

Álgebra de Conjuntos

Tomás Vargas Ramírez • J. Antonio Zamora Plata



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

Álgebra de Conjuntos

Tomás Vargas Ramírez
J. Antonio Zamora Plata
Autores

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza



Datos para catalogación bibliográfica

Autores: Tomás Vargas Ramírez y J. Antonio Zamora Plata.

Álgebra de Conjuntos.

UNAM, FES Zaragoza, septiembre de 2020.

3.4 MB.

ISBN: 978-607-30-3440-1.

Diseño de portada: Carlos Raziel Leaños Castillo.

Diseño y formación de interiores: Claudia Ahumada Ballesteros.

DERECHOS RESERVADOS

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del texto o las ilustraciones de la presente obra bajo cualesquiera formas, electrónicas o mecánicas, incluyendo fotocopiado, almacenamiento en algún sistema de recuperación de información, dispositivo de memoria digital o grabado sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

Álgebra de Conjuntos.

D.R. © Universidad Nacional Autónoma de México

Av. Universidad # 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México, C.U.,
Delegación Coyoacán, C.P. 04510, México, D.F.

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza

Av. Guelatao # 66, Col. Ejército de Oriente,
Delegación Iztapalapa, C.P. 09230, México, D.F.

Contenido

1. Conjuntos	5
2. Idea de conjunto	7
3. Notación de conjunto	11
4. Métodos de especificación de conjuntos	15
5. Tipos de conjuntos	19
5.1 Universo y vacío	19
5.2 Conjuntos finitos e infinitos	22
6. Relación entre conjuntos (igualdad y desigualdad)	25
7. Subconjunto	27
8. Propiedades de la igualdad y de la inclusión de conjuntos	31
9. Comparación de conjuntos	33
10. Conjunto potencia	35
11. Diagramas de Venn-Euler	37!
12. Operaciones	39
12.1 Operación complemento	39
12.2 Unión	44
12.3 Intersección	60
12.4 Diferencia	72
13. Relaciones, combinaciones de operaciones y cálculo de elementos	85
14. Método para comprobar propiedades	97
15. Problemas	103

16. Incidencia de los conjuntos	115
16.1 Funciones y relaciones	115
16.2 Desigualdades	136
16.3 Desigualdades cuadráticas	146
16.4 Ecuaciones con valor absoluto	151
16.5 Sistema de ecuaciones lineales	155
17. Aplicaciones	161
17.1 Problemas de conteo y cálculo de probabilidades	161
17.2 Problemas de encuestas	163
Bibliografía	173

Conjuntos

Conceptualmente, los conjuntos están formados, entre otros, por conceptos básicos, definiciones, operaciones y axiomas. Estos son fundamentales para comprender otros conceptos de matemáticas más avanzadas.

Sin olvidar el aspecto lógico, los conjuntos pueden desarrollarse desde dos enfoques distintos: intuitivo y axiomático. A pesar de que se enuncien axiomas y se ilustren o verifiquen proposiciones, aquí los conjuntos se tratarán sobre todo intuitivamente; aunque esto no evita que los axiomas relacionen términos no definidos (elementos y conjuntos), las relaciones no definidas (relación de pertenencia) y que, consecuentemente, se formulen proposiciones (teoremas) basados en los axiomas y definiciones.

La presentación de conceptos, verificaciones, ilustraciones y la solución de problemas planteados tendrán relación con los conjuntos como una álgebra (orientación dada por Boole) y serán una herramienta útil para incidir en el desarrollo de capacidades para que el alumno comprenda procedimientos que lo lleven a obtener resultados y a la elaboración de métodos y situaciones que le permitan entre otras competencias. Plantear y resolver problemas; argumentar y comunicar; pensar y razonar; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas; por citar algunas.

Por otra parte se hará notar que las actividades prácticas de contar y medir, propias del ser humano, conducen a un número. Por ejemplo, si se caracteriza un conjunto de objetos o bien si se comparan las propiedades de un objeto con algún patrón de medida adecuado para determinar su longitud, masa o temperatura, entre otras características. Consecuentemente, mediante el uso de números y conjuntos se logra la comprensión de los fenómenos de la naturaleza.

Finalmente, el alumno debe entender que para desarrollar competencias en matemáticas, entre otras, es indispensable plantear, argumentar, resolver el problema y comunicar, y ser capaz de reconocer que así sucede, porque de lo contrario tales competencias son sólo palabras.

Idea de conjunto

La idea de conjunto forma parte del conocimiento informal que el ser humano tiene del mundo que lo rodea y del acontecer, lo cual expresa en un lenguaje común y rico de experiencias, aunque formalmente como concepto matemático también aparece en distintas ramas del conocimiento matemático. En este sentido y haciendo alusión a lo primero, a diario se escuchan palabras que tienen cierto significado común, por ejemplo, que dan idea de más de uno. Entre otras, están grupo, lote, paquete, biblioteca, síndrome, selección, totalidad. Esta idea de conjunto, la cual está fundamentada en la experiencia del mundo real y conceptual, es la que conduce, en lo que sigue, a considerar como conjunto a cualquier colección de objetos o entes bien definidos de cualquier naturaleza con o sin relación entre ellos. A los objetos se les llama elementos del conjunto.

El conjunto, nunca construido de elementos más sencillos, da origen lógica y algebraicamente a conceptos básicos, definiciones, operaciones, axiomas, etc. Axiomáticamente, se entiende que todo A es un conjunto y todo x es un elemento si verifican tales axiomas, los cuales son las premisas, los primeros principios de un orden de conocimiento.

¿Cuándo está bien definido un conjunto?

Para responder a esta cuestión, piense como se establece lo siguiente:

- a) el conjunto de los alumnos del grupo 4153,
- b) el conjunto de las ciudades capitales de los estados de la República Mexicana,
- c) el conjunto de los números naturales pares,
- d) el conjunto de las alcaldías de la Ciudad de México,
- e) el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 4 = 0$,
- f) el conjunto de los ríos del Estado de México,

- g) el conjunto de manzanas,
- h) el conjunto de los números,
- i) el conjunto de los bancos, y
- j) el conjunto de los botones.

¿Existe duda en cada uno de los conjuntos establecidos? Después de efectuar una lectura y un análisis de la situación creada para cada conjunto, se encuentra y se concluye que:

Los conjuntos de a) a f) no chocan con la experiencia, el mundo real, conceptual y acontecer cotidiano; sólo admiten una interpretación y un significado; se sobreentiende que no tienen elementos repetidos y el orden no importa. En estos conjuntos no hay duda, es decir no existe indeterminación del entendimiento entre dos o más significados, no hay ambigüedad, por lo que estos conjuntos están bien definidos y no son conjuntos vacíos. A estos conjuntos los definen una propiedad, la cual determina si el objeto pertenece o no al conjunto.

En cambio en los conjuntos de g) a j), sí existe duda, es decir, hay indeterminación del entendimiento ante dos o más interpretaciones y significados a que dan origen a estos conjuntos, por ejemplo, el conjunto de manzanas, se puede referir a la manzana como fruta o el terreno limitado por calles en sus cuatro lados; el conjunto de los números se puede referir a los números naturales, enteros, racionales o irracionales; el conjunto de los bancos puede hacer alusión a artículos para sentarse, instituciones bancarias o conjunto de peces; finalmente, el conjunto de los botones puede interpretarse como broche de ropa o capullo de flor antes de florecer. Esta situación conduce a la ambigüedad, la cual hace imposible que estos conjuntos estén bien definidos.

Por consiguiente, un conjunto está bien definido en cuanto no hay duda respecto a los elementos que lo conforman.

Ahora para reafirmar el concepto de conjunto se propone el cuestionamiento ¿qué puedes opinar o afirmar de los conjuntos siguientes?

Para resolver esta situación puedes hacerlo en equipo o en forma individual, pero no olvidar que el desarrollo de competencias, la comprensión y la fijación del conocimiento es individual.

- a) El conjunto de letras del alfabeto.
- b) El conjunto de los meses del año.
- c) El conjunto de pacientes reumáticos.
- d) El conjunto de hojas.
- e) El conjunto de cartas.
- f) El conjunto de tazas.
- g) El conjunto de tapas.
- h) El conjunto de los números enteros.
- i) El conjunto de los días de la semana.
- j) El conjunto de números reales.

A continuación te proponemos algunos ejercicios que te pueden servir para apropiarte del concepto de conjunto.

- a) En cada situación ¿cuáles y cuántos conjuntos se pueden formar si cada número natural $2, 3, 2a$ y $3x$, se multiplica por cada número natural hasta 10? ¿Qué es un múltiplo?
- b) Elabore un método para encontrar los conjuntos de números primos y compuestos que están entre el 1 y el 100. ¿Qué es un número primo y qué es un número compuesto?
- c) Elabore un procedimiento para encontrar los conjuntos de todos los divisores de los números 120, 140, 37, 53, 89 y 45 ¿Qué es un divisor?
- d) Encuentre el conjunto de factores primos de los números 225, 280 y 75. Los factores primos que se repiten sólo se escriben una sola vez. ¿Qué es un número primo?
- e) Escribir el conjunto que forman los estados físicos de agregación de la materia. ¿Qué es un estado de agregación?

- f) Escribir dos conjuntos tal que cada uno tenga dos sustancias que forman un coloide. ¿Qué es un coloide?
- g) Escribe el conjunto que forman las operaciones para separar mezclas y define cada uno de ellos.
- h) Escriba un conjunto que tenga relación con la temperatura y la velocidad de una reacción química.
- i) Escribir un conjunto de los elementos químicos que tienen un electrón de valencia.
- j) Escribir cinco ejemplos de situaciones en los que es posible el empleo del concepto de conjunto.

La notación o representación por signos es útil para establecer una comunicación. En este sentido para representar los conjuntos se utilizan letras mayúsculas o cualquier otro símbolo declarado. Esto es, A, B, C, X, Y, Z son conjuntos. El conjunto universo se denota por U o Ω . El conjunto vacío por $\emptyset$. Los objetos o elementos de los conjuntos se simbolizan por letras minúsculas o por cualquier otro símbolo declarado y se escriben entre los símbolos $\{ \}$, por ejemplo

$E = \{\text{hidrógeno, litio, sodio, potasio, rubidio, cesio, francio}\}$

es el conjunto de los elementos químicos de la familia de los alcalinos. Para indicar que un elemento está o pertenece a un conjunto se utiliza el símbolo $\in$, por ejemplo a pertenece o está en A, se denota por $a \in A$ y si no está se denota por $a \notin A$ (a no está en A). Otros símbolos que también se usan en conjunto son:

$\Rightarrow$, implica (condición necesaria).

$\Leftrightarrow$, si, y sólo si (condición necesaria y suficiente).

$\exists$, existe.

$\forall$, para todo.

$-$, operación diferencia.

$\times$, producto cartesiano.

$\cup$, la operación unión.

$\cap$, la operación intersección.

$'$, la operación complemento.

A, conjunto.

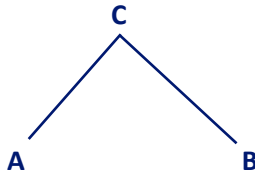
a , elemento.

$n(a)$, cardinal del conjunto A .

U , conjunto universo.

$\emptyset$, conjunto vacío.

Para evitar la paradoja de Russel, se convendrá en que un conjunto no pertenece a otro, es decir, no escribiremos $A \in A$. En su lugar se puede decir que para dos conjuntos cualesquiera, existe un conjunto al cual pertenecen ambos, o sea,



Este es el axioma del apareamiento.

El condicional o la implicación se establece cuando se dan dos proposiciones, la primera llamada antecedente o hipótesis y la segunda consecuente o tesis. En conjuntos más de un enunciado son de la forma $A \Rightarrow B$. Estos enunciados se llaman condicionales y es una proposición compuesta formada por las proposiciones A y B , es decir por la hipótesis o antecedente y por la tesis o consecuente, y es de la forma

Si A , entonces B

El condicional se denota por $A \Rightarrow B$ y tiene varias lecturas, es decir, la proposición A implica la proposición B ,

A es suficiente para B

B es necesaria para A

A solamente si B

La doble implicación o bicondicional se establece con dos proposiciones, la segunda es condición para que se cumpla la primera y la primera es condición para que la segunda se cumpla, es decir, cada una de dos proposiciones es condición necesaria y suficiente

para la otra proposición. $A \Leftrightarrow B$ es equivalente a A si, y sólo si B o si A, entonces B y si B, entonces A.

Si A y B tienen el mismo valor de verdad, entonces $A \Leftrightarrow B$ es verdadero, si A y B tienen valores de verdad opuestos, entonces $A \Leftrightarrow B$ es falso. Tiene pues dos posibilidades de ser verdadera por dos de ser falsa.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Métodos de especificación de conjuntos

La especificación de un conjunto debe ser de tal manera que no haya duda respecto de los elementos que lo forman. Las formas para especificar los conjuntos son:

- a) Por enumeración, tabulación, listado o extensión.
- b) Por comprensión o descripción.

La primera consiste en escribir cada elemento del conjunto separado por una coma, encerrar la lista de éstos entre llaves, $\{ \}$, y denominar al conjunto con la letra mayúscula A o con cualquier otra. Por ejemplo,

$A = \{\text{argón, neón, criptón, xenón, radón, helio}\}$ es el conjunto de los elementos químicos de la familia de los gases nobles;

$Q = \{2, 4, 6, 8\}$ es el conjunto de los números pares positivos no mayores que 8.

El segundo método para especificar un conjunto consiste en encerrar entre llaves una propiedad que deben tener los elementos, la cual debe expresar cuales son los requisitos que debe satisfacer cada elemento para pertenecer al conjunto. En general, esto puede expresarse como $A = \{x / p(x)\}$, donde $p(x)$ es una proposición abierta en x . Por ejemplo,

$B = \{x / x \text{ es un entero positivo menor que } 5\}$, donde

$p(x) = x \text{ es un número entero positivo menor que } 5$

Cada vez que se aplica la proposición se genera un elemento y a su vez un conjunto, el cual se expresa por extensión, o sea,

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Igualmente

$$C = \{x/2 < x < 10\}, p(x) = 2 < x < 10 \text{ y}$$

$$D = \{x/x^2 - 25 = 0\}, p(x) = x^2 - 15 = 0.$$

son ejemplos que ilustran el método por comprensión; como lo son las siguientes:

$$R = \{r/r \text{ es el nivel de energía en el átomo}\},$$

$$O = \{o/o \text{ es un orbital}\}.$$

Los siguientes son ejercicios que te pueden servir para apropiarte de los métodos para especificar conjuntos. Puedes intentarlo en forma individual o en equipo. No olvides que la comprensión y apropiación del conocimiento y desarrollo de capacidades es individual.

a) Expresar los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, \dots\},$$

$$B = \{1/2, 1, 3/2, 2, 2/3, 3, \dots\},$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, \dots\},$$

$$D = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\} \text{ y}$$

$$E = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\};$$

por comprensión.

b) Expresar los conjuntos

$$A = \{x/ (x + 3)(x + 4) = 0\},$$

$$B = \{x/ 5 < x < 16\},$$

$$C = \{x / x^2 = 25\},$$

$$D = \{x / x + 2 < 4\},$$

$$E = \{x / x \text{ es un número natural menor que } 0\} \text{ y}$$

$$F = \{x / x \text{ es un número no racional}\};$$

por el método de tabulación.

c) Expresar los conjuntos

$$A = \{\text{Sc, Ti, V, Cr, Mn}\},$$

$$B = \{\text{óxido, anhídrido, base, ácido, sal}\}, \text{ y}$$

$$C = \{\text{Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra}\};$$

por el método de comprensión.

d) Expresar los conjuntos

$$A = \{x/x \text{ son los elementos químicos del periodo } 2\},$$

$$B = \{x/x \text{ son los elementos químicos que presentan tres electrones en su órbita externa}\},$$

$$C = \{x/x \text{ son los números de oxidación en } \text{H}_3\text{PO}_4\},$$

$$D = \{x/x \text{ son los elementos más electronegativos}\} \text{ y}$$

$$E = \{x/x \text{ son los elementos más electropositivos}\};$$

por tabulación.

5.1 Universo y vacío

a) De los conjuntos

$A = \{\text{todos los números naturales}\},$

$B = \{\text{todos los números primos}\}$ y

$C = \{\text{todos los números naturales menores que } 30\};$

¿cuál puede ser el conjunto universo?

Como B es subconjunto de A y C también, A es el conjunto universo. También $A = \{\text{todos los números reales positivos}\}$ puede ser el conjunto universo.

b) ¿Cuál de los conjuntos siguientes puede ser el conjunto universo?

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$

$B = \{3, 4, 5, 6\}$ y

$C = \{1, 2, 3, 4\},$

Como B es subconjunto de A y C también, A es el conjunto universo. También $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ó $B = \{\text{todos los números naturales}\}$ pueden ser conjuntos universales.

c) Si $A = \{\text{todos los elementos químicos de la tabla periódica}\}$, $B = \{\text{todos los elementos químicos de la familia IA}\}$ y $C = \{\text{todos los elementos químicos de la familia IIA}\}$

¿Cuál puede ser el conjunto universo?

Como B es subconjunto de A y C también, el conjunto A es conjunto universo. También B definido como $B = \{\text{todos los elementos de las familias IA, IIA y IIIA}\}$ puede ser conjunto universo

¿Es único el conjunto universo?

Estos ejemplos permiten afirmar que el conjunto universo es una colección fija de elementos con los cuales se puede armar una discusión (universo de discursos) y se denota por U ó Ω .

Cuando se dice que es una colección fija de elementos no significa que es único más bien tal colección depende del problema y de su variación.

El conjunto universo no es pues único y si se va por la existencia de éste, se llega a paradojas, lo cual conduce a afirmar que no hay un conjunto que lo contenga todo. Esto lleva a la formulación axiomática de los conjuntos. La otra forma de tratar a los conjuntos es la intuitiva.

Ahora, de los conjuntos siguientes:

- a) El conjunto de los números enteros positivos menores que 10,
- b) $\{a, e, i, o, u\}$,
- c) $\{\text{todos los números naturales}\}$,
- d) $\{\text{todos los caballos con alas}\}$,
- e) $\{\text{todos los números pares que terminan en 5}\}$ y
- f) $\{\text{todos los hombres que miden 4 metros}\}$;

¿cuáles son el vacío?, y ¿por qué?

Después de leer y analizar cada conjunto, se concluye que los conjuntos a), b), y c) no chocan con la experiencia, el mundo real, conceptual y acontecer cotidiano; sólo admiten una interpretación, no tienen elementos repetidos y no se establece un orden. Además, no existe indeterminación del entendimiento, ni dos significados (no hay ambigüedad). Consecuentemente, estos conjuntos tienen elementos y no son el vacío.

En cambio, los conjuntos d), e), y f), si chocan con la experiencia, el mundo real, el conceptual y el acontecer cotidiano; es decir, no se conocen los caballos con alas, conceptualmente, el número par no está definido de esta manera y las estadísticas conocidas no avalan personas con altura mayores de 4 metros.

Por consiguiente, estamos ante dos condiciones contradictorias, es decir, caballos con alas y sin ellas; números pares y los que no lo son; los hombres que miden 4 metros y los que reportan las estadísticas.

Consecuentemente, estos conjuntos son el vacío, porque están definidos por dos condiciones mutuamente contradictorias donde una es verdadera.

¿Existe el conjunto vacío y es único?

Los ejemplos anteriores y las conclusiones muestran que el conjunto vacío existe y es único. Éste es único porque no es posible definir otro que no sea el mismo, es decir, el que carece de elementos. En general, el conjunto que carece de elementos se puede simbolizar como

$$\emptyset = \{x/x \neq x\}$$

y éste lleva implícito en su definición una condición contradictoria, la cual le confiere existencia.

$\emptyset = \{ \}$, pero $\emptyset$ no es igual a $\{0\}$, porque el último es un conjunto con un elemento. Aunque el número de elementos de $\{ \}$ es cero, esto no significa que $0 = \{ \}$ ó que $\emptyset = \{0\}$.

Finalmente, existe un conjunto sin elementos, $\emptyset$, llamado conjunto vacío. Este es un axioma.

Los siguientes ejercicios te pueden servir para fijar los conceptos de conjunto universo y vacío.

Para cada par de conjuntos dados, ¿qué conjunto universo propone?

a) $A = \{\text{todos los números primos naturales positivos menores de } 36\}$ y

$B = \{\text{todos los números impares positivos menores de } 27\};$

b) $A = \{\text{todos los gases nobles}\}$ y

$B = \{\text{todos los elementos químicos del primer periodo}\};$

c) $A = \{x/x^3 - 4x = 0\}$ y

$B = \{x/x^2 - x = 0\}.$

De cada par de conjuntos dados, ¿cuál es el conjunto vacío? ¿Por qué?

a) $A = \{\text{todos los números pares que terminen en 9}\}$ y

$B = \{\text{todos los números pares que terminen en 4}\};$

b) $A = \{\text{todos los triángulos que tienen 4 lados}\}$ y

$B = \{\text{todos los triángulos que tienen tres lados iguales}\};$

c) $A = \{\text{todos los elementos más electronegativos están en I A}\}$ y

$B = \{\text{todos los elementos más electropositivos están en VII A}\}.$

5.2 Conjuntos finitos e infinitos

La cardinalidad de un conjunto es un número entero característico de éste y se denota como $n(A)$. Los conjuntos finitos tienen cardinalidad y los infinitos no, porque no se pueden contar. Por ejemplo

De los conjuntos

$$A = \{a, b, c, d, e, f\},$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\};$$

los conjuntos son finitos y tienen cardinalidad, la cual se calcula contando los elementos de éstos, es decir,

$$n(A) = n(\{a, b, c, d, e, f\}) = 6, \text{ y}$$

$$n(B) = n(\{0, 4, 6, 8, 10\}) = 5.$$

¿Cuál es el número de elementos o cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos?

- a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- b) $B = \{a, b, c, d, e\}$,
- c) $C = \{\text{sodio, nitrógeno, oxígeno}\}$,
- d) $D = \{1, 2, 3, \dots\}$,
- e) $E = \{x/x < 1\}$,
- f) $F = \{x/x \text{ es par, } x \text{ es impar}\}$,
- g) $G = \{x/x \text{ son los electrones del sodio}\}$, y
- h) $H = \{x/x \text{ es un número natural menor que } 1\}$;

¿cuáles carecen de elementos y cuáles tienen o no un último elemento? y ¿cómo se les llama a cada uno de ellos?

Los conjuntos A , B , C y G tienen un último elemento y el proceso de conteo tiene fin; mientras que los conjuntos D y E no tienen un último elemento y el proceso de conteo no tienen fin. Los conjuntos F y H no tienen elementos. En este orden, a los primeros conjuntos se le llama finitos, a los segundos infinitos y a los últimos vacíos.

Por consiguiente, cualquier conjunto es finito si se pueden contar sus elementos uno a uno hasta el último. Si eso es lo que ocurre el proceso de contar tiene fin. Si no es así, el conjunto es infinito.

En cada caso, determinar si el conjunto es finito, infinito o vacío.

- a) $A = \{x/x \in R\}$,
- b) $B = \{x/x \text{ es un número compuesto}\}$,
- c) $C = \{x/x \text{ es un número racional}\}$,

- d) $D = \{n / \frac{n(n+1)}{2}, n = 1, 2, 3, 4\},$
- e) $E = \{x/x \text{ es un número entre 12 y 14 no divisible entre el mismo número y la unidad}\},$
- f) $F = \{x/x \text{ es múltiplo de sí mismo}\}$ y
- g) $G = \{x/x \text{ es múltiplo de 5 no mayor de 21}\}.$

Relación entre conjuntos (igualdad y desigualdad)

La igualdad entre los conjuntos A y B , se denota por $=$ y se lee igual, y se define como $A = B$, si y sólo si tienen exactamente los mismos elementos. Axiomáticamente, este es el axioma de la extensión.

La desigualdad entre los conjuntos A y B , se denota por $\neq$ y se define como $A \neq B$, si el conjunto A tiene un elemento que no está en B , o a la inversa.

Ahora, si $A = B$, entonces cada elemento de A es también un elemento de B y si $B = A$, entonces cada elemento de B es también un elemento de A . Esta forma de expresar la igualdad permite concluir que dos conjuntos iguales son idénticos.

En símbolos,

$A = B$, si y solo si, para toda $a \in A \Rightarrow a \in B$ y

para toda $b \in B \Rightarrow b \in A$ ó

$A = B \Leftrightarrow a \in A \Rightarrow a \in B \text{ y } b \in B \Rightarrow b \in A.$

Los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 2, 1\}$ son idénticos, porque son iguales en cantidad y cualidad. En cambio, los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$ son iguales en número, pero no en cualidad.

Consecuentemente, dos conjuntos son iguales si tienen exactamente el mismo número de elementos, aunque las propiedades que los definen sean diferentes. En cambio, dos conjuntos son idénticos si además de tener el mismo número de elementos, éstos están definidos por la misma propiedad.

Dos conjuntos universales no necesariamente son iguales, mientras dos conjuntos vacíos son siempre iguales, porque el conjunto vacío tiene la propiedad de unicidad.

La desigualdad entre dos conjuntos se puede expresar simbólicamente como

$A \neq B$, si y solo si existe x tal que $x \in A \Rightarrow x \notin B$

y si existe z tal que $z \in B \Rightarrow z \notin A$.

Subconjunto

Después de observar los conjuntos

$$A = \{a, b, c\} \text{ y } B = \{a, b, c, d, e\}.$$

¿Qué relaciones se pueden establecer entre éstos?

Todos los elementos de A son también elementos de B y no todos los elementos de B son también elementos de A . Por consiguiente, $A \neq B$, A es subconjunto de B y B no es subconjunto de A . La primera es la relación de la desigualdad entre conjuntos, ya definida, la segunda se ajusta a la definición general del subconjunto, la cual se expresa como: el conjunto A es subconjunto del conjunto B , lo que se simboliza por $A \subset B$, si cada elemento del conjunto A es también un elemento del conjunto B , lo que simbólicamente se expresa como

$$A \subset B \Leftrightarrow a \in A \Rightarrow a \in B.$$

La última expresión coincide con la definición de cuando un conjunto no es subconjunto, la cual se expresa como: Si al menos existe un elemento de B que no está en A , el conjunto B no es subconjunto del conjunto A , lo que se simboliza como

$$B \not\subset A \Leftrightarrow b \in B \Rightarrow b \notin A.$$

Los siguientes ejercicios te pueden servir para apropiarte de las relaciones simbolizadas por $=$, $\neq$, $\subset$ y $\not\subset$; después de ser comprendidas.

¿Qué relaciones se pueden establecer entre cada una de las siguientes parejas de conjuntos?

- a) $A = \{a\}$ y $B = \{1\}$;
- b) $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$;
- c) $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$;

d) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$;

e) $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, b\}$.

Al relacionar los conjuntos A y B por $=$, la expresión

$$A = B \text{ es equivalente a } \begin{cases} a \in A \Rightarrow a \in B \\ b \in B \Rightarrow b \in A \end{cases}$$

y ésta vincula la igualdad con la inclusión. Esta expresión también puede escribirse como

$$A = B, \text{ si y solo si } A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

Luego de aclarar significados se tiene que

$$a \in A \Rightarrow a \in B \text{ significa que } A \subset B,$$

$$b \in B \Rightarrow b \in A \text{ significa que } B \subset A.$$

Por consiguiente,

$$A = B \Rightarrow A \subset B \text{ y } B \subset A \text{ y}$$

$$A \subset B \text{ y } B \subset A \Rightarrow A = B.$$

Estas dos últimas expresiones equivalen a la proposición bi condicional, es decir,

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

Lo cual nos permite concluir que dos conjuntos son iguales si cada uno es subconjunto del otro.

Cuando existe una correspondencia uno-a-uno entre los elementos de dos conjuntos, tales conjuntos son del mismo tamaño y son iguales si cada elemento de A es elemento de B y a la inversa, por ejemplo, los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, c\}$ cumplen con lo dicho, por lo que son idénticos.

Brevemente, el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y el conjunto $B = \{a, b, c, d\}$ tienen el mismo tamaño y, cualitativamente, son distintos.

Finalmente, los conjuntos $A = \{2\}$ y $B = \{x/x^2 - 2x = 0\}$ son de tamaños distintos, mientras que los conjuntos $A = \{-4\}$ y $B = \{x/(x + 4)^2 = 0\}$ tienen el mismo tamaño y son iguales.

Ahora, mediante la pregunta ¿Qué relaciones se pueden establecer con los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, c\}$? construiremos el concepto de subconjunto impropio. En efecto, como los conjuntos son iguales se pueden establecer que $A \subset B$ y $B \supset A$ ó $A \subset A$ y $A \supset A$, lo cual implica que $A = A$ y que el conjunto A es subconjunto de sí mismo. Esta inclusión se escribe como $A \subseteq A$ y se le conoce como inclusión impropia. Cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo.

Asimismo, si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$ y $A \neq B$, entonces como todos los elementos de A están en B , A es un subconjunto propio de B . Brevemente,

A es subconjunto propio de B si $A \subset B$ y $A \neq B$

Veamos ahora la inclusión y el conjunto vacío. Si el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$, entonces $A \subset B$, porque todos los elementos de A son también elementos de B . Del mismo modo, si $A = \{a, b, e\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$, $A \not\subset B$, porque $e \in A$, pero $e \notin B$. Como el conjunto vacío carece de elementos, esta situación nunca se presentará y siempre se cumplirá que $\emptyset \subseteq B$, $\emptyset \subseteq \emptyset$, $\emptyset \subset U$ y $\emptyset \subset A$. En otros términos, el vacío es subconjunto de sí mismo y de cualquier otro conjunto.

Propiedades de la igualdad y de la inclusión de conjuntos

La relación de igualdad es reflexiva, simétrica y transitiva. Sean A , B y C conjuntos iguales. Entonces

- Propiedad reflexiva $A = A$,
- Propiedad simétrica $A = B \Leftrightarrow B = A$ y
- Propiedad transitiva si $A = B$ y $B = C \Leftrightarrow A = C$.

La relación de inclusión es reflexiva, no simétrica y transitiva.

Propiedad reflexiva. Sea A un conjunto cualquiera, entonces $A \subseteq A$ (todo conjunto es subconjunto de sí mismo).

Propiedad simétrica de la inclusión no existe.

Si $A \subset B$, entonces $B \subset A$. Esto no sucede. Por ejemplo, sean $A = \{a\}$ y $B = \{a, b\}$ conjuntos, entonces $A \subset B$, pero $B \not\subset A$.

Propiedad transitiva

Sean A , B y C conjuntos tales que $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$. Esto es, todo elemento que está en A también está en B . Pero por hipótesis, todo elemento de B es también un elemento de C . Se ha verificado que todo elemento que está en A también está en C ($A \Rightarrow C$). Consecuentemente, por definición de subconjunto, $A \subset C$.

Comparación de conjuntos

De los conjuntos dados por parejas ¿Cuáles son comparables, no comparables o disjuntos? y ¿por qué?

- a) $A = \{a, b, c\}$ y $A_1 = \{a, b, c, d\}$
- b) $B = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B_1 = \{4, 5, 6, 7\}$
- c) $C = \{a, b, c, d\}$ y $C_1 = \{e, f, g, h\}$

Los conjuntos A y A_1 son comparables; B y B_1 no comparables y C y C_1 , disjuntos. Dos conjuntos son comparables cuando todos los elementos de uno de ellos son también elementos del otro y se cumple que $A \subset B$ pero $B \not\subset A$, ó $B \subset A$ pero $A \not\subset B$. En a) se cumple que $A \subset A_1$, por lo que la respuesta queda justificada. Los conjuntos son no comparables cuando no todos los elementos de A están en B y cuando no todos los elementos de B están también en A , lo que se simboliza como $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Esto genera dos situaciones, la primera es cuando no hay elementos en común y la segunda cuando si los hay. En la primera A y B son conjuntos disjuntos y en la segunda los conjuntos A y B son conjuntos no comparables. Consecuentemente, la última afirmación corresponde, respectivamente, a los incisos c) y b).

A continuación se proponen ejercicios para recordar y fijar los conceptos de conjuntos no comparables, comparables y disjuntos.

¿De los conjuntos siguientes cuáles son comparables, disjuntos y no comparables? y ¿por qué?

- a) $A = \{1, 2, 3\}$, $A_1 = \{4, 5, 6\}$ y $A_2 = \{7, 8, 9\}$;
- b) $B = \{a, b, c, d\}$, $B_1 = \{b, c, d, e\}$;
- c) $C = \{a, b, c, d\}$, $C_1 = \{b, c, d\}$.

Proponga 4 problemas relacionados con el tema.

Conjunto potencia

¿Qué es un conjunto potencia y cómo se obtiene?

El conjunto $A = \{a, b, c\}$ será la guía para elaborar el concepto de conjunto potencia y el medio para obtenerlo. En efecto, se sabe que el vacío es un subconjunto propio de cualquier conjunto, excepto de sí mismo, éste será el primer subconjunto del conjunto dado y los que faltan se obtienen formando subconjunto de un elemento, de dos elementos y de tres elementos, es decir, $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$; y $\{a, b\}$; $\{a, c\}$ y $\{b, c\}$; $\{a, b, c\}$. Consecuentemente, el conjunto potencia es

$$2^A = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \},$$

donde $A = \{a, b, c\}$, y se puede definir como el conjunto de los subconjuntos de un conjunto y denotarse como 2^A .

