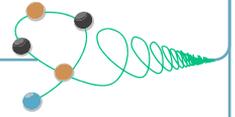
En el **Capítulo 8** se presentan las conclusiones, perspectivas y trabajo futuro de la presente obra. Finalmente, este libro es una búsqueda constante en el entendimiento de sistemas complejos sometidos a un flujo tipo Hagen-Poiseuille, con el fin de dilucidar la dinámica del flujo en función de los parámetros reológicos. La extensión natural de este trabajo es estudiar el flujo en otro tipo de geometrías simples (rendijas, esferas), con un gradiente de presión pulsátil, o en flujo extensional, o flujo de gran amplitud de deformación, etc.





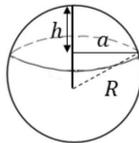
# CAPÍTULO 2

## Modelo de Herrera-Rey



Fases viscoelásticas

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_i \\ \lambda_i = \frac{\eta_i}{G_i} \\ \rho_i \\ i = L, R \\ L = \text{Izq.} \\ D = \text{Der.} \end{array} \right.$$



**Figura 2-1.** Esquema representativo de las CCE para establecer el modelo matemático de Herrera-Rey [14].

## 2.1 Modelo electro-viscoelástico

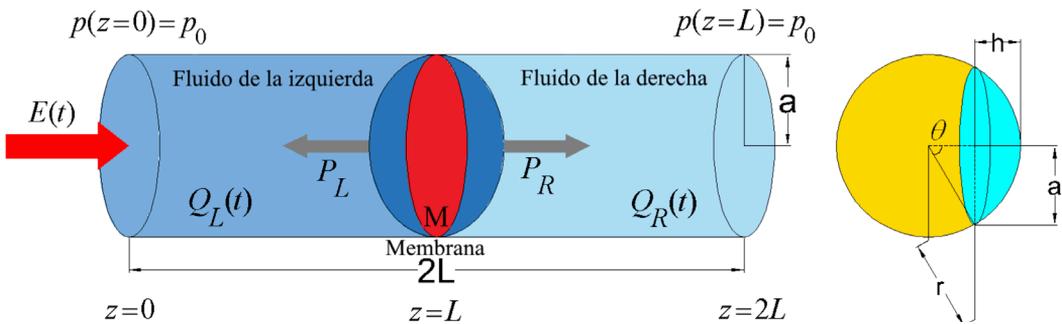
Básicamente, el sistema físico es el mismo que el propuesto por Rey (2008)[15], Abou-Dakka *et al.* (2012)[12], Herrera-Valencia & Rey (2014, 2018)[1, 26] y Ramírez-Torres *et al.* (2024)[13]. Para estudiar el comportamiento de las células ciliadas externas afectadas por un campo eléctrico externo, se propuso el esquema físico de la **Figura 2-1**. Se modela un capilar de longitud  $2L$ , y radio  $a$ . La parte derecha del capilar, de  $L$  a  $2L$ , está llena con una fase líquida viscoelástica con parámetros reológicos  $[h_R, l_R]$ , donde  $h_R$  es la viscosidad a bajas rapidez de deformación del fluido de la derecha y  $l_R$  es el tiempo característico del fluido de la derecha, asimismo, la parte inferior del capilar, de  $0$  a  $L$ , está llena con otra fase líquida viscoelástica con parámetros reológicos  $[h_L, l_L]$ , donde  $h_L$  es la viscosidad a bajas rapidez de deformación del fluido de la izquierda y  $l_L$  es el tiempo característico del fluido de la izquierda, y las densidades de las fases líquidas son  $[r_R, r_L]$ , respectivamente. Nótese que los subíndices (R, L) están referidos a la parte derecha (Right) e izquierda (Left), respectivamente. En medio del capilar, i.e., en  $z = L$ , se adhiere una membrana flexo-eléctrica circular, es decir, una membrana que por efecto de un campo eléctrico se deforma en forma de domo esférico y oscila en torno a una posición de equilibrio [1, 12, 15].

Las siguientes suposiciones físicas son necesarias para el modelado de este problema:

- a) Los efectos inerciales son despreciables, i.e. el sistema opera bajo un número de Reynolds pequeño ( $Re \rightarrow 0$ ), es decir, en flujo laminar [31].
- b) Flujo en estado transitorio.
- c) Los efectos gravitacionales son despreciables en comparación con los efectos del gradiente de presión inducido por el movimiento de la membrana como consecuencia del campo eléctrico.
- d) La presión en la parte izquierda y derecha es la misma, i.e.  $P(z = 2L) = P_0$  &  $P(z = 0) = P_0$  (véase la **Figura 2-2**).
- e) Los fluidos viscoelásticos del sistema serán descritos mediante el modelo viscoelástico de Maxwell. Por lo anterior, las deformaciones en el fluido son pequeñas (régimen reológico de viscoelasticidad lineal [32-36]).
- f) Simetría capilar, i.e. no existe dependencia de ningún atributo o variable dinámica con el ángulo.
- g) No hay reacción química.



- h) El flujo es isotérmico.
- i) Se cumple la condición de no deslizamiento en las paredes del capilar y en la membrana.
- j) Tanto la curvatura de la membrana como el flujo de los fluidos viscoelásticos se llevan a cabo a temperatura constante.
- k) Las paredes del capilar son rígidas.
- l) Se aplica un campo eléctrico transitorio  $E(t)$ .



**Figura 2-2.** Esquema simplificado representativo de las CCE. Adaptado de Herrera-Valencia & Rey (2023) [14].

En el esquema simplificado de la CCE mostrado en la **Figura 2-2** se aplica un campo eléctrico transitorio,  $E(t)$ , el cual provoca en la membrana una distorsión transitoria que induce un flujo volumétrico debido al movimiento de las dos fases viscoelásticas. Se asume que el campo eléctrico aplicado deforma la membrana en forma de domo esférico de altura  $h$  y radio  $r = R$ , y crea un movimiento oscilatorio entre las fases viscoelásticas [1, 12, 15]. En resumen, la consecuencia más importante de lo anterior es:

- a) La rapidez de evolución de la curvatura de la membrana induce un flujo volumétrico en ambas fases viscoelásticas.



## 2.1.1 Ecuaciones de balance aplicables

### 2.1.1.1 Ecuaciones de continuidad y de transporte

Al considerar las simplificaciones anteriores, la dinámica no-lineal de la membrana está determinada por las ecuaciones de transporte [31, 37-39] y de un balance de fuerzas en la membrana [1]. La primera de las ecuaciones planteadas, es la ecuación de continuidad para el fluido de la izquierda:

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_L \mathbf{V}_L) = 0 \quad (2-1)$$

De la misma manera para la otra fase viscoelástica, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \rho_R}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_R \mathbf{V}_R) = 0 \quad (2-2)$$

La ecuación de balance de *momentum* lineal [31, 40] se debe aplicar a cada fase como se muestra a continuación:

$$\rho_R \frac{D\mathbf{V}_R}{Dt} = -(\nabla p(t))_R + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_R + \rho_R \mathbf{g} \quad (2-3)$$

Asimismo, se tiene la siguiente expresión para la fase de la izquierda:

$$\rho_L \frac{D\mathbf{V}_L}{Dt} = -(\nabla p(t))_L + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_L + \rho_L \mathbf{g} \quad (2-4)$$

No se considerará la ecuación de balance de energía debido a que el flujo en el sistema permanece a temperatura constante [31, 40-46].

### 2.1.1.2 Ecuación constitutiva reológica

La respuesta reológica de los fluidos viscoelásticos en el sistema capilar de la **Figura 2-2** son descritas por medio de la ecuación de Maxwell convectivo superior [32, 33, 35, 40, 47], por lo que se tiene lo siguiente:

$$\sigma + \lambda_L \overset{\nabla}{\sigma} = \eta_L \mathbf{D} \tag{2-5}$$

Por consiguiente, para la fase de la derecha se tiene que:

$$\sigma + \lambda_R \overset{\nabla}{\sigma} = \eta_R \mathbf{D} \tag{2-6}$$

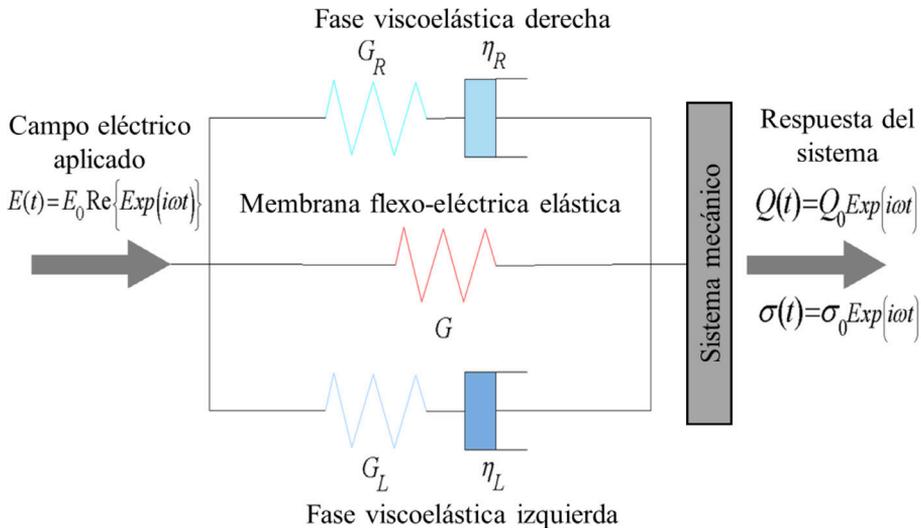
Donde  $\overset{\nabla}{\sigma}$  es la derivada convectiva-superior del tensor de esfuerzos viscoelásticos, y tiene la forma [33, 37, 39, 48]:

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \frac{D \sigma}{Dt} - \{ \nabla \mathbf{V}^T \cdot \sigma + \sigma \cdot \nabla \mathbf{V} \} \tag{2-7}$$

En donde la derivada material del tensor de esfuerzos se expresa como [31, 40, 49, 50]:

$$\frac{D \sigma}{Dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \sigma \tag{2-8}$$

Cabe resaltar que tanto la derivada convectiva superior como la derivada material deben ser aplicadas a los dos fluidos viscoelásticos. El modelo mecánico del sistema puede ser descrito en una configuración en paralelo como la observada en la **Figura 2-3**.



**Figura 2-3.** Analogía mecánica del modelo de la membrana flexo-eléctrica. Adaptado de Herrera-Valencia & Rey (2023) [14].



Cabe resaltar que la deformación total del sistema es igual a la deformación del fluido viscoelástico de la derecha que es igual a la deformación del fluido viscoelástico de la izquierda e igual a la deformación de la membrana elástica debido a que se encuentran en una configuración en paralelo (isodeformaciones [32, 33, 51]). Por lo tanto, el esfuerzo total en el sistema será la suma de la contribución del fluido del lado izquierdo más la contribución del fluido del lado derecho más la contribución de la membrana flexo-eléctrica.

Sumando las contribuciones de los esfuerzos de los dos fluidos viscoelásticos, se tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} (\rho_L + \rho_R) \frac{D}{Dt} \left( \frac{\rho_L V_L + \rho_R V_R}{\rho_L + \rho_R} \right) \\ = - \left( (\nabla p(t))_R + (\nabla p(t))_L \right) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_R + \boldsymbol{\sigma}_L) \\ + (\rho_L + \rho_R) \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2-9)$$

La Ec. (2-9) puede ser descrita de la siguiente forma:

$$\Sigma \rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p(t) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\rho_L + \rho_R) \mathbf{g} \quad (2-10)$$

En donde se han definido las siguientes variables macroscópicas:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \frac{\rho_L V_L + \rho_R V_R}{\rho_L + \rho_R} \\ p &= p_L + p_R \\ \boldsymbol{\sigma}_F &= \boldsymbol{\sigma}_R + \boldsymbol{\sigma}_L \\ \Sigma \rho &= \rho_L + \rho_R \end{aligned} \quad (2-11)$$

El gradiente de presión en la interfase se puede expresar como la suma de las contribuciones de la fase viscoelástica R y la fase viscoelástica L, respectivamente.

$$\nabla p(t) = (\nabla p(t))_R + (\nabla p(t))_L = \frac{\nabla p(t)}{l} \quad (2-12)$$

Dado que el esfuerzo total en el sistema es la suma de los esfuerzos de cada componente (fluido L, fluido R y membrana), el tensor de esfuerzos viscoelásticos es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_F + \boldsymbol{\sigma}_M = \boldsymbol{\sigma}_R + \boldsymbol{\sigma}_L + \boldsymbol{\sigma}_M \quad (2-13)$$

Las fases viscoelásticas pueden representarse mediante la ecuación constitutiva de Maxwell, i.e., para la fase derecha se tiene que:

$$\boldsymbol{\sigma}_R = \frac{2\eta_R}{1 + \lambda_R \frac{\partial}{\partial t}} \mathbf{D} \quad (2-14)$$

Asimismo, para el fluido viscoelástico de la izquierda (Ec. (2-15)) y para la membrana flexoeléctrica elástica (Ec. (2-16)), se puede escribir:

$$\boldsymbol{\sigma}_L = \frac{2\eta_L}{1 + \lambda_L \frac{\partial}{\partial t}} \mathbf{D} \quad (2-15)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_M = G_M \boldsymbol{\gamma} \quad (2-16)$$

La Ec. (2-16) es la relación constitutiva del sólido de Hooke [33] y describe las propiedades elásticas de la membrana flexo-eléctrica en el sistema de estudio. Nótese que en las Ecs. (2-14) y (2-15),  $\mathbf{D}$  es el tensor de rapidez de deformación del sistema ( $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = 2\mathbf{D}$ ), por lo que se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_M}{\partial t} = G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} = G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\boldsymbol{\gamma}} = 2G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{D} \quad (2-17)$$

Entonces, para la membrana se obtiene la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{\sigma}_M = 2G_M \left( \frac{1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t}}{\frac{\partial}{\partial t}} \right) \mathbf{D} \quad (2-18)$$

Al combinar las Ecs. (2-14)-(2-16), y sustituyéndolas en la Ec. (2-13), se obtiene la siguiente expresión para el esfuerzo total:



$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta_R \frac{1}{1+\lambda_R} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + 2\eta_L \frac{1}{1+\lambda_L} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + 2G_M \frac{1+\lambda_M}{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (2-19)$$

La Ec. (2-19) se puede expresar de manera equivalente como:

$$\left( 1 + (\lambda_R + \lambda_L) \frac{\partial}{\partial t} + (\lambda_R \lambda_L) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = \left( G_M + (\lambda_M G_M + G_M (\lambda_R + \lambda_L) + \eta_R + \eta_L) \frac{\partial}{\partial t} + (G_M \Sigma_\lambda \lambda_M + \lambda_L \eta_R + \lambda_R \eta_L + G_M \lambda_R \lambda_L) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda_M G_M \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) 2\mathbf{D} \quad (2-20)$$

El modelo expresado en la Ec. (2-20) fue desarrollado originalmente por Herrera-Valencia & Rey (2023) [14] para describir la interacción al flujo de un sólido flexo-eléctrico en medios viscoelásticos. Este modelo puede ser descrito mediante la siguiente notación:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \Sigma_\lambda \frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}}{\partial t^2} + \Pi_\lambda \frac{\partial^3 \boldsymbol{\sigma}}{\partial t^3} = 2 \left( G_M + (\lambda_M G_M + G_M \Sigma_\lambda + \Sigma_\eta) \frac{\partial}{\partial t} + (G_M \Sigma_\lambda \lambda_M + (\Sigma_G + G_M) \Pi_\lambda) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda_M G_M \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right) \mathbf{D} \quad (2-21)$$

En donde se han definido las siguientes variables en el sistema:

$$\begin{aligned} \Sigma_\lambda &= \lambda_R + \lambda_L \\ \Pi_\lambda &= \lambda_R \lambda_L \\ \Sigma_\eta &= \eta_R + \eta_L = G_R \lambda_R + G_L \lambda_L \\ \Sigma_G &= G_R + G_L \end{aligned} \quad (2-22)$$

La Ec. (2-21) representa una variante de un modelo viscoelástico lineal de Burgers [32, 33, 39] el cual puede ser factorizado por [39, 52]:

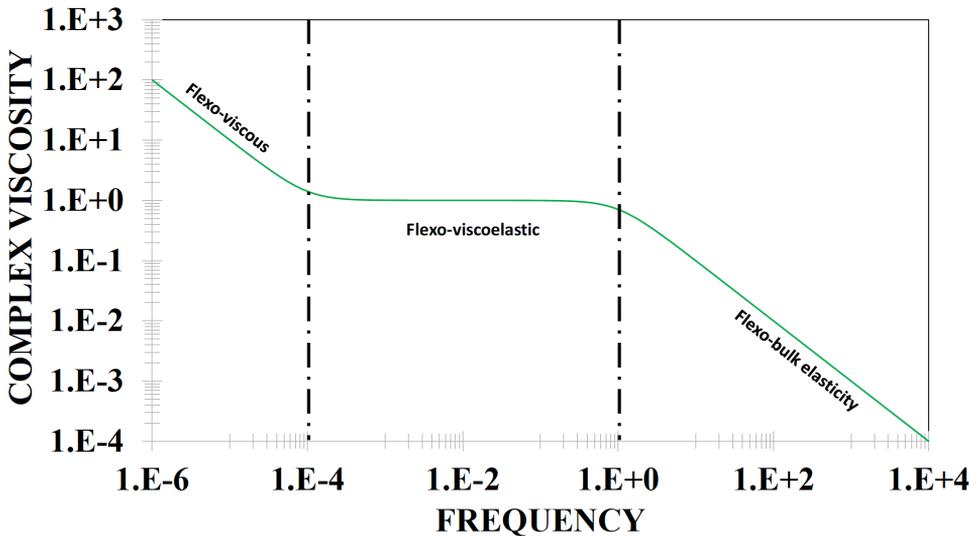
$$\boldsymbol{\sigma} = O_\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) 2\mathbf{D} \quad (2-23)$$



En donde se ha definido el siguiente operador diferencial que describe la viscosidad en función de la derivada parcial  $\mathbb{V}/\mathbb{V}t$ :

$$O_{\eta} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{G_M + (\lambda_M G_M + G_M \Sigma_{\lambda} + \Sigma_{\eta}) \frac{\partial}{\partial t} + (G_M \Sigma_{\lambda} \lambda_M + (\Sigma_G + G_M) \Pi_{\lambda}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda_M G_M \frac{\partial^3}{\partial t^3}}{\frac{\partial}{\partial t} \left( 1 + \Sigma_{\lambda} \frac{\partial}{\partial t} + \Pi_{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)} \quad (2-24)$$

Este modelo, en el régimen de viscoelasticidad lineal, genera un comportamiento para la viscosidad compleja  $\eta^*$  que se muestra en la **Figura 2-4**.



