



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

QUÍMICA FARMACÉUTICO BIOLÓGICA



Matemáticas 1

CON UN ENFOQUE QUÍMICO BIOLÓGICO

Pablo Flores Jacinto
María Catalina Cárdenas Ascención
Enrique García Leal

Vol. I

PAPIME
PE100818



MATEMÁTICAS 1

CON UN ENFOQUE QUÍMICO BIOLÓGICO

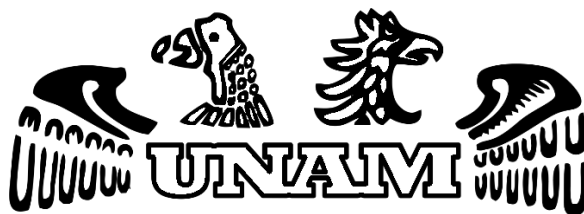
P r i m e r a e d i c i ó n

VOL. I

Pablo Flores Jacinto

María Catalina Cárdenas Ascención

Enrique García Leal



Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Estudios Superiores Zaragoza



Datos para catalogación bibliográfica

Autores: Pablo Flores Jacinto, María Catalina Cárdenas Ascención, Enrique García Leal

Matemáticas 1 con un enfoque químico biológico

UNAM, FES Zaragoza, diciembre 2018.

Volumen I, 272 pp.

ISBN de la Colección: 978-607-30-1148-8

ISBN individual: 978-607-30-1149-6

Diseño de portada y gráficos: Pablo Flores Jacinto.

Proyecto Papime PE100818

DERECHOS RESERVADOS

Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del texto o las ilustraciones de la presente obra bajo cualesquiera formas, electrónicas o mecánicas, incluyendo fotocopiado, almacenamiento en algún sistema de recuperación de información, dispositivo de memoria digital o grabado sin el consentimiento previo y por escrito del editor.

Matemáticas 1 con un enfoque químico biológico

D.R. © Universidad Nacional Autónoma de México

Av. Universidad # 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México, C.U.
Delegación Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México.

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Campus II

Batalla 5 de mayo s/n esquina Fuerte de Loreto, Col. Ejército de Oriente
Delegación Iztapalapa, C.P. 09230, Ciudad de México

Índice

	Página
1. Conjunto y números reales	1
1.1 Definición y propiedades de conjuntos	2
1.2 Operaciones con conjuntos	4
1.3 Definición y propiedades de los números reales	9
2. Funciones	31
2.1 Definición y propiedades generales de las funciones	32
2.2 Clasificación general de las funciones	42
2.3 Operaciones con funciones	62
3. Función potencia	75
3.1 Definición y propiedades de la función potencia	76
3.2 Aplicaciones de la función potencia	87
4. Funciones exponenciales y logarítmicas	93
4.1 Definición y propiedades de la función exponencial	94
4.2 Aplicaciones de la función exponencial	103
4.3 Definición y propiedades de la función logarítmica	110
4.4 Aplicaciones de la función logarítmica	115
5. Funciones periódicas	145
5.1 Definición y propiedades de las funciones periódicas	146
5.2 Aplicaciones de las funciones periódicas	152
6. Números Complejos	159
6.1 Definición y propiedades de los números complejos	160
6.2 Operaciones con números complejos	171

	Página
7. Teoría de ecuaciones	181
7.1 Definición de ecuación	182
7.2 Métodos de solución	187
7.3 Aplicaciones de las raíces polinomiales	195
8. Elementos del álgebra lineal	205
8.1 Conceptos básicos del álgebra lineal	206
8.2 Clasificación y propiedades de las matrices	219
8.3 Operaciones con matrices	222
8.4 Sistemas de ecuaciones lineales	229
8.5 Métodos de solución de sistemas de ecuaciones	230
8.6 Aplicación de las matrices	237
Anexo A1	250
Anexo A2	251
Respuestas a los problemas de número impar	252
Referencias	258
Índice alfabético	262

Prefacio

Los autores de la presente obra se dieron a la tarea de crear un libro de Matemáticas con un claro objetivo; que los alumnos de carreras afines a las ciencias químico, biológicas y de la salud, puedan apreciar la aplicación de (algunas de las ramas de) las matemáticas en sus respectivas áreas con el uso de ejemplos sencillos pero muy claros de las aplicaciones de las matemáticas en estas áreas además del uso de pictogramas que hacen ameno y didáctico el manejo del presente libro.