¿Cómo se determina ahora el número de subconjuntos de un conjunto?

Para determinar el número entero que caracteriza a un conjunto potencia, después de calcular $n(A)$, se calcula tal número, es decir $n_s(A) = n(2^A) = 2^{n(A)}$.

En efecto, para $A = \{a, b, c\}$, éste es $n_s(A) = 2^3 = 8$.

Donde $n_s(A)$ indica el número de subconjunto y a la vez es el entero buscado.

Brevemente, si $A = \{a, b, c, d\}$, $n(\{a, b, c, d\}) = 4$ y $n_s(A) = 2^4$. Entonces

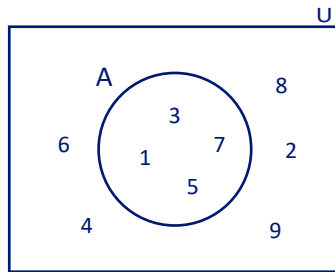
$$2^A = \left\{ \emptyset, \dots \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \dots \{a, b, c, d\} \right\},$$

donde $A = \{a, b, c, d\}$

Mediante la actividad siguiente, se pretende que te apropiés del concepto de conjunto potencia. ¿Cuál es el conjunto potencia de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Diagramas de Venn-Euler

Un medio gráfico útil para ilustrar conjuntos y las relaciones entre ellos son los llamados diagramas de Venn-Euler. En éstos, se usa el rectángulo para representar el conjunto universo y un círculo para representar un subconjunto del universo. Según sea el número de subconjuntos, así será el número de círculos. Por ejemplo, la representación gráfica del conjunto universo $U = \{\text{todos los números enteros positivos menores de } 10\}$ y del conjunto $A = \{\text{todos los números impares positivos menores que } 8\}$ se muestran en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



¿Qué utilidad tienen las operaciones en los conjuntos?

En el álgebra de los conjuntos se emplean las operaciones para generar otros conjuntos, o sea, se harán corresponder nuevos conjuntos a pares de conjuntos A y B . Aquí se definen las operaciones de complemento, unión, intersección y diferencia; se establecen y se estudian sus propiedades. En otra sección se estudiará el producto cartesiano.

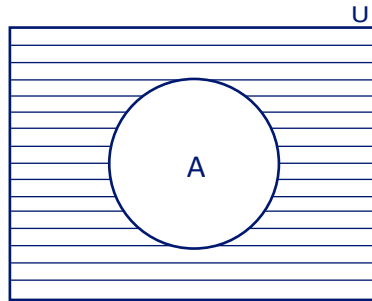
12.1 Operación Complemento

¿Qué es el complemento de un conjunto y cómo se determina?

Sean $A = \{a, b, c\}$ y $U = \{a, b, c, d\}$ los conjuntos definidos para establecer la operación de complemento y su determinación. El complemento del conjunto A son los elementos que le faltan para ser el conjunto universo, en este caso es el elemento d y geométricamente es lo que le falta también al conjunto A para ser el conjunto universo. Formalmente, sea U el conjunto universo y A un subconjunto de U , el complemento de A se denota por A' y se define como el conjunto de elementos que están en U pero que no están en A . El conjunto complemento de A también se define como la diferencia del conjunto universo U y del conjunto A , esto es,

$$A' = U - A.$$

Gráficamente, en el diagrama de Venn, el complemento de A es el área exterior del conjunto A , la cual se ha rayado en forma horizontal. Ver la figura siguiente:

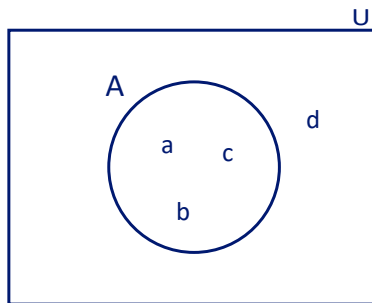


Simbólicamente, el complemento de A se escribe como

$$A' = \{x \in U / x \notin A\} \text{ ó } A' = U - A.$$

Después de aplicar la definición de complemento, el resultado es $A' = \{d\}$. Si se compara este resultado con el primero, se encuentra que es igual.

En forma gráfica, la solución se muestra en el siguiente diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Continuando con el concepto de complemento y después de hallar los subconjuntos del conjunto $A = \{a, b, c\}$. ¿Cuántos pares de subconjuntos complemento se pueden formar?

Los subconjunto de A son

$$\{ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Los pares de subconjuntos complemento son

$$\{a\}, \{b, c\},$$

$$\{b\}, \{a, c\},$$

$$\{c\}, \{a, b\} \text{ y}$$

$$\{a, b, c\}, \emptyset.$$

Estos son los pares de subconjuntos complemento.

También a través de los enteros que caracterizan a cada conjunto, se pueden efectuar operaciones aritméticas. Por ejemplo, sea $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $A = \{b, c, d\}$. Hallar los elementos de A' y verificar que numéricamente

$$A' + A = U,$$

$$n(A') + n(A) = n(U)$$

$$U - A = A'$$

$$n(U) - n(A) = n(A') \text{ y}$$

$$U - A' = A$$

$$n(U) - n(A') = n(A).$$

Los conjuntos dados son $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $A = \{b, c, d\}$ y su cardinalidad es $n(U) = 7$ y $n(A) = 3$.

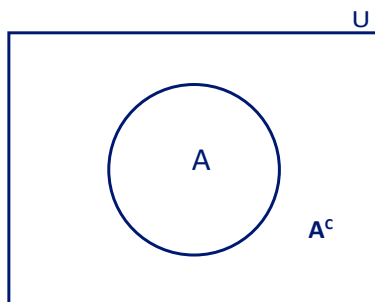
Por definición $A' = \{a, e, f, g\}$ y su cardinalidad es $n(A') = 4$.

Consecuentemente, $n(A') + n(A) = n(U)$, ó $4 + 3 = 7$,

$$n(U) - n(A) = n(A') \text{ ó } 7 - 3 = 4,$$

$$n(U) - n(A') = n(A) \text{ ó } 7 - 4 = 3.$$

El diagrama de Venn es un medio gráfico útil para ver, no para demostrar, como se relacionan los conjuntos. En efecto, observando el diagrama:



se ve que el complemento de A es A' y el complemento del complemento del conjunto A es A . Igualmente, se ve que si $A \subset U$ implica que $U - A = A'$ y si $A' \subset U$ implica $U - A' = A$. También se observa que si $A \not\subset A'$ y $A' \not\subset A$ y no tienen elementos en común, los conjuntos A y A' son disjuntos.

Usando la definición de complemento se pueden verificar las expresiones

$$U - A = A' \text{ y } U - A' = A.$$

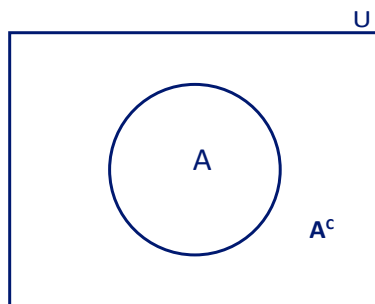
Las propiedades que caracterizan el complemento de un conjunto y que resultan de la definición de complemento, se muestran y verifican enseguida.

Sea U el conjunto universo y A un conjunto cualquiera, $(A')' = A$.

En esta proposición se afirma que el complemento del complemento es el conjunto A y por definición de complemento $(A')' = \{x \in U/x \notin A'\}$.

Si $x \notin A'$, entonces $x \in A$, proposición que permite escribir la última expresión como $(A')' = \{x/x \in A\} = A$.

Esta conclusión, se muestra en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Si U es el conjunto universo, entonces $U' = \emptyset$.

La definición de complemento permite saber si la proposición dada es falsa o verdadera. En efecto, $U' = \{x/x \in U \text{ y } x \notin U\} = \emptyset$, porque es una situación contradictoria.

Si $\emptyset$ es el vacío, entonces $\emptyset' = U$.

Del mismo modo y por definición de complemento, $\emptyset' = \{x/x \in U \text{ y } x \notin \emptyset\} = U$, porque el conjunto vacío no tiene elementos.

Más adelante, se abordarán las propiedades del complemento que tiene relación con las operaciones de unión, intersección y diferencia.

Los siguientes son ejercicios que te pueden servir para incorporar conocimiento y apropiarte de la operación de complemento.

En cada caso resuelve el problema propuesto.

- ¿Cuál es el complemento de $A = \{x/x \text{ es un número positivo entero}\}$?
- ¿Cómo especificas el conjunto de los números pares positivos y cómo su complemento?
- Si los números irracionales tienen complemento, ¿Cuál es el conjunto y cómo lo especificas?
- Si $U = \{x/1 \leq x \leq 40\}$ y $A = \{x/6 \leq x \leq 18\}$. ¿Cuál es el conjunto A' ?
- Si $U = \{x/1 \leq x \leq 30\}$ y $A = \{x/ \text{ es un número positivo par}\}$. Hallar A' .

- f) ¿Cuántos pares de subconjuntos complementos se pueden formar con el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$? ¿qué relación tiene este problema con el conjunto potencia?
- g) Si $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, y $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ y $D = \{6, 7, 8, 9\}$. Hallar A' , B' , C' , D' , U' y $\emptyset'$; y la cardinalidad de cada conjunto.
- h) Utilice los conjuntos definidos en el problema anterior para comprobar numéricamente ¿Qué expresiones de las siguientes son verdaderas?

$$A + A' = U \quad U - A' = A$$

$$B + B' = U \quad \text{y} \quad U - B = B'$$

$$C + C' = U \quad U - C' = C$$

$$n(A) + n(A') = n(U) \text{ y } n(U) - n(A') = n(A)$$

$$n(B) + n(B') = n(U) \text{ y } n(U) - n(B) = n(B')$$

$$n(C) + n(C') = n(U) \text{ y } n(U) - n(C') = n(C)$$

12.2 Unión

¿Qué se entiende por unión? y ¿cómo se efectúa esta operación?

Mediante el siguiente problema se entenderá el concepto de unión y el procedimiento.

Si $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$,

$A = \{b, c, d, e\}$ y

$B = \{d, e, f, g\}$; determinar el conjunto unión $A \cup B$.

En efecto, unión es unir y unir es juntar; por ejemplo, si dos grupos escolares se fusionaran se obtiene un nuevo conjunto mediante la unión de dos conjuntos. En el problema propuesto, al unir los conjuntos A y B , se obtiene otro nuevo conjunto,

pero con elementos repetidos, d y e . Para que el nuevo conjunto esté bien definido, se eliminan dos de los cuatro elementos d y e . Finalmente, el resultado es y se expresa como

$$A \cup B = \{b, c, d, e, f, g\}.$$

Este resultado es congruente con la definición de unión que se proporciona enseguida.

Para los conjuntos A y B que son subconjuntos del conjunto universo U , “ A unión B ” es el conjunto de elementos que están en A o en B o en ambos.

La unión se denota por $\cup$ y también se puede expresar como

$$A \cup B = \{\text{cualquiera que sea } x \text{ tal que } x \in A \text{ o } x \in B \text{ o en ambos}\}$$

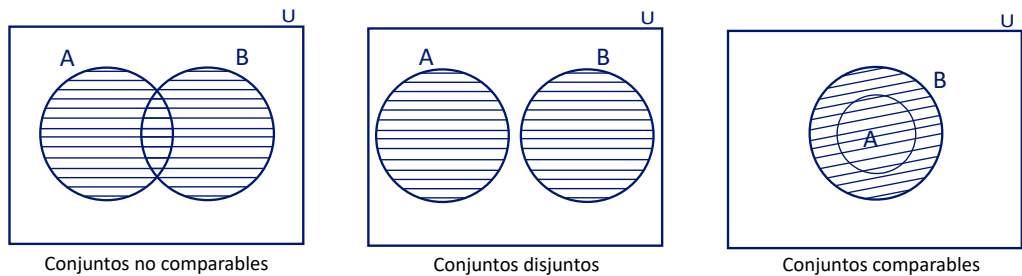
Simbólicamente, la definición anterior se puede escribir como

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in A \cap B\}$$

La definición también es válida para tres conjuntos, esto es, si U , A , B , y C , entonces $A \cup B \cup C = \{x \in U / x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in C \text{ ó } x \in A \cap B \cap C\}$ donde U es el conjunto universo. Desde luego, la operación unión se puede y tiene sentido generalizarla.

Así mismo, esta definición es válida, entre otras, para los conjuntos no comparables, disjuntos y comparables.

Gráficamente, la unión para estos conjuntos se muestra en diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



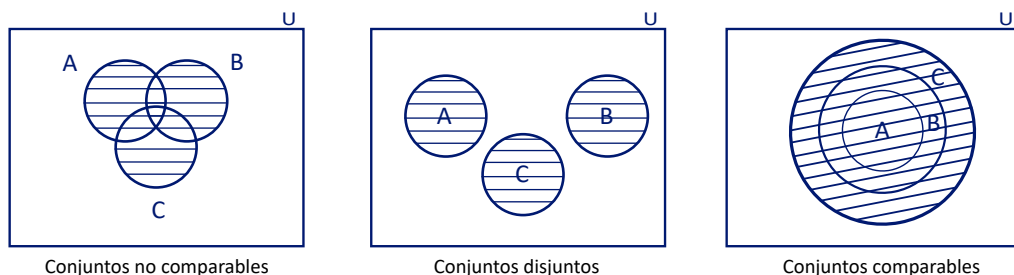


Diagrama de Venn para los conjuntos A, B, C y U.

Para cada tipo de conjuntos, la definición simbólica de unión se va ajustando. Esto es, sean A y B dos conjuntos no comparables, entonces $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$ implica que $A \cup B = \{x \in U / x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in A \cap B\}$; del mismo modo, sean A y B dos conjuntos disjuntos, entonces $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$ implica que $A \cup B = \{x \in U / x \in A \text{ o } x \in B\}$; finalmente, sean A y B dos conjuntos comparables, entonces $A \subset B$ implica que $A \cup B = \{x \in U / x \in B\}$; ó $B \subset A$ implica que $A \cup B = \{x \in U / x \in A\}$.

Los problemas que se proponen a continuación te pueden servir para apropiarte del concepto de unión y del procedimiento para obtener el nuevo conjunto, y, de paso, desarrollar capacidades.

En cada problema, distingue los tipos de conjuntos y encuentra el nuevo conjunto.

- a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $A \cup B$.
- b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A \cup B$.
- c) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $A \cup B$.
- d) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f\}$, $C = \{g, h, i\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$; $A \cup B \cup C$.
- e) $A = \{a, b, c, d, e, j, k, l\}$, $B = \{c, d, e, f, g, h, i\}$, $C = \{e, j, k, l, h, i, m, n\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, \tilde{n}, o\}$; $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ y $A \cup B \cup C$.
- f) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n\}$; $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ y $A \cup B \cup C$.
- g) $A = \{\text{todos los enteros pares positivos}\}$, $B = \{\text{todos los enteros impares positivos}\}$ y $U = \{\text{todos los enteros}\}$; $A \cup B$.

- h) $A = \{\text{blanco, azul, verde}\}$, $B = \{\text{verde, rojo, amarillo}\}$ y $U = \{\text{blanco, azul, verde, rojo, amarillo, café}\}$; $A \cup B$.
- i) $A = \{\text{blanco, azul, verde}\}$, $B = \{\text{rojo, amarillo}\}$ y $U = \{\text{blanco, azul, verde, rojo, amarillo, café}\}$; $A \cup B$.
- j) $A = \{\text{blanco, amarillo}\}$, $B = \{\text{blanco, amarillo, azul, rojo}\}$ y $U = \{\text{blanco, amarillo, azul, rojo, verde, café}\}$; $A \cup B$.
- k) $A = \{\text{todos los números irracionales}\}$, $B = \{\text{todos los números racionales}\}$ y $U = \{x / -\infty < x < \infty\}$; $A \cup B$.
- l) $A = \{1, 2, 3, \dots\}$, $B = \{0\}$ y $U = \{\text{todos los números enteros}\}$; $A \cup B$.
- m) $A = \{\text{todos los elementos químicos de la familia IA}\}$, $B = \{\text{todos los elementos químicos de la familia IIA}\}$ y $U = \{\text{todos los elementos químicos}\}$; $A \cup B$.

Las propiedades de la unión resultan de la definición de ésta y de la relación de la unión con otras operaciones, conjunto vacío y universo.

Las propiedades son proposiciones que deben demostrarse. En efecto, cada proposición propuesta se demostrará usando la definición de unión y por medio del método de numerar o marcar partes.

La unión es conmutativa, la cual se escribe como

$$A \cup B = B \cup A.$$

Por definición

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \cup B\}, \text{ entonces}$$

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B \text{ o } x \in A \cap B\}.$$

Si ahora A y B se intercambian, el conjunto sigue siendo el mismo, entonces $A \cup B = \{x / x \in B \text{ o } x \in A \text{ o } x \in A \cap B\}$,

$$A \cup B = x \in B \cup A.$$

Luego, $A \cup B \subset B \cup A$ (1)

De igual manera, por definición

$$B \cup A = \{x/x \in B \cup A\}, \text{ entonces}$$

$$B \cup A = \{x/x \in B \text{ ó } x \in A \text{ ó } x \in B \cap A\}.$$

Después de intercambiar los conjuntos A y B , el conjunto no varía, luego $B \cup A = \{x/x \in A \text{ ó } x \in B \text{ ó } x \in B \cap A\} = x \in A \cup B$.

Consecuentemente, $B \cup A \subset A \cup B$. (2)

Finalmente, de (1) y (2)

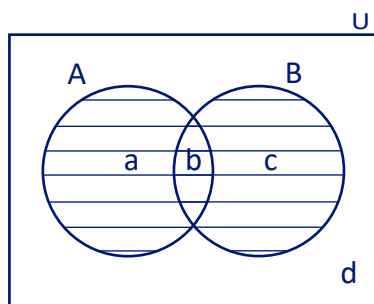
$$A \cup B = B \cup A \text{ implica } A \cup B \subset B \cup A \text{ y } B \cup A \subset A \cup B \text{ y}$$

$$A \cup B \subset B \cup A \text{ y } B \cup A \subset A \cup B \text{ implica } A \cup B = B \cup A. \text{ Entonces}$$

$$A \cup B = B \cup A \Leftrightarrow A \cup B \subset B \cup A \text{ y } B \cup A \subset A \cup B.$$

En consecuencia, esto significa que la unión es conmutativa. Por extensión, también $A \cup B \cup C = C \cup B \cup A$ es conmutativa como lo es $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_i$.

Por el método de numerar o marcar partes, se llega a la misma conclusión. Para tal efecto, los conjuntos A , B y U , y las marcas o números, se representan en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



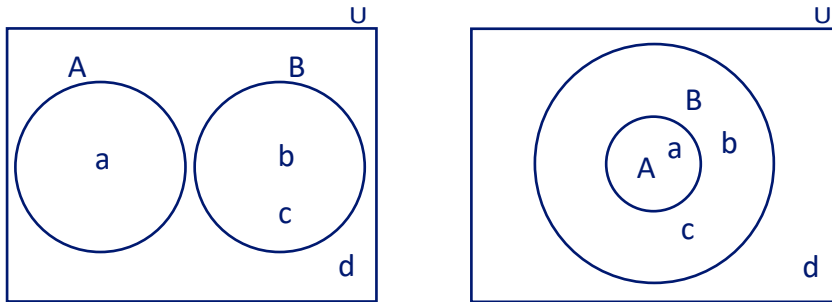
De acuerdo con el segundo diagrama $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$

Por definición de unión

$$A \cup B = \{a, b, c\} \text{ y } B \cup A = \{a, b, c\}.$$

En consecuencia, $A \cup B = B \cup A$.

Intenta lo mismo con los conjuntos disjuntos y comparables, cuyos diagramas de Venn están en la figura siguiente.



Sea A un conjunto y el conjunto universo, entonces $U \cup A = U$ ó $A \cup U = U$. Esta proposición asegura que el conjunto universo es igual a la unión de cualquier conjunto subconjunto del universo con el conjunto universo.

Por definición

$$A \cup U = \{x/x \in A \cup U\}, \text{ entonces}$$

$$A \cup U = \{x/x \in A \text{ o } x \in U\}.$$

Como $A \subset U$, entonces $A \cup U = \{x/x \in U\} = x \in U$.

Luego, $A \cup U \subset U$ (1)

Del mismo modo, por definición $U = \{x/x \in U\}$, entonces

$$U = \{x/x \in U \text{ o } x \in A, A \subset U\} = \{x/x \in U \cup A\},$$

$$= x \in U \cup A.$$

En consecuencia, $U \subset U \cup A$.

(2)

Finalmente, de (1) y (2)

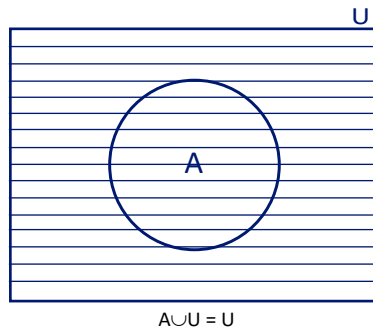
$A \cup U = U$ implica $A \cup U \subset U$ y $U \subset U \cup A$,

$A \cup U \subset U$ y $U \subset U \cup A \Rightarrow A \cup U = U$. Por lo tanto,

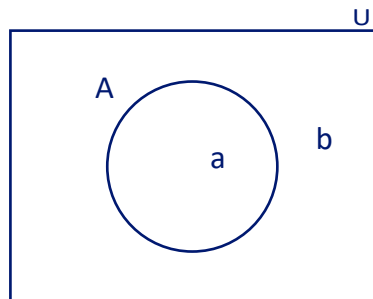
$A \cup U = U \Leftrightarrow A \cup U \subset U$ y $U \subset U \cup A$.

Por consiguiente, esto significa que $A \cup U = U$ es verdadero.

La conclusión se muestra en un diagrama de Venn. Ver la siguiente figura:



Para ilustrar el método de marcar con letras o numerar partes y llegar a la misma conclusión, tanto los conjuntos A y U como éstas, se muestran en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



De acuerdo con este diagrama,

$$A = \{a\} \text{ y } U = \{a, b\}.$$

Por definición de unión, $A \cup U = \{a, b\}$ y $U = \{a, b\}$.

En consecuencia, $A \cup U = U$.

Si $A \subset U$, entonces $A \cup A = A$. Esta proposición afirma que todo conjunto unido consigo mismo es el mismo conjunto. A esta propiedad se le llama idempotencia.

Por definición

$$A \cup A = \{x/x \in A \cup A\}, \text{ entonces}$$

$$A \cup A = \{x/x \in A \text{ o } x \in A\}.$$

Como es el mismo conjunto, entonces

$$A \cup A = \{x/x \in A\} = x \in A.$$

Luego, $A \cup A \subset A$.

(1)

De la misma manera, por definición

$$A = \{x/x \in A\}, \text{ entonces}$$

$$A = \{x/x \in A \text{ o } x \in A\} = x \in A \cup A.$$

En consecuencia, $A \subset A \cup A$.

(2)

Finalmente, de (1) y (2),

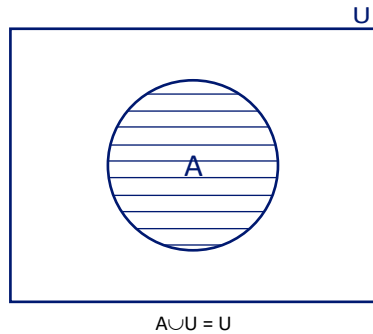
$$A \cup A = A \text{ implica } A \cup A \subset A \text{ y } A \subset A \cup A \text{ y}$$

$$A \cup A \subset A \text{ y } A \subset A \cup A \text{ implica } A = A \cup A. \text{ Entonces}$$

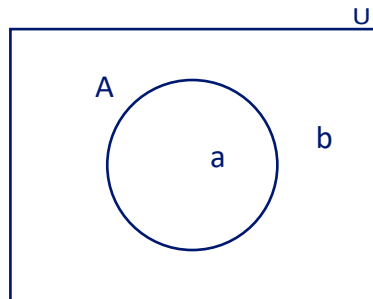
$$A \cup A = A \Leftrightarrow A \cup A \subset A \text{ y } A \subset A \cup A.$$

Por lo tanto, la proposición es verdadera.

Esta conclusión se muestra en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Ahora, para afirmar que la proposición dada es falsa o verdadera, los conjuntos A y U , así como las partes marcadas o numeradas, se representan en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Este diagrama muestra que $A = \{a\}$ y $U = \{a, b\}$.

Por definición $A \cup A = \{a\}$, $A = \{a\}$.

Por consiguiente, $A \cup A = A$.

Puede observarse que la conclusión es igual a la ya obtenida.

Sean A , A' y U tres conjuntos, entonces $A \cup A' = U$. Esta proposición asegura que la unión de cualquier conjunto con su complemento es el conjunto universo.

Por definición $A \cup A' = \{x/x \in A \cup A'\}$, entonces

$$A \cup A' = \{x/x \in A \text{ o } x \in A'\}.$$

Como $A \subset U$ y $A' \subset U$, entonces $A \cup A' = x \in U$.

Luego, $A \cup A' \subset U$. (1)

De la misma manera, por definición

$U = \{x/x \in U$, entonces

$$U = \{x/x \in A \text{ o } x \in A'\},$$

$$= x \in A \cup A'.$$

En consecuencia, $U \subseteq A \cup A'$. (2)

Finalmente, de (1) y (2),

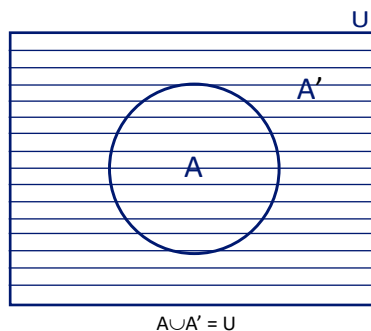
$$A \cup A' = U \Rightarrow A \cup A' \subset U \text{ y } U \subset A \cup A' \text{ y}$$

$A \cup A' \subset U \text{ y } U \subset A \cup A'$ implica $U = A \cup A'$. Entonces

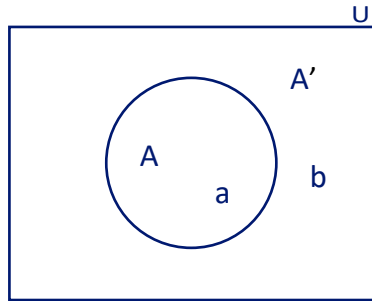
$$A \cup A' = U \Leftrightarrow A \cup A' \subset U \text{ y } U \subset A \cup A'.$$

Por lo tanto, la proposición propuesta es verdadera.

Esta conclusión, se ilustra en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



En un diagrama de Venn se muestran gráficamente los conjuntos A , A' , U y las partes marcadas en letras o números para mostrar que la proposición es falsa o verdadera. Ver la figura siguiente:



Este diagrama muestra que

$$A = \{a\} \text{ y } A' = \{b\}.$$

Por definición,

$$A \cup A' = \{a, b\} \text{ y } U = \{a, b\}$$

Por lo tanto $A \cup A' = U$.

Se puede decir que la conclusión es la misma.

Si A , B y U son conjuntos, entonces $(A \cup B)' = A' \cap B'$. Esta proposición asegura que el conjunto generado por el complemento de A unión B es igual al generado por la intersección de los complementos de A y B . Se hace notar que aún $A' \cap B'$ no se ha discutido.

Por definición $(A \cup B)' = \{x/x \in (A \cup B)'\}$, entonces

$$= \{x/x \in U \text{ y } x \notin (A \cup B)\} = \{x/x \notin A \text{ o } x \notin B\}.$$

Como $x \notin A$ o $x \notin B$, entonces $x \in A'$ interceptada con $x \in B'$ y $(A \cup B)' = \{x/x \in A' \text{ y } B'\}$ ó

$$(A \cup B)' = A' \cap B'.$$

En consecuencia $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$. (1)

De la misma manera y por definición,

$$A' \cap B' = \{x/x \in A' \cap B'\}, \text{ entonces}$$

$$A' \cap B' = \{x/x \in A' \text{ y } x \in B'\}.$$

Como $x \in A' \text{ y } x \in B', x \notin A \text{ y } x \notin B$, entonces $x \notin A \cup B$, de modo que

$$A' \cap B' = \{x/x \in (A \cup B)'\}.$$

Luego, $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$. (2)

En consecuencia, de (1) y (2),

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \text{ implica}$$

$$(A \cup B)' \subset A' \cap B' \text{ y } A' \cap B' \subset (A \cup B)' \text{ y}$$

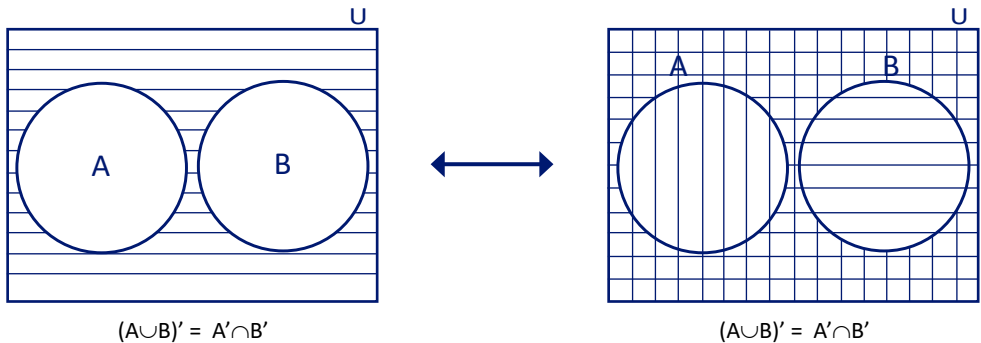
$$(A \cup B)' \subset A' \cap B' \text{ y } A' \cap B' \subset (A \cup B)' \text{ implica } A' \cap B' = (A \cup B)'.$$

Entonces

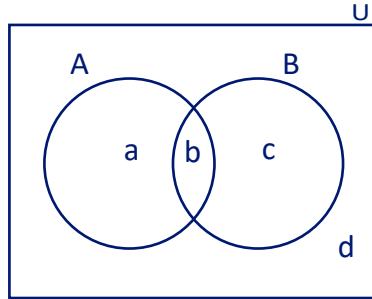
$$(A \cup B)' = A' \cap B' \Leftrightarrow (A \cup B)' \subset A' \cap B' \text{ y } A' \cap B' \subset (A \cup B)'.$$

Por lo tanto, la proposición propuesta es verdadera.

También esta conclusión puede observarse en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Para mostrar que la proposición dada es falsa o verdadera, se muestra gráficamente los conjuntos A , B , U y las partes marcadas por letras o números en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

De este diagrama $A = \{a, b\}$, y $B = \{b, c\}$ y $U = \{a, b, c, d\}$.

Por definición $A \cup B = \{a, b, c\}$, $(A \cup B)' = \{d\}$,

$$A' = \{c, d\} \text{ y } B' = \{a, d\};$$

$$A' \cap B' = \{d\}, \text{ por lo tanto, } \{d\} = \{d\}.$$

Esto muestra que la proposición dada es verdadera, dado que las dos conclusiones son coincidentes.

Sea A un conjunto cualquiera, entonces $A \cup \emptyset = A$. Esta proposición asegura que la unión de cualquier conjunto con el vacío es el mismo conjunto.

Por definición $A \cup \emptyset = \{x/x \in A \cup \emptyset\}$, entonces

$$A \cup \emptyset = \{x/x \in A \text{ o } x \in \emptyset\}.$$

Como $\emptyset$ carece de elementos, entonces

$$A \cup \emptyset = \{x/x \in A\} = x \in A.$$

Luego, $A \cup \emptyset \subset A$.

(1)

Del mismo modo, por definición

$A = \{x/x \in A\}$, entonces como

$\emptyset$ carece de elementos

$A = \{x/x \in A \text{ o } x \in \emptyset\}; A = x \in A \cup \emptyset.$

Por consiguiente, $A \subset A \cup \emptyset.$ (2)

Finalmente, de (1) y (2)

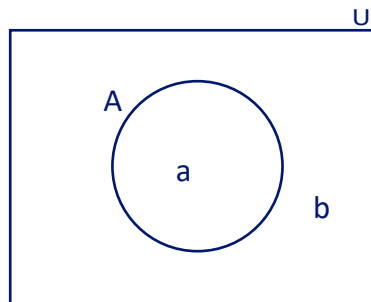
$A \cup \emptyset = A$ implica $A \cup \emptyset \subset A$ y $A \subset A \cup \emptyset,$

$A \cup \emptyset \subset A$ y $A \subset A \cup \emptyset \Rightarrow A = A \cup \emptyset.$ Entonces

$A \cup \emptyset = A \Leftrightarrow A \cup \emptyset \subset A$ y $A \subset A \cup \emptyset.$

Esto muestra que la proposición dada es verdadera.