**Figura 2-4.** Viscosidad compleja versus la frecuencia para el modelo Herrera-Rey. El modelo describe un comportamiento decreciente a bajas y a altas frecuencias, y un *plateau* a frecuencias moderadas.

El tensor rapidez de deformación  $\mathbf{D}$  se puede expresar en términos del tensor espacial gradiente de velocidad  $\nabla \mathbf{V}$ :

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T \quad (2-25)$$



Combinando las Ecs. (2-10), (2-13) y (2-24), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales.

$$\Sigma \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p(t) + O_{\eta} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) (\nabla^2 \mathbf{V} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})) + \Sigma \rho \mathbf{g} \quad (2-26)$$

Dado que el sistema es incompresible, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2-27)$$

Si se asume que el campo de velocidades es unidireccional en la geometría cilíndrica, es decir, solo se manifiesta en la dirección axial y depende de la coordenada radial, se tiene lo siguiente [31, 40]:

$$\Sigma \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot \mathbf{e}_z = -\nabla p(t) \cdot \mathbf{e}_z + O_{\eta} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 (\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_z) \quad (2-28)$$

La componente en dirección axial,  $z$ , del vector velocidad, tiene la siguiente estructura:

$$\Sigma \rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(t)}{\partial z} + O_{\eta} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 V_z(r,t) \quad (2-29)$$

Desarrollando el Laplaciano en coordenadas cilíndricas (véase el Apéndice B de Bird *et al.* (2000) [31]), se tiene lo siguiente:

$$\Sigma \rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(t)}{\partial z} + O_{\eta} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_z(r,t) \quad (2-30)$$

Aplicando la simetría cilíndrica, y admitiendo la no existencia de un flujo extensional, se tiene la siguiente ecuación diferencial parcial lineal:

$$\Sigma \rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(t)}{\partial z} + O_{\eta} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) V_z(r,t) \quad (2-31)$$

Finalmente, al reemplazar el gradiente de presión transitorio con la Ec. (2-12), se tiene la siguiente ecuación diferencial que describe los mecanismos inerciales, la presión y los mecanismos viscoelásticos del sistema.

$$\Sigma \rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = -\frac{\Delta p(t)}{L} + O_{\eta} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) V_z(r,t) \quad (2-32)$$

La Ec. (2-32) es punto de partida en los cálculos que se realizan en este libro, y puede ser descrita en términos de una función que describe la permeabilidad en el sistema de estudio (que se describe a continuación). La permeabilidad, en este contexto, representaría físicamente la resistencia que presenta la membrana flexo-eléctrica a cambiar su curvatura por efecto de una fuerza externa asociada al campo eléctrico. La Ec. (2-32) puede ser rescrita como:

$$Vz(r,t) = K \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) (-\nabla_z p(t)) \quad (2-33)$$

La Ec. (2-33) se puede expresar de la siguiente manera:

$$K \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{O_\phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)}{\Sigma \rho O_\phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial Vz(r,t)}{\partial t} - \nabla_r^2} \quad (2-34)$$

Las Ecs. (2-32) y (2-33) representan las aportaciones de este trabajo, y son inspiradas en los trabajos realizados en medios porosos y en permeabilidad de fluidos biológicos complejos como aquellos escritos en el flujo de sangre en venas y el sistema circulatorio humano [39, 53-55]. En la siguiente sección se presentará un enfoque diferente el cuál nos permitirá separar la contribución del sólido elástico en la ecuación constitutiva reológica incorporando un balance de presiones mecánicas.

### 2.1.1.3 Ecuación de forma de la membrana

La dinámica lineal de la membrana es descrita mediante un equilibrio de fuerzas, la cual ya ha sido reportada previamente [1, 12, 56].

$$(C_r \mathfrak{F}) E(t) = \Delta p(z=L,t) + 4LG_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) \quad (2-35)$$

La Ec. (2-35) es la consecuencia del balance de las siguientes fuerzas: (i) eléctrica, (ii) bulto debido a la disipación generada por la diferencia de presiones en las fases viscoelásticas durante el flujo y (iii) elástica basada en la recuperación de la membrana. Un factor geométrico indicará el área deformada a consecuencia del campo eléctrico  $E(t)$  cuya



dirección se manifiesta axialmente (ver **Figura 2-3**). Nótese que en la Ec. (2-35) se ha redefinido la elasticidad de la membrana (véase Ec. (2-16)) como:

$$G_M = \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S}}{4L} \quad (2-36)$$

La fuerza eléctrica oscilante,  $F_E(t)$ , se calcula de la siguiente manera [1, 12, 56]:

$$F_E(t) = (c_f \mathfrak{S}) \mathbf{E}(t) = c_f \left( 8/a^2 \right) \mathbf{E}(t) \quad (2-37)$$

La fuerza eléctrica oscilatoria es directamente proporcional al campo eléctrico aplicado multiplicado por un coeficiente,  $c_f$ , el cual está asociado con las propiedades eléctricas del sistema [1, 12, 56]. Para que la Ec. (2-37) pueda ser usada para relacionar la deformación de la membrana con el campo eléctrico aplicado, es necesario conocer la diferencia de presiones entre la membrana, i.e.,  $Dp(z=L, t)$ , para esto se aplica un balance de presiones entre la parte izquierda y parte derecha del capilar, y la membrana (véase la Ec. (2-38)).

$$\frac{\Delta p(z=L, t)}{4L} = \left( \frac{C_f \mathfrak{S}}{4L} \right) E(t) - G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) \quad (2-38)$$

De la ecuación de movimiento (Ec. (2-32)) se tiene lo siguiente:

$$\left\{ O_n \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \Sigma \rho \frac{\partial}{\partial t} \right\} V_z(r, t) = \frac{\Delta p(t)}{L} \quad (2-39)$$

Al sustituir la Ec. (2-38) en la Ec.(2-39), se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\left\{ O_n \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \Sigma \rho \frac{\partial}{\partial t} \right\} V_z(r, t) = 4 \left\{ \left( \frac{C_f \mathfrak{S}}{4L} \right) E(t) - G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) \right\} \quad (2-40)$$

Finalmente, se tiene la siguiente expresión analítica para el modelo dinámico lineal:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \Sigma \rho O_\phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right\} V_z(r, t) = 4 O_\phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \left( \frac{C_f \mathfrak{S}}{4L} \right) E(t) - G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) \right\} \quad (2-41)$$



Definiendo un vector de onda  $\beta$ :

$$\beta^2 = i^2 \sum \rho O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \quad (2-42)$$

Y reescribiendo el operador fluidez como el inverso del operador viscosidad.

$$O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{1}{O_\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)} = \frac{1 + \Sigma \lambda \frac{\partial}{\partial t} + \Pi \lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{\Sigma \eta + \Pi \lambda \cdot \Sigma_G \frac{\partial}{\partial t}} \quad (2-43)$$

Al combinar las Ecs. (2-42) y (2-43) con la Ec. (2-41), se obtiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \beta^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\} Vz(r,t) = 4O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \left( \frac{C_r \mathfrak{J}}{4L} \right) E(t) - G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) \right\} \quad (2-44)$$

La Ec. (2-44) es una ecuación diferencial parcial que describe los cambios temporales y espaciales de la velocidad en función del campo eléctrico aplicado, y la curvatura promedio de la membrana que depende de las propiedades flexo-eléctricas y elásticas de la membrana [1, 12, 56]. La rapidez con que evoluciona la membrana es proporcional a la evolución temporal de la curvatura promedio por lo que se tiene la siguiente relación:

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a Vz(r,t) r dr d\theta = -\frac{1}{2} \pi a^4 \frac{dH(t)}{dt} \quad (2-45)$$

## 2.1.2 Ecuación dinámica sin mecanismos inerciales

Suponiendo que los mecanismos inerciales son despreciables, i.e. no existe contribución al sistema por inicio de flujo, se tiene que:

$$\beta^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \cong 0 \quad (2-46)$$



Entonces, la componente z de la ecuación de movimiento, toma la forma:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right\} Vz(r,t) = 4O_\phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \left( \frac{C_r \mathfrak{F}}{4L} \right) E(t) - G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) \right\} \quad (2-47)$$

Al integrar dos veces, la Ec. (2-47) se transforma en lo siguiente:

$$Vz(r,t) = O_\phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \left( \frac{C_r \mathfrak{F}}{4L} \right) E(t) - G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) \right\} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (2-48)$$

Aplicando la condición de no deslizamiento y admitiendo que la velocidad al centro del capilar posee un valor finito, se tienen las dos condiciones de frontera necesarias para resolver la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} r = a; Vz = 0 \\ r = 0; Vz = \text{finita} \end{aligned} \quad (2-49)$$

El perfil particular de velocidades es entonces:

$$Vz(r,t) = -O_\phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot a^2 \left\{ \left( \frac{C_r \mathfrak{F}}{4L} \right) E(t) - G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) \right\} \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (2-50)$$

Al sustituir el perfil de velocidades particular en la Ec. (2-45), se obtiene el flujo volumétrico:

$$\begin{aligned} Q(t) = \\ -2\pi O_\phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \cdot a^2 \left\{ \left( \frac{C_r \mathfrak{F}}{4L} \right) E(t) - G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) \right\} \int_0^a \left[ 1 - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right] r dr \end{aligned} \quad (2-51)$$

Al integrar la Ec. (2-51) con respecto a la coordenada radial r se tiene lo siguiente:

$$Q(t) = -\frac{1}{2} \pi a^4 O_\phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \left( \frac{C_r \mathfrak{F}}{4L} \right) E(t) - G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) \right\} \quad (2-52)$$

Al aplicar la Ec. (2-45) para expresar el flujo volumétrico Q(t), se tiene lo siguiente:

$$O_\phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \left( \frac{C_r \mathfrak{F}}{4L} \right) E(t) - G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) \right\} = \frac{dH(t)}{dt} \quad (2-53)$$



Reordenando la Ec. (2-53):

$$\boxed{\frac{dH(t)}{dt} + O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) = O_\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L} \right) E(t)} \quad (2-54)$$

Al sustituir en la ecuación reológica (véase Ec. (2-54)) el operador fluidez definido en la Ec. (2-43), se crea un modelo de segundo orden para la curvatura y el campo eléctrico el cual fue deducido previamente por Abou-Dakka *et al.* (2012) [12] y Herrera-Valencia & Rey (2014)[1].

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} + \frac{1 + \Sigma\lambda \frac{\partial}{\partial t} + \Pi\lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{\Sigma\eta + \Pi\lambda \cdot \Sigma_G \frac{\partial}{\partial t}} G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) = \\ \frac{1 + \Sigma\lambda \frac{\partial}{\partial t} + \Pi\lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2}}{\Sigma\eta + \Pi\lambda \cdot \Sigma_G \frac{\partial}{\partial t}} \left( \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L} \right) E(t) \end{aligned} \quad (2-55)$$

Al multiplicar por el denominador del operador fluidez, tenemos:

$$\begin{aligned} \left( \Sigma\eta + \Pi\lambda \cdot \Sigma_G \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{dH(t)}{dt} + G_M \left( 1 + \Sigma\lambda \frac{\partial}{\partial t} + \Pi\lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) H(t) = \\ \left( \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L} \right) \left( 1 + \Sigma\lambda \frac{\partial}{\partial t} + \Pi\lambda \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(t) \end{aligned} \quad (2-56)$$

La Ec. (2-56) se puede expresar en una forma más compacta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left( \Pi_\lambda \left( G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) + \Sigma_G \right) \frac{d^2}{dt^2} + \left( G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \Sigma_\lambda + \Sigma_\eta \right) \frac{d}{dt} + 1 \right) H(t) = \\ \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L} \left( \Pi_\lambda \frac{d^2}{dt^2} + \Sigma_\lambda \frac{d}{dt} + 1 \right) E(t) \end{aligned} \quad (2-57)$$

La Ec. (2-57) puede ser expresada en términos de una función de transferencia, por lo que se tiene lo siguiente:



$$R(t) = \frac{H(t)}{E(t)}$$

$$= \frac{C_f \mathfrak{F}}{4L} \frac{\Pi_\lambda \frac{d^2}{dt^2} + \Sigma_\lambda \frac{d}{dt} + 1}{\Pi_\lambda \left( G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) + \Sigma_G \right) \frac{d^2}{dt^2} + \left( G_M \left( 1 + \lambda_M \frac{\partial}{\partial t} \right) \Sigma_\lambda + \Sigma_\eta \right) \frac{d}{dt} + 1} \quad (2-58)$$

Como se verá más adelante, la función de transferencia tiene dos límites clásicos. El primero de ellos es a bajas frecuencias (Ec. (2-59)), mientras que el segundo es a frecuencias altas (Ec. (2-60)), es decir:

$$\lim_{\frac{d}{dt} \rightarrow 0} R(t) = \frac{H(t)}{E(t)} = \frac{C_f \mathfrak{F}}{4L} \quad (2-59)$$

A frecuencias altas se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\lim_{\frac{d}{dt} \rightarrow \infty} R(t) = \frac{H(t)}{E(t)} = \frac{C_f \mathfrak{F}}{4L} \frac{1}{G_M + \Sigma_G} \quad (2-60)$$

La Ec. (2-57) describe los cambios temporales de la curvatura promedio de la membrana en función del campo eléctrico aplicado. Los coeficientes del miembro izquierdo están asociados a los siguientes mecanismos: (i) inerciales, (ii) disipativos y (iii) de almacenamiento relacionados con la evolución temporal de la curvatura promedio en la membrana [1, 12]. Nótese que la ecuación diferencial es simétrica en el orden de la derivada para la curvatura y para el campo eléctrico. En la siguiente sección se presenta el modelo general incluyendo los mecanismos inerciales, y se propone un conjunto de variables adimensionales con el fin de obtener una ecuación dinámica y los correspondientes grupos adimensionales, los cuales nos dan una panorámica general de los mecanismos gobernantes en el sistema.



# CAPÍTULO 3

## Modelo Herrera-Rey con mecanismos inerciales

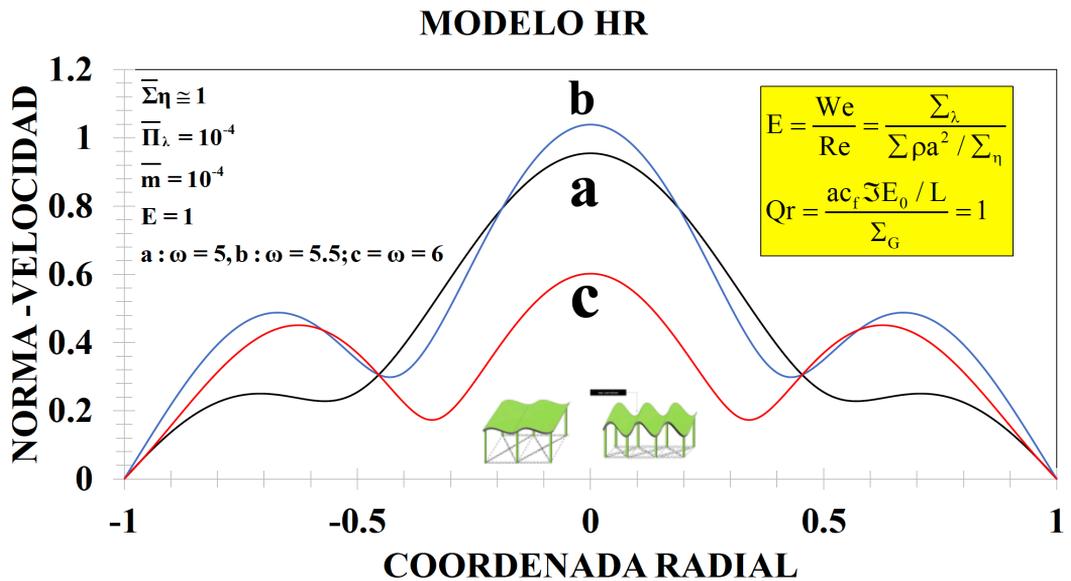
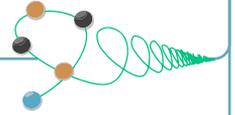


Figura 3-1. Norma de la velocidad en un capilar del modelo de Herrera-Rey.