En este volumen llamado “**Matemáticas 1 con un enfoque químico biológico**” se abordan temas como:

Teoría de conjuntos y números reales, donde se plantean conceptos y operaciones que se pueden llevar a cabo con ellos, recurriendo a ejemplos como; i) el análisis clínico donde se organizan por conjuntos las diferentes bacterias y elementos que componen la sangre, ii) un estudio que relaciona los efectos de ciertos virus sobre las enfermedades en los pacientes y sus posibles causas y la aplicación de los tratamientos.

Además, se da una breve reseña de qué son los *números reales*, cómo se clasifican y se retoma el uso de prefijos ampliamente usados en el lenguaje de las ciencias y por último se estudian sus propiedades.

El siguiente capítulo explica y proporciona una metodología para el desarrollo y análisis de *funciones matemáticas*, así como sus propiedades y define los conceptos de dominio y rango dando un enfoque de la importancia de saber analizar y proponer una función

matemática, cabe destacar que a través del uso de gráficos de funciones matemáticas se puede también estudiar y comprender el comportamiento de reacciones químicas o el proceder de los medicamentos frente a los virus en tratamiento por mencionar algún ejemplo.

En los siguientes 3 capítulos se explica de forma sencilla el principio, las propiedades y las aplicaciones de las funciones trigonométricas más empleadas como lo son la *función potencia*, la *función exponencial* y *logarítmica* y las *funciones periódicas*.

Posterior a estas unidades se tratan los *números complejos* definiendo su concepto, así como sus propiedades y aplicaciones como por ejemplo en el diseño de mezcladores.

En seguida se retoma el álgebra clásica en su tema de *teoría de ecuaciones*, donde se da un recorrido por los diferentes métodos de factorización y de desarrollo de ecuaciones y el uso de programas o software de matemáticas como Maple[®] a su vez se da la perspectiva del uso de las ecuaciones y de las raíces que de estas se obtiene como en el caso de la determinación de las velocidades de reacción en química o en catálisis enzimática.

Por último, se da una introducción a lo que es el *álgebra lineal*, así como la clasificación, las operaciones y las propiedades que se pueden llevar a cabo con el uso de las matrices.

Hay que mencionar también que al término de cada una de las unidades se cuentan con series de ejercicios que permiten reforzar los conocimientos adquiridos en el capítulo que se esté estudiando.

Es un libro que ilustra y explica de manera muy sencilla el uso de las matemáticas y que nos lleva a dar un paseo por el mundo de las matemáticas aplicadas amalgamando de manera creativa los fascinantes mundos de la química, las ciencias biológicas y de la salud, espero que esta obra sea de su agrado como lo es para nosotros.

Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento a quienes han colaborado para enriquecer este material:

- QFB Georgina Cecilia Rosales Rivera.
- QFB Víctor Hugo Becerra López.
- M en D.I.I.E. María Isabel Garduño Pozadas.
- Ing. Miguel Ángel Cuevas Hernández.
- M. en C. Armando Cervantes Sandoval.

Y al laboratorio de análisis de fármacos y materias primas de FES Zaragoza de la UNAM.

Los autores



Pablo Flores Jacinto

Ingeniero Químico de la Facultad de Química de la UNAM, posgrado en Ingeniería Ambiental del IPN.



**María Catalina
Cárdenas Ascención**

Química de Alimentos de la Facultad de Química de la UNAM, posgrado en Ciencias Bioquímicas de la UNAM.



Enrique García Leal

Ingeniero Químico de la Facultad de Química de la UNAM, posgrado en Ingeniería de Materiales de la UNAM.

INTENCIÓN del libro

Este primer volumen tiene la intención de llegar a los alumnos de las áreas de química especialmente para fortalecer el álgebra clásica e introducirlos al álgebra lineal, con la perspectiva de que puedan observar a detalle los ejercicios con un grado de dificultad prometedor, que conlleve a un conocimiento más sistemático de la resolución de ejercicios con aplicaciones a la química.

Cada capítulo es acompañado por una variedad de ejercicios resueltos en forma extensiva y al final de éstos se tiene la serie de ejercicios que pretende reforzar el conocimiento.

Los ejercicios que requieren el uso de herramientas anteriores a este curso se encuentra en el icono de “Recuerda conceptos”.

COMPRENDER para aprender

Los iconos que se utilizan en el libro, para desarrollar los conocimientos de matemáticas son:



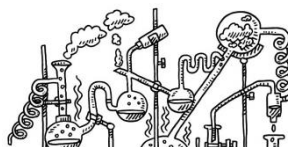
Definición



Recuerda
conceptos



Aplicación



Ejercicios
de refuerzo

Capítulo uno

Conjuntos y números reales

*“La teoría de conjuntos permite diferencias
elementos particulares a partir de conjuntos
generales”*

Javier Rodríguez Velásquez



La idea de conjunto es puramente intuitiva, es decir, es algo que se puede entender con la experiencia, por ejemplo en laboratorio existe material de vidrio, reactivos, equipo, etc., por lo tanto podríamos decir, para que un laboratorio funcione correctamente se requiere de un conjunto de componentes, los cuales ya mencionamos, por otro lado, también podemos mencionar que en química orgánica los alcanos son un conjunto; en inorgánica los óxidos también son un conjunto, debido a que tienen características que los hace comunes.