Para mostrar que la proposición dada es verdadera en un diagrama de Venn se representan gráficamente los conjuntos A , U y las partes marcadas por letras o números. Ver la figura siguiente:



El diagrama muestra que $A = \{a\}$ y $U = \{a, b\}.$

Por definición $A \cup \emptyset = \{a\}$ y $A = \{a\}.$

Consecuentemente, $\{a\} = \{a\}.$

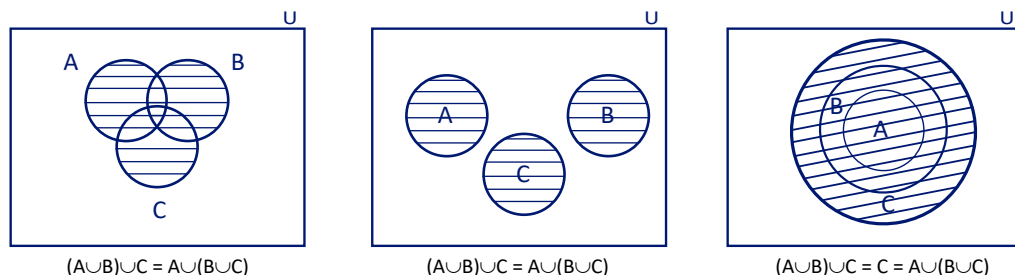
La proposición $A \cup B = \emptyset$ para que sea cierto se requiere que $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$.

La unión es asociativa, es decir, si A , B , C y U son conjuntos. Entonces $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Esta proposición asegura que el conjunto generado no depende de cómo se agrupen los conjuntos para efectuar la unión de éstos, por lo que se puede escribir como $(A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$.

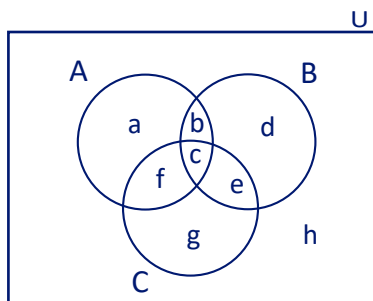
De la definición de unión de los conjuntos A , B y C , se sigue que los conjuntos $A \cup (B \cup C)$ y $(A \cup B) \cup C$ son iguales, esto es

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Lo anterior se aprecia mejor en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



También se llega a la conclusión anterior si los conjuntos A , B , C , U y las partes marcadas por letras o números se representan gráficamente en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Del diagrama $A = \{a, b, c, f\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ y $C = \{c, e, f, g\}$.

Por definición $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$$(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g\}; \quad (1)$$

$$B \cup C = \{b, c, d, e, f, g\},$$

$$A \cup (B \cup C) = \{a, b, c, d, e, f, g\}. \quad (2)$$

Finalmente, de (1) y (2),

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Comparando las conclusiones, se encuentra que son iguales.

Intenta resolver cada uno de los problemas que a continuación se proponen. Esto te puede servir para incorporar conocimientos y reafirmar conceptos relacionados con unión y sus propiedades.

- Utiliza conjuntos comparables y disjuntos para verificar que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- ¿Qué diferencia existe entre $(A \cup B)'$ y $U - A \cup B$?
- Si $A \subset U$, $B \subset U$ y $A \subset B$; ¿a qué es igual $A \cup B$?
- ¿Es cierto o falso $A \cup A \cup A \cup A = A$? ¿por qué?
- ¿Qué concluyes si $A \subset U$?
- Si $A \subset U$, $\emptyset \subset U$ y $\emptyset \subset A$; ¿a qué es igual $A \cup \emptyset$ y $\emptyset \cup U$?
- Sean $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $B = \{d, e, f, g, h, i\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$; determinar y representar los conjuntos siguientes.

1) $A \cup B$

2) $A \cup A$

3) $B \cup B$

4) $A \cup U$

$$5) U \cup \emptyset$$

$$6) U \cup U$$

$$7) A \cup B \cup U$$

$$8) A \cup A \cup \emptyset$$

$$9) (A \cup B)'$$

$$10) A' \cup A'$$

$$11) A' \cup B'$$

$$12) A \cup B \cup U$$

12.3 Intersección

¿En qué consiste el concepto de intersección? y ¿Cómo se efectúa esta operación?

La pregunta ¿existe intersección entre los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; nos puede conducir al concepto y el procedimiento?

Antes de examinar el problema, se puede decir que la idea de intersección la podemos encontrar, por ejemplo, en el punto común a dos líneas que se cortan, en los puntos comunes a dos líneas, a dos superficies o a dos sólidos que se cortan recíprocamente. Esta idea también la podemos hallar en la fusión de dos grupos de números o sociales, ya que en los primeros podría haber números que pertenecen a ambos y en los segundos los individuos. Como puede percibirse, la idea de compartir por dos o más está en el fondo y es ésta la que se utilizará para analizar el problema y llegar al concepto y procedimiento. En efecto, los conjuntos A y B comparten los elementos c y d ; A y U los elementos a, b, c y d ; y B y U los elementos c, d, e y f .

Por lo tanto, $\{c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$ y $\{c, d, e, f\}$; son los conjuntos producto de la operación intersección.

Este que resulta debe ser congruente con la definición de intersección que se proporciona a continuación.

Sean A , B y U tres conjuntos definidos, la intersección de los conjuntos A y B subconjuntos del conjunto universo U , se denota por $\cap$ y se define como el conjunto de los elementos del U que están en A y en B .

Simbólicamente, sean A y B dos subconjuntos del conjunto universo U . Entonces

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \text{ y } x \in B\} \text{ ó}$$

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Esta definición también se puede expresar como

$$A \cap B = \{\text{cualquiera que sea } x \text{ tal que } x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Luego de aplicar esta definición a los conjuntos no comparables, disjuntos y comparables, respectivamente, se obtiene que:

Si A y B son conjuntos tal que $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Entonces

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \text{ y } x \in B\};$$

si A y B son conjuntos tal que $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Entonces

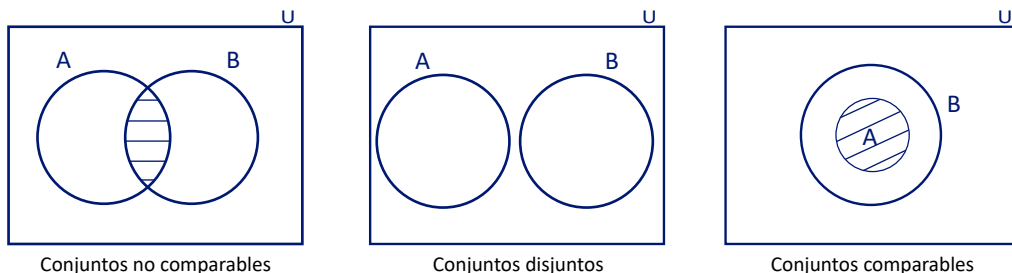
$$A \cap B = \{x \in U / x \in \emptyset\} = \emptyset; \text{ y}$$

si A y B son conjuntos tal que $A \subset B$ ó $B \subset A$. Entonces

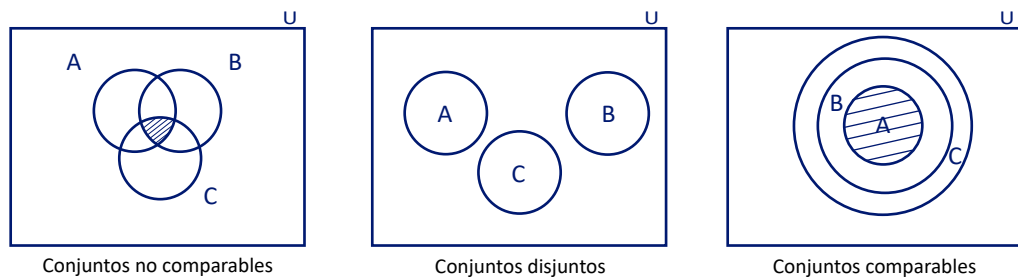
$$A \cap B = \{x \in U / x \in A\} \text{ ó}$$

$$A \cap B = \{x \in U / x \in B\}.$$

Estas tres situaciones se muestran en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Gráficamente y según la definición, la intersección para los conjuntos A , B , C y U ; conforme sean no comparables, disjuntos o comparables, se muestran en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente



Continuamos con la pregunta ¿Cuántos conjuntos se pueden formar con los conjuntos

$$A = \{a, b, c, d, e, i, j, k\},$$

$$B = \{c, d, e, f, g, h, k\},$$

$$C = \{e, i, j, k, l, m, n\} \text{ y}$$

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, \tilde{n}, o, p\};$$

después de aplicar la definición de intersección a los conjuntos dados?

Luego de observar los conjuntos A , B y C , se concluye que U es el conjunto universo. Ahora, para determinar los nuevos conjuntos es necesario que con los conjuntos dados se formen grupos de tal manera que el primero tenga 2, el segundo 3 y el último 4; esto es,

$$A \cap B = \{c, d, e, k\}$$

$$A \cap C = \{e, i, j, k\}$$

$$A \cap U = \{a, b, c, d, e, i, j, k\}$$

$$B \cap C = \{e, k\}$$

$$B \cap U = \{c, d, e, f, g, h, k\}$$

$$C \cap U = \{e, i, j, k, l, m, n\}$$

$$A \cap B \cap C = \{e, k\}$$

$$A \cap B \cap U = \{c, d, e, k\}$$

$$B \cap C \cap U = \{e, k\}$$

$$A \cap C \cap U = \{e, i, j, k\}$$

$$A \cap B \cap C \cap U = \{e, k\}$$

De estos conjuntos, los únicos que no se repiten son $A \cap U$, $B \cap U$ y $C \cap U$.

Para que incorpores conocimientos, reafirmes conceptos relacionados con intersección y, de paso, desarrolles capacidades, es preciso que resuelvas los siguientes problemas.

Después de distinguir el conjunto universo y clasificar los conjuntos, resuelve los siguientes problemas.

- Sea $A = \{2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$ y $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; calcular $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ y $A \cap B \cap C$.
- Si $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e, f, g\}$, $C = \{h, i, j\}$ y $D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$; calcular $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap D$, $B \cap D$ y $C \cap D$; $A \cap B \cap C$, $A \cap B \cap D$ y $B \cap C \cap D$.
- Sean $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{a, b, c, d, e\}$ y $D = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; hallar $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap D$; $A \cap B \cap C$, $A \cap B \cap C \cap D$.
- Si $A = \{a, b, c, d, e, f, l, m, n\}$, $B = \{d, e, f, g, h, i, j, k\}$, $C = \{f, i, j, k, l, m, n, ñ, o, p\}$ y $D = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, ñ, o, p, q, r\}$; calcular $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cap D$, $B \cap C$, $B \cap D$ y $C \cap D$; $A \cap B \cap C$, $A \cap B \cap D$, $B \cap C \cap D$, $A \cap B \cap U$.
- Sea $A = \{\text{todos los enteros pares positivos}\}$, $B = \{\text{todos los enteros impares positivos}\}$ y $C = \{\text{todos los enteros}\}$; calcular $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.
- Si $A = \{\text{todos los números irracionales}\}$, $B = \{\text{todos los números racionales}\}$ y $C = \{x / -\infty < x < \infty\}$; calcular $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.

Las propiedades de la operación de intersección son consecuencias de la definición de ésta y de la relación que se establece con otras operaciones de los conjuntos; así como con los conjuntos vacío y universo.

Cada propiedad se verificará para poder afirmar que tal proposición es falsa o verdadera.

Sean A y B subconjuntos del conjunto universo U , entonces $A \cap B = B \cap A$. Esta proposición asegura que el nuevo conjunto no depende del orden de cómo se efectúe la operación.

Por definición

$$A \cap B = \{x/x \in A \cap B\}, \text{ entonces}$$

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Como el conjunto no se altera al intercambiar A y B , entonces,

$$A \cap B = \{x/x \in B \text{ y } x \in A\} = x \in B \cap A\}.$$

$$\text{Luego, } A \cap B \subset B \cap A. \quad (1)$$

De igual manera, por definición $B \cap A = \{x/x \in B \cap A\}$, entonces

$$B \cap A = \{x/x \in B \text{ y } x \in A\}.$$

Como el conjunto es el mismo si se intercambian A y B , entonces $B \cap A = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\} = x \in A \cap B\}$.

$$\text{En consecuencia } B \cap A \subset A \cap B. \quad (2)$$

Finalmente, de (1) y (2),

$$A \cap B = B \cap A \text{ implica } A \cap B \subset B \cap A \text{ y } B \cap A \subset A \cap B,$$

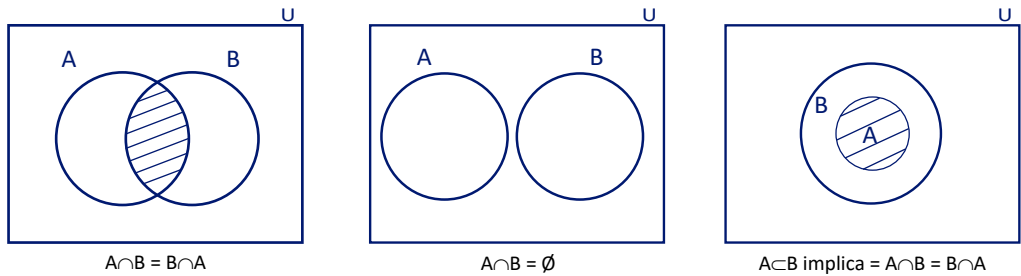
$$A \cap B \subset B \cap A \text{ y } B \cap A \subset A \cap B \Rightarrow B \cap A = A \cap B. \text{ Entonces}$$

$$A \cap B = B \cap A \Leftrightarrow A \cap B \subset B \cap A \text{ y } B \cap A \subset A \cap B.$$

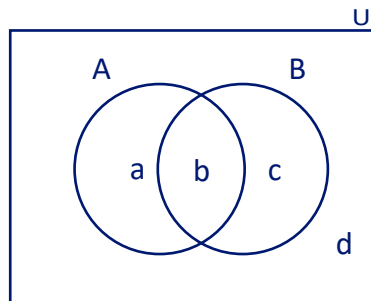
Consecuentemente, la operación intersección es conmutativa.

Por extensión, $A \cap B \cap C = C \cap B \cap A$ también lo es. Esta propiedad se puede generalizar.

En un diagrama de Venn puede observarse que $A \cap B \subset B \cap A$ y que $B \cap A \subset A \cap B$, lo cual significa que $A \cap B = B \cap A$. Ver la figura siguiente:



Se llega a la misma conclusión si A , B , U y las regiones marcadas con letras o números se representan en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Del diagrama $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$.

Por definición $A \cap B = \{b\}$ y $B \cap A = \{b\}$.

Por lo tanto, $A \cap B = B \cap A$.

Sean A y B subconjuntos del conjunto universo U tal que $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$, y no tienen elementos en común, entonces $A \cap B = \emptyset$

Esta proposición asegura que la intersección entre dos conjuntos disjuntos es el vacío.

Por definición $A \cap B = \{x/x \in A \cap B\}$, entonces

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Como A y B no tienen elementos en común, entonces $A \cap B = \emptyset$.

Si A es un subconjunto de U , entonces $A \cap U = A$. Esta proposición asegura que el conjunto A es el resultado de la intersección de A y U .

Por definición $A \cap U = \{x/x \in A \cap U\}$, entonces

$$A \cap U = \{x/x \in A \text{ y } x \in U\}.$$

Como $A \subset U \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in U$, entonces $A \cap U = A$.

Luego, $A \cap U \subset A$. (1)

Como $A \subset U$ implica que $A = A \cap U$.

Luego, $A \subset A \cap U$. (2)

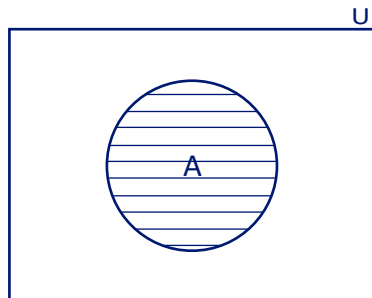
Finalmente, de (1) y (2), $A \cap U = A$ implica $A \cap U \subset A$ y $A \subset A \cap U$ y $A \cap U \subset A$ y $A \subset A \cap U$ implica $A = A \cap U$.

Entonces

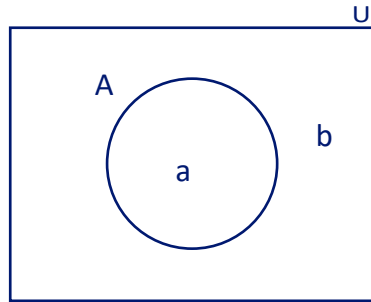
$$A \cap U = A \Leftrightarrow A \cap U \subset A \text{ y } A \subset A \cap U.$$

Consecuentemente, esto significa que la proposición propuesta es verdadera.

Esta conclusión se ilustra en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Para comprobar esta proposición, en un diagrama de Venn se representan los conjuntos A , U y las regiones marcadas con letra o números. Ver la figura siguiente:



Del diagrama $A = \{a\}$ y $U = \{a, b\}$.

Por definición $A \cap U = \{a\}$ y $A = \{a\}$; por lo tanto, $A \cap U = A$.

Sea A un subconjunto de U y A' el complemento, entonces $A \cap A' = \emptyset$. Esta proposición asegura que el $\emptyset$ es el resultado de la intersección de A y A' .

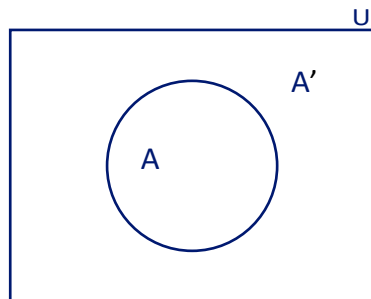
Por definición $A \cap A' = \{x \in U / x \in A \cap A'\}$, entonces

$$A \cap A' = \{x / x \in A \text{ y } x \in A'\}.$$

Como A y A' son disjuntos, entonces $A \cap A' = \emptyset$

De otra manera, si $A \not\subset A'$ y $A' \not\subset A$ y no tienen elementos en común, entonces $A \cap A' = \emptyset$. Por lo tanto, la proposición propuesta es cierta.

En un diagrama de Venn se observa claramente esta conclusión. Ver la siguiente figura:



Sean A y B subconjuntos del conjunto universo U , entonces $(A \cap B)' = A' \cup B'$. Esta proposición asegura que el conjunto generado por el complemento de la intersección de A y B es igual al generado por la unión del complemento de A o el complemento de B .

Por definición $(A \cap B)' = \{x/x \in (A \cap B)'\}$, entonces

$$(A \cap B)' = \{x/x \in U \text{ y } x \notin A \cap B\} = \{x/x \notin A \text{ y } x \notin B\}.$$

Como $x \notin A$ y $x \notin B$, entonces $x \in (A' \cup B')$ y

$$(A \cap B)' = x \in A' \cup B'.$$

En consecuencia, $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ (1)

Del mismo modo, por definición

$$A' \cup B' = \{x/x \in A' \cup B'\}, \text{ entonces}$$

$$A' \cup B' = \{x/x \in A' \text{ ó } x \in B'\}.$$

Como $x \in A'$ ó $x \in B'$, entonces $x \in (A \cap B)'$ y

$$A' \cup B' = x \in (A \cap B)'.$$

En consecuencia, $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$ (2)

Finalmente, de (1) y (2),

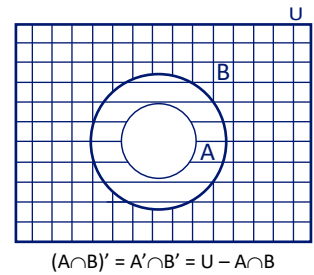
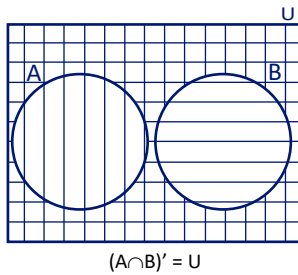
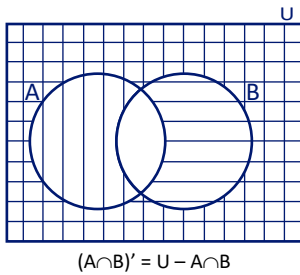
$(A \cap B)' = A' \cup B'$ implica que $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ y $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$ y $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ y $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$ implica que

$$A' \cup B' = (A \cap B)'. \text{ Entonces}$$

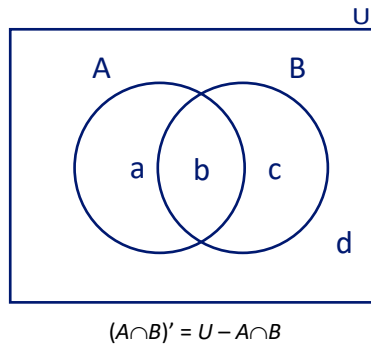
$$(A \cap B)' = A' \cup B' \Leftrightarrow (A \cap B)' \subset A' \cup B' \text{ y } A' \cup B' \subset (A \cap B)'.$$

Por lo tanto, la proposición propuesta es verdadera.

Este resultado se observa mejor en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Ahora, en un diagrama de Venn se representan los conjuntos A , B , U y las regiones marcadas con letras o números para comprobar la proposición propuesta. Ver la figura siguiente:



De la figura $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$ y $U = \{a, b, c, d\}$.

Por definición $A \cap B = \{b\}$, $(A \cap B)' = \{a, c, d\}$, $A' = \{c, d\}$, $B' = \{a, d\}$,

$$A' \cup B' = \{a, c, d\}.$$

Por lo tanto, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Sea A subconjunto de U , entonces $A \cap A = A$. Esta proposición asegura que el conjunto A es igual a la intersección de A y A , o bien, a la inversa; a esta propiedad se le llama idempotencia.

Por definición $A \cap A = \{x/x \in A \cap A\}$, entonces

$$A \cap A = \{x/x \in A \text{ y } x \in A\}.$$

Como $A = A$, entonces $A \cap A = A$.

Luego, $A \cap A \subset A$. (1)

De igual manera, por definición $A = \{x/x \in A\}$, entonces

$$A = \{x/x \in A \text{ y } x \in A\}.$$

Como $A = A$, entonces $A = \{x/x \in A \cap A\}$.

En consecuencia, $A \subset A \cap A$. (2)

Finalmente, de (1) y (2),

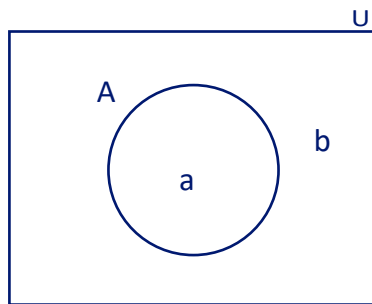
$A \cap A = A$ implica $A \cap A \subset A$ y $A \subset A \cap A$ y

$A \cap A \subset A$ y $A \subset A \cap A$ implica $A = A \cap A$. Entonces

$$A \cap A = A \Leftrightarrow A \cap A \subset A \text{ y } A \subset A \cap A.$$

Por lo tanto, $A \cap A = A$.

También, para comprobar que la proposición es verdadera o falsa, se representa A , U y las regiones marcadas con letras o números en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Del diagrama $A = \{a\}$ y $U = \{a, b\}$.

Por definición $A \cap A = \{a\}$ y $A = \{a\}$.

Por lo tanto, $A \cap A = A$.

Los siguientes problemas te servirán para incorporar conocimiento, reafirmar conceptos y propiedades de la intersección y, de paso, desarrollar capacidades.

Resuelve cada uno de los siguientes problemas.

- ¿Qué diferencia existe entre $A \cup A$ y $A \cap A$?
 - ¿Es cierto que $(A \cup B) \cap A' = B$? ¿por qué?
 - ¿Es cierto que $(A \cup B) \cup (A \cap B) = A$?
 - ¿ $(A \cap B) \cup B = B$?
 - ¿A qué es igual $(A \cup A) \cap (A \cap A) \cup U$?
 - ¿ $(A \cap B)' \cup (A' \cup B')$?
- g) Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g, h, i, j\}$, $C = \{h, i, j, k, l, m\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, \tilde{n}\}$; determinar los conjuntos siguientes, y su cardinalidad.
- $(A \cap B)'$
 - $(A \cap C)'$
 - $(B \cap C)'$
 - $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
 - $(A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B)$
 - $A \cap B \cap C$
 - $(A \cap B \cap C)'$
 - $A \cap U$
 - $B \cap U$
 - $C \cap U$
 - $A' \cap B' \cap C'$
 - $(\emptyset \cup U)'$
- h) ¿Qué condiciones deben cumplir los conjuntos A y B para que se cumpla las siguientes igualdades?
- $A \cap B = A$
 - $A \cup B = A$
 - $A \cup B = A \cap B$
 - $A \cap B = U$

e. $A \cup B = U$

k. $A \cup U = U$

f. $A \cup \emptyset = U$

l. $U \cup \emptyset = U$

g. $A \cap B = \emptyset$

m. $A \cap A' = U$

h. $A \cup B = \emptyset$

n. $A \cup A' = U$

i. $A \cap \emptyset = \emptyset$

o. $A' \cup U = U$

j. $A \cap U = U$

12.4 Diferencia

Con el propósito de establecer el concepto y el procedimiento de diferencia entre los conjuntos A y B , se formula la pregunta ¿cómo establecer la diferencia entre los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{c, d, e, f\}$?

Al observar los conjuntos dados, se nota que los elementos a y b de A , lo distinguen de B y que los elementos e y f de B , lo distinguen de A . Con esta idea del lenguaje común se generan los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{e, f\}$, los cuales corresponden a $A - B = \{a, b\}$ y $B - A = \{e, f\}$.

Esta idea es útil para definir la diferencia, es decir, la diferencia entre los subconjuntos A y B del conjunto universo U , se denota por $-$ y se define como el conjunto de los elementos que están en A pero que no están en B . Esto es,

$$A - B = \{x \in U / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Puede decirse que $A - B$ es el conjunto complemento de B con respecto a A y que $B - A$ es el conjunto complemento de A con respecto a B .

Los conjuntos que se obtienen después de aplicar esta definición a los conjuntos no comparables, disjuntos, comparables e iguales son respectivamente.

$$A - B = \{x/x \in (A - B)\}, \text{ entonces } A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\} \text{ ó}$$

$$B - A = \{x/x \in B \text{ y } x \notin A\},$$

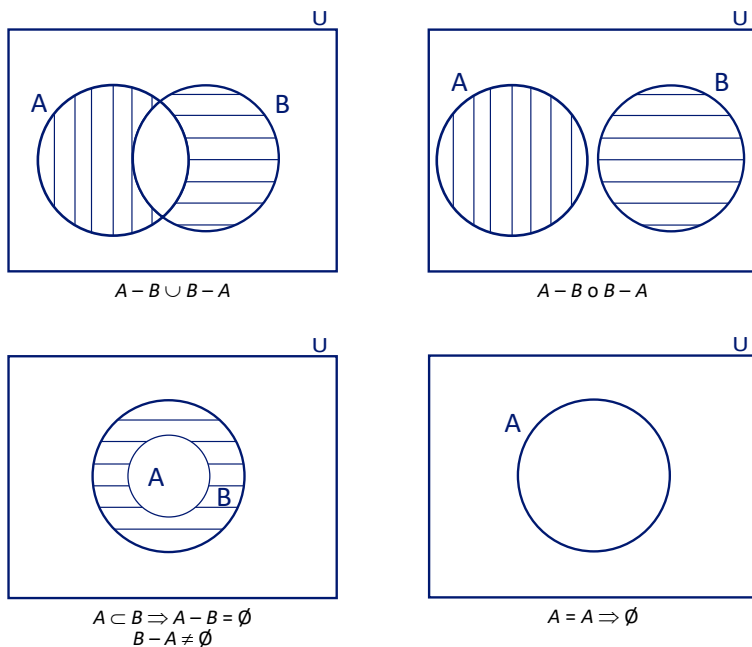
$$A - B = \{x/x \in (A - B)\}, \text{ entonces } A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\} = A$$

$$\text{ó } (B - A) = \{x/x \in B \text{ y } x \notin A\} = B \text{ y}$$

$$A - B = \{x/x \in (A - B)\}, \text{ entonces } A - B = \emptyset \text{ ó } B - A \neq \emptyset \text{ y}$$

$$A = B \Rightarrow A - B = \emptyset \text{ ó } B - A = \emptyset.$$

Estos resultados se muestran en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Los problemas siguientes te pueden servir para incorporar conocimientos, reafirmar el concepto de diferencia y, de paso, desarrollar capacidades.

Como la diferencia es binaria, en cada caso, haz la diferencia de $A - B$, $B - A$, $B - C$, $C - B$, $A - C$, y $C - A$; representar los conjuntos en un diagrama y calcular la cardinalidad.

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$;
- $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e, f, g, h, i\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$;
- $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$;

- d) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c\}$ y $U = \{a, b, c, d, e\}$;
- e) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, e, f\}$, $C = \{c, d, f, g\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$;
- f) $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$ y $U = \{a, b, c, d\}$;
- g) $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a, b, c\}$ y $U = \{a, b, c, d\}$;
- h) $A = \{\text{blanco, rojo}\}$, $B = \{\text{blanco, rojo, amarillo}\}$, $C = \{\text{blanco, rojo, amarillo, azul}\}$ y $U = \{\text{blanco, rojo, amarillo, azul, verde, café}\}$;
- i) $A = \{\text{blanco, rojo, amarillo, café}\}$, $B = \{\text{rojo, amarillo, azul, verde}\}$, $C = \{\text{café, amarillo, violeta, verde}\}$ y $U = \{\text{blanco, rojo, amarillo, café, azul, verde, violeta}\}$;
- j) $A = \{\text{blanco, rojo}\}$, $B = \{\text{amarillo, café}\}$, $C = \{\text{azul, verde}\}$ y $U = \{\text{blanco, rojo, amarillo, café, azul, verde}\}$.

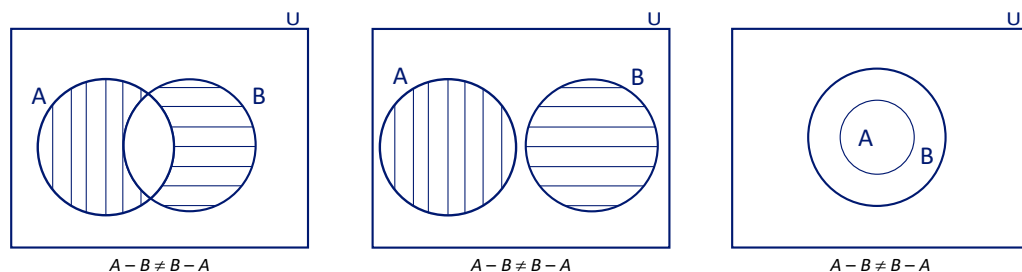
Las propiedades de la diferencia resultan de la definición de ésta y de la interacción con otras operaciones de conjuntos.

Cada una de estas proposiciones será verificada para poder asegurar que sean falsas o verdaderas.

Sean A y B subconjuntos del conjunto universo U ,

$$\text{entonces } A - B = B - A \Leftrightarrow A = B.$$

Esto significa que la diferencia, generalmente, no es conmutativa. Este resultado se ilustra en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Sea A y B subconjuntos del conjunto universo U , entonces

$$A - B = A \cap B'.$$

Por definición $A - B = \{x/x \in (A - B)\}$, entonces

$$A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

Como $x \notin B$, entonces $x \in B'$ y $A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B'\}$

$$A - B = \{x \in A \cap B'\}.$$

Luego, $A - B \subset A \cap B'$. (1)

Del mismo modo, por definición $A \cap B' = \{x/x \in A \text{ y } x \in B'\}$.

Como $x \in B'$, entonces $x \notin B$ y $A \cap B' = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\} = A - B$.

Luego $A \cap B' \subset A - B$. (2)

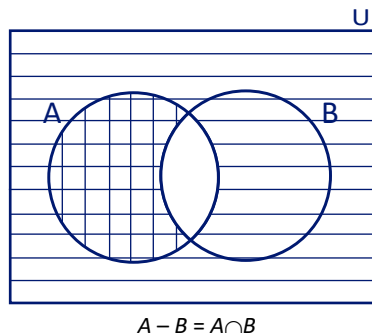
Finalmente, de (1) y (2),

$A - B = A \cap B'$ implica $A - B \subset A \cap B'$ y $A \cap B' \subset (A - B)$ y

$A - B \subset A \cap B'$ y $A \cap B' \subset (A - B)$. Entonces

$$A - B = A \cap B' \Leftrightarrow A - B \subset A \cap B' \text{ y } A \cap B' \subset (A - B).$$

En el diagrama de Venn se muestra este resultado con doble raya. Ver la figura siguiente:



Por lo tanto, $A - B = A \cap B'$ es una proposición verdadera.

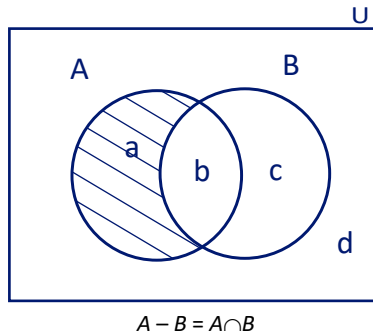
Otra forma de llegar a la misma conclusión.

Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$ y $U = \{a, b, c, d\}$; por definición

$$A - B = \{a\}, B' = \{a, d\} \text{ y } A \cap B' = \{a\}.$$

Por consiguiente, $A - B = A \cap B'$.

Esta conclusión se muestra en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Continuando, sean A y B subconjuntos de U , entonces

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Por definición

$$(A - B) \cup (B - A) = \{x/x \in (A - B) \cup (B - A)\}, \text{ entonces}$$

$$(A - B) \cup (B - A) = \{x/x \in (A - B) \text{ o } x \in (B - A)\}.$$

Por definición de diferencia,

$$(A - B) \cup (B - A) = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B \text{ o } x \in B \text{ y } x \notin A\}.$$

En cualquier caso

$$(A - B) \cup (B - A) = \{x/x \in (A \cup B) \text{ y } x \notin (A \cap B)\} = A \cup B - A \cap B.$$

$$\text{Luego, } (A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B - A \cap B) \quad (1)$$

Del mismo modo, por definición

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{x/x \in (A \cup B) - (A \cap B)\}, \text{ entonces}$$

$$A \cup B - (A \cap B) = \{x/x \in (A \cup B) \text{ y } x \notin A \cap B\}.$$

Ahora, o $x \in A$ y $x \notin B$, o bien $x \in B$ y $x \notin A$, entonces

$$A \cup B - (A \cap B) = \{x/x \in (A - B) \cup (B - A)\} = x \in (A - B) \cup (B - A).$$

$$\text{En consecuencia, } (A \cup B - A \cap B) \subset (A - B) \cup (B - A). \quad (2)$$

Finalmente, de (1) y (2),

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B - A \cap B) \text{ y}$$

$$(A \cup B - A \cap B) \subset (A - B) \cup (B - A) \text{ y}$$

$$(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B - A \cap B) \text{ y } (A \cup B - A \cap B) \subset (A - B) \cup (B - A) \Rightarrow \\ (A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B. \text{ Entonces}$$

$$(A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B \Leftrightarrow (A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B - A \cap B) \text{ y}$$

$$(A \cup B - A \cap B) \subset (A - B) \cup (B - A).$$

Por consiguiente, la proposición dada es verdadera, es decir todo elemento de $(A - B) \cup (B - A)$ es elemento de $A \cup B - A \cap B$ y a la inversa.

La proposición puede comprobarse de otra forma. Sea $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$ y $U = \{a, b, c, d\}$; por definición $A \cup B = \{a, b, c\}$ y $A \cap B = \{b\}$, entonces $A \cup B - A \cap B = \{a, c\}$. (1)

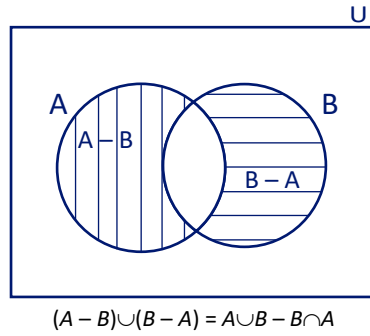
Por definición, $A - B = \{a\}$ y $B - A = \{c\}$, entonces

$$(A - B) \cup (B - A) = \{a, c\}. \quad (2)$$

Por lo tanto, de (1) y (2),

$$(A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B.$$

Este resultado se muestra en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Sean A y B subconjuntos de U , entonces $A - B = B' - A'$. Esta proposición asegura que el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B es igual al conjunto de los elementos de B complemento que no pertenecen al conjunto A complemento.

Por definición,

$$A - B = \{x/x \in (A - B)\}, \text{ entonces}$$

$$A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

Como $x \in A$ y $x \notin B$, entonces $x \notin A'$ y $x \in B'$, y

$$A - B = \{x/x \in B' \text{ y } x \notin A'\}$$

$$A - B = x \in (B' - A').$$

En consecuencia, $A - B \subset B' - A'$. (1)

Del mismo modo, por definición $B' - A' = \{x/x \in (B' - A')\}$, entonces

$$B' - A' = \{x/x \in B' \text{ y } x \notin A'\}.$$

Como $x \in B'$ y $x \notin A'$, entonces $x \in A$ y $x \notin B$ y

$$B' - A' = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\} = \{x/x \in (A - B)\} = x \in (A - B).$$

En consecuencia, $B' - A' \subset (A - B)$. (2)

Finalmente, de (1) y (2)

$$A - B = B' - A' \Rightarrow (A - B) \subset (B' - A') \text{ y } B' - A' \subset (A - B) \text{ y}$$

$$(A - B) \subset (B' - A') \text{ y } (B' - A') \subset (A - B) \Rightarrow B' - A' = A - B.$$

Entonces

$$A - B = B' - A' \Leftrightarrow (A - B) \subset (B' - A') \text{ y } (B' - A') \subset (A - B).$$

Por lo tanto, la proposición dada es verdadera, esto es todo elemento de $A - B$ es elemento de $B' - A'$ y a la inversa.

Otra forma de comprobar esta proposición. Sea $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$ y $U = \{a, b, c, d\}$; por definición

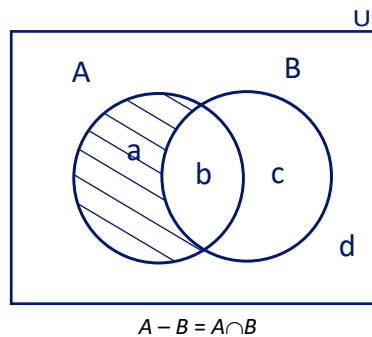
$$A - B = \{a\}, \quad (1)$$

$$A' = \{c, d\} \text{ y } B' = \{a, d\}, \text{ entonces}$$

$$B' - A' = \{a\}. \quad (2)$$

Por consiguiente, de (1) y (2), $A - B = B' - A'$.

Este resultado se aprecia mejor en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Ahora, sea A , B y C subconjuntos de U , entonces

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C).$$

Por definición $A - (B \cup C) = \{x/x \in A - (B \cup C)\}$, entonces

$$= \{x/x \in A \text{ y } x \notin (B \cup C)\}.$$

Como $x \notin (B \cup C)$, entonces $x \in (B \cup C)'$ y

$$A - (B \cup C) = \{x/x \in A \text{ y } x \in (B \cup C)'\}.$$

Como $x \in (B \cup C)'$, entonces $x \in B' \cap C'$ y

$$A - (B \cup C) = \{x/x \in A \text{ y } x \in B' \cap C'\}.$$

Por definición,

$$\begin{aligned} A - (B \cup C) &= \{x/x \in A \text{ y } x \in B' \text{ y } x \in C'\}, \\ &= \{x/x \in (A - B) \text{ y } x \in (A - C)\} = x \in (A - B) \cap (A - C). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$A - (B \cup C) \subset (A - B) \cap (A - C).$$

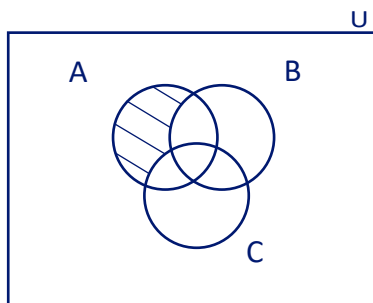
Recíprocamente se llega a lo mismo.

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} A - (B \cup C) &= (A - B) \cap (A - C) \Leftrightarrow (A - (B \cup C)) \subset (A - B) \cap (A - C), \text{ y} \\ &(A - B) \cap (A - C) \subset (A - (B \cup C)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la proposición dada es verdadera, es decir, todo elemento de $A - (B \cup C)$ es elemento de $(A - B) \cap (A - C)$ y a la inversa.

Este resultado se muestra en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Otra forma de comprobar la proposición. Sea $A = \{a, b, c, e\}$, $B = \{b, c, d, f\}$, $C = \{c, e, f, g\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

Por definición,

$B \cup C = \{b, c, d, e, f, g\}$, entonces

$$A - B \cup C = \{a\}. \quad (1)$$

Por definición,

$A - B = \{a, e\}$ y $A - C = \{a, b\}$, entonces

$$(A - B) \cap (A - C) = \{a\}. \quad (2)$$

En consecuencia, de (1) y (2),

$$A - B \cup C = (A - B) \cap (A - C)$$

Justo lo que se deseaba comprobar.

Problemas

Los problemas que siguen te pueden servir para incorporar conocimientos, reafirmar la operación de diferencia y sus propiedades y, de paso, desarrollar o reafirmar capacidades.

Resuelve los problemas siguientes.

- a) Comprobar que $B - A = A' \cap B$
- b) ¿ $B - (A \cup C) = (B - A) \cap (B - C)$?
- c) ¿ $A - B = A \cap B' - A' \cap B$? donde A y B son conjuntos disjuntos
- d) ¿ $A - B \cap A = A \cap B'$?
- e) Sea $A = \{a, b\}$ y $U = \{a, b, c, d\}$, ¿a qué es igual $A - A'$?
- f) Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; hallar
 - a. $U - A \cup B$,
 - b. $U - A' \cap B'$,
 - c. $A \cup B - B$ y
 - d. $B - B' \cap A$.
- g) Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f\}$; hallar
 - a. $U - A \cup B$,
 - b. $A \cap B' \cup (B - A)$,
 - c. $(A - B) \cup (A \cap B)$,
 - d. $(B - A) \cup (A \cap B)$,
 - e. $(B - A) \cup (A' \cap B')$ y
 - f. $(A - B) \cup (A \cap B)$.

h) Sean $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, e, f\}$, $C = \{c, d, f, g\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$; hallar

a. $A \cap B - A \cap B \cap C$,

b. $A \cap C - A \cap B \cap C$,

c. $B \cap C - A \cap B \cap C$,

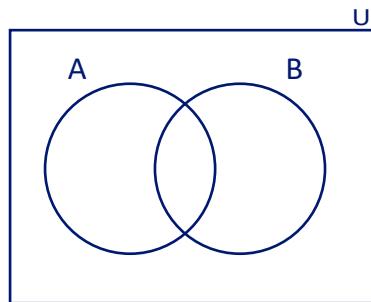
d. $A \cup B - B \cup C$,

e. $A \cap B' \cap C' - A' \cap B \cap C'$ y

f. $A \cap B - A \cap C$.

Relaciones, combinaciones de operaciones y cálculo de elementos

Si se combinan las operaciones de complemento, unión, intersección y diferencia, se pueden obtener otros conjuntos y otras relaciones. Por ejemplo, si A y B son dos conjuntos no comparables con elementos en común, se puede escribir los conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cup B)'$, $A - B$, $B - A$, $A \cap B'$ y $A' \cap B$; y establecer algunas relaciones como $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, $A - B = A \cap B'$, $B - A = A' \cap B$, $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $A \cup B \subset U$, $A \cap B \subset U$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$, $(A - B) \cap (A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset$, $A \cap B' \cup (A \cap B) = A$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$, y $A \cup (A \cap B) = A$, por citar algunas. Ver la figura:



Conjuntos no comparables

Para conjuntos disjuntos y comparables, ¿Qué operaciones y qué relaciones podrías establecer?

Sean $U = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$; determinar los conjuntos y observa si las relaciones propuestas se cumplen.

- A'
- $A' \cap B$
- $(B - A)'$
- $A' \cup B$

e) $U' \cup \emptyset'$

f) $(B - A)' \cup (A - B)'$

g) $A \cap (A \cup B) \subseteq A$

h) $(A - B) \cup (B - A) \subset A \cup B$

i) $(A' \cap B) \cup (A \cap B) = B$

j) $U' \cup \emptyset = U$

Por definición y de acuerdo con los conjuntos dados,

a) $A' = \{c, d\}$,

b) $A' \cap B = \{c\}$,

c) $(B - A)' = \{a, b, d\}$,

d) $A' \cup B = \{b, c, d\}$,

e) $U' \cup \emptyset' = U$,

f) $(B - A)' \cup (A - B)' = \{a, b, c, d\}$ y

g) $A \cap (A \cup B) \subseteq A$.

Por definición, $A = \{a, b\}$ y $A \cup B = \{a, b, c\}$, entonces

$$A \cap (A \cup B) = \{a, b\}.$$

Por lo tanto, $A \cap (A \cup B) \subseteq A$. Esto significa que la relación se cumple.

h) $(A - B) \cup (B - A) \subset A \cup B$.

Por definición $A = \{a, b\}$, $A - B = \{a\}$ y $B - A = \{c\}$, entonces

$$(A - B) \cup (B - A) = \{a, c\}.$$

Por lo tanto, $(A - B) \cup (B - A) \subset A \cup B$. La relación propuesta se cumple.

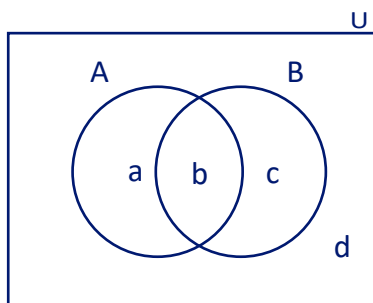
$$i) (A' \cap B) \cup (A \cap B) = B.$$

Por definición $A' = \{c, d\}$, $A' \cap B = \{c\}$ y $A \cap B = \{b\}$, entonces

$$(A' \cap B) \cup (A \cap B) = \{b, c\}.$$

Por lo tanto, la proposición propuesta se cumple.

Estos resultados se muestran en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Los problemas siguientes te pueden servir para incorporar conocimiento, reafirmar las operaciones de complemento, unión, intersección y diferencia, y, de paso, fortalecer y desarrollar capacidades.

1. Sean $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ y $U = \{a, b, c\}$; determine los conjuntos siguientes y comprobar las relaciones.

a. B'

f. $(B - A)' \cap (A - B)'$

b. $A \cap B'$

g. $B \cap (A \cup B) = B$

c. $(A - B)'$

h. $(A - B) \subset A$

d. $A \cup B'$

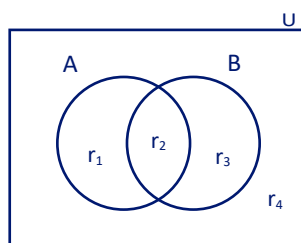
i. $(A' \cap B) \cup (A \cap B') = A \cup B$

e. $U \cap \emptyset'$

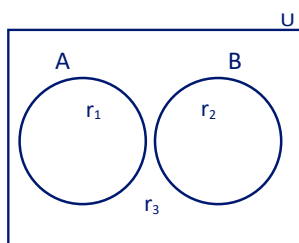
2. Sean $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ y $U = \{a, b, c\}$; determinar los conjuntos siguientes y verifique las relaciones.

- | | |
|-------------------|---------------------------|
| a. $(A - B)'$ | f. $(A \cup B) = B$ |
| b. $A' \cup U$ | g. $(A - B)'$ |
| c. $B' \cup U$ | h. $(B - A)'$ |
| d. $A' \cap U$ | i. $B \subseteq A \cup B$ |
| e. $A \cap B = A$ | |

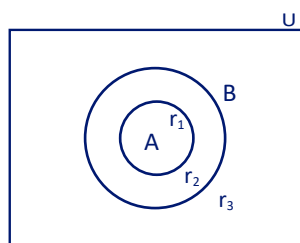
Para calcular los elementos de una región o de un conjunto generado por una operación, se emplea la cardinalidad de cada conjunto que interviene y las regiones en que cada tipo de conjuntos dividen a un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



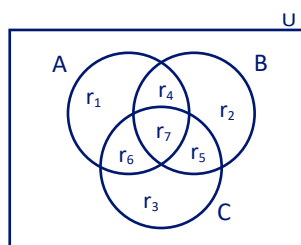
Conjuntos no comparables



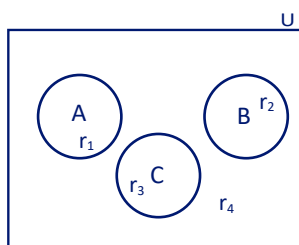
Conjuntos disjuntos



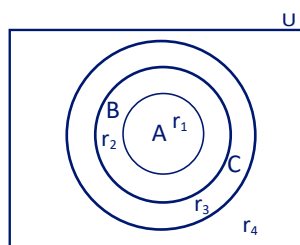
Conjuntos comparables



Conjuntos no comparables



Conjuntos disjuntos



Conjuntos comparables

Ahora, se formula la pregunta ¿cómo se calcula $n(A \cup B)$ si A y B son conjuntos disjuntos?

Después de calcular $n(A)$ y $n(B)$, se suman, es decir,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

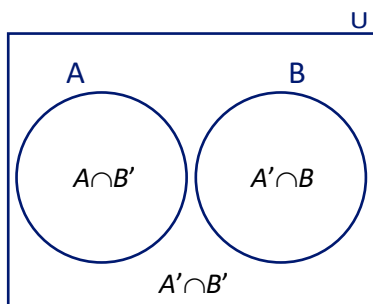
Los conjuntos disjuntos generan las regiones r_1, r_2, r_3 ; siendo

$$r_1 = A \cap B' = \{x/x \in A \text{ y } x \in B'\},$$

$$r_2 = A' \cap B = \{x/x \in A' \text{ y } x \in B\} \text{ y}$$

$$r_3 = A' \cap B' = \{x/x \in A' \text{ y } x \in B'\}.$$

Estos resultados se muestran en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Del diagrama

$$n(A \cup B) = n(A \cap B') + n(A' \cap B) \text{ y como } n(A \cap B') = n(A) \text{ y } n(A' \cap B)$$

$$= n(B), \text{ entonces } n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Esto constituye otra forma de calcular $n(A \cup B)$

Continuamos, ¿A qué es igual $n(A \cup B)$ si $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{e, f, g\}$ y $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$?

Sabiendo que A y B son disjuntos, y que $n(A) = 4$ y $n(B) = 3$, entonces $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 4 + 3 = 7$.

Para proseguir se hace la pregunta ¿cómo se determina la cardinalidad de $A \cup B$ para conjuntos no comparables?

En el diagrama de Venn se observan las regiones r_1, r_2, r_3 , y r_4 ; las cuales se definen como:

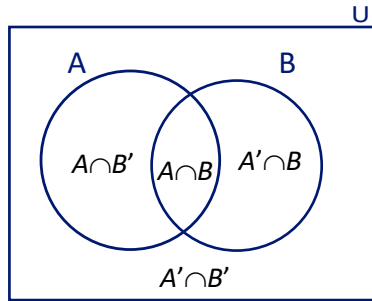
$$r_1 = A \cap B' = \{x/x \in A \text{ y } x \in B'\},$$

$$r_2 = A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\},$$

$$r3 = A' \cap B = \{x/x \in A' \text{ y } x \in B\} \text{ y}$$

$$r4 = A' \cap B' = \{x/x \in A' \text{ y } x \in B'\}.$$

Ver la figura siguiente:



Del diagrama de Venn y sabiendo que $A \cap B'$, $A \cap B$ y $A' \cap B$ son conjuntos disjuntos; $n(A \cap B') + n(A \cap B) + n(A' \cap B) = n(A \cup B)$.

En esta expresión cada conjunto debe ser expresada en términos de la cardinalidad de los conjuntos dados, es decir, si

$$n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) \text{ y}$$

$$n(A' \cap B) = n(B) - n(A \cap B),$$

entonces,

$$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cap B) \text{ o}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Por ejemplo, ¿A qué es igual $n(A \cup B)$ si

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

$$A = \{a, b, c, d, e\} \text{ y}$$

$$B = \{c, d, g, h\}?$$

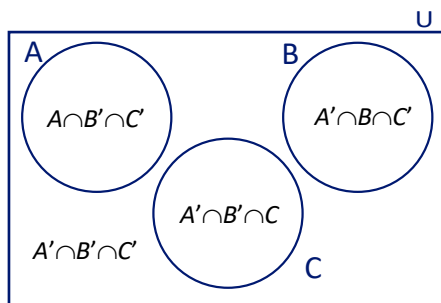
Conociendo que $n(A) = 5$, $n(B) = 4$ y $n(A \cap B) = n(\{c, d\}) = 2$; entonces

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 4 - 2 = 7.$$

¿Cómo se calcula $n(A \cup B)$ para conjuntos comparables?

Ahora, para tres conjuntos disjuntos ¿cómo se calcula $n(A \cup B \cup C)$?

En el diagrama de Venn se distinguen geoméricamente las regiones o secciones $r1$, $r2$, $r3$ y $r4$; las cuales se definen como $r1 = \{x/x \in A \text{ y } x \in B' \text{ y } x \in C'\}$, $r2 = \{x/x \in A' \text{ y } x \in B \text{ y } x \in C'\}$, $r3 = \{x/x \in A' \text{ y } x \in B' \text{ y } x \in C\}$ y $r4 = \{x/x \in A' \text{ y } x \in B' \text{ y } x \in C'\}$. Ver la figura siguiente:



En el diagrama de Venn se observa que $A \cap B' \cap C'$, $A' \cap B \cap C'$ y $A' \cap B' \cap C$ son conjuntos disjuntos, entonces $n(A \cup B \cap C) = n(A \cap B' \cap C') + n(A' \cap B \cap C') + n(A' \cap B' \cap C)$.

Esta expresión debe ser escrita en términos de la cardinalidad de cada conjunto dado, esto es, si

$$n(A \cap B' \cap C) = n(A), n(A' \cap B \cap C') = n(B) \text{ y } n(A' \cap B' \cap C) = n(C);$$

$$\text{entonces } n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C).$$

Enseguida se hace la pregunta ¿cómo se calcula $n(A \cup B \cup C)$ si A , B y C son conjuntos no comparables?

Geoméricamente en un diagrama de Venn, los tres conjuntos no comparables generan las regiones $r1$, $r2$, $r3$, $r4$, $r5$, $r6$, $r7$, y $r8$.

Estas regiones se definen como

$$r1 = \{x/x \in A \vee x \in B' \vee x \in C'\},$$

$$r2 = \{x/x \in A' \vee x \in B \vee x \in C'\},$$

$$r3 = \{x/x \in A' \vee x \in B' \vee x \in C\},$$

$$r4 = \{x/x \in A \vee x \in B \vee x \in C'\},$$

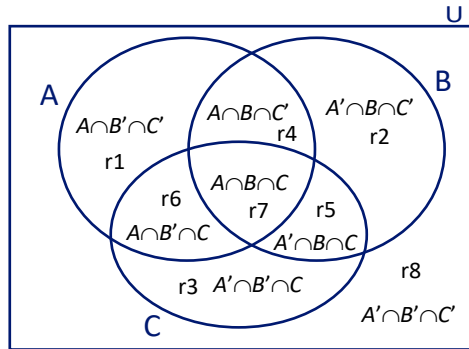
$$r5 = \{x/x \in A' \vee x \in B \vee x \in C\},$$

$$r6 = \{x/x \in A \vee x \in B' \vee x \in C\},$$

$$r7 = \{x/x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}, \text{ y}$$

$$r8 = \{x/x \in A' \vee x \in B' \vee x \in C'\}.$$

Ver la figura siguiente:



De acuerdo con el diagrama de Venn $A \cap B' \cap C'$, $A' \cap B \cap C'$ y $A' \cap B' \cap C$; $A \cap B \cap C'$, $A' \cap B \cap C$, $A \cap B' \cap C$ y $A \cap B \cap C$ son conjuntos disjuntos. Entonces $n(A \cup B \cup C) = n(A \cap B' \cap C') + n(A' \cap B \cap C') + n(A' \cap B' \cap C) + n(A \cap B \cap C') + n(A' \cap B \cap C) + n(A \cap B' \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Esta expresión puede ser escrita en términos de la cardinalidad de A , B y C ; $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ y $A \cap B \cap C$; esto es, si

$$n(A \cap B' \cap C') = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C),$$

$$n(A' \cap B \cap C') = n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \text{ y}$$

$$n(A' \cap B' \cap C) = n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C);$$

$$n(A \cap B \cap C') = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C),$$

$$n(A' \cap B \cap C) = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) \text{ y}$$

$$n(A \cap B' \cap C) = n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) + n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + \\ &+ n(A \cap B \cap C) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) + n(B \cap C) - \\ &- n(A \cap B \cap C) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Se obtiene el mismo resultado si se parte de

$$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup B) + n(A' \cap B' \cap C),$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup C) + n(A' \cap B \cap C') \text{ ó}$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(B \cup C) + n(A \cap B' \cap C').$$

Por ejemplo, si se utiliza la primera, esto es, donde

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ y}$$

$$n(A' \cap B' \cap C) = n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C), \text{ entonces}$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Ahora, ¿a qué es igual $n(A \cup B \cup C)$ si

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, \tilde{n}, o, p, q, r, s, t, u, v\},$$

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, \tilde{n}\},$$

$$B = \{d, e, f, g, h, i, j, k, l, o, p\}, \gamma$$

$$C = \{f, g, h, m, n, \tilde{n}, o, p, q, r, s, t\};$$

donde A, B y C son conjuntos no comparables?

Conociendo que $n(A) = 11, n(B) = 11, n(C) = 12$;

$$A \cap B = \{d, e, f, g, h\}, n(A \cap B) = 5;$$

$$A \cap C = \{f, g, h, m, n, \tilde{n}\}, n(A \cap C) = 6;$$

$$B \cap C = \{f, g, h, o, p\}, n(B \cap C) = 5; \gamma$$

$$A \cap B \cap C = \{f, g, h\}, n(A \cap B \cap C) = 3.$$

Entonces

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 11 + 11 + 12 - 5 - 6 - 5 + 3 = 21. \end{aligned}$$

Si A, B, C y U son los conjuntos definidos en el problema anterior. Calcular a) sólo los elementos de A , b) sólo los elementos de A y B , y c) los elementos de A o B .

Si $n(A) = 11, n(A \cap B) = 5, n(A \cap C) = 6, n(A \cap B \cap C) = 3$. Entonces sólo los elementos de A son $n(A \cap B' \cap C') = 11 - 5 - 6 + 3 = 3$, porque

$$n(A \cap B' \cap C') = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Del mismo modo, si $n(A \cap B) = 5$ y $n(A \cap B \cap C) = 3$, entonces sólo los elementos de A y B son $n(A \cap B \cap C') = 5 - 3 = 2$, porque $n(A \cap B \cap C') = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$.

Finalmente, si $n(A) = 11, n(B) = 11$ y $n(A \cap B) = 5$. Entonces los elementos de A o B son $n(A \cup B) = 11 + 11 - 5 = 17$, porque $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

¿A qué es igual $n(A \cup B \cup C)$, sólo los elementos de C , sólo los elementos de A y C , y los elementos que no son de A ó B ; si los conjuntos A, B y C son comparables?

Los problemas siguientes te pueden servir para incorporar conocimientos, apropiarte del procedimiento para calcular el número de elementos de un conjunto y, de paso, reafirmar y desarrollar capacidades.

Problemas

Resuelve los problemas que se proponen.

1. ¿Cómo se calcula sólo los elementos de A , sólo los elementos de B y los elementos que no son de A o B ; si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$?
2. ¿A qué es igual a) sólo los elementos B , b) sólo los elementos de C , c) los elementos de A ó C , B ó C ; d) sólo los elementos de A y C , B y C ;

si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 13\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $C = \{7, 11, 12, 13, 14, 15\}$ y $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$?

3. ¿Cómo se calcula
 - a) Sólo los elementos de A , B , C ;
 - b) sólo los elementos de A y B , A y C , B y C ;
 - c) los elementos de A ó B , A ó C , B ó C ; y
 - d) los elementos de A ó B ó C ;

si

$$A = \{a, b\},$$

$$B = \{a, b, c, d, e\},$$

$$C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}, \text{ y}$$

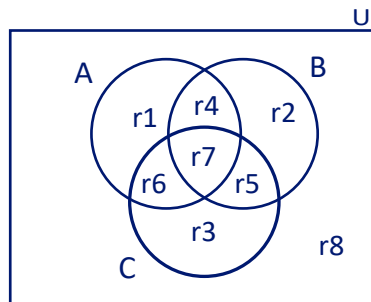
$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}?$$

Método para comprobar propiedades

¿En qué consiste este método?

O mejor, si A , B y C son subconjuntos del conjunto universo U , ¿cómo comprobar que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

Geoméricamente, al representar los conjuntos no comparables en un diagrama de Venn, se originan las regiones $r1$, $r2$, $r3$, $r4$, $r5$, $r6$, $r7$, y $r8$. Ver la figura siguiente.



De acuerdo con las regiones,

$$A = [r1, r4, r6, r7],$$

$$B = [r2, r4, r5, r7],$$

$$C = [r3, r5, r6, r7] \text{ y}$$

$$U = [r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7, r8].$$

Por definición, $A = [r1, r4, r6, r7]$ y $B \cap C = [r5, r7]$, entonces

$$A \cup (B \cap C) = [r1, r4, r5, r6, r7]. \quad (1)$$

Del mismo modo, por definición

$$A = [r1, r4, r6, r7], B = [r2, r4, r5, r7] \text{ y } C = [r3, r5, r6, r7];$$

$$A \cup B = [r1, r2, r4, r5, r6, r7] \text{ y}$$

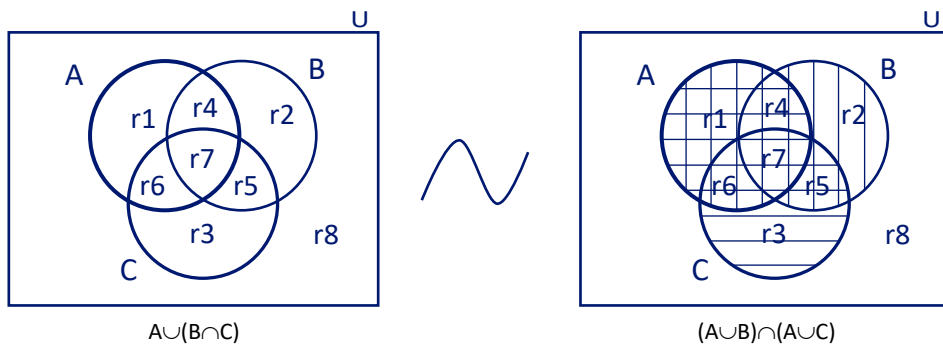
$$A \cup C = [r1, r3, r4, r5, r6, r7]. \text{ Entonces}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = [r1, r4, r5, r6, r7] \quad (2)$$

Finalmente, de (1) y (2),

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, puesto que ambos conjuntos consisten de las mismas regiones.

Este resultado se ilustra en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Para comprobar la validez de esta propiedad se usó el método de “marcar con letras o numerar partes” y los diagramas de Venn.

Método de “marcar con letra o numerar regiones”

Se representa los conjuntos en un diagrama de Venn y se marca con letras ó números las regiones generadas.

Cada conjunto se expresa en términos de sus regiones, las cuales se disponen dentro de corchetes.

De acuerdo con las operaciones de los conjuntos, se determinan las regiones de cada miembro de la propiedad y se observa si son iguales o diferentes.

Se concluye.

Ahora, cambiando las regiones por elementos, el problema ya no es geométrico, pero se llega a la misma conclusión. En efecto, sean

$$A = \{r1, r4, r6, r7\},$$

$$B = \{r2, r4, r5, r7\},$$

$$C = \{r3, r5, r6, r7\} \text{ y}$$

$$U = \{r1, r2, r3, r4, r5, r6, r7, r8\}.$$

Por definición,

$$A = \{r1, r4, r6, r7\} \text{ y } B \cap C = \{r5, r7\}, \text{ entonces}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{r1, r4, r5, r6, r7\}. \quad (1)$$

Del mismo modo, por definición

$$A \cup B = \{r1, r2, r4, r5, r6, r7\} \text{ y}$$

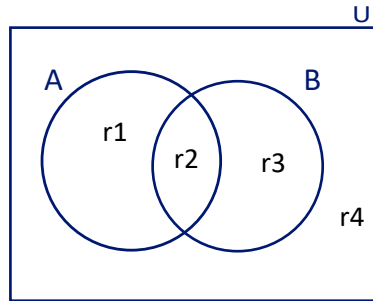
$$A \cup C = \{r1, r3, r4, r5, r6, r7\}, \text{ entonces}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{r1, r4, r5, r6, r7\}.$$

Por lo tanto, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, puesto que ambos conjuntos tienen los mismos elementos.

Continuamos con la comprobación de $(A \cap B')' = A' \cup B$.

En un diagrama de Venn se muestran los conjuntos no comparables y las regiones. Ver la figura siguiente:



De acuerdo con el diagrama de Venn,

$$A = [r1, r2],$$

$$B = [r2, r3] \text{ y}$$

$$U = [r1, r2, r3, r4].$$

Por definición,

$$B' = [r1, r4] \text{ y}$$

$$A \cap B' = [r1], \text{ entonces}$$

$$(A \cap B')' = [r2, r3, r4]. \quad (1)$$

Por definición,

$$A = [r1, r2] \text{ y}$$

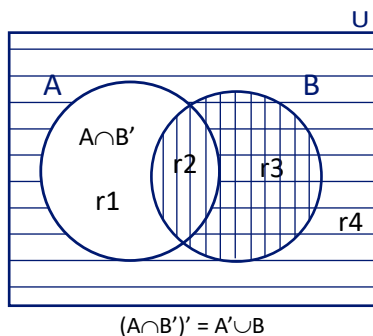
$$A' = [r3, r4], \text{ entonces}$$

$$A' \cup B = [r2, r3, r4]. \quad (2)$$

En consecuencia, de (1) y (2),

$(A \cap B')' = A' \cup B$, lo que significa que ambos conjuntos consisten de las mismas regiones.