### 3.1 Ecuación dinámica incluyendo los mecanismos inerciales

En este capítulo se desarrollará el modelo dinámico lineal en donde los mecanismos inerciales no son despreciables. A este tipo de sistemas se les conoce como *inicio de flujo*, y lo que se deducirá a continuación es la función de transferencia del sistema de estudio. Se presenta un resumen de las ecuaciones básicas deducidas en el capítulo anterior. Partiendo de:

$$\frac{\Delta p(z=L,t)}{4L} = \left( \frac{C_r \mathfrak{F}}{4L} \right) E(t) - MH(t) \quad (3-1)$$

Por lo que la ecuación dinámica tiene la forma:

$$\left\{ O_\eta \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \Sigma \rho \frac{\partial}{\partial t} \right\} V_z(r,t) = 4 \left( \frac{\Delta p(t)}{4L} \right) \quad (3-2)$$

Entonces, se tiene la siguiente expresión analítica:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \beta^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right\} V_z(r,t) = 4 O_\phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \left\{ \left( \frac{C_r \mathfrak{F}}{4L} \right) E(t) - MH(t) \right\} \quad (3-3)$$

En donde el parámetro Beta se ha definido en la Ec. (3-3) como:

$$\beta^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) = \Sigma \rho (i\omega) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (3-4)$$

Y el flujo volumétrico se puede calcular mediante una integral doble que relaciona la velocidad axial con el área de sección transversal.

$$Q(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r,t) r dr d\theta \quad (3-5)$$

La relación entre el flujo volumétrico y la rapidez de evolución de la membrana en el medio viscoelástico, se puede expresar como:

$$Q(t) = -\frac{1}{2} \pi a^4 \frac{dH(t)}{dt} \quad (3-6)$$



### 3.2 Espacio de Fourier

La ecuación dinámica (Ec. (3-3)) es una ecuación de Bessel no-homogénea la cual se resolverá mediante la transformada de Fourier en el espacio de las frecuencias. La expresión básica para la transformada integral de Fourier se define como [57, 58]:

$$F(\omega) = \mathfrak{T}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \text{Exp}(-i\omega t) dt \quad (3-7)$$

Aplicar la transformada de Fourier Ec. (3-7) en la Ec. (3-3), se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \beta^2 \right\} Vz(r, \omega) = 4O_\phi(i\omega) \left\{ \left( \frac{C_r \mathfrak{T}}{4L} \right) E(\omega) - MH(\omega) \right\} \quad (3-8)$$

La solución general se compone de una solución particular la cual se obtiene al resolver una ecuación de Bessel, entonces se tiene lo siguiente:

$$Vz(r, \omega) = C_1 J_0(\omega, \beta r) + C_2 Y_0(\omega, \beta r) + 4O_\phi(i\omega) \frac{\left( \frac{C_r \mathfrak{T}}{4L} \right) E(\omega) - MH(\omega)}{\beta^2} \quad (3-9)$$

En la Ec. (3-9) se ha definido el vector de onda complejo de la siguiente manera:

$$\beta^2 = i^2 \Sigma \rho a^2 \cdot (i\omega) \cdot O_\phi(i\omega) \quad (3-10)$$

Asumiendo las mismas condiciones de frontera, que en el caso sin inercia se tiene lo siguiente:

$$C_1 = -\frac{1}{J_0(\omega, \beta a)} 4O_\phi(i\omega) \frac{\left( \frac{C_r \mathfrak{T}}{4L} \right) E(\omega) - MH(\omega)}{\beta^2} \quad (3-11)$$

Y la constante  $C_2$  se calcula rápidamente utilizando las condiciones de frontera para la velocidad axial:

$$C_2 = 0 \quad (3-12)$$



Por lo que se tiene la siguiente expresión para la velocidad axial:

$$V_z(r, \omega) = O_\phi(i\omega) \frac{a^2}{(\beta a)^2} \left( 1 - \frac{J_0(\omega, \beta r)}{J_0(\omega, \beta a)} \right) 4 \left\{ \left( \frac{C_r \mathfrak{I}}{4L} \right) E(\omega) - MH(\omega) \right\} \quad (3-13)$$

Integrando sobre una sección transversal de área el perfil de velocidades se puede calcular el flujo volumétrico en el espacio de Fourier:

$$Q(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^a V_z(r, \omega) r dr d\theta = 2\pi \int_0^a V_z(r, \omega) r dr \quad (3-14)$$

Sustituyendo la velocidad axial en el flujo volumétrico en el espacio de Fourier:

$$Q(\omega) = \pi a^4 O_\phi(i\omega) \frac{4i^2}{(\beta a)^2} \left( 1 - 2 \frac{J_1(\omega, \beta a)/\beta a}{J_0(\omega, \beta a)} \right) \left\{ MH(\omega) - \left( \frac{C_r \mathfrak{I}}{4L} \right) E(\omega) \right\} \quad (3-15)$$

Entonces, a partir de la Ec. (3-15) se puede obtener la siguiente expresión analítica:

$$Q(\omega) = -\frac{1}{2} \pi a^4 (i\omega) \cdot H(\omega) = i^2 \frac{1}{2} \pi a^4 (i\omega) \cdot H(\omega) \quad (3-16)$$

Igualando las últimas dos expresiones, se tiene la siguiente fórmula:

$$H(\omega) = \frac{O_\phi(i\omega)}{(i\omega)} \frac{8}{(\beta a)^2} \left( 1 - 2 \frac{J_1(\omega, \beta a)/\beta a}{J_0(\omega, \beta a)} \right) \left\{ MH(\omega) - \left( \frac{C_r \mathfrak{I}}{4L} \right) E(\omega) \right\} \quad (3-17)$$

Si se define la compliancia compleja [32, 33] de la siguiente manera:

$$J(i\omega) = O_\phi(i\omega) / i\omega \quad (3-18)$$

Y la función de dispersión,  $F(b)$ , como:

$$F(\beta a) = \frac{8}{(\beta a)^2} \left( 1 - 2 \frac{J_1(\omega, \beta a)/\beta a}{J_0(\omega, \beta a)} \right) \quad (3-19)$$

Sustituyendo la Ec. (3-19) en la Ec. (3-17), la curvatura promedio en función de la frecuencia toma la siguiente forma:

$$H(\omega) = J(i\omega) \cdot F(\beta a) \left\{ MH(\omega) - \left( \frac{C_r \mathfrak{I}}{4L} \right) E(\omega) \right\} \quad (3-20)$$

Finalmente, se escribe:

$$\frac{H(\omega)}{E(\omega)} = \frac{C_r \mathfrak{I}}{4L} \frac{i^2 J(i\omega) \cdot F(\beta a)}{1 + M \left( i^2 J(i\omega) \cdot F(\beta a) \right)} \quad (3-21)$$

La Ec. (3-21) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{H(\omega)}{E(\omega)} = \left( \frac{C_r \mathfrak{I}}{4L} \right) \frac{T(i\omega)}{1 + MT(i\omega)}} \quad (3-22)$$

En donde se ha definido la función de transferencia entre la curvatura y el campo eléctrico como el producto de la compliancia (flujo lento) y una función de dispersión que depende del parámetro  $\beta$  asociado a la dispersión en el medio.

$$\boxed{T(i\omega) = i^2 J(i\omega) \cdot F(\beta a)} \quad (3-23)$$

Bajo esta nueva definición de compliancia, el parámetro Beta tiene la siguiente expresión analítica:

$$\beta^2 = i^4 \Sigma \rho a^2 \cdot \omega^2 \cdot J(i\omega) \quad (3-24)$$

En conclusión, la transferencia de momento de la membrana flexo-eléctrica en las fases viscoelásticas es una combinación de los siguientes mecanismos:

- a) Viscosos
- b) Viscoelásticos
- c) Elásticos de la membrana
- d) Inercia de las fases viscoelásticos
- e) Dispersivas debido a las velocidades de grupo y de fase

Una vez que se tiene toda la información física, se presenta la función de transferencia de todo el sistema, por lo que se tiene la siguiente expresión:



$$R(\omega) = \text{Re}[R(\omega)] + i\text{Im}[R(\omega)] = \frac{H(\omega)}{E(\omega)} = \left( \frac{C_r \mathfrak{I}}{4L} \right) \frac{T(i\omega)}{1 + MiT(i\omega)} \quad (3-25)$$

En las siguientes secciones, se analizará la magnitud de la función de transferencia compleja del sistema por lo que:

$$R(\omega) = \sqrt{(\text{Re}[R(\omega)])^2 + (\text{Im}[R(\omega)])^2} \quad (3-26)$$

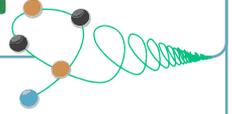
En resumen, en este capítulo se desarrolló la función de transferencia que relaciona la variable de entrada (campo eléctrico) con la variable de salida (curvatura promedio). Se observó que la función de transferencia está determinada por el flujo volumétrico y la fuerza motriz asociada al campo eléctrico, y la razón entre la elasticidad de la membrana y la elasticidad de bulto de las fases viscoelásticas. Nótese que la respuesta dinámica depende de las variables flexo-eléctricas y geométricas del medio.

La Ec. (3-26) representa la mayor contribución del presente análisis y será punto de partida en los cálculos y simulaciones posteriores.

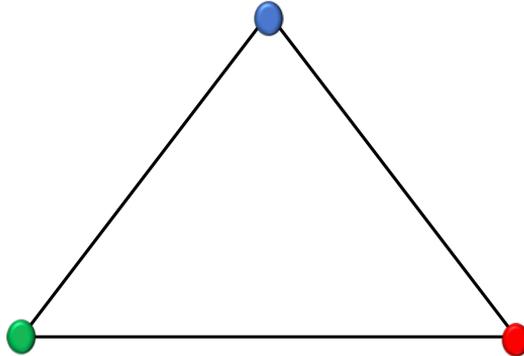


## CAPÍTULO 4

# Variables y numeros adimensionales



$$\text{V} : \bar{\Sigma}\eta = 0.5; \bar{\Pi}_\lambda = 1/4; \bar{\mathbf{m}} = 10^{-4}$$



$$\text{III} : \bar{\Sigma}\eta = 1; \bar{\Pi}_\lambda = \bar{\mathbf{m}} = 10^{-4}$$

$$\text{I} : \bar{\Sigma}\eta = \bar{\Pi}_\lambda = \bar{\mathbf{m}} = 10^{-4}$$

**Figura 4-1.** Tres modos materiales usados en las simulaciones computacionales.

## 4.1 Modelo electro-reológico viscoelástico adimensional

Para deducir el modelo electro-reológico adimensional, se propondrán variables para poder escalar el sistema, primeramente, se encuentra la relación energética que da lugar a las definiciones de los puntos clave en la descripción de este sistema como modelo para las células ciliadas externas.

## 4.2 Variables adimensionales

Para la resolución de la Ec. (2-56), se propone el siguiente conjunto de variables adimensionales para el campo eléctrico, la curvatura promedio, el tiempo de proceso, la frecuencia de oscilación del campo eléctrico, la frecuencia de proceso, los módulos elástico y viscoso, y los tiempos de relajación y la elasticidad de la membrana [1, 12, 15].

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{E}{E_0}; \bar{H} = aH; \bar{t} = \frac{t}{\Sigma_\lambda}; \bar{\omega} = \Sigma_\lambda \omega; \bar{G}_t = \frac{G_t}{\Sigma_G}; \bar{G}_b = \frac{G_b}{\Sigma_G}; \\ \bar{\lambda}_t &= \frac{\lambda_t}{\Sigma_\lambda}; \bar{\lambda}_b = \frac{\lambda_b}{\Sigma_\lambda}; \bar{M} = \frac{M}{\Sigma_G}; \bar{\beta} = \beta a; \bar{T} = \Sigma_G T \end{aligned} \quad (4-1)$$

Las variables características empleadas en la Ec. (4-1) son descritas en la **Tabla 4-1**.

Las variables adimensionales para la elasticidad total de bulto de los fluidos y la suma de los tiempos de relajación de Maxwell, satisfacen las siguientes restricciones [1, 12, 15].

$$X_t + X_b = 1; X = \{G, \lambda\} \quad (4-2)$$



**Tabla 4-1.** Descripción de las variables adimensionales.

| Variable adimensionalizada | Símbolo     | Variable característica | Descripción                |
|----------------------------|-------------|-------------------------|----------------------------|
| Campo eléctrico            | E           | $E_0$                   | Amplitud campo eléctrico   |
| Curvatura                  | H           | a                       | Radio del capilar          |
| Tiempo                     | t           | $\Sigma_\lambda$        | Viscoelasticidad total     |
| Frecuencia                 | $\omega$    | $\Sigma\lambda$         | Viscoelasticidad total     |
| Módulo elástico            | $G_t$       | $\Sigma_G$              | Elasticidad de bulto total |
| Modulo elástico            | $G_b$       | $\Sigma_G$              | Elasticidad de bulto total |
| Tiempo de Maxwell          | $\lambda_t$ | $\Sigma\lambda$         | Viscoelásticidad total     |
| Tiempo de Maxwell          | $\lambda_b$ | $\Sigma\lambda$         | Viscoelásticidad total     |
| Membrana elástica          | M           | $\Sigma_G$              | Elasticidad de bulto total |

### 4.3 Modelo electro-reológico adimensional sin inercia

Al sustituir las variables adimensionales en la Ec. (2-56), obtenemos el modelo membrano-dinámico, el cual mejora el modelo deducido por Abou-Dakka *et al.* (2012)[12]:

$$\left( b_2^* (\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, \bar{m}) \frac{d^2}{dt^2} + b_1^* (\Sigma_{\bar{\eta}}, \bar{m}) \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{H}(\bar{t}) = a_0^* \left( \frac{1-\bar{m}}{\bar{m}} \right) \left( \bar{m} b_2^* (\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, \bar{m}) \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{E}(\bar{t}) \quad (4-3)$$

En donde se han definido las siguientes funciones en términos de números adimensionales:

$$b_2^* (\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, \bar{m}) = \frac{\bar{\Pi}_\lambda}{\bar{m}} = \frac{\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b}{\bar{m}} \quad (4-4)$$



$$b_1^*(\Sigma_{\eta}, \bar{m}) = 1 + \left( \frac{1 - \bar{m}}{\bar{m}} \right) \Sigma_{\eta} \quad (4-5)$$

La Ec. (4-3) satisface las siguientes condiciones iniciales:

$$\bar{H}(\bar{t} = 0) = \bar{H}_0 \quad (4-6)$$

$$\left. \frac{d\bar{H}}{d\bar{t}} \right|_{\bar{t}=0} = \bar{H}_1 \quad (4-7)$$

La Ec. (4-3) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en la derivada temporal para la curvatura promedio y el campo eléctrico aplicado. El miembro izquierdo de la Ec. (4-3) describe la evolución de la curvatura promedio de la membrana a través de la inercia, disipación y los procesos de recuperación o elásticos de la membrana [1, 12]. El miembro derecho de esta expresión describe la evolución del campo eléctrico en función de la inercia, la disipación y los procesos flexo-eléctricos en la membrana [1, 12]. La ecuación diferencial (4-3) contiene cuatro números adimensionales, los cuales están asociados con los diferentes mecanismos involucrados en el sistema  $\{a_0^*, \bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b, \Sigma_{\eta}, k\}$  que, junto con las condiciones dadas por las Ecs. (4-6) y (4-7), corresponden a un problema de valores iniciales [1, 12].

#### 4.4 Modelo electro-reológico adimensional con inercia

La función de transferencia, tomando en cuenta la inercia, se representa mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{\bar{H}(\bar{\omega})}{\bar{E}(\bar{\omega})} = a_0 \frac{\bar{T}(i\bar{\omega})}{1 + \bar{M}\bar{T}(i\bar{\omega})} \quad (4-8)$$

Es claro que la Ec. (4-8) representa un sistema con un ciclo de alimentación (desde el punto de vista de la teoría del control [59]); en lo anterior se aunarà más adelante. El único grupo adimensional que describe los procesos inerciales es el número de Deborah, el cual es una razón de tiempos característicos asociados al proceso y al material [32, 51, 60]:

$$De = \frac{\sqrt{\Sigma \rho a^2 / \Sigma G}}{\Sigma \lambda} \quad (4-9)$$

Las cotas para los números adimensionales son analizadas en la siguiente sección de esta obra, por lo que solo son mencionadas a continuación: (i) Bulk viscosity, (ii) Memoria, (iii) Elasticidad de la membrana.

$$0 < \bar{\Sigma}\eta < 1; 0 < \bar{\Pi}_\lambda < 1/4; 0 < \bar{M} < \infty \quad (4-10)$$

Para analizar el caso en donde el valor de la membrana adimensional es muy grande (infinito), se propondrá la siguiente transformación logarítmica:

$$\frac{1}{\bar{M}} = \frac{1-\bar{m}}{\bar{m}} \quad (4-11)$$

## 4.4.1 Números adimensionales

Los modelos desarrollados mostrados en este libro contienen cuatro grupos adimensionales, los cuales se describen a continuación.