La aplicación de teoría de conjuntos a diferentes áreas de la salud ha logrado establecer órdenes de aplicación.

1.1 Definición y propiedades de conjuntos

Desde que el hombre comenzó a contabilizar sus posesiones como animales, tierras, granos etc., inicia el concepto de manera intuitiva de conjunto.



Definición

Un conjunto es “una colección de objetos con una propiedad común, que los hace distinguirse de los demás” y éste se representa con una letra mayúscula.

¿Cuántos matraces
aforados de
100 mL tenemos?



Los objetos son elementos del conjunto, por lo que éstos se representan con letras minúsculas para hacer la distinción, entre elemento y conjunto.

La característica principal de los conjuntos es que deben estar bien definidos, por ejemplo, el conjunto de los reactivos químicos “*bonitos*” es ambiguo. Un conjunto puede expresarse de tres formas:

1. **Extensión.** Se escribe cada elemento, separándolos por comas y encerrándole entre llaves.
2. **Comprensión.** Se utiliza simbología matemática para distinguir a los elementos.
3. **Diagramas de Venn-Euler.** Se escriben los elementos dentro de una figura geométrica cerrada (normalmente son círculos).



Ejemplo 1

Expresa en sus tres formas el conjunto de los alcanos mayores o iguales a dos carbonos y menores de seis carbonos.

Solución

Se identifica el conjunto de los alcanos con la letra A.

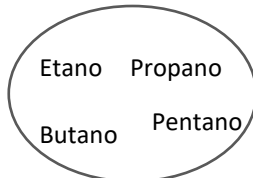
Extensión

$A: \{Etano, Propano, Butano, Pentano\}$

Comprensión

$A: \{a/a \in \text{alcanos}, \text{tal que la función alcano es: } C_nH_{2n+2}, 2 \leq n < 6\}$

Diagrama Venn-Euler



Las **propiedades** de los conjuntos se definen por cinco características, iniciando por el **conjunto universo**, el cual engloba a los demás subconjuntos (de interés) y se denota como U . Por otro lado, el **conjunto vacío** es el que carece de elementos y se puede decir que es subconjunto de cualquier conjunto. Ahora bien, si dos conjuntos tienen los mismos elementos se dice que son **conjuntos iguales**, en el caso contrario; cuando no tienen ningún elemento en común se les conoce como **conjuntos ajenos**. En cuanto a la cantidad de elementos de un conjunto, si es finito existe una correspondencia uno a uno entre los elementos del conjunto y los números naturales, esto se le conoce que el conjunto tiene **cardinalidad**.

1.2 Operaciones de conjuntos

Las relaciones que existen entre los conjuntos se llaman operaciones, al aplicar estas operaciones se tienen como resultados nuevos conjuntos (Figura 1.1).

Iniciemos por la **unión** de dos conjuntos digamos A y B, el cual tiene como resultado el conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B, y se denota como $A \cup B$, y se expresa como:

$$A \cup B: \{x/x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

Por otro lado la **intersección** de los conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que se encuentran tanto en A como en B, y se denota $A \cap B$ y se expresa como:

$$A \cap B: \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$$

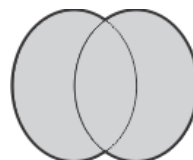
La operación similar a la resta es la **diferencia** de dos conjuntos y son los elementos, tales que pertenecen a A y no pertenecen a B, se denota como $A - B$, y se expresa como:

$$A - B: \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

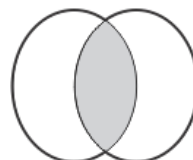
Finalmente el conjunto de todos los elementos que pertenece al conjunto universo y que no pertenecen a A, se le conoce como conjunto **complemento**, se denota como A^c o también como $A^c = U - A$, y se expresa como:

$$A^c: \{x / x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

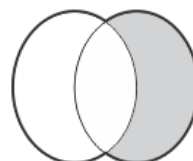
Figura 1.1
Operaciones de conjuntos



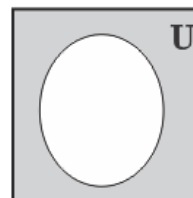
Unión



Intersección



Diferencia



Complemento

No se considera como una operación el subconjunto, pero lo mencionaremos, y se establece cuando los elementos de un conjunto están contenidos en otro, se denota como $A \subset B$, en el caso contrario cuando los elementos no están contenidos en otro conjunto se puede establecer como $A \not\subset B$.