Este resultado se muestra en un diagrama de Venn. Ver la figura siguiente:



Si cambiamos las regiones por elementos,

$$A = \{r1, r2\},$$

$$B = \{r2, r3\} \text{ y } U = \{r1, r2, r3, r4\}.$$

Por definición, $B' = \{r1, r4\}$ y $A \cap B' = \{r1\}$, entonces

$$(A \cap B')' = \{r2, r3, r4\}. \quad (1)$$

Por definición,

$$A = \{r1, r2\} \text{ y}$$

$$A' = \{r3, r4\}, \text{ entonces}$$

$$A' \cup B = \{r2, r3, r4\}. \quad (2)$$

Por lo tanto, de (1) y (2),

$(A \cap B')' = A' \cup B$, porque ambos conjuntos tienen los mismos elementos.

Para incorporar conocimientos, reafirmar el método y fortalecer y desarrollar capacidades, se propone resolver los problemas siguientes.

1. Sean A y B subconjuntos de U, comprobar cada una de las expresiones dadas.

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), C = B$

$$b) (A \cup B')' = A' \cap B$$

$$c) A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B)$$

$$d) A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B)$$

$$e) (A \cap B') \cup (A \cap B) = A$$

$$f) (U \cup B) \cap (A \cup \emptyset) = A$$

2. Sean A, B y C subconjuntos de U; comprobar cada una de las propiedades propuestas.

$$a) B - (A \cup C) = (B - A) \cap (B - C)$$

$$a) A \cup B - C = A \cap B' \cap C' \cup A \cap B \cap C' \cup A' \cap B \cap C'$$

$$a) (A \cap B) \cup C = A \cup B \cup C - A \cap B' \cap C' \cup A' \cap B \cap C'$$

No olvides que la apropiación del conocimiento es individual, pero eso no impide que la solución de problemas la intentes en equipo. Recuerda que en cada intento, individual o en equipo, va la incorporación, adquisición y reafirmación de conceptos; así como el fortalecimiento y desarrollo de tus capacidades. ¡Inténtalo!

Resuelve cada problema que se propone

1. ¿Qué denotan los símbolos siguientes y qué va antes, después o antes y después de cada uno de ellos?

$$a, A, \in, \notin, =, \neq, \subset, \subsetneq, \{ \}, \cup, \cap, ('), -, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \subseteq.$$

2. ¿Qué puedes afirmar de cada uno de las siguientes parejas?

$$q \text{ y } \{q\}; 0 \text{ y } \{ \}; 0 \text{ y } \{0\}; \{\emptyset\} \text{ y } \emptyset;$$

$$A \text{ y } B; A \text{ y } A; \emptyset \text{ y } \{ \}; A' \text{ y } U; \emptyset \text{ y } U; A \text{ y } A'; \emptyset \text{ y } \emptyset'; U \text{ y } U';$$

$$\emptyset \text{ y } U'; \emptyset' \text{ y } U.$$

3. ¿Qué condición debe cumplirse para que los conjuntos dados en parejas sean iguales?
 - a. $A = \{x / p(x)\}$, $B = \{0, 1, 7\}$, $p(x)$ es un polinomio;
 - b. $A = \{x / ax - 6 = 0\}$, $B = \{3\}$;
 - c. $A = \{x / ax^2 - 5x = 0\}$, $B = \{0, 5\}$;
 - d. $A = \{x / ax^2 - 9x + 11\}$, $B = \{3, 6\}$ y
 - e. $A = \{x / 0 \leq x \leq 8\}$, $B = \{x / p(x)\}$, $p(x)$ es una proposición.
4. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, ¿cuántos y cuáles son los subconjuntos de A que se pueden formar?
5. Si $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, ¿cuáles son los subconjuntos de A se pueden formar?

6. Si $A = \{x/x \text{ un número natural menor que } 30\}$. Escribir todos los subconjuntos de A que cumplan con la restricción
- todos los números primos,
 - todos los números compuestos,
 - todos los números impares,
 - todos los números pares y
 - formar los conjuntos A y C tal que $B \not\subset C$ y $C \not\subset B$, pero tienen elementos en común;
 - formar los conjuntos B y C tal que $B \not\subset C$ y $C \not\subset B$, pero no tienen elementos en común;
 - $B = \{x/x \neq x\}$,
 - formar los conjuntos B y C tal que $B \subset C$;
 - formar los conjuntos B y C tal que $B \subseteq C$;
 - $B = \{x/x \text{ es un número entero}\}$;
 - $B = \{x/8 \leq x \leq 40\}$ y
 - formar B tal que $B = U$.
7. Sean $A = \{x/x \text{ es un número primo menor que } 100\}$, $B = \{x/x \text{ es un número par positivo menor o igual que } 100\}$, $C = \{x/x \text{ es un cuadrado de } 3 \text{ lados}\}$, $D = \{x/x \text{ es un número real}\}$, $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $F = \{\text{árbol, silla, Juan}\}$.
- ¿Cuáles de estos conjuntos son finitos e infinitos? ¿por qué?
 - ¿Cuál es el número de elementos del conjunto C ?
 - ¿Hay un conjunto vacío?
 - ¿Son todos los de A también elementos de D ?

- e. ¿De qué conjunto todos los elementos de B son también elementos?
 - f. ¿Es recomendable el método por comprensión para especificar el conjunto F ?
 - g. ¿Qué otro método se puede usar para especificar el conjunto E ?
 - h. ¿ $a \in D$? ¿ $-2 \in D$?
 - i. ¿Cuál es el número de elementos de A ?
 - j. $\emptyset \Rightarrow U$
 - k. $A \Leftrightarrow B$
8. Sean $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $D = \{1, 2, 3, \dots\}$ y $E = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- a. ¿Cuáles de estos conjuntos son finitos y cuáles infinitos?, ¿por qué?
 - b. Por parejas, ¿cuáles son disjuntos, no comparables y comparables?
 - c. De los conjuntos dados ¿cuál podría ser el conjunto universo?
 - d. ¿ A implica B , A implica C y A implica D ; $B \Rightarrow C$, $B \Rightarrow D$ y $B \Rightarrow E$; $C \Rightarrow D$ y $C \Rightarrow E$; $D \Rightarrow E$?
 - e. ¿ $A \subset B$, $A \subset C$, $A \subset D$ y $A \subset E$; $B \subset C$, $B \subset D$ y $B \subset E$; $C \subset D$ y $C \subset E$; $D \subset E$?
 - f. ¿Los elementos de A están también en el conjunto B ?
 - g. ¿Qué conjuntos se pueden escribir antes y después de $\Rightarrow$?
 - h. ¿ A es un subconjunto propio de D y B es un subconjunto propio de D ?
 - i. ¿ $C \subset D$ y $D \subset E$, entonces $C \subset E$?
 - j. ¿-5 a 15 en qué conjuntos están?
 - k. ¿De qué otra manera se pueden especificar los conjuntos A , B , C , D y E ?

9. Sean $N = \{x/x \text{ es un número natural}\}$, $Z = \{x/x \text{ es un número entero}\}$, $Q = \{x/x \text{ es un número racional}\}$ e $I = \{x/x \text{ es un número irracional}\}$.

- ¿Qué tipos de conjuntos son N , Z , Q , I ?
- Por parejas, ¿Cuáles son conjuntos no comparables, disjuntos y comparables?
- ¿Se puede decir que $N \Rightarrow Z$, $N \Rightarrow Q$ y $N \Rightarrow I$; $Z \Rightarrow Q$, $Z \Rightarrow I$ y $Q \Rightarrow I$? ¿por qué?
- ¿Es posible el $\Leftrightarrow$? ¿por qué?
- ¿Qué elementos de N son también elementos de Z ?
- ¿Qué elementos de N y Z son también elementos de Q ?
- ¿En qué conjuntos están $1, \sqrt{3}, -8, 2/5, 8, \sqrt{7}, 1/5, 9, 13$?
- ¿ $N \subset Q$, $N \subset Z$, $N \subset I$, $Z \subset Q$, $Z \subset I$, $Q \subset I$?
- ¿ $I \subset Q$, $Q \subset I$, $I \subset R$, $Q \subset R$?

10. Sean N , Z , Q e I , respectivamente, los números naturales, enteros, racionales, irracionales y R los números reales. Hallar los siguientes conjuntos.

- | | |
|---------------|---------------|
| a. $N \cup Z$ | l. $Q \cap I$ |
| b. $N \cup Q$ | m. $N \cap R$ |
| c. $N \cup I$ | n. $Z \cup R$ |
| d. $Z \cup Q$ | o. $Q \cup R$ |
| e. $Z \cup I$ | p. $I \cup R$ |
| f. $Q \cup I$ | q. $R \cup R$ |
| g. $N \cap Z$ | r. $Q \cup I$ |
| h. $N \cap Q$ | s. $N \cap R$ |
| i. $N \cap I$ | t. $Z \cap R$ |
| j. $Z \cap Q$ | u. $Q \cap R$ |
| k. $Z \cap I$ | v. $Q \cap I$ |

11. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f, g\}$. Hallar los conjuntos siguientes

a. A'

j. $B - A'$

b. B'

k. $(A \cap B)'$

c. U'

l. $B' - A'$

d. $\emptyset'$

m. $A \cup A'$

e. $A \cap A'$

n. $A \cap U$

f. $A' \cup A$

o. $(A \cup B) \cup U$

g. $B' \cap A'$

p. $(A \cap B) \cap \emptyset$

h. $A' - B'$

q. $(A \cup B) \cup \emptyset$

i. $B \cap A'$

r. $(A \cap B) \cap U$

12. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{c, d, e, f, g, h\}$. Encuentre los siguientes conjuntos

a. A'

f. $B' \cap A'$

b. B'

g. $B - A'$

c. U'

h. $A - B'$

d. $\emptyset'$

i. $A \cap B'$

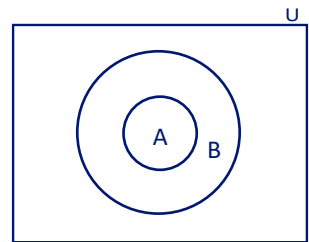
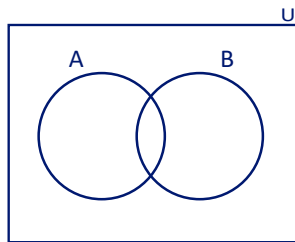
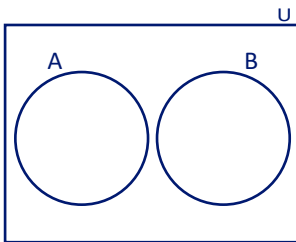
e. $A' \cup A$

13. Dado $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, c, d, e, f\}$. Hallar los siguientes conjuntos

- | | |
|------------------------|-----------------------------------|
| a. A' | k. $(A \cap A) \cap U$ |
| b. B' | l. $(A \cup B) \cap (A \cup B)$ |
| c. $A \cap A'$ | m. $(A \cup B) \cup \emptyset$ |
| d. $B' \cup A$ | n. $(A')' \cup (B')'$ |
| e. $B' \cup A'$ | o. $(A \cup B)' \cap A' \cup B'$ |
| f. $B' \cap A'$ | p. $(A \cap A) \cup (B \cap B)$ |
| g. $B' \cap A$ | q. $(A \cup B) \cup (A' \cap B')$ |
| h. $B \cap A'$ | r. $(A - B)'$ |
| i. $B' - A'$ | s. $(A \cap B') \cup (A \cap B)$ |
| j. $(A \cup B) \cap U$ | |

14. En cada uno de los diagramas de Venn, rayar

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a. A', B' | f. $(A \cap B')'$ |
| b. $A \cap B$ | g. $(A \cup B)'$ |
| c. $A \cup B$ | h. $(A - B)'$ |
| d. $A - B$ | i. $\emptyset'$ |
| e. $(A')', (B')'$ | j. U' |



15. En cada uno de los diagramas de Venn, rayar

a. $A \cap B'$

f. $(A \cap B') \cup (A \cap B)'$

b. $A' \cap B$

g. $A - B \cap A$

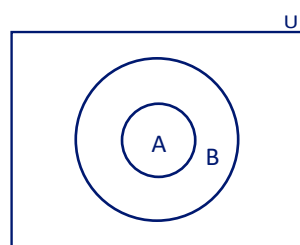
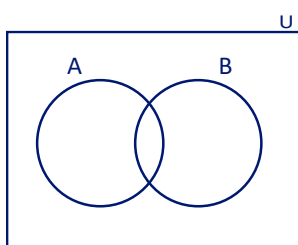
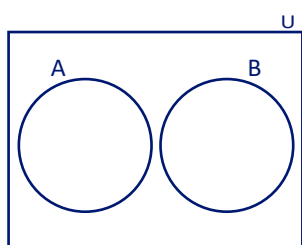
c. $A' \cap B'$

h. $A - A$

d. $A' \cup B'$

i. $(A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$

e. $\emptyset \cup U$



16. En cada uno de los diagramas de Venn, rayar

a. $A \cap B' \cap C'$

h. $U - A \cup B \cup C$

b. $A' \cap B \cap C'$

i. $A \cup B$

c. $A' \cap B' \cap C$

j. $A \cup C$

d. $A \cap B \cap C$

k. $B \cup C$

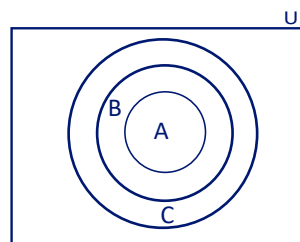
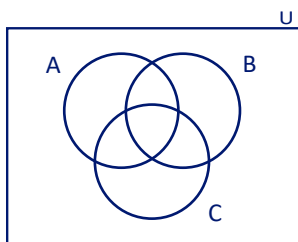
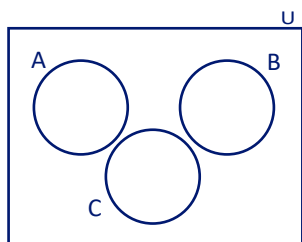
e. $A \cap B \cap C'$

l. $(A \cup B \cup C)'$

f. $A \cap B' \cap C$

m. $A - B \cap C$

g. $A' \cap B \cap C$



17. En cada diagrama de Venn, rayar

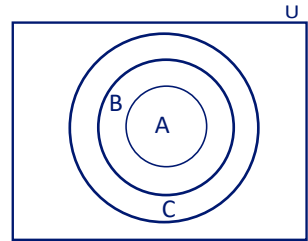
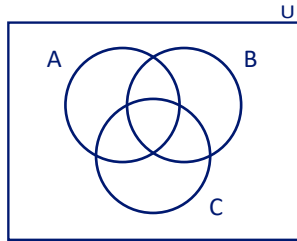
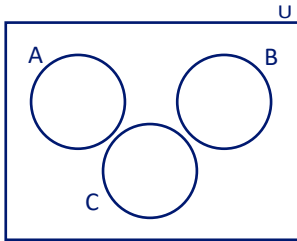
a. $A \cup B - C$

d. $A \cup (B \cap C)$

b. $A - (B \cup C)$

e. $A \cap (B \cup C)$

c. $(B - A) \cap (B - C)$



18. Dado $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ y $C = \{h, i, j\}$. Hallar los siguientes conjuntos

a. A'

h. $C' \cap C$

b. B'

i. $(A \cap B \cap C)'$

c. U'

j. $(A \cup B \cup C)'$

d. $\emptyset'$

k. $A' \cup B' \cup C'$

e. $B \cap B'$

l. $A \cap B' \cap C'$

f. $B \cup A'$

m. $A' \cap B \cap C'$

g. $C' \cup A$

n. $A - (B \cap C)'$

19. Dado $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$. Enumerar los conjuntos

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| a. A' | g. $A' \cap B \cap C$ |
| b. B' | h. $(A \cap B \cap C)'$ |
| c. C' | i. $A \cap (B \cup C)'$ |
| d. $U' \cup (\emptyset)'$ | j. $B \cap (A \cup C)'$ |
| e. $A \cap B' \cap C'$ | k. $U - (A \cap B \cap C')$ |
| f. $A' \cap B \cap C'$ | |

20. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, \tilde{n}, o, p, q, r, s\}$, $A = \{a, b, c, d, e, k, l, m, n\}$, $B = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$, y $C = \{e, i, j, k, l, m, n, \tilde{n}, o, p\}$. ¿Cuáles son los elementos que están en cada uno de los siguientes conjuntos?

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a. $A \cup B$ | j. $A \cap C$ |
| b. $A \cup C$ | k. $B \cap C$ |
| c. $B \cup C$ | l. $A \cap B \cap C$ |
| d. $A \cup B \cup C$ | m. $A \cap U, B \cap U, C \cup U$ |
| e. $A \cup U$ | n. $A \cap \emptyset, B \cap \emptyset, C \cap \emptyset$ |
| f. $A \cup \emptyset$ | o. $(A \cap B \cap C) \cap U$ |
| g. $(A \cup B \cup C) \cup U$ | p. $(A \cap B \cap C) \cap \emptyset$ |
| h. $(A \cup B \cup C) \cup \emptyset$ | q. $A \cup A \cup A$ |
| i. $A \cap B$ | r. $A \cap A \cap A$ |

21. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, c, d, e\}$. Calcular

- sólo los elementos de A ,
- sólo los elementos de B y
- los elementos de A o B .

22. Dado $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{d, e, f, g, h, i\}$. Determinar:

- sólo los elementos de A ,
- sólo los elementos de B y
- los elementos de A o B .

23. Dado $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{e, f, g\}$. Calcular

- sólo los elementos de A ,
- sólo los elementos de B y
- los elementos de A ó B .

24. Dado $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, m, l, n, ñ, o, p, q, r, s, t\}$, $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, n, ñ, o\}$, $B = \{e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$ y $C = \{g, h, k, l, m, n, ñ, o, p, q, r\}$. Encontrar

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| a. sólo los elementos de A , | f. sólo los elementos de B y C , |
| b. sólo los elementos de B , | g. los elementos de A ó B , |
| c. sólo los elementos de C , | h. los elementos de A ó C , |
| d. sólo los elementos de A y B , | i. los elementos de B ó C y |
| e. sólo los elementos de A y C , | j. los elementos de A ó B ó C . |

25. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ y $C = \{h, i\}$. Calcular

- | | |
|---------------------------------|--|
| a. sólo los elementos de A , | f. los elementos de B ó C , |
| b. sólo los elementos de B , | g. sólo los elementos de A y B , |
| c. sólo los elementos de C , | h. sólo los elementos de A y C , |
| d. los elementos de A ó B , | i. sólo los elementos de B y C , y |
| e. los elementos de A ó C , | j. los elementos de A ó B ó C . |

26. Dado $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, \tilde{n}, o, p, q, r\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ y $C = \{j, k, l, m, n, \tilde{n}, o, p\}$. Determinar:

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| a. sólo los elementos de A , | f. sólo los elementos de B y C , |
| b. sólo los elementos de B , | g. los elementos de A ó B , |
| c. sólo los elementos de C , | h. los elementos de A ó C , |
| d. sólo los elementos de A y B , | i. los elementos de B ó C y |
| e. sólo los elementos de A y C , | j. los elementos de A ó B ó C . |

27. Comprobar

- $(A' \cup B)' = A \cap B'$
- $(A \cap B) \cup C = C \cup (A \cap B \cap C')$
- $A - (B \cup C) = A \cap B' \cap C'$
- $(A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B$
- $A \cup B - C = (A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B \cap C') \cup (A' \cap B \cap C')$

Los conjuntos son útiles para comprender y expresar conceptos matemáticos y, consecuentemente, desarrollar temas relacionados con éstos. Entre otros, los conjuntos inciden en los números reales y números complejos; relaciones y funciones; ecuaciones lineales y sistemas; ecuación de segundo orden y polinomios; probabilidad y combinatoria; estadística descriptiva e inferencial; valores máximo y valores mínimos, y optimización; cálculo diferencial e integral, y ecuaciones diferenciales; así como en química e ingeniería química; laboratorio y reactores; encuestas para definir preferencias y clasificaciones.

De acuerdo con la idea intuitiva de conjuntos, los números reales están formados por los números racionales e irracionales, los cuales son precisamente dos subconjuntos diferentes del conjunto de los números reales.

Tanto en una relación como en una función de una variable es posible distinguir variables y constantes; de éstas, la variable independiente es a la que se le asigna valores y la variable dependiente es aquella cuyo valor viene determinado por el que toma la variable independiente. Los valores de ambas generan conjuntos. También en éstas se pueden diferenciar la regla de correspondencia, dominio, rango y pares ordenados; para expresar las tres últimas se emplean conjuntos.

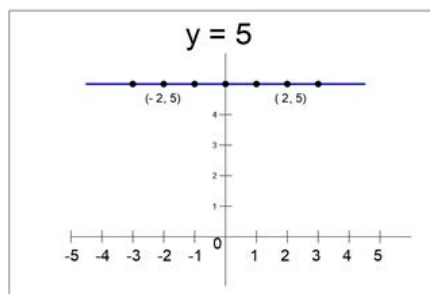
16.1 Funciones y Relaciones

En cada caso, determinar dominio, rango y gráfica.

- a) $f(x) = 5$
- b) $f(x) = x$
- c) $f(x) = x + 2$

- a) Para determinar el dominio de $f(x) = 5$, se calculan los valores de correspondientes a los valores de x , por ejemplo, $x = -2, -1, 0, 1, 2$, el cual es un conjunto de números reales que definen un dominio. Ver la tabla y gráfica:

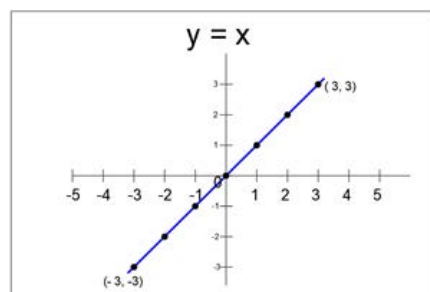
x	y	(x, y)
-2	5	(-2, 5)
-1	5	(-1, 5)
0	5	(0, 5)
1	5	(1, 5)
2	5	(2, 5)
3	5	(3, 5)



Se puede observar que el dominio natural de esta función es el conjunto de los números reales, el rango el conjunto unitario $\{5\}$ y, desde el punto de vista parejas, ésta es un conjunto infinito de pares ordenados que geoméricamente es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$. Además, se observa que este conjunto de puntos están ubicados en una línea recta horizontal de pendiente cero y de cero grados de inclinación, la cual es la gráfica de $y = 5$ en $\mathbb{R}^2$.

- b) $f(x) = x$. El dominio de esta función es el conjunto de los números reales. Para calcular algunos valores de y correspondientes a x , se define un conjunto de valores de x . En efecto, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Ver la tabla y gráfica siguientes:

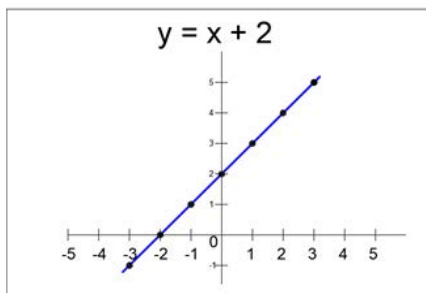
x	y	(x, y)
-2	-2	(-2, -2)
-1	-1	(-1, -1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)
3	3	(3, 3)



Según se puede observar, el rango es el conjunto de los números reales y la gráfica es un conjunto de pares ordenados que geoméricamente es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$. La gráfica es una recta con pendiente 1 e inclinación de 45° . Esta función es inyectiva, biyectiva, sobreyectiva e interseca con los ejes en el origen.

- c) $f(x) = x + 2$. El dominio de $f(x) = x + 2$ es el conjunto de los números reales, es decir, $x \in (-\infty, \infty)$, mientras que el rango es también el conjunto de los números reales, el cual se denota como $\in \mathbb{R}$. El conjunto de puntos (x, y) en $\mathbb{R}^2$ genera la gráfica de $f(x) = x + 2$, la cual se muestra enseguida.

x	y	(x, y)
-2	-1	(-3, -1)
-2	0	(-2, 0)
-1	1	(-1, 1)
0	2	(0, 2)
1	3	(1, 3)
2	4	(2, 4)
3	5	(3, 5)



Análíticamente, la línea recta es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables, es decir $y = x + 2$. Se puede observar que cada punto es solución de ésta. También se puede ver que la representación gráfica del lugar geométrico corresponde a la ecuación de primer grado $y = x + 2$ y a la inversa.

Aparte de ser inyectiva, biyectiva y tener inversa, es creciente y los puntos comunes a ésta y a los ejes son $(0, 2)$ y $(-2, 0)$, y la pendiente es 1.

En consecuencia, ¿qué se puede decir de $f(x) = 2x - 5$, $f(x) = -7x$, $f(x) = -3x + 7$ y $f(x) = -3x - 7$?

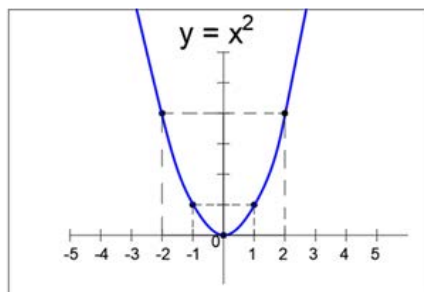
Las expresiones cuadráticas definen relaciones y funciones, y, corresponden a, lugares geométricos como, por ejemplo, la parábola, la circunferencia y la hipérbola; así como ecuaciones propiamente. En cada caso, ¿cuál es el dominio, rango y gráfico?

- a) $y = x^2$
- b) $y = x^2 + 4$
- c) $y = x^2 - 6x + 9$
- d) $y = (x - 2)^2 + 2$

- a) $f(x) = x^2$. El dominio de esta función es el conjunto de los números reales y el rango es el conjunto de los números reales especificados por el intervalo $y \in [0, \infty]$.

Como los valores de x están comprendidos entre $-\infty$ y ∞ , para obtener un subconjunto de puntos de $y = x^2$ y poder trazar parcialmente la gráfica de ésta, se define el dominio $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ y se calculan los valores de y . Ver la tabla y gráfica.

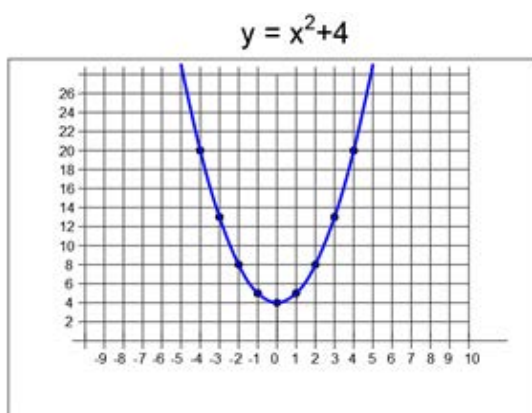
x	y	(x, y)
-2	4	$(-2, 4)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	4	$(2, 4)$
3	9	$(3, 9)$



Según la gráfica, el lugar geométrico es una parábola simétrica con respecto al eje y . La gráfica de esta función, según se puede observar, corta al eje de simetría en el vértice, es decir, en el punto más bajo y el cual, en este caso, coincide con el origen. En su dominio, esta función no es biyectiva, por lo que no tiene inversa, pero, por ejemplo, para el conjunto definido por $x \geq 0$ tal función sí tiene inversa. Ahora, ¿qué sucede si el dominio es el conjunto definido por $x \leq 0$? Como esta función es simétrica con respecto a un eje, entonces es par y positiva, por lo que su gráfica se abre hacia arriba. Consecuentemente, ¿Qué se puede decir de $y = -x^2$ y de $y^2 = \pm 4x$?

- b) $y = x^2 + 4$. Para calcular un subconjunto de puntos (x, y) , se calculan los valores de correspondiente a los valores de x que están en el subconjunto $X = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ de números reales que pertenecen al dominio de la función dada. Ver la tabla y gráfica siguiente.

x	y	(x, y)
-4	20	(-4, 20)
-3	13	(-3, 13)
-2	8	(-2, 8)
-1	5	(-1, 5)
0	4	(0, 4)
1	5	(1, 5)
2	8	(2, 8)
3	13	(3, 13)
4	20	(4, 20)



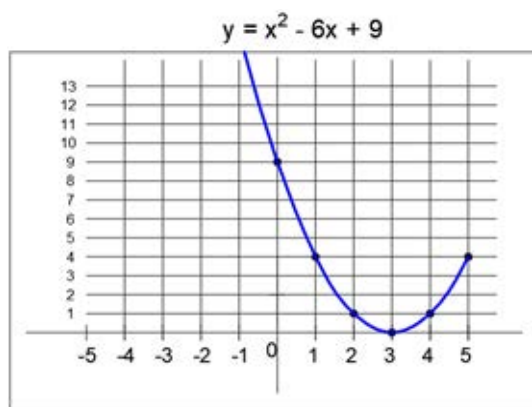
El dominio natural es el conjunto de los números reales y el rango es el conjunto de los números reales definido por $y \geq 4$. El vértice es el punto $(0, 4)$ y éste es la intersección de la gráfica con el eje de simetría y es el más bajo o mínimo.

La expresión analítica de este lugar geométrico es $y = x^2 + 4$ y la inversa. Se puede observar que cada punto (x, y) es solución de la ecuación $y = x^2 + 4$, y que $y = x^2 + 4$ es una función par, porque $f(-x) = (-x)^2 + 4 = f(x)$. También se puede observar que la gráfica de esta función no tiene ningún punto común con el eje, lo cual significa que la ecuación $x^2 + 4 = 0$ no es posible resolverla en los reales.

Si se compara $y = x^2 + 4$ con $y = x^2 - 8$, $y = -x^2 + 2$, $y = -x^2 - 8$; ¿qué diferencias se pueden distinguir?

c) $y = x^2 - 6x + 9$. Esta expresión también se puede escribir como $y = (x - 3)^2$. Después de definir el dominio con $-2 \leq x \leq 5$ se calcula los valores de correspondientes a los valores de x que están en el dominio. Los puntos (x, y) calculados se encuentran registrados en la tabla siguiente y representados geoméricamente en la gráfica que sigue. En la gráfica se ve que el rango restringido es $0 \leq y \leq 13$.

x	y	(x, y)
-2	25	(-2, 25)
-1	16	(-1, 16)
0	9	(0, 9)
1	4	(1, 4)
2	1	(2, 1)
3	2	(3, 2)
4	1	(4, 1)
5	4	(5, 4)

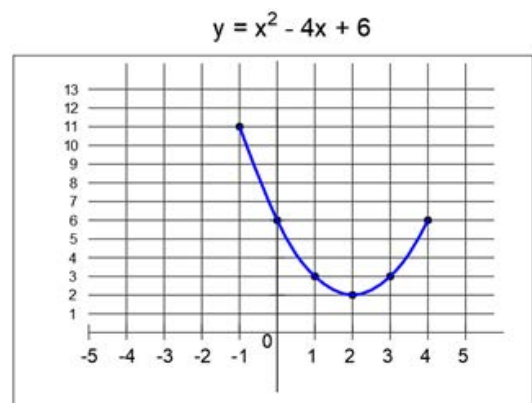


Mientras que el dominio natural es el conjunto de los números reales y el rango es el conjunto de los números reales definidos por $y \geq 0$. $y = (x - 3)^2$ representa una parábola simétrica a la recta $x = 3$ y con vértice $(3, 0)$, el cual es un mínimo. De acuerdo con el dominio y rango, esta función se interseca con el eje y en el punto $(0, 9)$ y su mínimo está a la derecha del origen.

¿Qué se puede afirmar de $y = x^2 + 4x + 4$, $y = -x^2 + 8x - 16$, $y = x^2 - 2x + 4$, $y = x^2 - 6x + 11$?

- d) $y = x^2 - 4x + 6$. Para determinar el dominio, rango y gráfica, esta expresión se puede escribir como $y = (x - 2)^2 + 2$. Para calcular valores de y , se define el conjunto $X = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, el cual es un dominio útil para determinar algunos puntos (x, y) de la función. La tabla siguiente contiene los puntos calculados y su representación gráfica se puede observar en la gráfica.

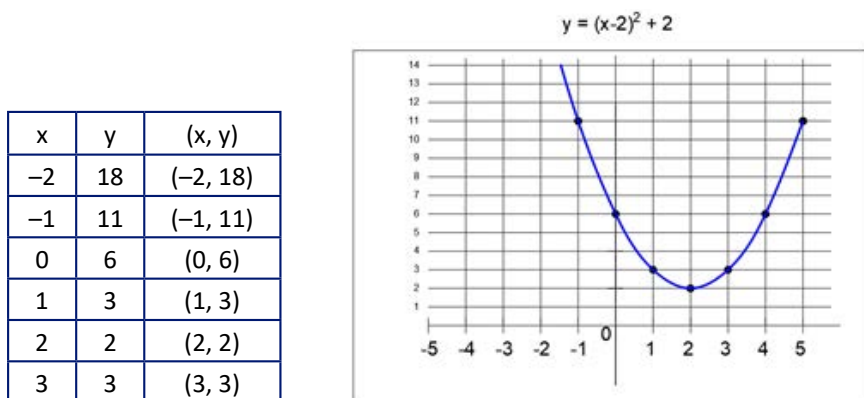
x	y	(x, y)
-1	11	(-1, 11)
0	6	(0, 6)
1	3	(1, 3)
2	2	(2, 2)
3	3	(3, 3)
4	6	(4, 6)



El dominio natural es el conjunto de los números reales, $x \in \mathbb{R}$, y el rango es el conjunto de los números especificado como $y \geq 2$ ó $y \in [2, \infty)$. La gráfica es una parábola abierta hacia arriba y con vértice en el primer cuadrante, cuyo punto corresponde a un mínimo de $y = x^2 - 4x + 6$. Se puede observar que la gráfica se intercepta con el eje en $(0, 6)$ y que con el eje no existe tal intersección.