### 4.4.1.1 Memoria

El primero de estos grupos está relacionado con la memoria del material (véase Ec. (4-12)):

$$\bar{\Pi}_\lambda = \bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b \quad (4-12)$$

y es el producto de los tiempos viscoelásticos adimensionales,  $\bar{\lambda}_t$  y  $\bar{\lambda}_b$  que obedecen la restricción:  $\bar{\lambda}_t + \bar{\lambda}_b = 1$ . Este número está asociado con la asimetría elástica de los fluidos y contiene dos límites relacionados con la asimetría de los mismos [1, 12]. Este número adimensional contiene dos límites asintóticos relacionados con el contraste de las fases viscoelásticas:

- (i) Cuando  $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = 1/4$  (simétrico), el valor numérico de los tiempos de relajación de Maxwell es el mismo en las dos fases viscoelásticas, i.e.  $\bar{\lambda}_t = \bar{\lambda}_b = 1/2$ .
- (ii) Por otra parte, cuando el producto de los tiempos de Maxwell es pequeño, i.e.  $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = 10^{-4}$  (anti-simétrico); uno de los tiempos de relajación es muy pequeño del orden de  $\bar{\lambda}_t = 10^{-4}$ , mientras que el otro es del orden de  $\bar{\lambda}_b \cong 0.9999$ .



### 4.4.1.2 Viscosidad de bulto

El segundo grupo adimensional relaciona la viscosidad total del bulto, es decir, es la suma de la viscosidad en la parte inferior y superior del capilar respectivamente.

$$\Sigma_{\bar{\eta}} = \bar{\eta}_t + \bar{\eta}_b = \bar{G}_t \bar{\lambda}_t + \bar{G}_b \bar{\lambda}_b \quad (4-13)$$

Nótese que la suma de los módulos elásticos adimensionales satisface la siguiente restricción en el sistema:  $\bar{G}_t + \bar{G}_b = 1$ , en otras palabras, tanto los tiempos viscoelásticos de Maxwell como los módulos elásticos están normalizados a la unidad [1, 12]. El valor numérico de este número está controlado por el producto de los tiempos viscoelásticos adimensionales. Los valores máximo y mínimo que toma la viscosidad de bulto  $\{\Sigma_{\bar{\eta} \min}, \Sigma_{\bar{\eta} \max}\}$  son determinados por los valores de los tiempos de relajación de Maxwell. Bajo simetría perfecta  $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = 1/4$ , la viscosidad total es igual a 0.5, i.e.,  $\Sigma_{\bar{\eta}}(\bar{\lambda}_t = \bar{\lambda}_b = \bar{\lambda}) = \bar{\eta}_t + \bar{\eta}_b = \bar{G}_t \bar{\lambda}_t + \bar{G}_b \bar{\lambda}_b = (\bar{G}_t + \bar{G}_b) \bar{\lambda} = 1 \cdot \bar{\lambda} = 0.5$ , por lo que en el caso de simetría el valor de la viscosidad queda completamente determinada. De la misma manera, en el caso asimétrico, cuando el producto de los tiempos de relajación es pequeño del orden de epsilon, i.e.  $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = \varepsilon \ll 1$ , los valores de los tiempos de relajación están determinados por:  $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = \{\varepsilon, 1-\varepsilon\}$ , por lo que la viscosidad total toma la forma:  $\Sigma_{\bar{\eta}}(\bar{\lambda}_t = \varepsilon, \bar{\lambda}_b = 1 - \varepsilon) = \bar{G}_t(\varepsilon) + (1 - \bar{G}_t)(1 - \varepsilon)$ , por lo tanto la viscosidad de bulto satisface la siguiente desigualdad para sus valores máximo y mínimo respectivamente:  $\varepsilon = \Sigma_{\bar{\eta} \min} < \Sigma_{\bar{\eta}}(\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = \varepsilon) < \Sigma_{\bar{\eta} \max} = 1 - \varepsilon$  [1, 12].

### 4.4.1.3 Radio elástico

El tercer grupo adimensional es conocido como radio elástico,  $m$ , el cual es la relación adimensional entre la elasticidad total en las dos fases viscoelásticas y la de la membrana:

$$0 < m = \frac{1}{1+1/M} < 1 \quad (4-14)$$

La Ec. (4-14) tiene dos límites asintóticos: el primero de ellos es cuando el valor de  $\overline{m} \ll 1$ . Lo anterior implica que es una membrana suave y que puede ser deformada debido a la fuerza externa (campo eléctrico), (ii) cuando el valor de  $k$  es uno, i.e.,  $\overline{m} = 1$ , se tiene una membrana completamente rígida [1, 12].



## 4.5 Espacio 3D-Dimensional

Los valores límite de los números adimensionales  $\{\Sigma_{\bar{\eta}}, \bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, \bar{m}\}$  despliegan seis posibles modos distintos resumidos en la **Tabla 4-2**. La notación se describe a continuación: (LS, HS) se relaciona con la baja y alta simetría de las fases viscoelásticas, (LV, HV) tiene que ver con la mínima y máxima viscosidad en el sistema y, por último, (FM, SM) describe los dos límites posibles de nuestra membrana. El primero de ellos se basa en una membrana suave fácilmente deformable por el campo eléctrico, y el otro límite se relaciona una membrana rígida. Los valores numéricos característicos mostrados en la **Tabla 4-2** son seleccionados para cada modo [1, 12].

**Tabla 4-2.** Distintos valores numéricos para los seis modos materiales.

| Modos físicos de la membrana                              | $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b$ | $\Sigma_{\bar{\eta}}$ | $\bar{m}$ |
|---|-----------------------------------|-----------------------|-----------|
| Modo I : Baja Simetría, Baja Viscosidad, Membrana Suave   | $10^{-4}$                         | $10^{-4}$             | $10^{-4}$ |
| Modo II: Baja Simetría, Baja Viscosidad, Membrana Rígida  | $10^{-4}$                         | $10^{-4}$             | 1         |
| Modo III: Baja Simetría, Alta Viscosidad, Membrana Suave  | $10^{-4}$                         | 1                     | $10^{-4}$ |
| Modo IV: Baja Simetría, Alta Viscosidad, Membrana Rígida  | $10^{-4}$                         | 1                     | 1         |
| Modo V: Alta Simetría, Viscosidad Media, Membrana Suave   | 1/4                               | 1/2                   | $10^{-4}$ |
| Modo VI: Alta Simetría, Viscosidad Media, Membrana Rígida | 1/4                               | 172                   | 1         |

## 4.6 Espacio prismático 3D

Los seis modos en la **Tabla 4-2**, pueden ser descritos en un espacio prismático tridimensional, el cual describe las propiedades materiales del sistema. Los primeros cuatro modos [I-IV] están asociados con la asimetría, y los modos [V, VI], están asociados con la simetría en el espacio físico (véase la **Figura 4-2**) [1, 12].



### 4.6.1 Modo asimétrico

Por ejemplo, la manera de interpretar cada punto en el espacio material prismático se ejemplifica con el modo I. EL modo I (LS, LV, FM) describe una baja simetría, es decir, una de las fases viscoelásticas es muy poco viscoelástica y la otra es completamente viscoelástica, la viscosidad de bulto es la mínima, y se tiene una membrana muy deformable (membrana suave).

### 4.6.2 Modo simétrico

El segundo ejemplo es el modo VI. Este modo está relacionado con una alta simetría en las fases viscoelásticas (la viscoelasticidad en las fases es la misma), se tiene una viscosidad intermedia y la membrana es rígida (en este caso, la membrana actúa como un sólido).

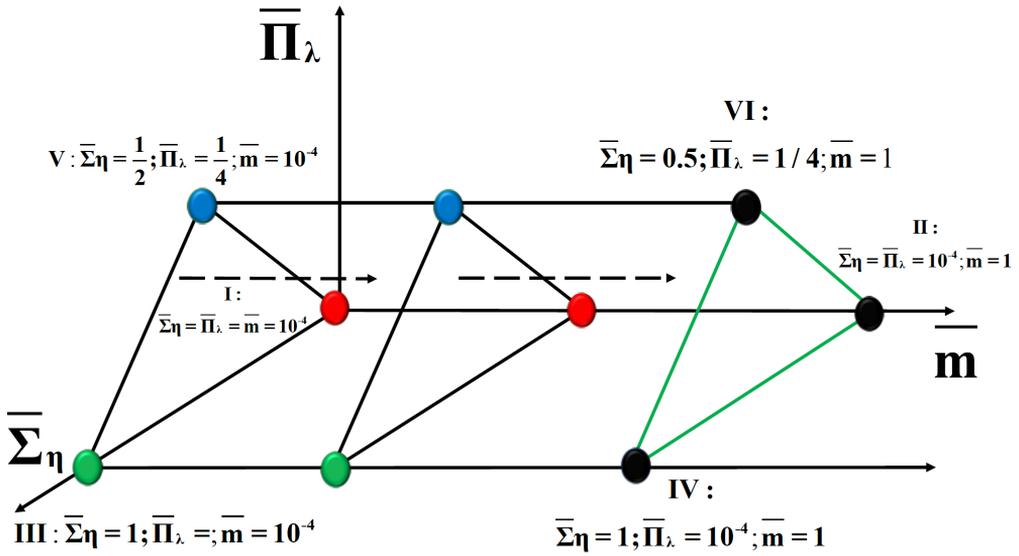
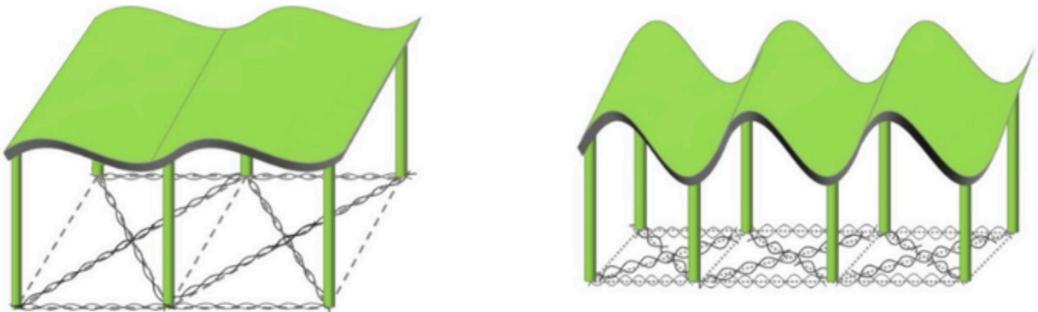


Figura 4-2. Espacio material prismático para los seis posibles modos.

## CAPÍTULO 5

# Respuesta oscilatoria lineal de las CCE



**Figura 5-1.** Variación de curvatura de la membrana en las CCE.

## 5.1 flujo oscilatorio sin inercia

Este flujo consiste en descomponer la curvatura promedio en dos contribuciones, una en fase con el campo eléctrico y la otra desfasada del mismo [1, 12]. Por lo tanto, se propone que la solución tenga la siguiente forma:

$$\bar{H}(\bar{t}) = \bar{T}(\bar{\omega}) \text{Exp}(i\bar{\omega}\bar{t}) \quad (5-1)$$

Y para el campo eléctrico, se propone la siguiente expresión analítica:

$$\bar{H}(\bar{t}) = \text{Exp}(i\bar{\omega}\bar{t}) \quad (5-2)$$

Al sustituir la curvatura promedio de la Ec. (5-1) y el campo eléctrico (Ec. (5-2)) en la ecuación diferencial de la Ec. (4-3), se obtiene una expresión para la amplitud de la función de transferencia, i.e.:

$$\begin{aligned} & \left( b_2^* (\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_b, \bar{m}) \frac{d^2}{d\bar{t}^2} + b_1^* (\bar{\Sigma}_n, \bar{m}) \frac{d}{d\bar{t}} + 1 \right) \bar{H}(\bar{t}) = \\ & a_0 \left( \frac{1-\bar{m}}{\bar{m}} \right) \left( \bar{m} b_2^* (\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_b, \bar{m}) \frac{d^2}{d\bar{t}^2} + \frac{d}{d\bar{t}} + 1 \right) \bar{E}(\bar{t}) \end{aligned} \quad (5-3)$$

Entonces, la función de transferencia tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{T}(\bar{\omega}) &= \text{Re}[\bar{T}(\bar{\omega})] + i \text{Im}[\bar{T}(\bar{\omega})] = \\ & a_0 \left( \frac{1-\bar{m}}{\bar{m}} \right) \left( \frac{\bar{m} b_2^* (\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_b, \bar{m}) (i\bar{\omega})^2 + (i\bar{\omega}) + 1}{b_2^* (\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_b, \bar{m}) (i\bar{\omega})^2 + b_1^* (\bar{\Sigma}_n, \bar{m}) (i\bar{\omega}) + 1} \right) \end{aligned} \quad (5-4)$$

La parte real de la función de transferencia estaría dada por:

$$\text{Re}[\bar{T}(\bar{\omega})] = a_0 \left( \frac{1-\bar{m}}{\bar{m}} \right) \frac{1 + (b_1^* - (1+\bar{m})b_2^*) \bar{\omega}^2 + \bar{m} b_2^{*2} \bar{\omega}^4}{(1-b_2^* \bar{\omega}^2)^2 + (b_1^* \bar{\omega})^2} \quad (5-5)$$

Asimismo, la parte imaginaria tiene la siguiente forma:



$$\text{Im}[\bar{T}(\bar{\omega})] = a_0^* \left( \frac{1-\bar{m}}{\bar{m}} \right) \left[ \frac{(b_1^*-1)\bar{\omega} + (1-b_1^*\bar{m})b_2^*\bar{\omega}^3}{(1-b_2^*\bar{\omega}^2)^2 + (b_1^*\bar{\omega})^2} \right] \quad (5-6)$$

Al sustituir la función de transferencia en la expresión general se tiene que:

$$\begin{aligned} \bar{H}(\bar{t}) &= \bar{T}(\bar{\omega}) \text{Exp}(i\bar{\omega}\bar{t}) = \\ & \left( \text{Re}[\bar{T}(\bar{\omega})] + i\text{Im}[\bar{T}(\bar{\omega})] \right) \left( \text{Cos}(\bar{\omega}\bar{t}) + i\text{Sen}(\bar{\omega}\bar{t}) \right) \end{aligned} \quad (5-7)$$

Separando la parte real y la parte imaginaria, se tiene lo siguiente:

$$\bar{H}(\bar{t}) = \text{Re}[\bar{H}(\bar{t})] + i\text{Im}[\bar{H}(\bar{t})] \quad (5-8)$$

donde, la parte real tiene la siguiente expresión analítica

$$\text{Re}[\bar{H}(\bar{t})] = \text{Re}[\bar{T}(\bar{\omega})] \text{Cos}(\bar{\omega}\bar{t}) - \text{Im}[\bar{T}(\bar{\omega})] \text{Sen}(\bar{\omega}\bar{t}) \quad (5-9)$$

Y

$$\text{Im}[\bar{H}(\bar{t})] = \text{Im}[\bar{T}(\bar{\omega})] \text{Cos}(\bar{\omega}\bar{t}) + \text{Re}[\bar{T}(\bar{\omega})] \text{Sen}(\bar{\omega}\bar{t}) \quad (5-10)$$

Se deja al lector la deducción de las Ecs. (5-7)-(5-10). La solución general oscilatoria tiene la siguiente estructura matemática:

$$\begin{aligned} \bar{H}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, \bar{m}; \bar{\omega}, t) &= a_0^* \left( \frac{1-\bar{m}}{\bar{m}} \right) \\ & \left\{ \frac{1 + (b_1^* - (1+k)b_2^*)\bar{\omega}^2 + \bar{m}b_2^{*2}\bar{\omega}^4}{(1-b_2^*\bar{\omega}^2)^2 + (b_1^*\bar{\omega})^2} \text{cos}(\bar{\omega}\bar{t}) \right. \\ & \left. - \frac{(b_1^*-1)\bar{\omega} + (1-b_1^*\bar{m})b_2^*\bar{\omega}^3}{(1-b_2^*\bar{\omega}^2)^2 + (b_1^*\bar{\omega})^2} \text{sen}(\bar{\omega}\bar{t}) \right\} \end{aligned} \quad (5-11)$$

A partir de la Ec. (5-11) se calculan los módulos de curvatura, potencia disipada y la energía elástica promedio. Nótese que los módulos de curvatura dependen de las propiedades viscoelásticas de las fases líquidas y de la elasticidad de la membrana. Es importante



resaltar que las cantidades clave para la descripción del sistema son: la potencia liberada a los fluidos viscoelásticos por la oscilación de la membrana  $\bar{P}(\bar{\omega})$  y la energía elástica almacenada por la membrana

### 5.1.1 Potencia disipada

La potencia liberada a los fluidos viscoelásticos por la oscilación de la membrana flexo-eléctrica puede ser calculada por medio de una integral promediando sobre un periodo, y se define como el producto del campo eléctrico y el flujo volumétrico. Nótese que el flujo volumétrico puede ser expresado en términos de la evolución de la curvatura promedio [1, 12].

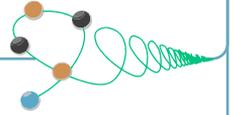
$$\begin{aligned}\bar{P}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, \bar{m}; \bar{\omega}) &= -\frac{1}{2} \left\langle \text{Re} \left\{ \bar{E}(\bar{t}) \cdot \bar{Q}(\bar{t}) \right\} \right\rangle \\ &= \left\langle \bar{E}(\bar{t}) \cdot \frac{d}{dt} \bar{H}(\bar{t}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} a_0^* \left( \frac{1-\bar{m}}{\bar{m}} \right) \bar{\omega} \text{Re} \left[ \bar{T}(\bar{\omega}) \right] \\ &= \frac{1}{2} a_0^* \left( \frac{1-\bar{m}}{\bar{m}} \right) \frac{(b_1^*-1)\bar{\omega}^2 + (1-b_1^*\bar{m})b_2^*\bar{\omega}^4}{(1-b_2^*\bar{\omega}^2)^2 + (b_1^*\bar{\omega})^2}\end{aligned}\tag{5-12}$$

La Ec. (5-12) está relacionada con la parte real de la función de transferencia compleja por lo que puede ser generalizada utilizando los principios desarrollados en este libro a través del operador fluidez.