¿Qué se puede afirmar de $y = x^2 + 6x + 11$, $y = 1 - 6x - x^2$, $y = 6 + 4x - x^2$?

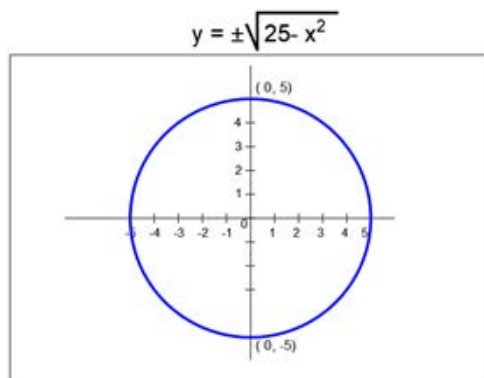
Mediante las intersecciones y la forma de $y = x^2$, que es una parábola, se puede construir la gráfica de $y = x^2 - 4x + 6$, por ejemplo. En efecto, para $x = 0$, $y = 6$, de donde la intersección con el eje y es $(0, 6)$; para $y = 0$, $(x - 2)^2 + 2 = 0$, de donde la intersección con el eje x es imposible. Para encontrar el punto mínimo, se hace $x = 2$, de donde el tal punto es $(2, 2)$. Después de conocer los puntos $(0, 6)$ y $(2, 2)$, y sabiendo que no se intercepta con el eje x y su forma es una parábola, la gráfica es



Desde este punto de vista, ¿cuál es el dominio, rango y gráfica de $y = 4x$, $y = 2x + 4$, $y = -3x + 6$, $y = -4x - 8$, $y = x^2 + 4$, $y = -x^2 + 4$, $y = -x^2 - 16$, $y = (x - 4)^2$, $y = -(x - 4)^2$, $y = (x + 8)^2$, $y = -(x + 8)^2$, $y = (x + 6)^2 + 5$, $y = (x - 3)^2 + 4$, $y = -(x - 2)^2 + 8$, $y = -(x - 4)^2 - 4$?

Continuamos con la determinación del dominio, rango y gráfica de $x^2 + y^2 = 25$. Si $y = 0$, el intervalo de variación de x es $-5 \leq x \leq 5$, es decir éste es el dominio y si $x = 0$, y varía de -5 a 5 , lo cual significa que $-5 \leq y \leq 5$ es el rango de $x^2 + y^2 = 25$, la cual no es función, sino relación. De $x^2 + y^2 = 25$, se puede escribir $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Para que y sea real, se requiere que $25 - x^2 \geq 0$ ó sea $x^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$. Los valores para y en este intervalo y el cálculo de (x, y) , así como su representación gráfica se muestra enseguida.

x	y	(x, y)
-5	±0	(-5, 0)
-4	±3	(-4, 3)
-3	±4	(-3, 4)
-2	±4.582	(-2, 4.582)
-1	±4.899	(-1, 4.899)
0	±5	(0, 5)
1	±4.899	(1, 4.899)
2	±4.582	(2, 4.582)
3	±4	(3, 4)
4	±3	(4, 3)
5	±0	(5, 0)



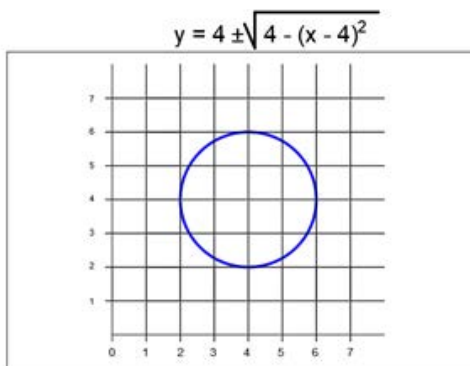
Se observa que la figura representa una circunferencia centrada en el origen y con radio 5.

¿A qué conjunto de números reales es igual el dominio y rango de $x^2 + y^2 = 1$ y cuál su gráfica?

Igualmente, determine dominio, rango y gráfica de $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$. En efecto, la expresión dada se puede escribir como $y = 4 \pm \sqrt{4 - (x - 4)^2}$, de donde $(x - 4)^2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6$, lo cual significa que el dominio es el conjunto expresado como $2 \leq x \leq 6$ ó $x \in [2, 6]$. De la misma manera el rango es conjunto de números reales escrito como $2 \leq y \leq 6$. Para cualquier otro número que esté en $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$, el valor de y será un número complejo.

Los valores útiles para dibujar la relación $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4$ figuran en la tabla siguiente.

x	y	(x, y)
2	4	(2, 4)
3	$4 \pm \sqrt{3}$	$(3, 4 \pm \sqrt{3})$
4	4 ± 2	$(4, 4 \pm 2)$
5	$4 \pm \sqrt{3}$	$(5, 4 \pm \sqrt{3})$
6	4	(6, 4)



Según la gráfica, la curva obtenida es una circunferencia con centro en el primer cuadrante. También se puede observar que ésta no se intercepta con ningún de los ejes, ni con el origen y que si se traza una vertical en cada punto del dominio, ésta toca dos puntos de la gráfica, lo cual significa que es una relación.

Para encontrar los puntos de intercepción de la gráfica con los ejes, se hace $x = 0$ y $y = 0$, esto es, si $x = 0$, $y = 4 \pm \sqrt{4 - (0 - 4)^2}$ es un número complejo, lo cual significa que no es posible la intercepción de la gráfica con el eje y . Igualmente, si $y = 0$, $x = 4 \pm \sqrt{4 - (0 - 4)^2}$ es un número complejo, lo cual permite afirmar que la gráfica no se intercepta con el eje x .

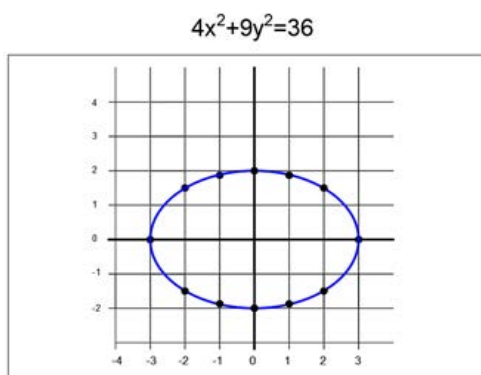
En general, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ es una circunferencia, la cual queda completamente determinada por el centro (h, k) y el radio r .

¿Qué conjunto de números reales son el dominio y rango, y cuál su gráfica de $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 16 = 0$, $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x + 2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$?

Ahora, determinar el conjunto de los números reales que, respectivamente, son el dominio y rango de $4x^2 + 9y^2 = 36$; y dibujar su gráfica.

La ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$, se puede escribir como $y = \pm \sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}}$ de donde el dominio es el conjunto de los números especificados por $-3 \leq x \leq 3$ o $x \in [-3, 3]$ y el rango está dado por el conjunto $-2 \leq y \leq 2$. Como en el dominio y es real, entonces en $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ y no es real. La tabla siguiente contiene los valores reales de x e y , los cuáles son útiles para construir los puntos (x, y) que se emplearán para dibujar la gráfica. Ver la figura siguiente.

x	y	(x, y)
-3	0	(-3, 0)
-2	$\pm \sqrt{\frac{20}{9}}$	$(-2, \pm 1.490)$
-1	$\pm \sqrt{\frac{32}{9}}$	$(-1, \pm 1.885)$
0	± 2	$(0, \pm 2)$
1	$\pm \sqrt{\frac{32}{9}}$	$(1, \pm 1.885)$
2	$\pm \sqrt{\frac{20}{9}}$	$(2, \pm 1.490)$
3	0	(3, 0)



Se puede observar que la figura adjunta es una elipse o lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancia a dos puntos fijos es constante. Además, se puede ver que la curva es simétrica con respecto a los ejes y con respecto al origen. También se observa que el centro de esta elipse es el origen, el eje mayor está sobre el eje x y el menor sobre el eje y. Además, como $a = 3$ y $b = 2$, entonces las coordenadas de los focos son $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$, ya que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

¿Qué cambia si la ecuación de la elipse es $9x^2 + 4y^2 = 36$?

¿Qué conjunto de números reales es, respectivamente, el dominio y rango; y gráfica de

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \text{ y } 25x^2 + 9y^2 = 225;$$

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \text{ y } 25x^2 + 16y^2 = 400;$$

$$25x^2 + 36y^2 = 900 \text{ y } 36x^2 + 25y^2 = 900?$$

Para continuar se determina el conjunto de números reales que, respectivamente, es el dominio y rango; así como el conjunto de puntos suficientes para dibujar la gráfica de

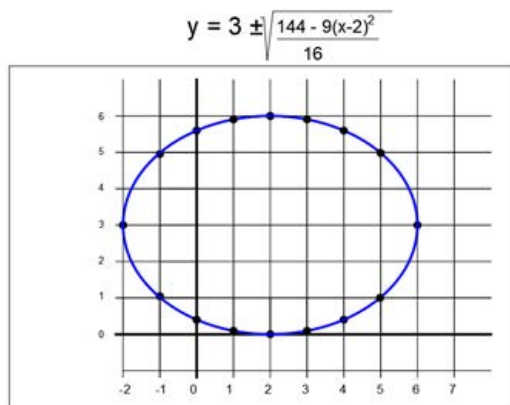
$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

La ecuación dada también se puede escribir como $9x^2 + 16y^2 - 36x - 96y + 36 = 0$ ó también como

$$y = 3 \pm \sqrt{\frac{144 - 9(x-2)^2}{16}} \quad \text{ó} \quad x = 2 \pm \sqrt{\frac{144 - 16(y-3)^2}{9}}$$

El dominio es tal que $x \in [-2, 6]$ y el rango es tal que $y \in [0, 6]$. Ver figura siguiente y la tabla de valores.

x	y	(x, y)
-3	nc	(-3, nc)
-2	3	(-2, 3)
-1	3 ± 1.984	$(-1, 3 \pm 1.984)$
0	3 ± 2.598	$(0, 3 \pm 2.598)$
1	3 ± 2.9047	$(1, 3 \pm 2.9047)$
2	3 ± 3	$(2, 3 \pm 3)$
3	3 ± 2.9047	$(3, 3 \pm 2.9047)$
4	3 ± 2.598	$(4, 3 \pm 2.598)$
5	3 ± 1.984	$(5, 3 \pm 1.984)$
6	3	(6, 3)
7	nc	(7, nc)



Según la gráfica, el centro de la elipse está en el primer cuadrante, el eje mayor es paralelo al eje x y el eje menor es paralelo al eje y . La elipse es una relación y no una función.

El dominio de esta relación se obtiene haciendo $\frac{144 - 9(x-2)^2}{16} \geq 0$ y después de hacer operaciones el resultado es

$$(x-2)^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq x-2 \leq 4 \quad \text{o}$$

$$(x-2)^2 \leq 16 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 6.$$

Mientras que para obtener el rango, se hace lo siguiente

$$144 - 16(y-3)^2 \geq 0,$$

$$(y-3)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq y-3 < 3 \quad \text{o}$$

$$(y-3)^2 \leq 9 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 6.$$

La forma general de la ecuación de la elipse es $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$, siempre que A y B sean del mismo signo.

¿Cuál es el dominio, rango y gráfica de

$$\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1 \quad \vee \quad \frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1;$$

$$\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1 \quad \vee \quad \frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1;$$

$$\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y+5)^2}{25} = 1 \quad \vee \quad \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1;$$

$$\frac{(x+3)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1 \quad \vee \quad \frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1;$$

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{36} = 1 \quad \vee \quad \frac{(x-4)^2}{36} + \frac{(y+5)^2}{16} = 1;$$

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-0)^2}{36} = 1 \quad \vee \quad \frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y-0)^2}{4} = 1;$$

$$\frac{(x+0)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1 \quad \vee \quad \frac{(x+0)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1;$$

Ahora, determinar respectivamente, el conjunto de los números reales que son el dominio y rango de $4x^2 - 9y^2 = 36$; y su gráfica.

Esta ecuación se puede escribir como

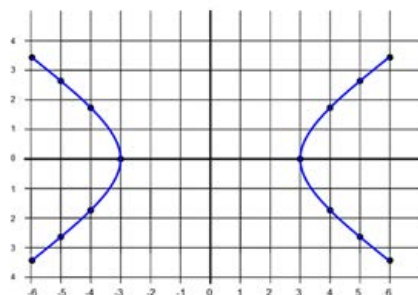
$$(x)^2 / 9 - (y)^2 / 4 = 1,$$

$$\frac{(x)^2}{9} + \frac{(y)^2}{4} = 1,$$

o mejor, $y = \pm \sqrt{\frac{4x^2 - 36}{9}}$, de donde el dominio es el conjunto de números reales declarado por $x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3$ ó $x \leq -3$, el cual también se puede escribir como $x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$, o en su lugar, $x \notin (-3, 3)$.

En $x = -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6$, los valores de y son reales y en $-3 < x < 3$ son complejos, lo cual significa que no están en el dominio de $y = \pm \sqrt{\frac{4x^2 - 36}{9}}$. En la tabla siguiente se muestran los valores calculados y en la gráfica los puntos (x, y) .

x	y	(x, y)
-6	± 3.4641	$(-6, \pm 3.4641)$
-5	± 2.6666	$(-5, \pm 2.6666)$
-4	± 1.7638	$(-4, \pm 1.7638)$
-3	0	$(-3, 0)$
3	0	$(3, 0)$
4	± 1.7638	$(4, \pm 1.7638)$
5	± 2.6666	$(5, \pm 2.6666)$
6	± 3.4641	$(6, \pm 3.4641)$



De conformidad con la gráfica, el rango es el conjunto de números reales declarado por $y \in (-\infty, \infty)$. Se ve que la gráfica es una hipérbola con centro en el origen, focos y vértices en el eje x ; como los vértices reales de la hipérbola son los puntos en los que la curva corta al eje real, entonces las coordenadas de éstos son $(-3, 0)$ y $(3, 0)$, y la de los focos son $(-\sqrt{13}, 0)$ y $(\sqrt{13}, 0)$.

De acuerdo con las potencias pares de x e y ; cálculos y gráfica, la curva es simétrica con respecto a los ejes x e y y con respecto al origen.

El eje real o transversal se denota por $A'A$ y su longitud es $|-3 - 3| = |3 - (-3)| = 2(3)$. El eje imaginario se denota por $B'B$ y su longitud es $|-2 - 2| = |2 - (-2)| = 2(2)$.

La excentricidad es $e = c/a = \sqrt{13} / 3$, porque $e = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{a}$, en la que $a = 3$ y $b = 2$.

Las ecuaciones de las directrices son $x = \pm a/e = 9 / \sqrt{13}$ y las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm (b/a)x = \pm 2x / 3$.

La hipérbola no es una función, es una relación y si los focos pertenecen al eje x , la expresión general de ésta es $Ax^2 - By^2 = 1$ y si éstos pertenecen al eje y , la expresión general de ésta es

$$Ax^2 - By^2 = -1$$

¿Bajo qué condiciones una hipérbola puede ser una función?

En cambio, si los ejes de la hipérbola son paralelos a los ejes x e y , la expresión general de ésta es $Ax^2 - By^2 + Dx + Ey + F = 0$, en la que A y B son del mismo signo.

¿Qué conjunto de números reales es dominio y rango, y cuál la gráfica de

a) $9x^2 - 4y^2 = 36$

b) $16x^2 - 25y^2 = 400$

c) $36y^2 - 9x^2 = 324$

d) $4x^2 - 25y^2 = 100$

e) $25x^2 - 16y^2 = 400$?

Determinar ahora el dominio, rango y gráfica de

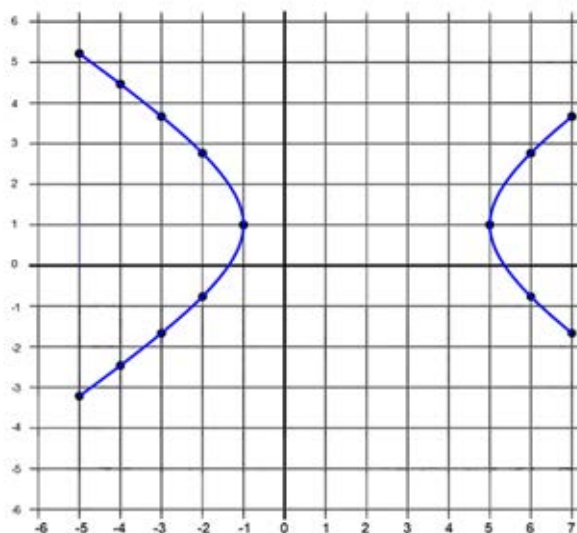
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Esta ecuación también se puede escribir como $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$, o bien,
 $y = 1 \pm \sqrt{\frac{4(x-2)^2 - 36}{9}}.$

De donde, el dominio es el conjunto de números reales especificada por $(x-2)^2 \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 5$ ó $x \leq -1$ y el rango es el conjunto de números reales tal que $y \in (-\infty, \infty)$.

En la tabla siguiente aparecen los valores x , los valores reales de y y los puntos (x, y) útiles para dibujar la gráfica.

x	$y = 1 \pm \sqrt{\frac{4(x^2 - 2) - 36}{9}}$	(x, y)
-5	$y = 1 \pm \sqrt{\frac{160}{9}} = \begin{cases} +5.2164 \\ -3.2163 \end{cases}$	$(-5, 5.2164)$ $(-5, -3.2163)$
-4	$y = 1 \pm \sqrt{\frac{108}{9}} = \begin{cases} +4.4641 \\ -2.4641 \end{cases}$	$(-4, 4.4641)$ $(-4, -2.4641)$
-3	$y = 1 \pm \sqrt{\frac{64}{9}} = \begin{cases} +3.6666 \\ -1.6666 \end{cases}$	$(-3, 3.6666)$ $(-3, -1.6666)$
-2	$y = 1 \pm \sqrt{\frac{28}{9}} = \begin{cases} +2.7638 \\ -0.7638 \end{cases}$	$(-2, 2.7638)$ $(-2, -0.7638)$
-1	$y = 1 \pm \sqrt{\frac{0}{9}} = 1.000$	$(-1, 1.000)$
5	$y = 1 \pm \sqrt{\frac{0}{9}} = 1.000$	$(5, 1.000)$
6	$y = 1 \pm \sqrt{\frac{28}{9}} = \begin{cases} +2.7638 \\ -0.7638 \end{cases}$	$(6, 2.7638)$ $(6, -0.7638)$
7	$y = 1 \pm \sqrt{\frac{64}{9}} = \begin{cases} +3.6666 \\ -1.6666 \end{cases}$	$(7, 3.6666)$ $(7, -1.6666)$



En $x \in (-1, 5)$, el valor de y es complejo, por lo que este intervalo no es dominio de la relación, pero sí parte de la hipérbola, como lo es el eje imaginario y el eje real.

$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$, pero sí parte de la hipérbola, como lo es el eje imaginario y el eje real.

La curva es una hipérbola con centro en $(2, 1)$, vértices en $(-1, 1)$, $(5, 1)$ y con focos $(2 - \sqrt{13}, 1)$ y $(2 + \sqrt{13}, 1)$. Como el eje real de esta hipérbola es paralela al eje x , el centro está en el primer cuadrante, $a = 3$ y $b=2$; entonces las ecuaciones de las asíntotas son $y = \pm \frac{2}{3}(x - 2)$.

Por último y por principio, la hipérbola es una relación y no una función. ¿De una hipérbola se puede definir una función?

En cada caso, ¿cuál es el dominio, rango y gráfica de

$$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+2)^2}{16} = 1;$$

$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{(y+4)^2}{36} + \frac{(x-2)^2}{25} = 1;$$

$$\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{(y-4)^2}{25} + \frac{(x+3)^2}{9} = 1;$$

$$\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{(y+1)^2}{16} + \frac{(x-5)^2}{4} = 1?$$

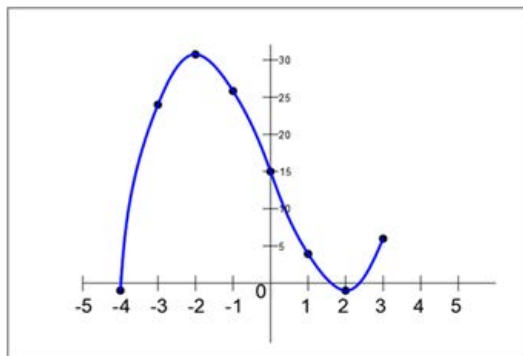
Sea $y = x^3 - 12x + 15$, ¿cuál es dominio, rango y gráfica?

Según se puede observar, la función dada no tiene rupturas, por lo que el dominio es el conjunto de los números reales, lo cual se puede expresar como $x \in R$ ó $x \in (-\infty, \infty)$. Igualmente el rango es también el conjunto de los números reales, o sea $y \in R$ ó $y \in (-\infty, \infty)$.

Para dibujar la gráfica de esta función, se define un dominio y enseguida, se calcula y , y, consecuentemente, los puntos (x, y) . Esta información figura en la tabla y gráfica siguientes.

$$y = x^3 - 12x + 15$$

x	y	(x, y)
-4	-1	(-4, -1)
-3	24	(-3, 24)
-2	31	(-2, 31)
-1	26	(-1, 26)
0	15	(0, 15)
1	4	(1, 4)
2	-1	(2, -1)
3	6	(3, 6)



Según la gráfica, en el punto $(-2, 31)$, se tiene un máximo relativo con respecto a los puntos situados a ambos lados de éste. Mientras en el punto $(2, -1)$, se tiene un mínimo relativo. La gráfica, como puede observarse, se intercepta con los ejes, las intercepciones con el eje x , corresponden a raíces reales de la función dada, mismas que no fueron calculadas.

¿Cuál es el dominio, rango y gráfica de

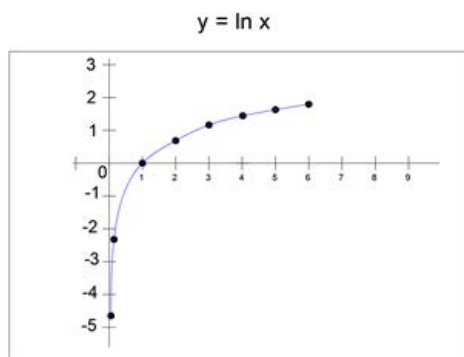
- $f(x) = x^3 - 2x^2 + 6$,
- $f(x) = (x^2 + 6x + 9)(x + 2)$,
- $f(x) = (x^2 + 10x + 25)(x)$,
- $f(x) = (x^2 - 4)(x + 5)$,
- $f(x) = (x^2 - 4x + 4)(x - 3)$,
- $f(x) = x^3 - 8x$,
- $f(x) = (x + 5)(x - 3)(x + 2)$?

Ahora, dibujar la gráfica de la función definida por $y = \ln x$ y determinar el dominio y rango.

El dominio es el conjunto de números reales definidos por $x > 0$ y rango es el conjunto de los números reales.

En la tabla siguiente están los números reales de y para un dominio definido de la función dada, así como los puntos (x, y) , los cuales se utilizarán para delinear la gráfica.

x	y	(x, y)
0.01	-4.605	(0.01, -4.605)
0.1	-2.302	(0.1, -2.302)
1	0	(1, 0)
2	0.6931	(2, 0.6931)
3	1.0986	(3, 1.0986)
4	1.3863	(4, 1.3863)
5	1.6094	(5, 1.6094)
6	1.7918	(6, 1.7918)



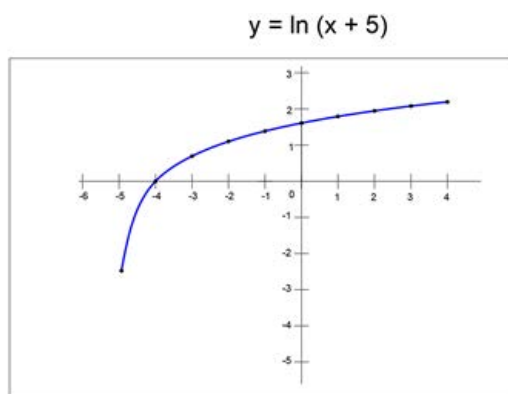
La gráfica de esta función sólo se intercepta con el eje x y lo hace en el punto $(1, 0)$.

De la misma manera, determinar dominio, rango y gráfica de $y = \ln(x + 5)$.

La función dada ya no es la función logarítmica natural. Conforme con esto, el dominio es el conjunto de números reales especificado por $x > -5$ y el rango es el conjunto de los números reales.

Los valores de x e y para trazar la gráfica de $y = \ln(x + 5)$ figuran en la tabla siguiente.

x	y	(x, y)
-4.9	-2.303	(-4.9, -2.303)
-4.6	-0.916	(-4.6, -0.916)
-3	0.6931	(-3, 0.6931)
-2	1.0986	(-2, 1.0986)
-1	1.3863	(-1, 1.3863)
0	1.6094	(0, 1.6094)
1	1.7918	(1, 1.7918)
2	1.9459	(2, 1.9459)
3	2.0794	(3, 2.0794)



La gráfica de $y = \ln(x + 5)$ intercepta al eje x en $(-4, 0)$ y al eje y en $(0, 1.6094)$.

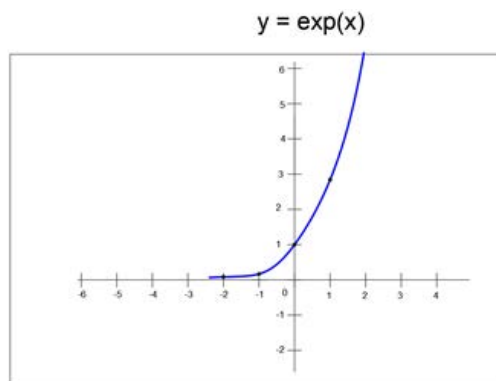
De $y = \ln(3x)$, $y = \ln(x - 8)$, $y = \ln(x + 8)$, $y = \ln(2x + 3)$, $y = \ln(3x - 4)$, $y = \ln(x/3 + 4)$, $y = \ln(x/2 - 8)$, $y = \ln(8 - x)$, $y = \ln(10 - x/2)$; ¿cuál es el dominio, rango y gráfica?

Determine lo mismo de $y = \ln(x) + 8$, $y = \ln(x) - 2$, $y = \ln(x + 3) + 5$, $y = \ln(x - 4) - 4$, $y = 2 \ln(x + 3) + 6$ e $y = 2 \ln(2x - 5) - 6$.

Ahora, después de determinar el dominio y rango de $y = e^x$, delinear su gráfica.

El dominio son todos los números reales y el rango son tales que $y > 0$ ó $y \in (0, \infty)$. Su gráfica puede observarse en la figura siguiente.

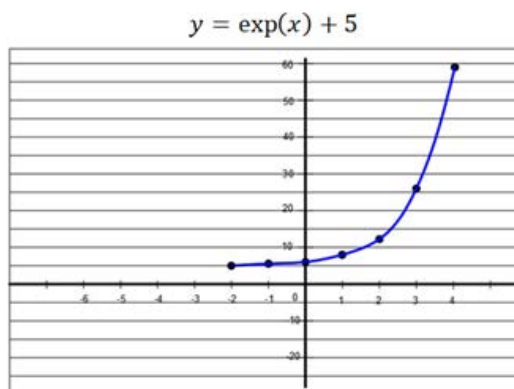
x	y	(x, y)
-2	0.1353	(-2, 0.1353)
-1	0.3679	(-1, 0.3679)
0	1	(0, 1)
1	2.7183	(1, 2.7183)
2	7.3891	(2, 7.3891)
3	20.086	(3, 20.086)
4	54.598	(4, 54.598)
5	148.41	(5, 148.41)
6	403.42	(6, 403.42)



Representar gráficamente a $y = e^x + 5$ y determinar su dominio y rango.

El dominio son todos los números reales y el rango es el conjunto de números definidos por $y > 0$ ó $y \in (5, \infty)$. La representación gráfica se puede observar en la figura siguiente.

x	y	(x, y)
-2	5.1353	(-2, 5.1353)
-1	5.3679	(-1, 5.3679)
0	6	(0, 6)
1	7.7183	(1, 7.7183)
2	12.389	(2, 12.3891)
3	25.086	(3, 25.086)
4	59.598	(4, 59.598)
5	153.41	(5, 153.41)
6	408.42	(6, 408.42)



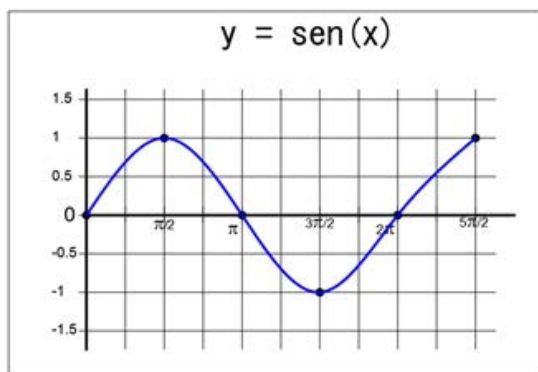
¿Cuál es el dominio, rango y gráfica de $y = -e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 2e^x$, $y = -2e^x$, $y = e^x + 2$, $y = e^{-x} + 4$, $y = -e^{-x} + 5$, $y = e^{-x} - 3$?

Se continúa con la determinación del dominio, rango y gráfica de $f(x) = \text{sen } x$.

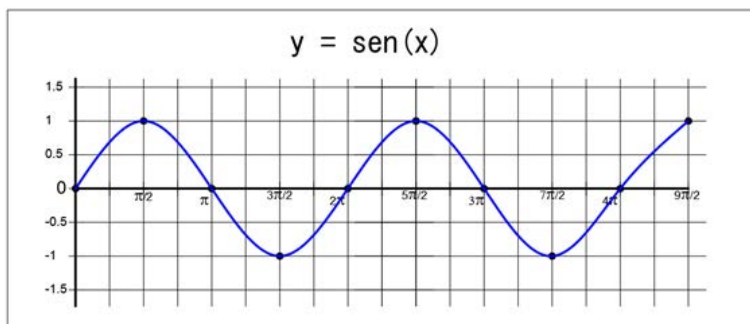
El dominio de esta función son todos los números reales y el rango es el conjunto de números reales definidos por el intervalo $[-1, 1]$. La gráfica se puede ver en la figura siguiente.

$$y = \text{sen } x$$

x	y	(x, y)
0	$\text{sen}(0)$	(0, 0)
$\pi/2$	$\text{sen}(\pi/2)$	$(\pi/2, 1)$
π	$\text{sen}(\pi)$	$(\pi, 0)$
$3\pi/2$	$\text{sen}(3\pi/2)$	$(3\pi/2, -1)$
2π	$\text{sen}(2\pi)$	$(2\pi, 0)$



Según la gráfica, $y = \text{sen } x$, tiene un máximo relativo en $(\pi/2, 1)$ y un mínimo relativo en $(3\pi/2, -1)$. Como el periodo de esta función es 2π , ésta repite sus valores cada 2π . Ver la figura siguiente.

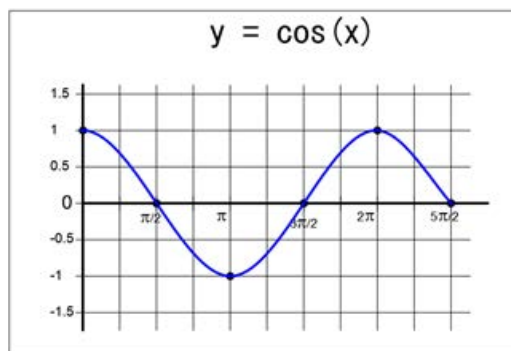


$y = \text{sen } x$, se anula en πk , $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Dicho de otra manera, $0, \pi, 2\pi, \dots, k\pi$, son las raíces reales de $y = \text{sen } x$. La periodicidad también se cumple a la izquierda del origen.

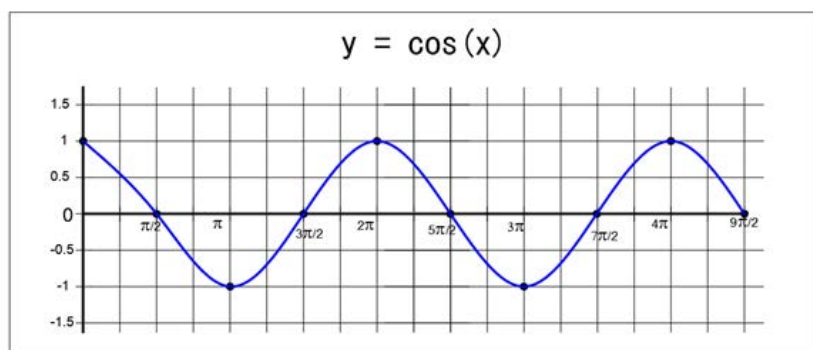
Ahora, después de establecer el dominio y rango, dibujar la gráfica de $y = \cos x$.