## CAPÍTULO 6

# Funciones de transferencia de flujo volumétrico y esfuerzo cortante



**Figura 6-1.** Función de transferencia del flujo volumétrico (izquierda), función de transferencia del esfuerzo cortante (derecha).

## 6.1 Diagrama de bloques

En esta sección se presenta el diagrama de bloques del sistema de estudio. El primer bloque este asociado a la flexo-electricidad del sistema por medio de la siguiente ecuación:

$$\frac{1-\bar{m}}{m} a_0^* \bar{E}(\bar{\omega}) = \frac{1}{4} \left( \frac{a}{L} \right) \frac{1-\bar{m}}{m} \Delta \bar{p}(\bar{\omega}) + \bar{H}(\bar{\omega}) \quad (6-1)$$

La Ec. (6-1) puede ser descrita en términos del esfuerzo en la pared en el capilar debido a que es una variable medible [31, 40, 45], es decir:

$$\frac{1-\bar{m}}{m} a_0^* \bar{E}(\bar{\omega}) = i^2 \frac{1-\bar{m}}{2} \frac{1-\bar{m}}{m} \sigma_w + \bar{H}(\bar{\omega}) \quad (6-2)$$

En la Ec.(6-2) se tiene la siguiente expresión para el esfuerzo en la pared:

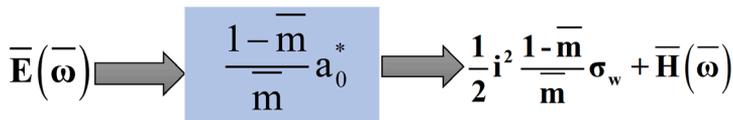
$$\sigma_w = \frac{1}{2} \left( -\Delta \bar{p}(\bar{\omega}) \left( \frac{a}{L} \right) \right) \quad (6-3)$$

Y los mecanismos flexo-eléctricos se pueden calcular como:

$$a_0^* = \frac{C_f \Im E_0 a / 4L}{\Sigma_G} \quad (6-4)$$

## 6.2 Primer diagrama de bloque

El primer diagrama de bloque que se propone está conformado de la siguiente manera (véase **Figura 6-2**):

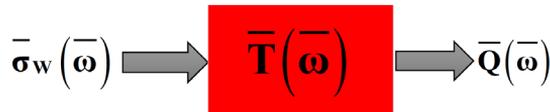


**Figura 6-2.** Primer diagrama de bloque. La variable de entrada (campo eléctrico) con dos señales de salida asociados al esfuerzo en la pared y la curvatura promedio.

El campo eléctrico (variable de entrada) es regulado por las propiedades flexo-eléctricas y elásticas de la membrana (función de transferencia). La salida contiene dos señales: (i) La primera de ellas asociada a las discontinuidades del material a través de la diferencia de presiones, la elasticidad de la membrana y un cociente de longitudes características asociadas a las coordenadas radial y axial respectivamente. La segunda parte, se refiere a la curvatura promedio de la membrana.

### 6.3 Segundo diagrama de bloque

El segundo diagrama de bloque (véase la **Figura 6-3**) está relacionado con el flujo volumétrico debido a la acción del gradiente de presión inducido por las discontinuidades en el material. Este diagrama de bloque relaciona la variable de entrada (esfuerzo en la pared) con la variable de salida (flujo volumétrico), a través de la función de transferencia compleja, la cual es una extensión del producto de la función fluidez con una función de dispersión que depende del vector de longitud  $\vec{\beta}$ . El vector de longitud  $\vec{\beta}$  depende del número de Deborah, la inercia de los fluidos, y la reología del sistema mediante el operador fluidez proveniente de un fluido viscoelástico de Maxwell bimodal [33, 47].



**Figura 6-3.** Segundo diagrama de bloque. La variable de entrada (esfuerzo en la pared) y la variable de salida (flujo volumétrico). Estas dos describen la función de transferencia asociada al operador fluidez, mecanismos viscoelásticos, inerciales y dispersivos.

El flujo volumétrico y el esfuerzo en la pared en este caso tiene la siguiente forma:

$$\bar{Q}(\bar{\beta}) = \frac{1}{4} \bar{T}(\bar{\omega}) \cdot \bar{\sigma}_w \quad (6-5)$$

La función de transferencia tiene la siguiente expresión matemática:

$$\bar{T}(\bar{\omega}) = \bar{O}_\phi(i\bar{\omega}) \cdot F(\bar{\beta}) \quad (6-6)$$



El operador fluidez está determinado por la configuración mecánica del sistema (véase la **Figura 2-3**), en este caso, se trata de un modelo de Maxwell bimodal conectado en paralelo con un sólido de Hooke. La función de dispersión, tiene la forma matemática siguiente:

$$F(\bar{\beta}) = \frac{8i^2}{\bar{\beta}^2} \left( 1 - 2 \frac{J_1(\bar{\beta})/\bar{\beta}}{J_0(\bar{\beta})} \right) \quad (6-7)$$

En donde el vector de onda, tiene la siguiente estructura matemática:

$$\bar{\beta} = i^{3/2} De\bar{\omega} \sqrt{\bar{J}(\bar{\omega})} \quad (6-8)$$

En la Ec. (6-8),  $De$  es el número adimensional de Deborah [32, 33, 39, 47, 52]. La frecuencia asociada al material proviene de la inercia, es decir, de la resistencia que presenta el fluido a cambiar su estado de deformación. Por último, la compliancia que es el inverso del módulo elástico del material.

$$\bar{J}^*(i\bar{\omega}) = \frac{1}{\bar{G}^*(i\bar{\omega})} \quad (6-9)$$

En la Ec. (6-9) cuando el módulo elástico tiende a infinito, la compliancia tiende a cero (sólido elástico). Por otra parte, cuando el módulo elástico tiende a cero, la compliancia es infinita (fluido newtoniano).

$$\frac{1}{\bar{G}^*(i\bar{\omega})} = \frac{\bar{O}_\Phi(i\bar{\omega})}{\bar{\omega}} \quad (6-10)$$

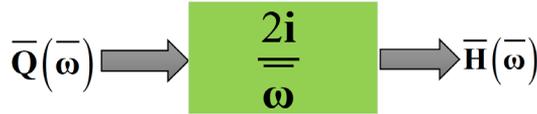
## 6.4 Tercer diagrama de bloque

El tercer diagrama de bloque (véase **Figura 6-4**) versa en la rapidez con la que la membrana transfiere su *momentum* a las fases líquidas viscoelásticas. Esta rapidez se expresa matemáticamente mediante la siguiente expresión:

$$\bar{Q}(\bar{\omega}) = -\frac{1}{2}(i\bar{\omega})\bar{H}(\bar{\omega}) \quad (6-11)$$

La Ec.(6-11) se puede expresar de manera equivalente como:

$$\frac{2i}{\omega} \bar{Q}(\bar{\omega}) = \bar{H}(\bar{\omega}) \quad (6-12)$$



**Figura 6-4.** Tercer diagrama de bloque. La variable de entrada (flujo volumétrico) y la variable de salida (curvatura promedio). Este bloque describe la evolución de la curvatura y la transferencia de momento en las fases líquidas viscoelástica.

Al combinar todas las expresiones anteriores, se obtiene el bloque global del sistema, es decir, una expresión unificada de la curvatura en función del campo eléctrico.

$$\frac{\bar{H}(\bar{\omega})}{E(\bar{\omega})} = \frac{1-\bar{m}}{m} a_0^* \frac{\bar{T}(\bar{\omega})/i\bar{\omega}}{\frac{1-\bar{m}}{m} + \bar{T}(\bar{\omega})/i\bar{\omega}} \quad (6-13)$$

Entonces, la función de transferencia compleja tiene la siguiente forma analítica, por lo que:

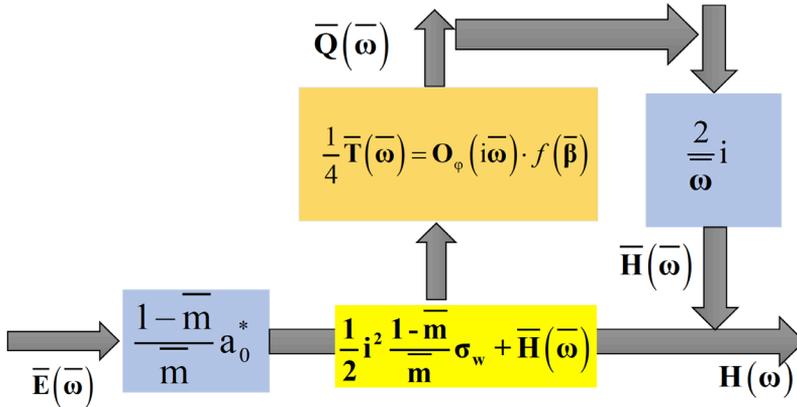
$$\bar{R}(\bar{\omega}) = a_0^* \frac{1-\bar{m}}{m} \frac{i^3 \bar{J}(i\bar{\omega}) \cdot f(\bar{\beta})}{\frac{1-\bar{m}}{m} + i^3 \bar{J}(i\bar{\omega}) \cdot f(\bar{\beta})} \quad (6-14)$$

La función de transferencia que se expresa en la Ec.(6-14), es el resultado principal de este trabajo y punto de partida en las simulaciones subsecuentes. Adicionalmente, la Ec. (6-13) depende de la compliancia y una función de dispersión. Uniendo los bloques se obtiene el siguiente diagrama complejo que describe la variable de entrada asociada al campo eléctrico y a la curvatura promedio.

En la **Figura 6-5** se presenta el sistema global que describe la variable de entrada (campo eléctrico) y la variable de salida (curvatura promedio). El primer bloque describe la conversión de la energía eléctrica y la flexo-electricidad de la membrana. Este primer bloque tiene dos salidas asociadas al gradiente de presión y a la curvatura promedio. El segundo bloque describe la variable de entrada asociada con la elasticidad de la membrana



y el esfuerzo de la pared. El esfuerzo en la pared está directamente relacionado con el gradiente de presión y la variable de salida es el flujo volumétrico. Dichas variables están controladas por los mecanismos: (i) viscoelásticos, (ii) inerciales y (iii) dispersivos a través del vector de onda  $\beta$ . El tercer bloque relaciona el flujo volumétrico y a la curvatura. Este bloque representa la rapidez de la evolución de la membrana.



**Figura 6-5.** Ilustra la variable de entrada (flujo volumétrico) y de salida (curvatura promedio). Este bloque describe la evolución de la curvatura y la transferencia de momento en las fases líquidas viscoelásticas.

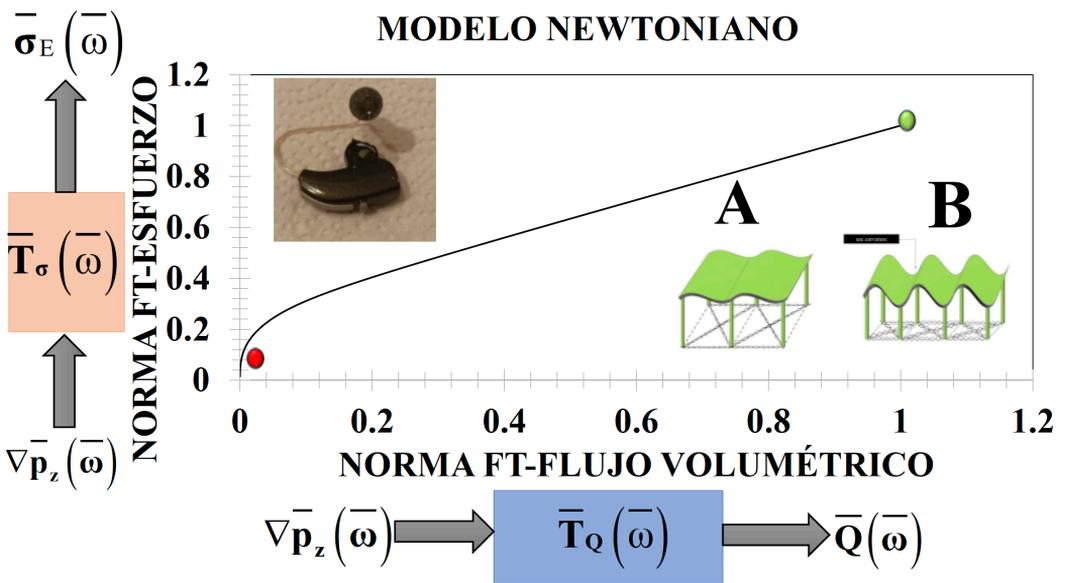
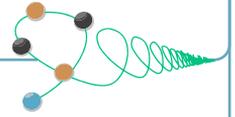
La función de transferencia compleja, integralmente, se representa mediante la **Figura 6-6**.

$$\bar{E}(\bar{\omega}) \rightarrow \bar{R}(\bar{\omega}) = \frac{1-\bar{m}}{\bar{m}} a_0^* \frac{i^3 \bar{T}(i\bar{\omega}) / \bar{\omega}}{\frac{1-\bar{m}}{\bar{m}} + i^3 \bar{T}(i\bar{\omega}) / \bar{\omega}} \rightarrow \bar{H}(\bar{\omega})$$

**Figura 6-6.** Ilustra la función de transferencia compleja global de las variables de entrada y salida del campo eléctrico y la curvatura promedio.

# CAPÍTULO 7

## Simulaciones computacionales



**Figura 7-1.** Respuesta de dos propiedades de flujo de un fluido newtoniano.

## 7.1 Respuesta mecánica newtoniana

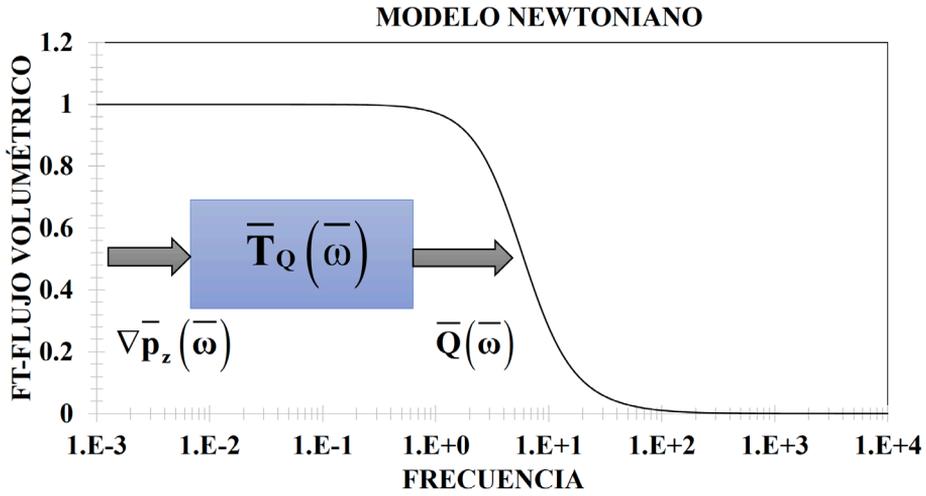
En esta sección se presentan los resultados del modelo de viscosidad de newton (viscosidad constante), el cual no presenta parámetros elásticos. Para este punto, se presentan las siguientes simulaciones para el flujo volumétrico y para el esfuerzo cortante. En las **Figura 7-2 -Figura 7-4** se ilustran las normas de las funciones de transferencia de la variable de entrada asociada al gradiente de presión, y las variables de salida del flujo volumétrico, y el esfuerzo en la pared.

Son claros los siguientes puntos:

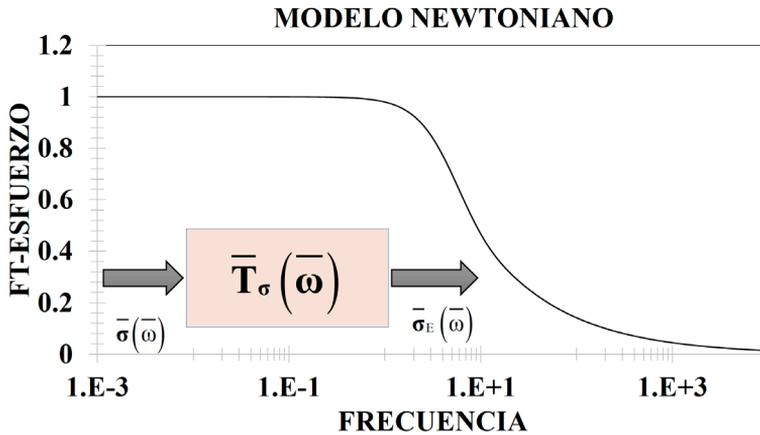
- A) A frecuencias bajas la respuesta en las dos funciones de transferencia es independiente de la frecuencia.
- B) A una frecuencia crítica, asociada a los tiempos característicos del material, el sistema experimenta un comportamiento monótono decreciente, hasta un segundo valor crítico en donde el sistema exhibe una segunda meseta.
- C) En las dos funciones de transferencia el comportamiento es similar, sin embargo, la función de transferencia (gradiente de presión - flujo volumétrico) presenta una pendiente más pronunciada en comparación con la respuesta dinámica del gradiente de presión y el esfuerzo-inercial.
- D) Es claro que el modelo newtoniano no presenta resonancia debido a que el material no contempla componentes elásticas, las cuales pueden inducir a que la membrana biológica pueda presentar una resonancia primaria seguido de un tren secundario de picos resonantes.
- E) La interpretación sería que una persona que va perdiendo la capacidad de escuchar es la que presenta curvas resonantes muy parecidas a las mostradas en la **Figura 7-2 -Figura 7-4**.

En la **Figura 7-4** se comparan las dos funciones de transferencia. En el eje vertical, la función de transferencia del esfuerzo y en el eje horizontal la función de transferencia del flujo volumétrico. Es claro que, a frecuencias bajas, las dos funciones de transferencia son iguales por lo que el sistema empieza en uno. Al aumentar la frecuencia, de bajas a moderadas, la relación entre las dos funciones de transferencia decrece de forma lineal hasta un valor mínimo cercano a cero. Más adelante se demostrará que la viscoelasticidad del sistema, induce un punto de saturación del esfuerzo, y lazos multivaluados asociados a la energía almacenada en el fluido.



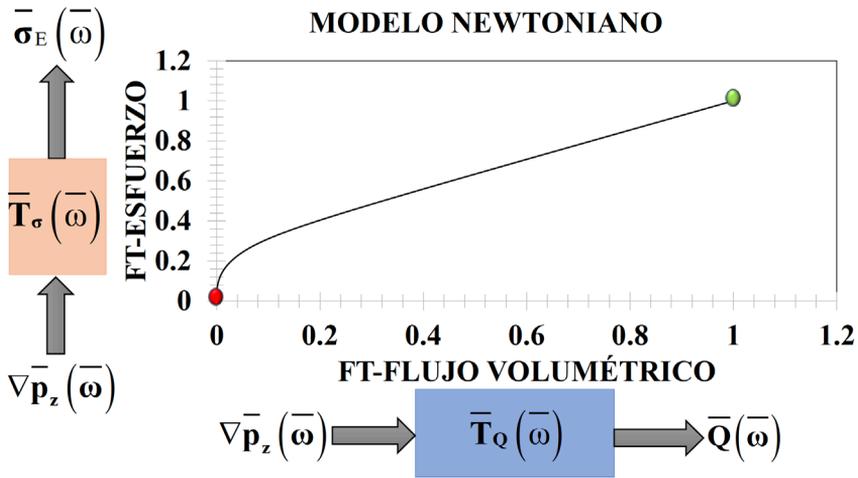


**Figura 7-2.** Ilustra la función de transferencia compleja del flujo volumétrico *versus* frecuencia para el modelo newtoniano. En esta figura la frecuencia se puede sustituir por el número adimensional de Womersley.



**Figura 7-3.** Ilustra la función de transferencia compleja del esfuerzo cortante *versus* la frecuencia para el modelo newtoniano. En este punto la frecuencia se puede sustituir por el número de Womersley.





**Figura 7-4.** Ilustra la función de transferencia compleja del esfuerzo cortante *versus* la función de transferencia compleja del flujo volumétrico. A frecuencias bajas, el sistema presenta una misma respuesta dinámica lineal. A moderadas frecuencias la respuesta es directamente proporcional.

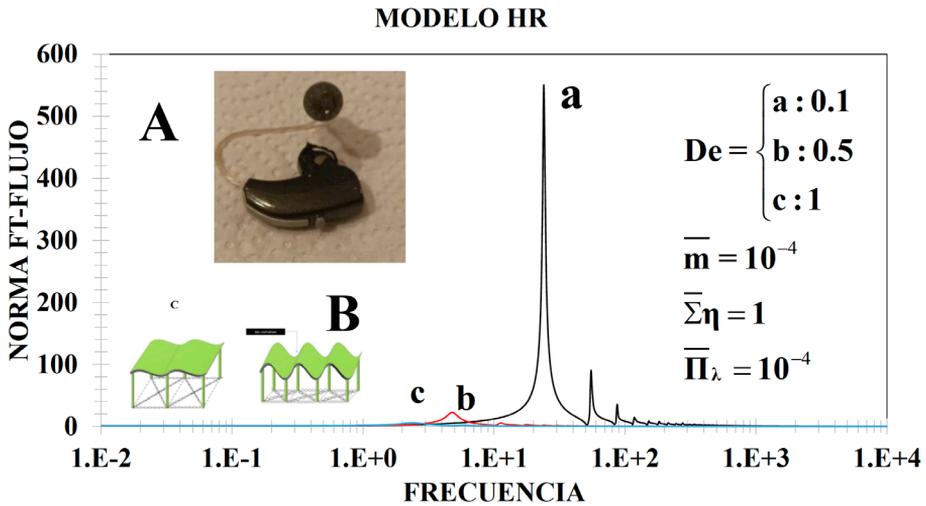
## 7.2 Respuesta mecánica viscoelástica: función de transferencia del flujo volumétrico

En esta sección se presentan los resultados más importantes, los cuales se centran en la respuesta de la membrana en contacto con las fases viscoelásticas. Los parámetros materiales corresponden a las siguientes condiciones físicas:

- Existe un contraste entre las fases viscoelásticas del material.
- La membrana es fácilmente deformable.
- La disipación viscosa es la máxima en el sistema de estudio.

En la **Figura 7-5** se ilustra la norma de la función de transferencia del flujo volumétrico *versus* la frecuencia en función del número de Deborah. Las simulaciones fueron realizadas en el programa de Computo *Wolfram Mathematica* (con licencia institucional de la UNAM) y exportadas a una hoja de cálculo para posteriormente ser graficadas. Es claro que la norma de la función de transferencia compleja contiene información de las partes real e imaginaria del sistema. A frecuencias bajas, el sistema no presenta una respuesta notable. A una frecuencia crítica, la frecuencia natural del material es la misma que la frecuencia de

proceso, y se observa un pico dominante en la simulación asociado al número de Deborah  $De = 0.1$ . A una frecuencia mayor a la resonante, el sistema presenta un comportamiento monótono decreciente hasta un valor mínimo. Un hecho importante es que, a valores mayores de la frecuencia crítica se observa un tren de curvas resonantes secundarias que se disipan a medida que aumenta la frecuencia de proceso. Es claro que, cuando la viscoelasticidad decrece debido a que los mecanismos inerciales aumentan, la resonancia disminuye drásticamente y las curvas resonantes se desfazan hacia valores menores de frecuencia. La simulación descrita en la **Figura 7-5** es una de las más importantes de este análisis.



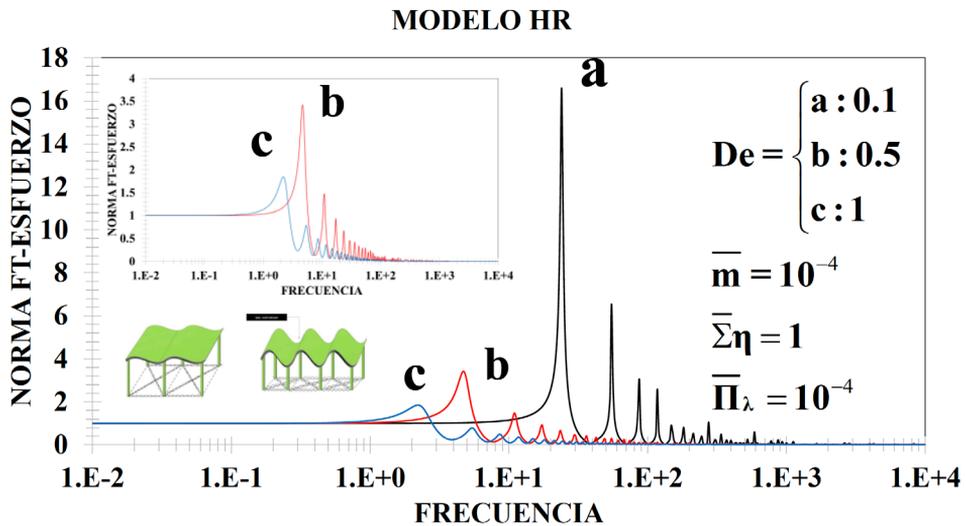
**Figura 7-5.** Ilustra la norma de la función de transferencia del flujo volumétrico *versus* la frecuencia en función de distintos valores del número adimensional de Deborah.

### 7.3 Respuesta mecánica viscoelástica: función de transferencia del esfuerzo cortante

En la **Figura 7-6** se ilustra la función de transferencia compleja del esfuerzo cortante *versus* la frecuencia en función del número adimensional de Deborah. Esta función de transferencia está asociada a la interacción entre el fluido viscoelástico y la pared del material. Es claro que, a frecuencias cortas, la respuesta dinámica es independiente de la frecuencia. A una cierta frecuencia característica, el sistema despliega un comportamiento

monótono creciente hasta un valor máximo resonante. Físicamente, en este punto, la frecuencia natural del material es igual a la frecuencia de proceso, lo que es observable en el pico dominante de todo el espectro. A una frecuencia mayor a la resonante, el sistema experimenta un comportamiento monótono decreciente hasta un valor mínimo, seguido de un tren de curvas resonantes secundarias. Nótese que, a frecuencias altas, las curvas resonantes decrecen y se disipan con la frecuencia. Es importante resaltar tres cosas.

- A) La interacción fluido-frontera (pared) está asociada a la disipación viscoelástica del medio.
- B) La intensidad de las curvas resonantes (magnitud del máximo) es menor que en el caso de la interacción entre la fuerza motriz asociada al gradiente de presión y el componente rz del tensor de esfuerzos.
- C) La respuesta dinámica lineal se obtiene cuando el fluido presenta una asimetría viscoelástica en las fases, i.e. una de ellas es muy viscoelástica y la otra débilmente viscoelástica. La segunda condición es que el sistema presente la máxima disipación viscoelástica y, por último, la tercera condición está relacionada a que la elasticidad de la membrana es pequeña con respecto a la elasticidad de bulto.



**Figura 7-6.** Ilustra la norma de la función de transferencia del esfuerzo cortante *versus* la frecuencia en función del número adimensional de Deborah.

En la **Figura 7-7** se muestran los resultados de la norma de la función de transferencia del esfuerzo cortante *versus* la norma de la función de transferencia del flujo volumétrico en función de la frecuencia. Los números adimensionales corresponden al modo III de nuestro espacio paramétrico. Es claro que, a bajas frecuencias, las dos funciones de transferencia son iguales, e independientes de la frecuencia, tal y como se muestra en la **Figura 7-7**. Aquí la membrana flexo-eléctrica interactúa con la disipación energética en el sistema. A frecuencias moderadas, la membrana se conecta con las componentes viscosas y elásticas de los dos fluidos, y el sistema alcanza su máxima resonancia (punto amarillo). A frecuencias mayores a la resonante, las dos funciones de transferencia decrecen en función de la frecuencia hasta un valor mínimo (anti-resonante). A un cierto valor crítico (señalado por la primera letra *m*), el sistema empieza a presentar un tren de resonancias secundarias asociadas, a las características físicas y matemáticas del sistema las cuales son resumidas a continuación:

A) La ventana de observación de las funciones resonantes, están relacionadas con los tiempos característicos del material. Por ejemplo, en nuestro sistema de estudio existen cuatro tiempos característicos del material llamados:

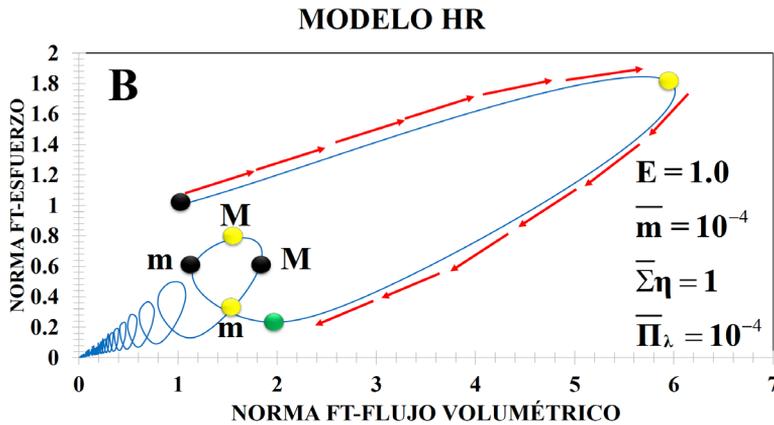
- (i) Primer tiempo de relajación de Maxwell
- (ii) Segundo tiempo de relajación de Maxwell
- (iii) Tiempo inercial del sistema
- (iv) Tiempo geométrico de la memoria.

En todos estos tiempos, el sistema presentaría resonancias secundarias, siendo la dominante la que se obtiene por experimentos en flujo en estado estacionario y flujo oscilatorio de baja amplitud.

- B) Matemáticamente la resonancia se puede deber a las propiedades resonantes de las funciones de Bessel. Ambas funciones de transferencia tienen un cociente de funciones de Bessel.
- C) Las funciones multivaluadas que se observan en los lazos o ciclos de las funciones de Bessel pueden ser una consecuencia de un cambio de raíz en las funciones de Bessel de raíces reales a complejas. Este punto es un área de investigación para un trabajo a futuro.
- D) Un hecho importante es que el efecto de la respuesta dinámica lineal de un sistema, puede estar inducido por un efecto de la dispersión en el mismo, asociada a la velocidad de fase y a la velocidad de grupo del sistema.



- E) El parámetro  $\sqrt{\beta}$  que se define en las funciones de Bessel, debe ser estudiado ampliamente. Este parámetro describe una longitud característica de propagación de la onda en el capilar y está escalado por una longitud característica geométrica del sistema.
- F) Finalmente, la **Figura 7-7** es el mayor logro de este trabajo y representa una huella digital del sistema y podría ser considerado como un mapa para estudiar la respuesta resonante del oído humano.

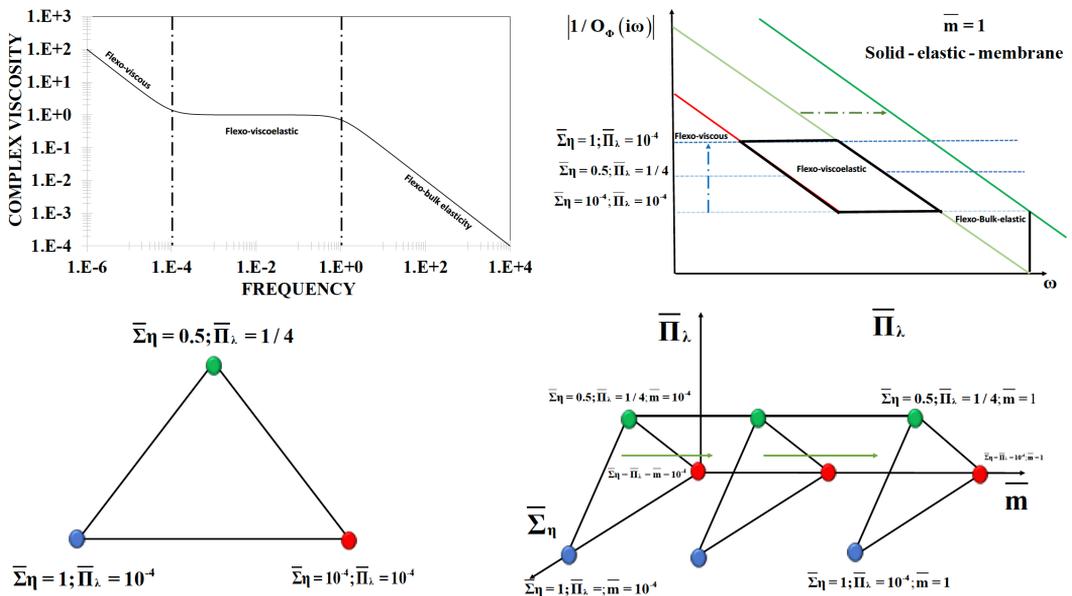


**Figura 7-7.** Ilustra la norma de la función de transferencia del flujo volumétrico *versus* la norma de la función de transferencia del flujo volumétrico. Las propiedades materiales de este sistema son las reportadas para el modo III.

## 7.4 Aplicaciones biológicas (CGE)

De acuerdo al trabajo de Sachs *et al.* (2009)[7] las OHC usan la electro-motilidad (somática de HB) para vencer la viscosidad y ajustar el efecto de resonancia para maximizar la potencia y disipar la energía. El receptor (estereocilios) de las células ciliadas externas activan las oscilaciones permitiendo que se ajusten a la frecuencia de resonancia, para poder disipar la máxima energía y, posteriormente, mediante otros procesos fisiológicos y físico-químicos [5, 61], poder convertirla en impulsos nerviosos. La respuesta mecánica al campo eléctrico inducido produce las oscilaciones en las OHC que ocurre a la frecuencia del sonido que llega, y es ajustada a la frecuencia resonante, produciendo una amplificación mecano-eléctrica. Rabbit *et al.* (2009)[62] formularon un modelo matemático

para las OHC basado en el primer principio (electro-motilidad HB) de transducción mecano-eléctrica y ellos analizaron la conversión de potencia en el dominio del espacio de la frecuencia (espacio de Fourier). En este trabajo se hicieron dos aproximaciones. La primera de ellas consiste en la integración de la ecuación de forma de la membrana, que no es más que un balance mecánico acoplado en el gradiente de presión generando un flujo volumétrico de Poiseuille. El flujo y la reología del sistema fueron caracterizados por la ecuación viscoelásticas de Maxwell bimodal. Este simple modelo reológico posee la física necesaria para describir el efecto producido por la electro-motilidad somática. Como ha sido demostrado previamente [1, 12, 17, 18], una característica biológica clave es la forma y la ubicación del pulso de amplificación de la potencia liberada a los fluidos. El modelo presentado en este libro es cualitativamente consistente con el fenómeno biológico que ocurre en las OHC. Finalmente, en la **Figura 7-8** se presenta un resumen de los principales hallazgos en la elaboración de este libro; en la parte superior se muestra el espacio paramétrico en 3D en donde el sistema presenta resonancias.