El dominio natural de $y = \cos x$, son los números reales y el rango es el conjunto de números reales definidos por $[-1, 1]$. La gráfica se muestra en la figura siguiente.

x	y	(x, y)
0	$\text{sen}(0)$	$(0, 1)$
$\pi/2$	$\text{sen}(\pi/2)$	$(\pi/2, 0)$
π	$\text{sen}(\pi)$	$(\pi, -1)$
$3\pi/2$	$\text{sen}(3\pi/2)$	$(3\pi/2, 0)$
2π	$\text{sen}(2\pi)$	$(2\pi, 1)$



Según la gráfica, $y = \cos x$, tiene un máximo relativo en $(0, 1)$ y un mínimo relativo en $(\pi, -1)$. Como esta función es periódica, de periodo 2π , los valores de ésta, se repiten en cada periodo. Ver la figura siguiente.



Las raíces de $y = \cos x$, son los números reales dados por $k\pi/2$, para k impar. La periodicidad de esta función también se cumple a la izquierda del origen.

16.2 Desigualdades

En cada caso, hallar el conjunto solución

1. $x + 2 < 2x + 1$. De acuerdo con las propiedades de las desigualdades, se tiene que

$$x - 2x < 1 - 2,$$

$$-x < -1,$$

$$x > 1.$$

$$x \in (1, \infty) \text{ ó } x \in (-\infty, 1], \text{ o bien,}$$

$$2 - 1 < 2x - x \text{ y } 1 < x, \text{ por definición de desigualdad,}$$

$$x > 1.$$

2. $x/5 - 1/3 < 2x/3 + 1/5$. Después de resolver, se obtiene que

$$(3x - 5)/15 < (10x + 3)/15,$$

$$3x - 5 < 10x + 3,$$

$$-5 - 3 < 10x - 3x,$$

$$-8 < 7x,$$

$-8/7 < x$, o bien, $x > -8/7$, lo cual también se puede expresar como

$$x \in \left(-\frac{8}{7}, \infty\right).$$

También multiplicando por 15, se obtiene

$$3x - 5 < 10x + 3,$$

$$3x - 10x < 3 + 5,$$

$$-7x < 8,$$

$$7x > -8,$$

$x > -8/7$, lo cual significa que

$$x \in \left(-\frac{8}{7}, \infty\right) \text{ ó } x \notin \left(-\infty, -\frac{8}{7}\right].$$

¿Qué conjunto de números reales satisfacen a

$$3x - 5 > x - 3,$$

$$6 - 2x > 5 - x,$$

$$3x/2 - 5/7 < x/3 + 7/2,$$

$$2x/5 - 4 < x/4 + 7,$$

$$x/3 - 2 < 5x/2 - 2/5,$$

$$7x/2 + 2/3 < x/5 - 3/4,$$

$$5/2 - 27/3 > 7/2 - x/3 \text{ y}$$

$$3/4 + x/3 > 5/3 - x/4?$$

3. $(x + 1)/(x - 3) < 4$. El conjunto solución depende de la condición que impone el cociente, es decir, para evitar el cero, se formulan las dos condiciones siguientes.

i) Si $x - 3 < 0$, ó $x < 3$. Entonces

$$x + 1 > 4(x - 3)$$

$$x + 1 > 4x - 12$$

$$1 + 12 > 3x$$

$$13/3 > x$$

$$x < 13/3.$$

ii) $x - 3 > 0$, $x > 3$

ii) Si $x - 3 > 0$, ó $x > 3$. Entonces

$$x + 1 < 4(x - 3)$$

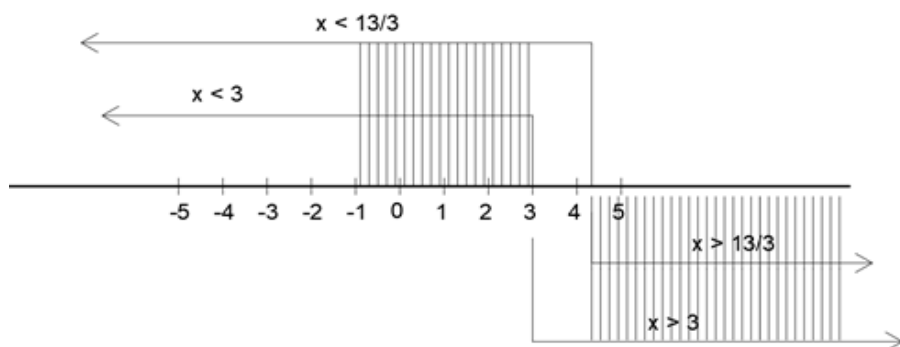
$$x + 1 < 4x - 12$$

$$13 < 3x$$

$$13/3 < x$$

$$x > 13/3.$$

El conjunto solución para la condición $x < 3$, es la intersección de $x < 13/3$ y $x < 3$, o sea, $x \in (-\infty, 3)$. El conjunto solución para $x > 3$, también es la intersección de $x > 13/3$ y $x > 3$, es decir, $x \in (13/3, \infty)$. Consecuentemente, el conjunto solución para la desigualdad planteada es la unión de los dos conjuntos solución o de las dos soluciones parciales, la cual es $x \in (-\infty, 3) \cup (13/3, \infty)$ ó $x \notin [3, 13/3]$. Ver la figura siguiente



¿En qué se modifica el conjunto solución si $\frac{x+1}{x-3} > 4$?

¿Qué valores de x satisface a

$$(2x+1)/(x-2) > 1,$$

$$(2x-1)/(x+5) \geq 2,$$

$$(x+2)/(x-8) < 3,$$

$$(2x-1)/(x+9) \leq 5,$$

$$(3x+2)/(2x-10) > 5,$$

$$(5x-4)/(2x-12) \geq 7 \text{ y}$$

$$(3x-2)/(3x+15) \leq 2?$$

4. $|2x+5| < 10$. Según las propiedades del valor absoluto,

$$|2x+5| < 10 \Leftrightarrow -10 < 2x+5 < 10$$

$$-15 < 2x < 5$$

$$-15/2 < x < 5/2$$

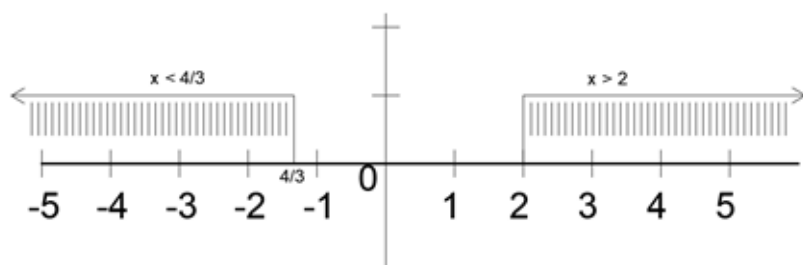
Por consiguiente, el conjunto solución es el intervalo abierto $(-15/2, 5/2)$. La solución también se puede expresar como $x \notin (-\infty, -15/2] \cup [5/2, \infty)$ ó $x \notin (-15/2, 5/2)$.

Si $b > 0$, $|x| < b \Leftrightarrow -b < x < b$. Esta propiedad de la desigualdad es fundamental para resolver lo planteado. No olvidar que otra propiedad es: si $b > 0$, $|x| > b \Leftrightarrow x > b$ o bien $x < -b$.

¿En qué se modifica el conjunto solución si $|2x + 5| \leq 10$?

5. $|3x - 1| > 5$. El conjunto solución de esta desigualdad es $3x - 1 > 5$ ó bien, $3x - 1 < -5$

$x > 2$ o bien $x < -4/3$. Ver la figura siguiente.



De aquí, el conjunto solución es tal que $x \in (-\infty, -4/3) \cup (2, \infty)$ ó $x \notin [-4/3, 2]$

¿Cuál es el conjunto solución si $|3x - 1| \geq 5$?

¿Qué valores de x satisfacen a

$$|x + 7| > 8,$$

$$|2x + 3| \geq 6,$$

$$|x - 5| > 2,$$

$$|x - 8| > 6,$$

$$|2x/3 + 2| \geq 3 \text{ y } |x/3 - 6| \geq 1;$$

$$|x + 10| < 4,$$

$$|2x + 3| \leq 9,$$

$$|2x - 3| < 2,$$

$$|3x - 5| \leq 5,$$

$$|x/2 - 3/5| < 7,$$

$$|2x/5 - 3/4| \leq 7,$$

$$|5 - 8x| < 3,$$

$$|8 - x| \leq 0,$$

$$|10 - 3x| < 2 \text{ y } |2/3 - x/6| \geq 2?$$

6. $|(x + 6)/(x - 5)| \leq 4$. Sabiendo que $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, entonces $|(x + 6)/(x - 5)| \leq 4$ es equivalente a $-4 \leq (x + 6)/(x - 5) \leq 4$ ó

$$-4 \leq (x + 6)/(x - 5), (x + 6)/(x - 5) \leq 4$$

Como la división entre cero no está definida, entonces para resolver esta desigualdad se deben considerar las restricciones

- i) $x - 5 < 0$ ó bien, $x < 5$;
- ii) $x - 5 > 0$, ó bien, $x > 5$; así como la propiedad: si $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $-a < -b$, entonces $a > b$. En consecuencia se tiene que
- i) Si $x < 5$. Entonces

$$-4(x - 5) \geq x + 6$$

$$x + 6 \geq 4(x - 5)$$

$$-4x + 20 \geq x + 6$$

$$x + 6 \geq 4x - 20$$

$$20 - 6 \geq 5x$$

$$26 \geq 3x$$

$$14 \geq 5x$$

$$26/3 \geq x$$

$$14/5 \geq x$$

$$x \leq 26/3$$

$$x \leq 14/5$$

ii) Si $x > 5$. Entonces

$$-4(x - 5) \leq x + 6$$

$$x + 6 \leq 4(x - 5)$$

$$-4x + 20 \leq x + 6$$

$$x + 6 \leq 4x - 20$$

$$20 - 6 \leq 5x$$

$$6 + 20 \leq 4x - x$$

$$14 \leq 5x$$

$$26 \leq 3x$$

$$14/5 \leq x$$

$$26/3 \leq x$$

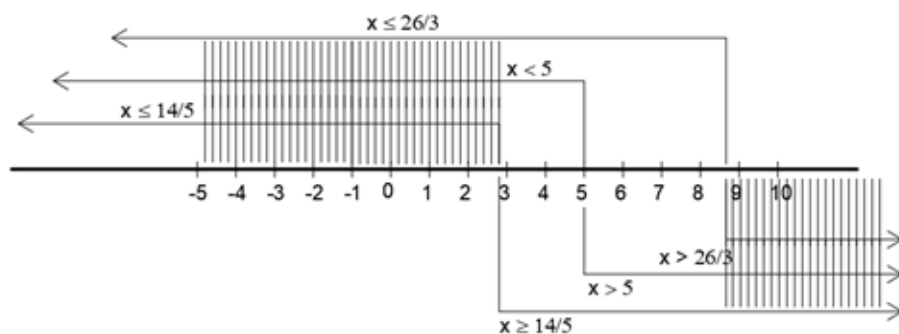
$$x \geq 14/5$$

$$x \geq 26/3$$

De donde, si $x < 5$, la solución parcial es la intersección de $x < 5$, $x \leq 14/5$ y $x \leq 26/3$, es decir se tiene como conjunto solución, el intervalo $(-\infty, 14/5]$. Si $x > 5$, la solución parcial es la intersección de $x > 5$, $x \geq 14/5$ y $x \geq 26/3$, esto es, se tiene como conjunto solución, el intervalo $[26/3, \infty)$.

Como $(-\infty, 14/5]$ y $[26/3, \infty)$ son soluciones parciales de la desigualdad original, entonces la solución de ésta, es la unión de éstas, la cual es

$x \in (-\infty, 14/5] \cup [26/3, \infty)$ ó $x \notin (14/5, 26/3)$. Ver la figura siguiente.



En $x = 14/5$ y $x = 26/3$, se cumple la igualdad; y en $(-\infty, 14/5)$ y $(26/3, \infty)$ se cumple la desigualdad; mientras que en $(14/5, 26/3)$ lo propuesto no se cumple. En efecto, para $x = 14/5$,

$$\left| \frac{\frac{14}{5} + 6}{\frac{14}{5} - 5} \right| = 4, \text{ o bien, } -(-4) = 4; \text{ y para } x = 26/3,$$

$$\left| \frac{\frac{26}{3} + 6}{\frac{26}{3} - 5} \right| = 4, \text{ o bien, } |44/11| = 4.$$

Para $x \in (-\infty, 14/5)$, a medida que x decrece, $|(x+6)/(x-5)|$ se acerca a 1, a través de valores menores que 4, lo cual significa que la desigualdad se cumple; del mismo modo, para $x \in (26/3, \infty)$, a medida que x crece, $|(x+6)/(x-5)|$ tiende a 1, a través de valores menores, lo que significa que la desigualdad original es verdadera.

¿En qué se modifica la solución si $|(x+6)/(x-5)| < 4$?

7. $|(x+6)/(x-5)| \geq 4$. Sabiendo que si $b > 0$, $|x| \geq b \Leftrightarrow x \geq b$ ó $-x \geq b$, entonces por semejanza

$$\left| \frac{x+6}{x-5} \right| \geq 4 \text{ es equivalente a } \frac{x+6}{x-5} \geq 4 \text{ ó } -\frac{x+6}{x-5} \geq 4, \text{ o bien,}$$

$$\frac{x+6}{x-5} \geq 4 \text{ ó } \left| \frac{x+6}{x-5} \right| \leq -4, \frac{x+6}{x-5} \leq -4$$

La solución de esta desigualdad depende de las restricciones i) $x < 5$ y ii) $x > 5$. Luego de tomar en cuenta este hecho y organizar el proceso de solución, ésta es:

- i) Si $x < 5$. Entonces

$$x + 6 \leq 4(x - 5)$$

$$x + 6 \geq -4(x - 5)$$

$$x + 6 \leq 4x - 20$$

$$x + 6 \geq -4x + 20$$

$$26 \leq 3x$$

$$5x \geq 20 - 6$$

$$26/3 \leq x$$

$$5x \geq 14$$

$$x \geq 26/3$$

$$x \geq 14/5$$

ii) Si $x > 5$. Entonces

$$x + 6 \geq 4(x - 5)$$

$$x + 6 \leq -4(x - 5)$$

$$x + 6 \geq 4x - 20$$

$$x + 6 \leq -4x + 20$$

$$26 \geq 4x - x$$

$$x + 6 \leq -4x + 20x$$

$$26 \geq 3x$$

$$x + 4x \leq 20 - 6$$

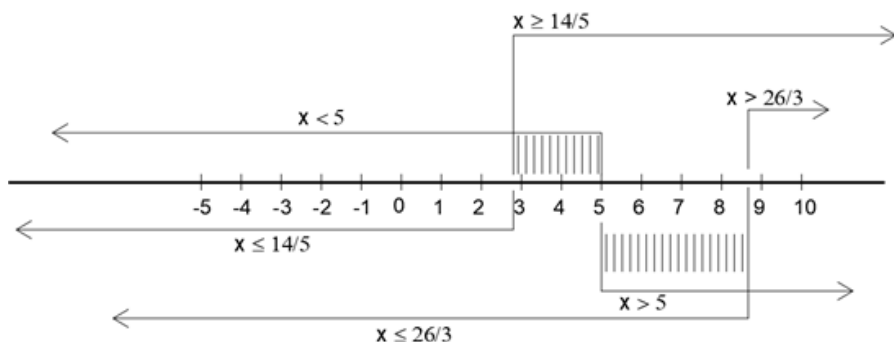
$$26/3 \geq x$$

$$5x \leq 14$$

$$x \leq 26/3;$$

$$x \leq 14/5.$$

Para determinar la solución de esta desigualdad, se hace gráficamente, o sea, las restricciones e intervalos solución se trazan sobre la recta numérica; siendo una solución parcial la intersección, si existe, de $x < 5$, $x \geq 26/3$ y $x \geq 14/5$; mientras que la otra solución es, si existe, la intersección de $x > 5$, $x \leq 26/3$ y $x \leq 14/5$. En ambos casos, se observa que las restricciones no se interceptan con los dos intervalos que se obtienen como solución. Ver la figura siguiente:



De acuerdo con la gráfica, si una solución es la intersección de $x < 5$ y $x \geq 14/5$, entonces es tal que $x \in [14/5, 5)$; mientras que la otra es el conjunto de números determinados por la intersección de $x > 5$ y $x \leq 26/3$, es decir, $x \in (5, 26/3)$, por consiguiente, la solución de la desigualdad dada es tal que $x \in [\frac{14}{5}, \frac{26}{3}) - \{5\}$ ó $x \notin (-\infty, 14/5) \cup (26/3, \infty) + \{5\}$.

En $x = 14/5$, se cumple la igualdad, es decir, $\left| \frac{\frac{14}{5} + 6}{\frac{14}{5} - 5} \right| = 4$, o bien, $\left| \frac{44}{-11} \right| = 4$. Lo mismo ocurre en $x = 26/3$, o sea, $\left| \frac{\frac{26}{3} + 6}{\frac{26}{3} - 5} \right| = 4$, o mejor, $\left| \frac{44}{11} \right| = 4$.

También, se observa que en $(\frac{26}{3}, \infty)$ y a medida que x crece, $\frac{x+6}{x-5}$ se acerca a uno, por lo que en tal intervalo no es posible que se cumpla $\left| \frac{x+6}{x-5} \right| \geq 4$. Algo semejante ocurre en $(-\infty, 14/3)$.

Asimismo, debe notarse que mientras $x < 5$ no se intercepta con $x \geq 26/3$, $x > 5$ tampoco se intercepta con $x \leq 14/5$.

¿Qué cambia en la solución si en lugar de resolver $\left| \frac{x+6}{x-5} \right| \geq 4$, la desigualdad que se resuelve es $\left| \frac{x+6}{x-5} \right| > 4$?

¿Cuáles son los valores de x que satisfacen a

$$|(x-5)/(x-4)| < 7, |(x-3)/(x-2)| \leq 5,$$

$$|(2x+3)/(x-3)| < 6, |(3x+4)/(x-5)| \leq 6,$$

$$|(5x-7)/(x+4)| < 9, |(6x-5)/(x+3)| \leq 7,$$

$$|(2x+3)/(3x+7)| < 9 \text{ y } |(3x-5)/(2x-5)| \leq 7;$$

$$|(x+3)/(x+5)| > 7, |(x+5)/(x+3)| \geq 5$$

$$|(x-7)/(x+2)| > 7, |(x-1)/(x+2)| \geq 8,$$

$$|(2x+5)/(x-3)| > 4 \text{ y } |(4x+1)/(2x-5)| \geq 9;$$

$$|8/(x+5)| < 10, |7/(2x+10)| > 4,$$

$$|9/(2x-4)| \leq 5, |10/(3x-6)| \geq 4,$$

$$5 \leq |(3x+5)/(2x-1)|, 6 \geq |(2x+9)/(2x-8)|,$$

$$|3/(x+4)| > 5 \text{ y } |7/(2x-10)| \geq 3?$$

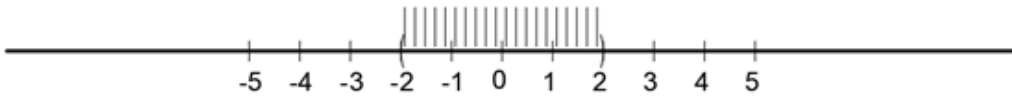
16.3 Desigualdades cuadráticas

¿Qué conjunto de números reales satisfacen a las desigualdades cuadráticas siguientes?

Toda desigualdad que se puede reducir a $Q < 0$ y $Q \leq 0$; $Q > 0$ y $Q \geq 0$, donde Q es un polinomio de segundo orden, es una desigualdad cuadrática.

1. $x^2 < 4$. Para hallar el conjunto solución se aplica $a^2 < b \Leftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$, $b > 0$, es decir, $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

De esta manera, la solución es el intervalo $(-2, 2)$, o bien, $x \notin (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. Ver la figura siguiente:



Otra forma de resolver $x^2 < 4$. Después de tener cero en un lado del signo de desigualdad y factorizar, se obtiene $x^2 - 4 < 0$

$$(x - 2)(x + 2) < 0$$

Esta desigualdad sólo se satisface cuando los dos factores tengan signos diferentes, o sea, $x - 2 < 0$ y $x + 2 > 0$, es decir $x < 2$ y $x > -2$. Las dos desigualdades son válidas en $(-2, 2)$, lo que significa que este intervalo es la solución, o bien, $x \notin (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, lo cual equivale a $x - 2 \geq 0$ y $x + 2 \leq 0$.

2. $x^2 \geq 16$. Sabiendo que $a^2 > b$ equivale a $a \geq \sqrt{b}$ ó $a \leq -\sqrt{b}$, con $b > 0$. Entonces, $x^2 \geq 16$ equivale a $x \geq 4$ ó $x \leq -4$.

De aquí que la solución es la unión de estos dos conjuntos, esto es, $x \in (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$ ó $x \notin (-4, 4)$.

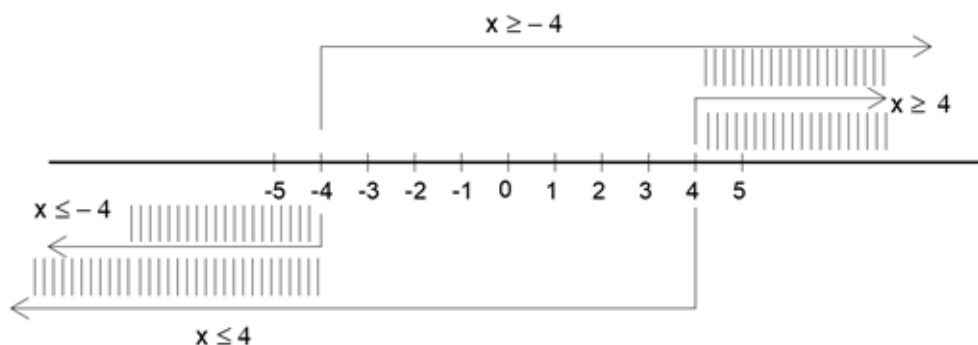
Para hallar el conjunto solución de otro modo, luego de que un lado del signo de la desigualdad dada tenga un cero y factorizar, se tiene que

$$x^2 - 16 \geq 0 \text{ ó}$$

$$(x - 4)(x + 4) \geq 0.$$

De acuerdo con la regla de los signos, esta desigualdad sólo se cumple cuando los dos factores tengan el mismo signo, o sea, $x - 4 \geq 0$ y $x + 4 \geq 0$, o bien, $x - 4 \leq 0$ y $x + 4 \leq 0$.

De $x - 4 \geq 0$ y $x + 4 \geq 0$; $x \geq 4$ y $x \geq -4$. Se observa que las dos desigualdades son válidas en el intervalo en el que ambas se interceptan, es decir, en $x \geq 4$, cuyo intervalo es una solución parcial. Ahora, si $x - 4 \leq 0$ y $x + 4 \leq 0$. Esto es, $x \leq 4$ y $x \leq -4$. Se ve que las dos desigualdades se cumplen en la intercepción de ambos, o sea, en $x \leq -4$, cuyo intervalo es una solución parcial. Ver la figura siguiente:



De aquí, la solución de la desigualdad dada es la unión de los conjuntos $x \geq 4$ y $x \leq -4$, es decir, tal conjunto es $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$, o bien, $x \notin (-4, 4)$.

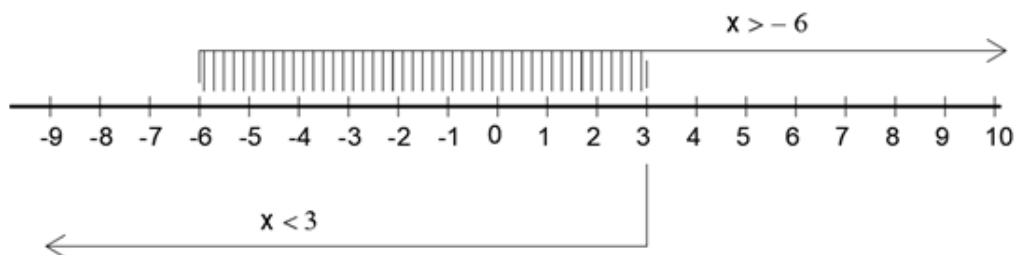
¿Qué conjunto de números reales es solución de $(2x)^2 < 4$ y $(3x)^2 \leq 9$; $x^2 < 3$ y $x^2 \leq 5$; $(4x)^2 > 6$ y $(5x)^2 \geq 100$; $x^2 > 7$ y $x^2 \geq 13$?

3. $x^2 < -3x + 18$. Para hallar el conjunto solución, la desigualdad dada se expresa como $x^2 + 3x - 18 < 0$ ó $(x - 3)(x + 6) < 0$. Conforme a la regla de los signos, la desigualdad es satisfecha si, y sólo si $x - 3 < 0$ y $x + 6 > 0$, o bien, $x - 3 > 0$ y $x + 6 < 0$.

Cuando $x - 3 < 0$ y $x + 6 > 0$, $x < 3$ y $x > -6$. De donde, el conjunto solución son los números reales comunes a $x < 3$ y $x > -6$, es decir, $x \in (-6, 3)$.

Para cuando $x - 3 > 0$ y $x + 6 < 0$, se tiene que $x > 3$ y $x < -6$. Se puede observar que entre estos conjuntos no hay intersección, por lo que el conjunto solución corresponde al vacío.

Por consiguiente, el conjunto solución de la desigualdad es el conjunto $-6 < x < 3$, porque $\{x | -6 < x < 3\} \cup \emptyset = \{x | -6 < x < 3\}$ o bien, $x \notin (-\infty, -6] \cup [3, \infty)$. Ver la figura siguiente:



4. $x^2 > -x + 12$. Para hallar los valores de x que satisfagan la desigualdad dada, ésta se expresa como

$$x^2 + x - 12 > 0 \text{ ó}$$

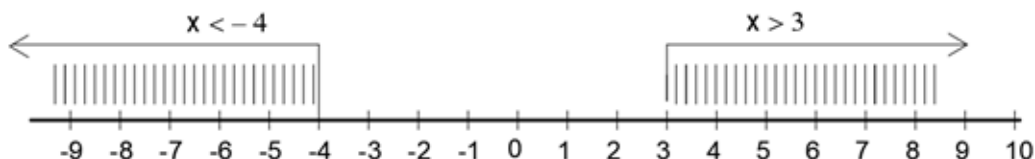
$$(x - 3)(x + 4) > 0$$

Según la regla de los signos, el producto de dos factores es positivo si, y sólo si ambos tienen el mismo signo. Luego, la desigualdad se satisface si, y sólo si $x - 3 > 0$ y $x + 4 > 0$, o bien, $x - 3 < 0$ y $x + 4 < 0$.

Cuando $x - 3 > 0$ y $x + 4 > 0$; $x > 3$ y $x > -4$. Estas desigualdades son válidas en la intersección de éstas, esto es, en $x > 3$, en consecuencia, el conjunto solución es $x \in (3, \infty)$.

Cuando $x - 3 < 0$ y $x + 4 < 0$, $x < 3$ y $x < -4$. Se puede ver que estas desigualdades son verdaderas en $x < -4$, cuyo intervalo es la intersección de éstas, de donde, el conjunto solución es $x \in (-\infty, -4)$.

Por consiguiente, el conjunto solución de la desigualdad es la unión de los conjuntos $\{x | x > 3\} \cup \{x | x < -4\}$, o sea, $x \in (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$ ó $x \notin [-4, 3]$. Ver la figura siguiente:



5. $(3x - 2)/(x + 5) < 6$. Para hallar los valores de x que satisfagan la desigualdad propuesta, ambos lados de ésta se multiplican por $(x + 5)^2$, o sea,

$$\frac{(3x-2)(x+5)^2}{(x+5)} < 6(x+5)^2$$

$$(3x-2)(x+5) < 6(x^2+10x+25)$$

$$3x^2 + 15x - 2x - 10 < 6x^2 + 60x + 150$$

$$3x^2 + 13x - 10 < 6x^2 + 60x + 150$$

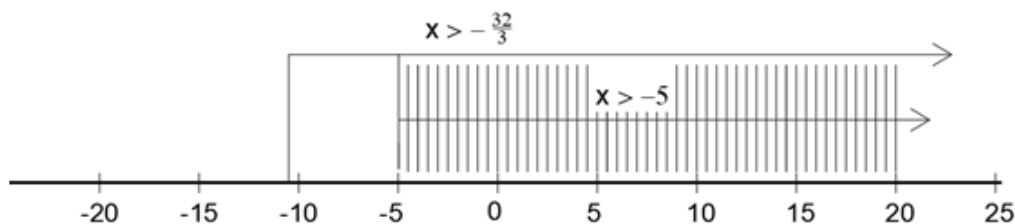
$$3x^2 - 6x^2 + 13x - 60x - 10 - 150 < 0$$

$$3x^2 + 47x + 160 > 0$$

$$\frac{(3x+15)(3x+32)}{3} > 0$$

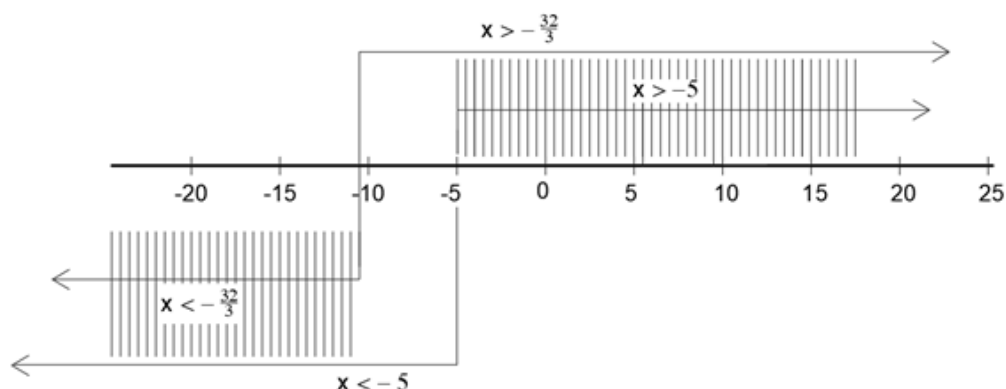
$$(x+5)(3x+32) > 0$$

Esta desigualdad se cumple si ambos factores son positivos o negativos. Para cuando $x+5 > 0$ y $3x+32 > 0$, $x > -5$ y $x > -32/3$. En este caso, el conjunto solución es la intersección de estos conjuntos, es decir, $x > -5$ ó $x \in (-5, \infty)$. Ver la figura siguiente:

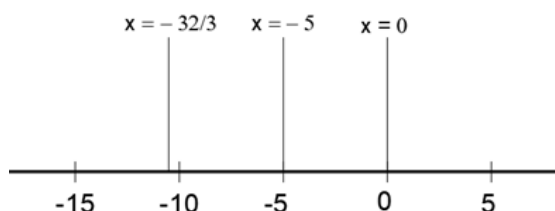


Para cuando $x+5 < 0$ y $3x+32 < 0$, $x < -5$ y $x < -32/3$. En este caso se puede observar que estas desigualdades se cumplen en $x < -32/3$, es decir, en los valores comunes a estos conjuntos. En consecuencia, el conjunto solución es el intervalo $(-\infty, -32/3)$.

Por lo tanto, el conjunto solución de la desigualdad dada es la unión de los conjuntos $(-\infty, -32/3)$ y $(-5, \infty)$, es decir, $(-\infty, -32/3) \cup (-5, \infty)$ ó $x \notin [-32/3, -5]$. Ver la figura siguiente:



Otra forma de encontrar el conjunto solución de la desigualdad dada. Se observa, respectivamente, que cuando x es -5 y $-32/3$, los factores $x + 5$ y $3x + 32$, son cero. Estos números definen los intervalos $(-\infty, -32/3)$, $(-32/3, -5)$ y $(-5, \infty)$, los cuales no se traslapan. Ver la figura siguiente:



Mediante valores de prueba se pueden determinar los signos de $x + 5$ y $3x + 32$ en cada intervalo y, consecuentemente, aplicando las leyes de los signos, se obtiene el signo resultante. La forma de cómo hacerle, se muestra en seguida.

$x = -32/3$

$x = -5$

-20	-15	-10	-5	0	5
signos de $x + 5$	(-)	(-)	(+)		
signos de $3x + 32$	(-)	(+)	(+)		
signo resultante	(-)(-) = +	(-)(+) = -	(+)(+) = +		

Como las soluciones de $(x + 5)(3x + 32) > 0$ son los valores de x para los cuales el signo resultante es positivo, entonces la solución de $(3x - 2)/(x + 5) < 6$ es, según se puede ver en la figura anterior, la unión $(-\infty, -32/3) \cup (-5, \infty)$ ó $x \notin [-32/3, -5]$, en cuyo intervalo $[-32/3, -5]$ la solución es $\emptyset$.