**Figura 7-8.** Resumen de los principales hallazgos en la elaboración de este libro; en la parte inferior-derecha se muestra el espacio paramétrico en 3D en donde el sistema presenta resonancias.



En el modelo presentado en este libro, la potencia disipada por las fases viscoelásticas, la energía almacenada en función de la frecuencia adimensional, los parámetros biológicos que describen las curvas resonantes y las características relevantes de ellas (anchura y máximo de las curvas resonantes) minimizan la energía elástica asociada a los mecanismos elásticos de la membrana.

Adicionalmente, en el modelo nuevo el valor del máximo en la potencia está determinado por tres efectos acoplados, los cuales son definidos a continuación:

- (i) La asimetría en las fases viscoelásticas, i.e.  $\overline{\lambda_r \lambda_i} \ll 1$ , esto significa que, en una de las fases, el tiempo de relajación es muy pequeño (débilmente viscoelástico) y la otra fase es completamente viscoelástica.
- (ii) La viscosidad de bulto en el sistema, toma su valor máximo, i.e.  $\overline{\nu_\eta} \cong 1$ ,
- (iii) El valor numérico del radio elástico es pequeño, es decir  $\overline{m} \ll 1; 0(\overline{m}) = 10^{-4}$ .

El ancho de las curvas resonantes está determinado por la asimetría de las fases viscoelásticas a través del número de memoria  $\overline{\lambda_r \lambda_i}$  y del radio elástico  $\overline{m}$ . De acuerdo con nuestro análisis paramétrico, el valor de la función de transferencia en el modo III (baja simetría, máxima viscosidad de bulto y radio elástico mucho menor a uno) despliega un valor resonante máximo en la función de transferencia compleja, lo que implica que el sistema se comporta como un amplificador biológico.



# CAPÍTULO 8

## Conclusiones

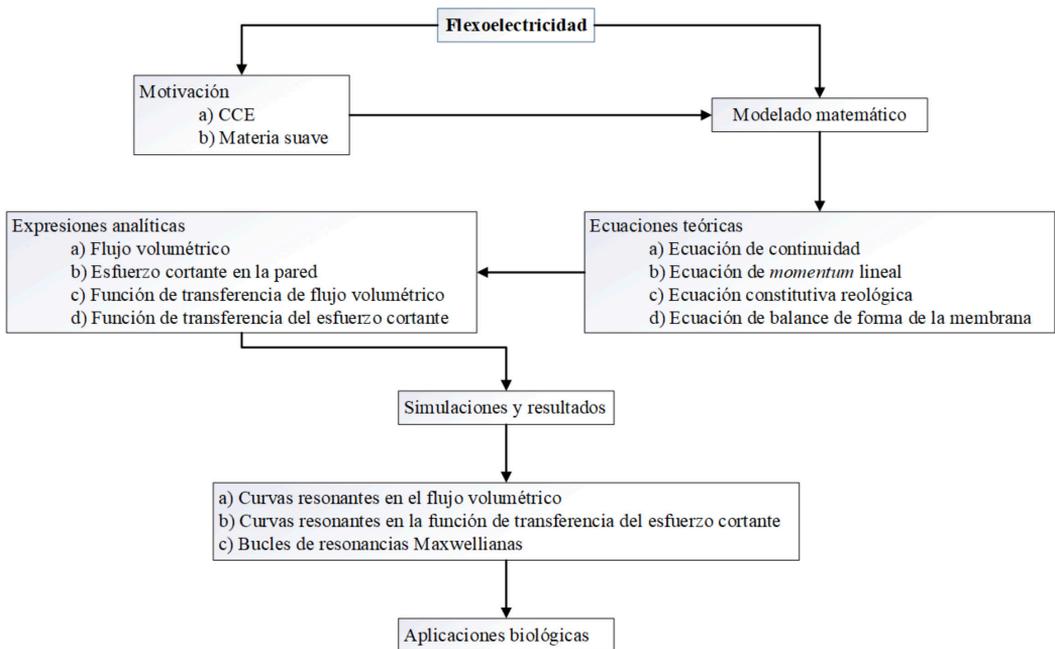
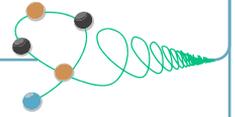


Figura 8-1. Esquema informativo de este libro.

## 8.1 Resumen y principales contribuciones

En este trabajo se utilizó el concepto de flexo-electricidad en cristales líquidos para el modelado y la descripción de las células ciliadas externas. Para modelar este fenómeno se utilizó un capilar con dos fases viscoelásticas y una membrana flexoeléctrica adherida en el centro del capilar a la cual se le aplicó un campo eléctrico de baja amplitud, lo que provoca que se forme un domo inferior y superior que, a su vez, induce un flujo volumétrico debido a la diferencia de presiones entre la parte superior e inferior de la membrana como previamente se había demostrado [1, 12].

A partir de un balance mecánico y la ecuación de forma de la membrana, y suponiendo que las fases son viscoelásticas, se deduce una ecuación que describe el cambio de la curvatura promedio en función del campo eléctrico aplicado y de las propiedades materiales (viscoelásticas, elásticas y flexoeléctricas) del sistema.

Matemáticamente, el modelo genera una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en la curvatura promedio, la cual se puede interpretar como una clase de oscilador armónico forzado; este modelo contiene una contribución inercial asociada a la segunda derivada de la curvatura con respecto al tiempo, una primera derivada asociada con la disipación y un término constante relacionado con la elasticidad de la membrana. Es importante resaltar que este modelo es un caso especial de un modelo general de analogía mecánica comúnmente encontrado en Reología, llamado modelo de Burgers [32-34, 36, 47, 51, 60, 63]. Por otra parte, el miembro derecho de la ecuación contiene una primera y una segunda derivada temporal del campo eléctrico, por lo que, en este sentido, el modelo matemático es simétrico.

Para analizar la respuesta mecánica se propuso una función anarmónica para el campo eléctrico (trigonométrica), por lo cual, la curvatura promedio se separó en dos contribuciones: una en fase con el campo eléctrico y otra desfasada del mismo, a partir de esto se obtuvieron expresiones analíticas para las siguientes variables dinámicas:

- a. Módulos de curvatura.
- b. Potencia disipada por el contacto con las fases viscoelásticas.
- c. Energía elástica de la membrana (recuperación).

Proponiendo un conjunto de variables adimensionales, se obtuvieron tres números adimensionales ( $\lambda_v$ ,  $\lambda_b$ ,  $\Sigma_{\eta}$ ,  $k$ ), relacionados con la asimetría de las fases viscoelásticas, la



viscosidad total de bulto y el radio elástico, en donde los límites matemáticos de estos números adimensionales generaron un espacio material de seis modos. Geométricamente, este espacio puede ser representado por un prisma. Las coordenadas de este espacio son la viscosidad de bulto, la elasticidad de la membrana y la memoria asociada al producto de los tiempos de relajación respectivamente. Estos modos representan cualquier punto material en nuestro sistema.

## 8.2 Contribución al conocimiento

- Se dedujo un modelo electroreológico que describió los cambios en la curvatura de la membrana en función del campo eléctrico aplicado y de las propiedades viscoelásticas del medio y las propiedades elásticas de la membrana flexoeléctrica.
- Se presenta una metodología general para realizar simulaciones computacionales en el régimen de viscoelasticidad lineal (bajas deformaciones de las fases viscoelásticas y en la membrana), con el fin de incorporar diferentes mecanismos a través de las ecuaciones constitutivas aplicables.
- A partir de los resultados obtenidos, se mejora y se corrige el modelo membranodinámico publicado por Abou-Dakka *et al.* (2012) [12], introduciendo un término que cuantifica los efectos flexoeléctrico acoplados con la membrana.
- Se obtiene soluciones analíticas, para la curvatura como función del tiempo (inicio de curvatura) y las propiedades del medio (fases viscoelásticas y membrana elástica).
- Se corrigen las soluciones en la prueba oscilatoria (respuesta mecánica) para los módulos de curvatura que son punto de partida en los cálculos de la potencia disipada y energía elástica almacenada por la membrana.
- Se corrigen y mejoran las ecuaciones analíticas para la potencia disipada, energía elástica almacenada en función de los parámetros adimensionales.
- Con base en el análisis adimensional, se obtiene las condiciones para las cuales, se obtienen las curvas resonantes en donde el sistema trabaja como un amplificador de tipo biológico. La primera de estas condiciones es el contraste en las fases viscoelásticas (asimetría de las fases), una de las fases es muy viscoelástica y la otra débilmente viscoelástica, (ii) La segunda es que la viscosidad de bulto debe ser muy grande es decir cercana a uno. Esto significa que la fase superior e inferior tiene la máxima viscosidad posible. La tercera es que la elasticidad de la membrana se muy pequeña con respecto a la elasticidad de bulto de las fases viscoelásticas.

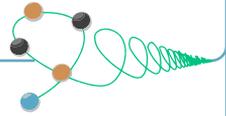


La cuarta condición y la contribución de esta tesis es que los mecanismos flexo-eléctricos deben ser del orden del radio elástico de la membrana, i.e. las fuerzas flexo-eléctricas deben ser pequeñas en comparación con la elasticidad de bulbo del sistema.

- Todos los resultados obtenidos en la presente investigación, son analíticos y pueden ser punto de partida para resultados numéricos en el régimen de viscoelasticidad no lineal.



# Bibliografía



1. Herrera-Valencia, E.E. and A.D. Rey, *Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells*. Philosophical transactions of the royal society A Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2014. **372**: p. 1-28.
2. Wang, Z. and L. She, *Flexoelectric Materials*. Encyclopedia of Smart Materials, 2022. **4**: p. 50-64.
3. Petrov, A.G., *The Lyotropic State of Matter: Molecular Physics and Living Matter Physics*. 1999, Boca Ratón, Florida: CRC Press.
4. Petrov, A.G., *Flexoelectricity of model and living membranes*. Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - Biomembranes, 2002. **1561**(1): p. 1-25.
5. Petrov, A.G., *Electricity and mechanics of biomembrane systems: flexoelectricity in living membranes*. Analytica Chimica Acta, 2006. **568**(1-2): p. 70-83.
6. Petrov, A.G., *Electricity and mechanics of biomembrane systems: flexoelectricity in living membranes*. Analytica Chimica Acta, 2006. **568**(70).
7. Sachs, F., W.E. Brownell, and A.G. Petrov, *Membrane Electromechanics in Biology, with a Focus on Hearing*. MRS Bulletin, 2009. **34**(9): p. 665-670.
8. Rey, A.D., *Liquid crystal model of membrane flexoelectricity*. Physical Review E, 2006. **74**(1): p. 1-11.
9. Rey, A.D., *Polar fluid model of viscoelastic membranes and interfaces*. Journal of Colloid and Interface Science, 2006. **304**(1): p. 226-238.
10. Rey, A.D., *Mechanics of soft-solid-liquid-crystal interfaces*. Physical Review E, 2005. **72**: p. 1-15.
11. Rey, A.D., *Liquid crystal models of biological materials and processes*. Soft Matter, 2010. **6**: p. 3402-3429.

12. Abou-Dakka, M., E.E. Herrera-Valencia, and A.D. Rey, *Linear oscillatory dynamics of flexoelectric membranes embedded in viscoelastic media with applications to outer hair cells*. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 2012. **185–186**: p. 1-17.
13. Ramírez-Torres, L.A., et al., *Non-linear electro-rheological model of a membrane immersed in Tanner-Power law fluids applied to outer hair cells: Shear-thinning mechanisms*. Physics of Fluids, 2024. **36**: p. 033111.
14. Herrera-Valencia, E.E. and A.D. Rey, *Fluctuating Flexoelectric Membranes in Asymmetric Viscoelastic Media: Power Spectrum through Mechanical Network and Transfer Function Models*. MDPI: Symmetry, 2023. **15**(1004): p. 1-33.
15. Rey, A.D., *Nonlinear actuator model for flexoelectric membranes*. International Journal of Design & Nature and Ecodynamics, 2008. **3**(1): p. 28-38.
16. Rey, A.D. and E.E. Herrera-Valencia, *Liquid crystal models of biological materials and silk spinning* Biopolymers, 2012. **97**: p. 374-396.
17. Mendoza-Vizcaya, R., *Modelo electro-reológico aplicado al sistema auditivo*, in *Facultad de Estudios Superiores Zaragoza*. 2015, Universidad Nacional Autónoma de México: México, D.F.
18. Mendoza-Vizcaya, R., *Dinámica oscilatoria lineal de membranas flexo-eléctricas en medios viscoelásticos con aplicaciones a las células ciliadas externas del oído interno*, in *Facultad de Estudios Superiores Zaragoza*. 2018, Universidad Nacional Autónoma de México: México, D.F.
19. Rey, A.D., E.E. Herrera-Valencia, and O.F. Aguilar-Gutierrez, *Liquid Crystalline Polymers: Structure and Dynamics*. Polymers and Polymeric Composites: A Reference Series. 2020: Switzerland.
20. Broughton, B., et al., *Optimized flexoelectric response in a chiral liquid-crystal phase device*. Journal of Applied Physics, 2005. **98**: p. 034109.
21. Harden, J., et al., *Giant flexoelectricity in bent-core nematic liquid crystal elastomers*. Applied Physics Letters, 2010. **96**: p. 102907-1.
22. Kumar, P., et al., *Converse Flexoelectric Effect in Bent-Core Nematic Liquid Crystals*. Journal of Physical Chemistry B, 2009. **27**(113): p. 9168–9174.
23. Patel, D., F. Ein-Mozaffari, and M. Mehrvar, *Effect of rheological parameters on non-ideal flows in the continuous-flow mixing of biopolymer solutions*. Chemical Engineering Research and Design, 2015. **100**: p. 126-134.



24. Harden, J., et al., *Converse flexoelectric effect in a bent-core nematic liquid crystal*. Physical Review E, 2008. **78**: p. 031702.
25. Ades, H.W., et al., *Auditory System. Anatomy Physiology (Ear)*. Handbook of Sensory Physiology, ed. H. Autrum, et al. Vol. V/1. 1974, New York: Springer-Verlag.
26. Herrera-Valencia, E.E. and A.D. Rey, *Electrorheological Model Based on Liquid Crystals Membranes with Applications to Outer Hair Cells*. MDPI: Fluids, 2018. **3**(2): p. 1-28.
27. Rey, A.D. and E.E. Herrera-Valencia, *Rheological theory and simulations of surfactant nematic liquid crystals*, in *Self-Assembled Supramolecular Architectures: Lyotropic Liquid Crystals 2012*, Hoboken: John Willey & Sons.
28. Herrera-Valencia, E.E., et al., *On the pulsating flow behavior of a biological fluid: human blood*. Rheologica Acta, 2017. **56**: p. 387-407.
29. Rey, A.D., *Capillary models for liquid crystal fibers, membranes, films, and drops*. Soft Matter, 2007. **3**: p. 1349-1368.
30. Herrera-Valencia, E.E., et al., *New simple analytical method for flow enhancement predictions of pulsatile flow of a structured fluid*. Physics of Fluids, 2019. **31**: p. 063104.
31. Bird, R.B., W.E. Stewart, and E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*. 2002, New York: John Willey & Sons.
32. Barnes, H.A., J.F. Hutton, and K. Walters, *An introduction to rheology*. 1989, Amsterdam: Elsevier.
33. Macosko, C.W., *Rheology: Principles, Measurements and Applications*. 1994, Weinheim: Wiley-VCH.
34. Malkin, A.Y., *Rheology: Concepts, Methods, and Applications*. 2017, Toronto: ChemTec Publishing.
35. Ferry, J.D., *Viscoelastic properties of polymers*. 1980, New York: John Wiley & Sons.
36. Goodwin, J.W. and R.W. Hughes, *Rheology for Chemists: An Introduction*. 2008, Cambridge: RSC Publishing.
37. Herrera-Valencia, E.E., *Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos aplicados a sistemas biológicos*. 2015, Ciudad de México: PAPIIT IN115615.