¿Qué valores de x satisfacen a

$$x^2 + 9x + 20 > 0 \text{ y } x^2 + 9x + 20 < 0;$$

$$x^2 + 4x < -3 \text{ y } x^2 > -4x - 3;$$

$$x^2 - 4x < 0 \text{ y } x^2 - 4x > 0;$$

$$x^2 + 2x \leq 15 \text{ y } x^2 + 2x > 15;$$

$$x^2 < -x + 20 \text{ y } x^2 + x > 20;$$

$$(x + 2)/(x - 7) < 2 \text{ y } (x + 2)/(x - 7) \geq 2;$$

$$(3x + 5)/(2x - 1) < 6 \text{ y } (2x + 6)/(2x - 1) > 5?$$

16.4 Ecuaciones con valor absoluto

Si a es un número real, entonces de acuerdo con la definición de valor absoluto,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

En esta definición a puede ser x , o bien, una expresión algebraica, entre otras. Por ejemplo

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad \text{y}$$

$$|E| = \begin{cases} E & \text{si } E \geq 0 \\ -E & \text{si } E < 0. \end{cases}$$

donde E es una expresión diferente al símbolo a y a la x .

En cada caso, ¿qué valores de x satisfacen la ecuación?

1. $|x| = a$. Según se puede ver, esta ecuación se satisface si $x = a$, o bien, si $-x = a$. En consecuencia, el conjunto solución es $\{-a, a\}$.
2. $|x + 4| = 5$. Esta ecuación se satisface si $x + 4 = 5$, o bien, si $-(x + 4) = 5$.

Luego de resolver cada ecuación, se tiene que $x = 1$ y $x = -9$.

Por consiguiente, el conjunto solución de $|x + 4| = 5$ es $\{-9, 1\}$.

3. $|2x + 3| = x - 3$. Como el valor absoluto no puede ser igual a un número negativo, entonces el lado derecho debe ser tal que $x - 3 \geq 0$, lo cual significa que si la ecuación tiene solución, los valores de x que la satisfagan, estarán en $x \geq 3$.

Esta ecuación puede ser satisfecha por $2x + 3 = x - 3$, o bien, por $-(2x + 3) = x - 3$.

Como los valores de x que, respectivamente, satisfacen a estas ecuaciones son $x = -6$ y $x = 0$, no están en $x \geq 3$, entonces la ecuación dada no tiene solución, por lo que ésta es una proposición falsa.

4. $|3x - 6| = |7 - 4x|$. Esta ecuación puede ser satisfecha por $3x - 6 = |7 - 4x|$, o bien, por $-(3x - 6) = |7 - 4x|$. De igual manera, la primera de las dos últimas ecuaciones puede ser satisfecha por $7 - 4x = 3x - 6$, o bien, por $-(7 - 4x) = 3x - 6$. Enseguida, se resuelven las dos últimas ecuaciones

$$3x - 6 = 7 - 4x$$

$$-7 + 4x = 3x - 6$$

$$7x = 13$$

$$x = 1$$

$$x = 13/7$$

Igualmente, la ecuación $6 - 3x = |7 - 4x|$ puede ser satisfecha por $7 - 4x = 6 - 3x$, o bien, por $-(7 - 4x) = 6 - 3x$.

A continuación se resuelven las dos últimas ecuaciones

$$7 - 4x = 6 - 3x$$

$$-7 + 4x = 6 - 3x$$

$$x = 1$$

$$x = 13/7$$

Como $x = 1$ satisface a las ecuaciones $7 - 4x = 6 - 3x$, $6 - 3x = |7 - 4x|$ y a $|3x - 6| = |7 - 4x|$; y $x = 13/7$ satisface a $-7 + 4x = 6 - 3x$, $6 - 3x = |7 - 4x|$ y a $|3x - 6| = |7 - 4x|$; en consecuencia, el conjunto solución de $|3x - 6| = |7 - 4x|$ es $\{1, 13/7\}$.

5. $|(x - 8)/(x + 8)| = 2$. A esta ecuación la satisface

$$(x - 8)/(x + 8) = 2, \text{ o bien, } -(x - 8)/(x + 8) = 2$$

Después de resolver estas ecuaciones se obtiene el conjunto solución.

$$(x - 8)/(x + 8) = 2$$

$$(x - 8)/(x + 8) = -2$$

$$x - 8 = 2x + 16$$

$$x - 8 = -2x - 16$$

$$-8 - 16 = x$$

$$3x = -16 + 8$$

$$x = -24$$

$$x = -8/3$$

En consecuencia, $\{-24, -8/3\}$ es el conjunto solución.

6. $|(x - 4)/(x + 4)| = x - 2$. Esta ecuación es equivalente a

$$(x - 4)/(x + 4) = x - 2 \text{ y } -(x - 4)/(x + 4) = x - 2$$

En seguida se resuelve cada ecuación

$$x - 4 = (x - 2)(x + 4)$$

$$-(x - 4) = x^2 + 2x - 8$$

$$x - 4 = x^2 + 2x - 8$$

$$-x + 4 = x^2 + 2x - 8$$

$$0 = x^2 + x - 4$$

$$0 = x^2 + 3x - 12$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x^2 + 3x - 12 = 0$$

$$-(x - 4) = (x - 2)(x + 4)$$

A continuación se encuentra las raíces de cada ecuación. Para que los números obtenidos sean solución de $(x-4)/(x+4) = x-2$ deben pertenecer a $x \geq 2$.

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x^2 + 3x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{57}}{2}$$

$$x = \frac{-3 - \sqrt{57}}{2}$$

De los dos y dos números que, respectivamente satisfacen a $x^2 + x - 4 = 0$ y $x^2 + 3x - 12 = 0$, el único que está en $x \geq 2$ y que satisface a $x^2 + 3x - 12 = 0$ y a $|(x-4)/(x+4)| = x-2$, es $x = \frac{-3 + \sqrt{57}}{2}$.

Comprobación.

$$\left| \frac{\frac{-3 + \sqrt{57}}{2} - 4}{\frac{-3 + \sqrt{57}}{2} + 4} \right| = \frac{-3 + \sqrt{57}}{2} - 2$$

$$\left| \frac{-112 + 16\sqrt{57}}{32} \right| = \frac{-7 + \sqrt{57}}{2}$$

$$\frac{-7 + \sqrt{57}}{2} = \frac{-7 + \sqrt{57}}{2}.$$

¿Qué conjunto de números reales satisfacen a

$$|2x - 3| = 8 \text{ y } |3x + 9| = 10;$$

$$|3x + 1| = 5 - 8x \text{ y } |5x - 5| = 2x - 3;$$

$$|5x + 2| = |2x - 10| \text{ y } |x - 3| = |2x - 4|;$$

$$|(2x - 6)/(x - 4)| = 2 \text{ y } |(3x + 4)/(x + 3)| = 3;$$

$$|(x + 5)/(x - 5)| = 6 \text{ y } |(2x - 3)/(x + 8)| = 7;$$

$$|(2x - 5)/(x - 7)| = x + 4 \text{ y } |(x + 7)/(2x - 9)| = 8 - x;$$

$$|6x| = 9 - x \text{ y } |3x| = x - 6 ?$$

16.5 Sistema de ecuaciones lineales

Toda expresión de la forma

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

donde a_{ij} , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ y b_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ son constantes, se denomina sistema de ecuaciones lineales simultáneas no homogénea. No necesariamente deben ser no homogéneas, ni el número de ecuaciones deben ser igual al número de variables.

Este sistema de ecuaciones define los conjuntos

$$S_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1\}$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2\}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n\}$$

En este sistema, el conjunto solución, S_1 , de $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ es un subconjunto de R^n y, como tal, un conjunto infinito de (x_1, x_2, x_n) .

Lo mismo se puede decir de $S_2, S_3, \dots$, y S_n .

Para un sistema de n ecuaciones lineales simultáneas de n variables, S subconjunto de R^n es el conjunto solución definido por

$$S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n.$$

donde S_i es el conjunto solución de la i -enésima ecuación. Gráficamente, las ecuaciones en dos variables es una recta, en tres variables es un plano y en cuatro variables, como no hay representación visual, éste representa un hiperplano.

Existen más de un método para resolver un sistema de ecuaciones de este tipo.

¿Cuál es el conjunto solución de cada sistema indicado?

$$1. \begin{cases} 3x + 6y = 24 \\ 4x - 2y = 2. \end{cases}$$

Antes de resolver el sistema dado, éste se escribe como

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

siendo ambos equivalentes, porque tienen el mismo conjunto solución.

El sistema define los conjuntos

$$S_1 = \{(x, y) \mid x + 2y = 8\}$$

$$S_2 = \{(x, y) \mid 2x - y = 1\} \text{ y}$$

para hallar el conjunto solución, es decir, la intersección entre S_1 y S_2 , el cual consiste en un par ordenado, se calculan los suficientes de estos pares ordenados.

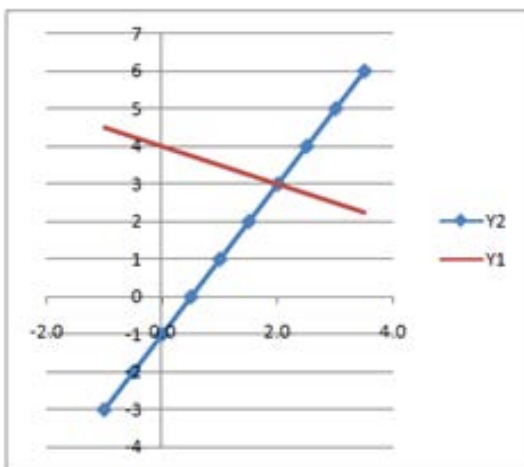
Las tablas siguientes contienen tales pares calculados.

$x + 2y = 8$				$2x - y = 1$		
x	y	S_1		x	y	S_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	4	(0, 4)		0	-1	(0, -1)
1	7/2	(1, 7/2)		1	1	(1, 1)
2	3	(2, 3)		2	3	(2, 3)
3	5/2	(3, 5/2)		3	5	(3, 5)
4	2	(4, 2)		4	7	(4, 7)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

De las tablas,

$S = S_1 \cap S_2 = \{(2,3)\}$ ó $\{(x, y) \mid 3x + 6y = 24\} \cap \{(x, y) \mid 4x - 2y = 2\} = \{(2, 3)\}$. Ver la gráfica siguiente:

X	Y1	Y2
-1.0	-3	4.5
-0.5	-2	4.25
0.0	-1	4
0.5	0	3.75
1.0	1	3.5
1.5	2	3.25
2.0	3	3
2.5	4	2.75
3.0	5	2.5
3.5	6	2.25



$$2. \begin{cases} 2x - 2y + 3z = 7 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \\ 7x - 5y + 4z = 9 \end{cases}$$

Estas ecuaciones definen tres conjuntos, S_1 , S_2 y S_3 .

$$S_1 = \{(x, y, z) \mid 2x - 2y + 3z = 7\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \mid 3x + 4y - 2z = 5\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \mid 7x - 5y + 4z = 9\}$$

donde cada ecuación, geoméricamente, es un plano.

Para encontrar la terna solución del sistema dado, es decir, la intersección entre S_1 , S_2 y S_3 ; se calculan algunas ternas solución de cualquiera de las tres ecuaciones del sistema. De estas ternas, sólo una será solución del sistema. Desde luego, no es fácil encontrar la terna solución, porque el conjunto solución al cual pertenece ésta es infinito.

Luego de considerar la ecuación $2x - 2y + 3z = 7$ del sistema para calcular la terna, se procede a suponer ternas solución y hacer operación. Para que la terna solución de $2x - 2y + 3z = 7$ sea también solución del sistema, ésta debe satisfacer a las otras dos ecuaciones.

Las ternas $(1, 14, 11)$, $(1, 11, 9)$, $(1, 8, 7)$, $(1, 5, 5)$, $(1, 2, 3)$, $(0, 4, 5)$, $(5, 6, 3)$, entre otras muchas, satisfacen a la ecuación $2x - 2y + 3z = 7$ porque

$$2(1) - 2(14) + 3(11) = 7$$

$$2(1) - 2(11) + 3(9) = 7$$

$$2(1) - 2(8) + 3(7) = 7$$

$$2(1) - 2(5) + 3(5) = 7$$

$$2(0) - 2(4) + 3(5) = 7$$

$$2(1) - 2(2) + 3(3) = 7$$

$$2(5) - 2(6) + 3(3) = 7.$$

De estas ternas ordenadas, la única que satisface el sistema es $(1, 2, 3)$ porque

$$2(1) - 2(2) + 3(3) = 7$$

$$3(1) + 4(2) - 2(3) = 5$$

$$7(1) - 5(2) + 4(3) = 9.$$

Por consiguiente, la solución S del sistema es

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{(1, 2, 3)\}, \text{ o bien,}$$

$$\begin{aligned} & \{(x, y, z) / 2x - 2y + 3z = 7\} \cap \{(x, y, z) / 3x + 4y - 2z = 5\} \cap \{(x, y, z) / 7x - 5y + 4z = 9\} \\ & = \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

$$3. \begin{cases} 3x - 5y + z - 2w = -3 \\ -2x + 3y - 4z + 3w = -4 \\ 5x + 4y - 5z - 6w = 16 \\ -3x + 6y + 7z + w = 21 \end{cases}$$

Como se vió, para resolver los sistemas propuestos, no se recurrió a ningún método algebraico.

¿Qué conjunto solución satisface a

$$a). \begin{cases} 3x + 5y = 21 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$b). \begin{cases} -4x + 3y = -1 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$$

$$c). \begin{cases} x + 2y = 17 \\ -3x + 4y = 9 \end{cases}$$

$$d). \begin{cases} -4x + 2y = -12 \\ 5x - 3y = 11 \end{cases}$$

$$e). \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 29 \\ -3x + 4y - 5z = -14 \\ -5x + 6y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$f). \begin{cases} 5x - 4y + 5z = 24 \\ -2x + 3y - z = 1 \\ 4x - 2y + 3z = 19 \end{cases}$$

$$g). \begin{cases} -2x + 5y - 4z = -7 \\ 3x - 2y + 2z = 4 \\ -4x + 3y - z = -7 \end{cases}$$

$$\text{h). } \begin{cases} -5x + 4y - 2z = -3 \\ 4x - 5y + 3z = 3 \\ -6x + 4y - 4z = -10 \end{cases}$$

$$\text{i). } \begin{cases} -2x + 4y - 3z + 5w = -3 \\ 3x - 5y + 6z - 7w = -7 \\ 2x + y - 2z + 4w = -11 \\ 4x - 6y + 5z - 6w = -2 \end{cases}$$

$$\text{j). } \begin{cases} 3x - 5y + 2z - 7w = -6 \\ 2x + 3y - 5z + 2w = 9 \\ -x - 2y + 5z - 3w = -3 \\ -4x + 6y - 7z + 10w = -2 \end{cases} \quad ?$$

17.1 Problemas de conteo y cálculo de probabilidades

Sea una clase que consta de los estudiantes A, B, C, D, E, F. Si se conforma un comité de tres personas, seleccionadas al azar de ésta, encontrar la probabilidad de que

- a) A pertenezca al comité
- b) B pertenezca al comité
- c) A y B pertenezcan al comité y
- d) A o B pertenezca al comité

Sea $M = \{\text{estudiantes de la clase}\}$

$$= \{A, B, C, D, E, F\}$$

Hay $(6/3) = 6!/3!3! = (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!)/(6 \cdot 3!) = 120/6 = 20$ maneras de formar los comités, o sea

ABC, ABD, ABE, ABF

ACD, ACE, ACF

ADE, ADF

AEF

BCD, BCE, BCF

BDE, BDF

BEF

CDE, CDF

CEF

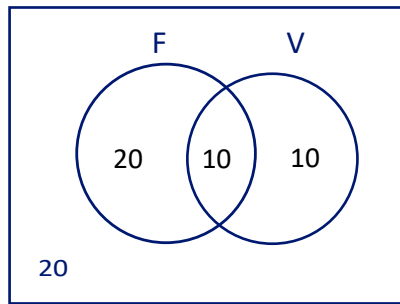
DEF

Conforme a las 20 formas de constituir los Comités, se observa que cada estudiante tiene 10 posibilidades de pertenecer al comité y que la probabilidad de que, al igual que los otros estudiantes, A pertenezca al comité es

- a) $P(A) = 10/20 = 1/2$
- b) $P(B) = 10/20 = 1/2$
- c) $P(A \cap B) = 4/20 = 1/5$ y
- d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/2 + 1/2 - 1/5 = 4/5$

De 60 estudiantes, la mitad practica futbol y 20 volibol, y 10 practican futbol y volibol. Si se selecciona un estudiante al azar, determinar la probabilidad de que éste

- a) esté practicando futbol o volibol,
- b) esté practicando futbol y volibol,
- c) no esté practicando ni futbol ni volibol.



$$n = 60$$

$$F = \{\text{estudiantes que practica futbol}\}$$

$$n(F) = 30,$$

$$V = \{\text{estudiantes que practica volibol}\}$$

$$n(V) = 20 \text{ y}$$

$$n(F \cap V) = 10.$$

Por consiguiente,

$$P(F) = 30/60 = 1/2,$$

$$P(V) = 20/60 = 1/3 \text{ y}$$

$$P(F \cap V) = 10/60 = 1/6.$$

Por último

$$\text{a) } P(F \cup V) = P(F) + P(V) - P(F \cap V)$$

$$= 1/2 + 1/3 - 1/6 = (3 + 2 - 1)/6 = 2/3,$$

$$\text{b) } P(F \cap V) = 10/60 = 1/6 \text{ y}$$

$$\text{c) } P = 20/60 = 1/3$$

17.2 Problemas de encuestas

A. Para conocer la preferencia por dos tipos de cafés se realiza una encuesta a 1000 personas. Los resultados de ésta fueron: 460 personas prefieren el café tipo A, 560 personas prefieren el café tipo B y 140 personas no prefieren ninguno de éstos.

a) ¿Cuántas personas prefieren ambos tipos?

b) ¿Cuántas personas prefieren solo el tipo B?

c) ¿Cuántas personas prefieren solo el tipo A?

Sean U conjunto universo,

$A = \{\text{personas que prefieren el café tipo A}\},$

$B = \{\text{personas que prefieren el café tipo B}\} \text{ y}$

$C = \{\text{personas que prefieren otro tipo de café}\}$

Cardinalidad de los conjuntos, según la información dada.

$$n(U) = 1000, n(A) = 460, n(B) = 560 \text{ y } n(C) = 140.$$

Como se conoce $n(U)$ y $n(A \cup B)'$, entonces

$$n(A \cup B) = n(U) - n(A \cup B)' = 1000 - 140 = 860$$

De igual manera, si se conoce $n(A \cup B)$, $n(A)$, $n(B)$ y $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) + n(A \cap B)$, entonces

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 460 + 560 - 860 = 160.$$

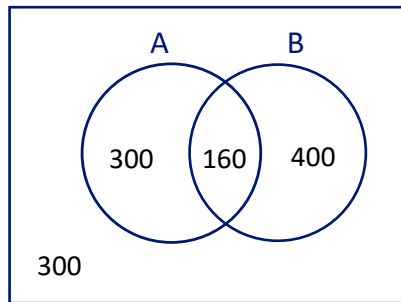
Cálculo de las personas que prefieren sólo el café de tipo A.

$$n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B) = 460 - 160 = 300.$$

Cálculo de las personas que prefieren solamente el café de tipo B.

$$n(A' \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 560 - 160 = 400.$$

Ver el siguiente diagrama de Venn



Debe notarse que 140 es el conjunto de personas que gustan de otro tipo de café.

Por último,

- a) Las personas que prefieren ambos tipos de café, son 160;
- b) Las personas que prefieren sólo el café tipo B, son 400 y
- c) Las personas que prefieren únicamente el café tipo A, son 300.

B. Para clasificar 400 artículos producidos en una fábrica, éstos se agrupan de acuerdo con tres características. Los resultados son:

175 tienen la característica p, 199 la d y 204, la q; 95 tienen las características p y d; 94 las d y q; 90 la p y q; mientras 21 carecen de estas características.

- a) ¿Cuántos de estos sólo tiene la característica p?
- b) ¿Cuántos tienen las características p, d y q?
- c) ¿Cuántos únicamente d y q?
- d) ¿Cuántos tienen p ó d?
- e) ¿Cuántos tienen únicamente 2 características?
- f) ¿Cuántos tienen solamente una característica?
- g) ¿Cuántos tienen al menos una característica?

Especificación de conjuntos:

U : Conjunto universo

$A = \{\text{artículos con la característica } p\}$

$B = \{\text{artículos con la característica } d\}$

$C = \{\text{artículos con la característica } q\}$

Cardinalidad de los conjuntos:

$$n(U) = 400,$$

$$n(A) = 175$$

$$n(B) = 199 \text{ y}$$

$$n(C) = 204.$$

$$n(A \cap B) = 95,$$

$$n(B \cap C) = 94 \text{ y}$$

$$n(A \cap C) = 90;$$

$$n(A \cup B \cup C)' = 21.$$

Cálculo de los datos para construir el diagrama de Venn

Número de artículos que tiene las mismas características.

Como $n(U) = n(A \cup B \cup C) + n(A \cup B \cup C)'$ entonces

$$n(A \cup B \cup C) = n(U) - n(A \cup B \cup C)'$$

$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = n(U) - n(A \cap B \cap C)',$$

de donde

$$\begin{aligned} n(A \cap B \cap C) &= n(U) - n(A \cup B \cup C)' - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) \\ &\quad + n(A \cap C) + n(B \cap C) \\ &= 400 - 21 - 175 - 199 - 204 + 95 + 90 + 94 = 80. \end{aligned}$$

Número de artículos que tienen una sola característica

$$n(A \cap B' \cap C') = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 175 - 95 - 90 + 80 = 70 \text{ ó}$$

$$n(A \cap B' \cap C') = n(A) - [n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)] - [n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)]$$

$$- n(A \cap B \cap C) = 175 - [95 - 80] - [90 - 80] - 80$$

$$= 175 - 15 - 10 - 80 = 70.$$

$$n(A' \cap B \cap C') = n(B) - n(B \cap A) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 199 - 95 - 94 + 80 = 90 \text{ ó}$$

$$n(A' \cap B \cap C') = n(B) - [n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)]$$

$$- [n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)] - n(A \cap B \cap C)$$

$$= 199 - [95 - 80] - [94 - 80] - 80 = 90.$$

$$n(A' \cap B' \cap C) = n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 204 - 90 - 94 + 80 = 100 \text{ ó}$$

$$n(A' \cap B' \cap C) = n(C) - [n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)]$$

$$- [n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)] - n(A \cap B \cap C)$$

$$= 204 - [90 - 80] - [94 - 80] - 80$$

$$= 204 - 10 - 14 - 80 = 100.$$

Número de artículos únicamente con dos propiedades

$$n(A \cap B \cap C') = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 95 - 80 = 15,$$

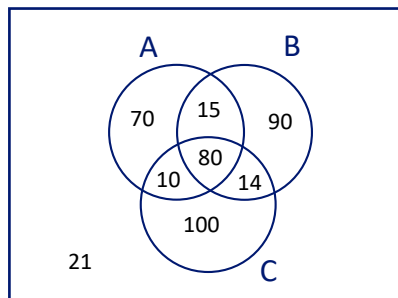
$$n(A \cap B' \cap C) = n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 90 - 80 = 10 \text{ y}$$

$$n(A' \cap B \cap C) = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 94 - 80 = 14.$$

Número de artículos que no tienen ninguna de estas características

$$n(A \cap B \cap C)' = 21$$

En consecuencia, el diagrama de Venn es:



Por consiguiente,

a) Los artículos que sólo tienen la característica p, son $70 = n(A \cap B' \cap C')$

b) Los artículos que tienen ambas características son $n(A \cap B \cap C) = 80$

c) $n(A' \cap B \cap C) = 14$

d) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 175 + 199 - 95 = 279$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - [n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)] - n(A \cap B \cap C)$$

$$= 175 + 199 - [95 - 80] - 80$$

$$= 175 + 199 - 15 - 80 = 279$$

e) $n(A \cap B \cap C') + n(A \cap B' \cap C) + n(A' \cap B \cap C)$

$$= n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

$$= n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) - 3n(A \cap B \cap C)$$

$$= 95 + 90 + 94 - 3(80) = 39$$

f) $n(A \cap B' \cap C') + n(A' \cap B \cap C') + n(A' \cap B' \cap C)$

$$= n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$+ n(B) - n(A \cap B) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$+ n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - 2n(A \cap B) - 2n(A \cap C) - 2n(B \cap C)$$

$$+ 3n(A \cap B \cap C)$$

$$= 175 + 199 + 204 - 2(95) - 2(90) - 2(94) + 3(80) = 260$$

g) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$

$$+ n(A \cap B \cap C) = 175 + 199 + 204 - 95 - 90 - 94 + 80 = 379$$

Problemas

Los estudiantes A, B, C, D, E, F, G, H pertenecen a una clase. Si se conforma un comité de tres personas, seleccionados al azar de ésta, determinar la probabilidad de que

- a) E pertenece al comité,
- b) F pertenece al comité,
- c) E y F pertenecen al comité,
- d) E o F pertenece al comité.

¿Qué ocurre si en lugar de E y F, se eligen C, D?

De 100 tarjetas numeradas del 1 al 100 se saca una. Encontrar la probabilidad de que el número sea

- a) divisible por 2,
- b) primo,
- c) termine en el dígito 5 y
- d) sea múltiplo de 3.

De 150 estudiantes, 100 estudian guitarra y 50 violín, y 20 guitarra y violín. Después de elegir un estudiante al azar, encontrar la probabilidad de que éste, esté estudiando

- a) guitarra y violín;
- b) guitarra o violín y
- c) no esté estudiando ni música ni violín.

Para conocer la opinión sobre tres tipos de café A, B y C, se realiza una encuesta a 260 personas. El resultado de ésta es: 170 personas eligen el café tipo A, 140 personas escogen el café tipo B y 160 personas prefieren el café tipo C; 100 personas prefieren de los tipos A y B; 110 de los tipos A y C; 95 de los tipos B y C; y 15 prefieren otros tipos de café.

- a) ¿Cuántas personas prefieren sólo el tipo C?
- b) ¿Cuántas personas prefieren sólo dos tipos?
- c) ¿Cuántas personas prefieren ambos tipos?
- d) ¿Cuántas personas prefieren el tipo B ó C?

Para saber la preferencia por dos marcas de playeras se efectúa una encuesta. Los resultados de ésta se muestra enseguida:

300 personas prefieren sólo la marca A y 100 prefieren ambas marcas; y 30 prefieren otras marcas y 300 prefieren la marca B.

- a) ¿Cuántas personas se encuestaron?
- b) ¿Cuántas personas sólo prefieren la marca B?
- c) ¿Cuántas personas prefieren la marca A o la marca B?

Después de efectuar una encuesta, los resultados de ésta fueron: 305 personas prefieren el básquetbol, 180 eligen el volibol y 175 optan por la natación; 100 básquetbol y volibol; 65, básquetbol y natación; 70, volibol y natación; 60 ninguno de estos deportes. Si se encuestan 525 personas, de éstas:

- a) ¿Cuántas personas solamente prefieren básquetbol?
- b) ¿Cuántas prefieren ambos deportes?
- c) ¿Cuántas personas prefieren únicamente un deporte?
- d) ¿Cuántas personas prefieren solamente dos deportes?
- e) ¿Cuántas personas prefieren la natación o volibol?

A los estudiantes de una escuela se les solicitó su opinión acerca de los contenidos de dos libros de matemáticas que preferirían estudiar. Los resultados son: 100 prefieren el libro A y 20, el libro A y el libro B; 80 el libro B y 30, prefieren otros libros.

- a) ¿A cuántas personas se encuestaron?
- b) ¿Cuántas personas prefieren solo el libro B?
- c) ¿Cuántas personas prefieren al menos un libro?
- d) ¿Cuántas personas prefieren el libro A o el libro B?

En una escuela se hizo una encuesta para conocer qué libro de matemáticas se prefiere. Los resultados fueron: 100 prefieren el libro A y el libro B; 90 el libro B y el libro C; 80 el libro A y el libro C; 200 el libro A; 170 el libro C y únicamente 70 prefieren los 3 libros. Si se entrevistaron a 375 personas y 5 prefieren otros libros,

- a) ¿Cuántas personas prefieren sólo el libro A?
- b) ¿Cuántas prefieren sólo el libro B?
- c) ¿Cuántas prefieren sólo un libro?
- d) ¿Cuántas prefieren únicamente dos libros?
- e) ¿Cuántas personas prefieren al menos uno de los libros?
- f) ¿Cuántas prefieren el libro A o el libro C?

Se hace una encuesta a 900 personas para saber qué actividades prefieren hacer en un fin de semana. De las muchas actividades que éstas pueden hacer, se escogieron las siguientes: escuchar música, practicar futbol o leer. Los resultados fueron: 420 personas prefieren escuchar música, 448 practicar futbol y 458 leer; 190 prefieren música y futbol; 188 futbol y leer y 180 música y leer; y sólo 100 personas prefieren realizar las tres actividades.

- a) ¿Cuántas personas prefieren solo leer?
- b) ¿Cuántas personas prefieren escuchar música o practicar futbol?

- c) ¿Cuántas personas prefieren al menos una actividad?
- d) ¿Cuántas personas realizan exactamente dos actividades?
- e) ¿Cuántas personas realizan exactamente una actividad?
- f) ¿Cuántas personas no hacen ninguna de estas actividades?

Después de encuestar a 900 estudiantes, se obtuvo la siguiente información: 430 estudiantes aprobaron la asignatura de química, 380 aprobaron matemáticas y 450 aprobaron biología; 180 aprobaron química y matemáticas; 190 matemáticas y biología; 200 química y biología; y 60 no aprobaron asignatura alguna.

- a) ¿Cuántos estudiantes aprobaron sólo matemáticas?
- b) ¿Cuántos aprobaron sólo una materia?
- c) ¿Cuántos aprobaron únicamente matemáticas y biología?
- d) ¿Cuántos estudiantes aprobaron únicamente dos asignaturas?
- e) ¿Cuántos aprobaron al menos una asignatura?
- f) ¿Cuántos aprobaron ambas materias?
- g) ¿Cuántos aprobaron química o biología?



Bibliografía

LIPSCHUTZ, S. (1991). *Teoría de conjuntos y temas afines*. México: Mc Graw-Hill.

LOVAGLIA, F.M. (1999). *Álgebra*. México: Oxford University Press.

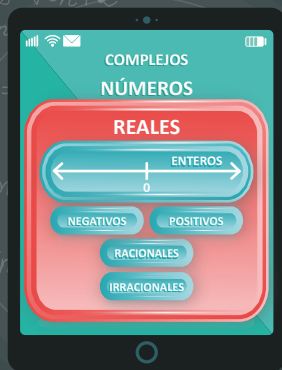
NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1997). *Conjuntos. Temas de matemáticas No. 1*. México: Trillas.

RODRÍGUEZ, J. (2005). *Fundamentos de Matemáticas*. México: UNAM.

SWOKOWSKI, E. (2013). *Álgebra y Trigonometría*. México: Cengage Learning.

Álgebra de Conjuntos

Tomás Vargas Ramírez • J. Antonio Zamora Plata



Conceptualmente, los conjuntos están formados, entre otros, por conceptos básicos, definiciones, operaciones y axiomas. Estos son fundamentales para comprender otros conceptos de matemáticas más avanzadas.

Sin olvidar el aspecto lógico, los conjuntos pueden desarrollarse desde dos enfoques distintos: intuitivo y axiomático. A pesar de que se enuncien axiomas y se ilustren o verifiquen proposiciones, aquí los conjuntos se tratarán sobre todo intuitivamente; aunque esto no evita que los axiomas relacionen términos no definidos (elementos y conjuntos), las relaciones no definidas (relación de pertenencia) y que, consecuentemente, se formulen proposiciones (teoremas) basados en los axiomas y definiciones.

La presentación de conceptos, verificaciones, ilustraciones y la solución de problemas planteados tendrán relación con los conjuntos como una álgebra (orientación dada por Boole) y serán una herramienta útil para incidir en el desarrollo de capacidades para que el alumno comprenda procedimientos que lo lleven a obtener resultados y a la elaboración de métodos y situaciones que le permitan entre otras competencias. Plantear y resolver problemas; argumentar y comunicar; pensar y razonar; utilizar lenguaje y operaciones simbólicas; por citar algunas.



Facultad de Estudios Superiores Zaragoza,
Campus I. Av. Guelatao No. 66 Col. Ejército de Oriente,
Campus II. Batalla 5 de Mayo s/n Esq. Fuerte de Loreto.
Col. Ejército de Oriente.
Iztapalapa, C.P. 09230 Ciudad de México.
Campus III. Ex fábrica de San Manuel s/n,
Col. San Manuel entre Corregidora y Camino a Zautla,
San Miguel Contla, Santa Cruz Tlaxcala.

<http://www.zaragoza.unam.mx>