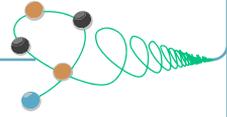
38. Herrera-Valencia, E.E., *Material didáctico Teórico, protocolos experimentales y aula virtual de las materias de fenómenos de transporte (cuarto semestre) y transferencia de masa (séptimo semestre) correspondientes a los ciclos intermedio y terminal de la carrera de ingeniería química*. 2015, Ciudad de México: PAPIME PE112716.
39. Herrera-Valencia, E.E., et al., *Fenómenos de transporte y reología de fluidos complejos: Flujo pulsátil de sangre humana*. 2022, Ciudad de México: UNAM-FESZ.
40. Bird, R.B., R.C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of polymeric liquids, vol. 1*. 1977, New York: Wiley.
41. Callen, H.B., *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. 1991, Pennsylvania: Wiley.
42. Cengel, Y., *Transferencia de calor y masa*. 2007, Distrito Federal: McGraw-Hill.
43. Cengel, Y., M. Boles, and M. Kanoglu, *Termodinámica*. 2019, Ciudad de México: McGraw-Hill.
44. Geankoplis, C.J., *Transport Process and Unit Operations*. 1993, New Jersey: Pentrice-Hall.
45. Welty, J., G.L. Rorrer, and D.G. Foster, *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*. 2018, Oregon: Wiley.
46. Fournier, L., *Basic Transport Phenomena in Biomedical Engineering*. 2011, Boca Raton: CRC Press.
47. Barnes, H.A., *A Handbook of Elementary Rheology*. 2000: University of Wales, Institute of Non-Newtonian Fluid Mechanics.
48. Calderas, F., et al., *On the yield stress of complex materials*. Korea-Australia Rheology Journal, 2013. **25**: p. 233-242.
49. Mase, G.T. and G.E. Mase, *Continuum Mechanics for Engineers*. 2015, Boca Raton: CRC Press.
50. Narasimhan, M.N.L., *Principles of continuum mechanics*. 1993, New York: John Wiley & Sons.
51. Walters, K., *Rheometry*. 1975, London: Chapman and Hall.

52. Herrera-Valencia, E.E., et al., *Fenómenos de transporte y reología de fluidos estructurados*. 2023, Ciudad de México: Comité Editorial de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza.
53. Collepardo-Guevara, R. and E. Corvera-Poiré, *Controlling viscoelastic flow tuning frequency during occlusions* Physical Review E, 2007. **76**.
54. Collepardo-Guevara, R. and E. Corvera-Poiré, *Controlling viscoelastic flow by tuning frequency during occlusions*. Physical review E: Statistical, nonlinear, and soft matter physics, 2007. **76**(2 Pt 2): p. 026301.
55. Flores, J., J. Alastruey, and E. Corvera-Poiré, *A Novel Analytical Approach to Pulsatile Blood Flow in the Arterial Network*. Annals of Biomedical Engineering, 2016. **44**(10): p. 3047-3068.
56. Rey, A.D., *Linear viscoelastic model for bending and torsional modes in fluid membranes*. Rheologica Acta, 2008. **47**: p. 861-871.
57. Zill, D., *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores a la frontera*. 2015, Distrito Federal: Cengage.
58. Spiegel, M.R., S. Lipschutz, and J. Liu, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. Schaum's Outline Series. 2009, New York: McGraw Hill.
59. Luyben, W.L. and M.L. Luyben, *Essentials of Process Control*. 1997, New York: McGraw-Hill Education.
60. Tanner, R.I. and K. Walters, *Rheology: An Historical Perspective*. Rheology Series. Vol. 7. 1998, Amsterdam: Elsevier.
61. Iwasa, K.H., *Negative membrane capacitance of outer hair cells: electromechanical coupling near resonance*. Scientific reports, 2017. **7**(12118): p. 1-8.
62. Rabbitt, R.D., et al., *Power Efficiency of Outer Hair Cell Somatic Electromotility*. PLOS Computational Biology, 2009. **5**(7): p. e1000444.
63. Middleman, S., *Fundamentals of polymer processing* 1997, New York: McGraw-Hill.





# Notación



## Letras

|                         |  |
|-------------------------|--|
| $a$                     | Radio del capilar [m]  |
| $\{b_i\}; i = 1,2$      | Coefficientes viscoso e inercial [1/s, 1/s <sup>2</sup> ]                                    |
| $\{c_1, c_2\}$          | Coefficientes flexo-eléctricos   |
| $C_i(z)$                | Constante de integración [1]   |
| $c_f$                   | Coefficiente flexoeléctrico de la membrana [C]   |
| $\{E, E_0\}$            | Magnitud del campo eléctrico, y amplitud del campo eléctrico aplicado<br>[NC <sup>-1</sup> ] |
| $E_m$                   | Energía elástica de almacenamiento de la membrana [J]  |
| $\{dE/dt, d^2E/dt^2\}$  | Primera y segunda derivadas temporales del campo eléctrico [N/ Cs; N/ Cs <sup>2</sup> ]      |
| $F_{\text{membrana}}$   | Fuerza de restauración de la membrana [N]  |
| $\{G_b, G_t\}$          | Módulo elástico definido en la región inferior y superior [Pa]                               |
| $h$                     | Altura del domo esférico [m]   |
| $H$                     | Curvatura promedio [1/m]   |
| $\{H_0, H_1\}$          | Condiciones iniciales de la curvatura promedio [1/m, 1/m s]                                  |
| $\{\dot{H}, \ddot{H}\}$ | Primera y segunda derivada temporal de la curvatura promedio [1/m s, 1/m s <sup>2</sup> ]    |
| $\{kc, \bar{kc}\}$      | Módulos de rigidez y de torsión de la membrana [J]   |

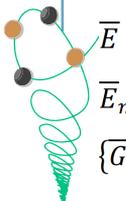
|                  |  |
|------------------|--|
| L                | Longitud característica axial del tubo capilar [m]                 |
| M                | Parámetro elástico de la membrana [Pa]                             |
| P                | Potencia [J/s]   |
| $p(z, t)$        | Presión [Pa]   |
| $\Delta p(z, t)$ | Diferencia de presión [Pa]   |
| $[p_v, p_b]$     | Presión superior ( $z = 2L$ ) e inferior ( $z = 0$ ) [Pa]          |
| $P_0$            | Presión constante en la parte superior e inferior del capilar [Pa] |
| R                | Radio del domo esférico[m]   |
| $(r, \phi, z)$   | Coordenadas cilíndricas [m, rad, m]                                |
| t                | Variable temporal [s]  |
| $V_z$            | Velocidad axial [m/s]  |

### Vectores y tensores

|       |   |
|-------|---|
| D     | Tensor rapidez de deformación [1/s]           |
| $F_E$ | Fuerza eléctrica [1/s]                        |
| $g$   | Vector aceleración de la gravedad [ $m/s^2$ ] |
| $n$   | Vector director [1]                           |
| $R$   | Vector de posición [m]                        |
| $s$   | Tensor de esfuerzo [Pa]                       |

### Variables adimensionales

|                            |  |
|----------------------------|--|
| $\{b_1^*, b_2^*\}$         | Coefficientes viscosos e inercial [1]                      |
| $\bar{E}$                  | Campo eléctrico [1]  |
| $\bar{E}_m$                | Energía elástica de la membrana [1]                        |
| $\{\bar{G}_b, \bar{G}_t\}$ | Módulos elásticos de los fluidos (superior e inferior) [1] |



|  |   |
|--|---|
| $\{\bar{H}, \bar{H}_{io}, \bar{H}_{oi}, \bar{H}^*\}$   | Curvatura promedio, en fase y fuera de fase y compleja [1]          |
| $\{\dot{\bar{H}}, \ddot{\bar{H}}\}$                    | Primera y segunda derivadas temporales de la curvatura promedio [1] |
| $\{\bar{H}_0, \bar{H}_1\}$                             | Condiciones iniciales de la curvatura promedio [1]                  |
| $k$  | Radio elástico [1]  |
| $k_0$  | Radio elástico crítico [1]  |
| $\bar{M}$  | Elasticidad de la membrana [1]                                      |
| $\bar{P}$  | Potencia [1]  |
| $\bar{P}_{peak}$                                       | Potencia máxima [1]   |
| $Q$  | Factor de selectividad biológico Q [1]                              |
| $\bar{t}$  | Tiempo [1]  |
| $\bar{\omega}$   | Frecuencia [1]  |
| $\Sigma \bar{\eta}$                                    | Viscosidad total [1]  |
| $\{\Sigma \bar{\eta}_{min}, \Sigma \bar{\eta}_{max}\}$ | Límites inferior y superior de la viscosidad total [1]              |

### Letras Griegas

|  |   |
|--|---|
| $\varepsilon$                          | Parámetro de dimensiones pequeñas [1]                                     |
| $\gamma_0$                             | Tensión superficial [Pa]  |
| $\dot{\gamma}_{rz}$                    | Rapidez de corte [1/s]  |
| $[\eta_v, \eta_b]$                     | Viscosidades inferior y superior [Pa s]                                   |
| $[\lambda_v, \text{Symbol } _b]$       | Tiempos de relajación viscoelásticos de Maxwell superior e inferior [s]   |
| $\bar{\eta}_i ; i = \{t, b\}$          | Viscosidades adimensionales (superior e inferior) [1]                     |
| $\{\bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b\}$ | Tiempos de relajación viscoelásticos de Maxwell (superior e inferior) [1] |
| $[\rho_v, \rho_b]$                     | Densidades de los fluidos (superior e inferior) [kg /m <sup>3</sup> ]     |
| $\Sigma_\lambda$                       | Suma de los tiempos de relajación en el sistema [s]                       |



$\Sigma_G$  Suma de la elasticidad de bulto en el sistema [Pa]

$\Sigma_\eta$  Suma de las viscosidades en el sistema [Pa s]

$\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}\}$  Componentes del tensor de esfuerzos [Pa]

### Otros Símbolos

$\{sen, cos\}$  Funciones seno y coseno [1]

$|\cdot|$  Determinante [1]

$\neq$  Diferente of cero [1]

$\mathfrak{S}$  Factor geométrico [m<sup>2</sup>]

$\{>, <\}$  Mayor y menor que [1]

$\{>>, <<\}$  Mucho mayor y mucho menor que [1]

$\pi$  Numero irracional pi [1]

$\{d/dt\}$  Derivadas con respecto al tiempo [s<sup>-1</sup>]

$\{\partial/\partial z, \partial/\partial z\}$  Derivada parcial espacial y temporal [m<sup>-1</sup>, s<sup>-1</sup>]

$\sqrt{\quad}$  Raíz cuadrada [1]

$|\cdot|$  Valor absoluto1

**det**  $|\cdot|$  Determinante [1]

$\left\{ \int_0^1 (\cdot) d\xi \right\}$  Definición de integral [1]

$\{\infty, \approx, \cong, \propto\}$  Infinito, aproximadamente, aproximadamente igual, proporcional [1]

### Subíndices

$\{b, t\}$  Refiere a los fluidos en la parte inferior y superior respectivamente [1]

$\{rz, rr, \theta\theta, zz\}$  Refiere a las componentes del tensor de esfuerzos [1]



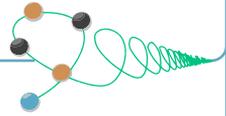
**Abreviaciones**

|              |  |
|--------------|--|
| LC           | Cristal líquido  |
| NLC          | Cristal líquido nemático                               |
| OHC          | Células ciliadas externas                              |
| CCE          | Células ciliadas externas                              |
| [LS, LV, FM] | Baja simetría, baja viscosidad y membrana suave        |
| [LS, LV, SM] | Baja simetría, baja viscosidad y membrana rígida       |
| [LS, HV, FM] | Baja simetría, alta viscosidad y membrana suave        |
| [LS, HV, SM] | Baja simetría, alta viscosidad y membrana rígida       |
| [HS, IV, FM] | Alta simetría, viscosidad intermedia y membrana suave  |
| [HS, IV, SM] | Alta simetría, viscosidad intermedia y membrana rígida |





# Glosario



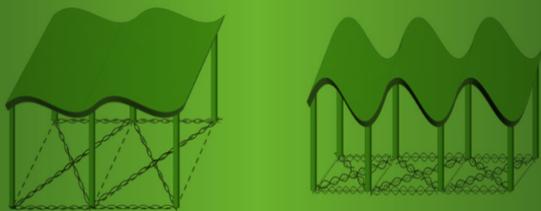
|                                 |  |
|---------------------------------|--|
| <b>Campo eléctrico:</b>         | Fuerza eléctrica por unidad de carga   |
| <b>Cristal líquido:</b>         | Sistema complejo que presenta propiedades entre sólido y líquido que es altamente anisótropico.  |
| <b>Ecuación constitutiva:</b>   | Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación).                                |
| <b>Ecuación de continuidad:</b> | Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.   |
| <b>Ecuación de movimiento:</b>  | Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.  |
| <b>Electro-motilidad:</b>       | Es el cambio de forma que resulta de la conversión directa de potencial eléctrico a fuerza.<br>Mecánica, comprimiendo y expandiendo las CCE. |
| <b>Estado estacionario:</b>     | Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.  |
| <b>Flexo-electricidad:</b>      | Capacidad de un material para modificar su curvatura por acción de un campo eléctrico externo.   |
| <b>Fluido incompresible:</b>    | Fluido que tiene una densidad constante.   |
| <b>Fluido newtoniano:</b>       | Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.  |
| <b>Fluido no newtoniano:</b>    | La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.   |
| <b>Flujo volumétrico:</b>       | Volumen por unidad de tiempo.  |
| <b>Membrana:</b>                | Elemento biológico o sintético que delimita un espacio físico y puede o no tener actividad biológica.  |

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| <b>Modelo de Maxwell:</b>      | Ecuación constitutiva no newtoniana que combina las propiedades elásticas y viscosas del fluido.   |
| <b>Rapidez de deformación:</b> | Rapidez con la que se deforma un fluido.   |
| <b>Resonancia:</b>             | Fenómeno que se produce cuando un cuerpo capaz de vibrar es sometido a la acción de una fuerza periódica cuyo periodo de vibración se acerca al periodo de vibración característico del sistema. |
| <b>Viscoelasticidad:</b>       | Termino que se utiliza para describir materiales que poseen características tanto viscosas como elásticas.   |



# Temas de bioingeniería:

## Modelamiento matemático de membranas flexo-eléctricas inmersas en medios viscoelásticos, biomimesis de células ciliadas externas



El estudio de los fenómenos de transporte y la reología de fluidos complejos es uno de los tópicos más importantes en la enseñanza de la Ingeniería Química. Estos temas son una parte esencial de la mecánica clásica Newtoniana, la termodinámica irreversible, la transferencia de materia con generación química y su relación con las ecuaciones constitutivas reológicas. Esta obra plantea, desde el enfoque de la ingeniería química, el estado del arte, el diagrama de proceso, el análisis de proceso, el modelado matemático, las simulaciones numéricas, el análisis de resultados junto con las conclusiones, así como el trabajo futuro de los fenómenos de transporte y la reología de fluidos estructurados aplicados a entender la amplificación del sonido en el ser humano a través de un concepto conocido como flexo-electricidad y su aplicación en las células ciliadas externas. Este tipo de sistemas se estudia mediante aproximaciones de primeros principios. Suponiendo que la materia se conserva y que no existe generación en el sistema, se aplica la segunda ley de Newton a un medio continuo. Se propone un nuevo modelo reológico que es una variante de un modelo de Burgers. La ecuación constitutiva reológica Herrera-Rey describe el sistema termodinámico conformado por las dos fases líquidas viscoelásticas y un sólido flexo-eléctrico. Asumiendo que el proceso es isotérmico, fluido es incompresible y que los mecanismos gravitacionales son despreciables, se obtiene una expresión analítica que describe el campo eléctrico en función del flujo volumétrico y de los mecanismos inherentes: (i) inerciales, (ii) viscosos, (iii) viscoelásticos, (iv) elásticos, y (v) flexo-eléctricos. Estos mecanismos describen un espacio paramétrico 3D los cuales tienen una interpretación física a través de los grupos adimensionales. El número que describe la competencia entre los mecanismos viscosos-inerciales y visco-elásticos es el número elástico  $E = 1/De_2 = Re/We$ . La dispersión que es clave para obtener la máxima respuesta dinámica lineal del sistema y esta definida mediante un cociente entre una variable geométrica y una función que depende del número Elástico, fuerzas inerciales y un operador asimétrico que contiene toda la información reológica y que es función del Womersley. Las condiciones para obtener la máxima respuesta de las funciones de transferencia del campo eléctrico y el flujo volumétrico y el esfuerzo-inercial en la pared, se obtiene cuando: (i) Existe una asimetría en las fases viscoelásticas, la viscosidad de bulto es máxima, la membrana flexo-eléctrica es deformable y el número elástico  $E$  es menor a uno. Bajos estas condiciones se obtiene una resonancia dominante seguido de un tren de curvas resonantes que pueden tener implicaciones biológicas importantes. Finalmente obtuvimos una manera de clasificar mediante la comparación de las dos funciones de transferencia claves de este trabajo, patrones que describen las resonancias y que se representan por medio de lazos multivaluados que son huellas particulares del sistema. Una persona que ha perdido la capacidad auditiva, no presenta este tipo de ciclos. De esta manera, estas herramientas representan una alternativa para estudiar este tipo de sistemas biológicos ya que, las células ciliadas externas son irreversibles, por lo que esta investigación representa una alternativa para entender el funcionamiento de estos sistemas complejos y presentar alternativas para implantes cocleares mediante modelado matemático y simulación computacional.



Facultad de Estudios Superiores Zaragoza,  
Campus I. Av. Guelatao No. 66 Col. Ejército de Oriente,  
Campus II. Batalla 5 de Mayo s/n Esq. Fuerte de Loreto.  
Col. Ejército de Oriente.  
Iztapalapa, C.P. 09230 Ciudad de México.  
Campus III. Ex fábrica de San Manuel s/n,  
Col. San Manuel entre Corregidora y Camino a Zautla,  
San Miguel Contla, Santa Cruz Tlaxcala.

<http://www.zaragoza.unam.mx>