Ejemplo 2

Existe registro de siete pacientes con VIH (Figura 1.2), los cuales tienen cantidades específicas de Leucocitos, Linfocitos y CD4, que son:

Tabla 1.1

Cantidades de Leucocitos, Linfocitos y CD4

	x	y	z
Paciente	Leucocitos mm^3	Linfocitos mm^3	CD4 μm^3
a	13 180	2 160	362
b	6 500	2 535	299
c	7 410	1 920	770
d	5 660	2 660	321
e	5 200	1 700	569
f	6 840	3 660	429
g	3 800	1 774	406

Datos tomados de Rodríguez J. *et al*, 2011

Obtenga los siguientes conjuntos definidos para la evaluación de las poblaciones de Leucocitos, Linfocitos y CD4:

$$A: \{(x, y, z) / x \geq 6800 \wedge y \geq 1800\}$$

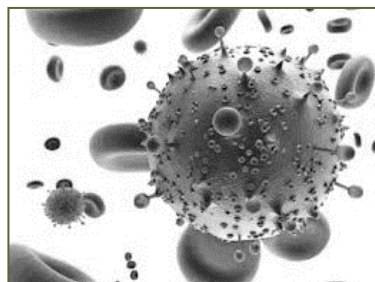
$$B: \{(x, y, z) / x \geq 6800 \wedge z \geq 300\}$$

$$C: \{(x, y, z) / x < 6800 \wedge y \leq 2660\}$$

$$A: \{(x, y, z) / x < 6800 \wedge z \leq 570\}$$

Figura 1.2

Virus del VIH entre glóbulos rojos



Con estos conjuntos realice las siguientes operaciones:

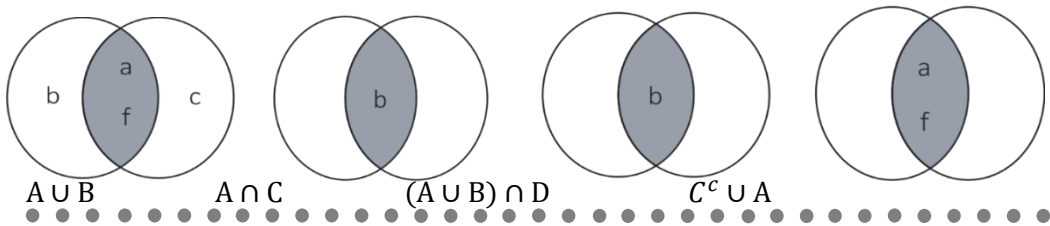
$$\begin{aligned} &A \cup B, \\ &A \cap C, \\ &(A \cup B) \cap D \\ &C^c \cup A. \end{aligned}$$

Solución

$$A: \{(x,y,z)/x \geq 6800 \wedge y \geq 1800 \}$$
$$B: \{(x,y,z)/x \geq 6800 \wedge z \geq 300 \}$$
$$C: \{(x,y,z)/x < 6800 \wedge y \leq 2660 \}$$
$$A: \{(x,y,z)/x < 6800 \wedge z \leq 570 \}$$

$$A: \{a,b,f\}$$
$$B: \{a,c,f\}$$
$$C: \{b,d,e,g\}$$
$$D: \{b,d,g\}$$

Los resultados de las operaciones son:



Ejemplo 3

Las moléculas HLA clase II son presentadoras de antígenos, las cuales son glicoproteínas de membrana; la hendidura de unión HLA clase II es capaz de unir péptidos de 10 a 24 aminoácidos de 48 regiones centrales nonaméricas (de nueve), considerando las uniones naturales de los péptidos promiscuos HA (antígeno del virus de la influenza), CLIP (cadena invariante unida a moléculas presentadoras ante la presencia antigénica) y la secuencia IAKMKEKAS (péptido antigénico de la malaria). Las secuencias naturales de unión son:

Tabla 1.2
Cantidades de Leucocitos, Linfocitos y CD4

POSICIONES									POSICIONES								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
W	R	V	D	N	R	R	G	L	Y	Q	Y	L	Y	A	Q	K	S
W	T	K	L	T	S	D	Y	L	L	R	D	F	W	G	N	P	L
Y	D	R	A	D	A	G	W	L	Y	R	R	L	Y	N	G	L	K
Y	K	K	M	E	A	V	K	L	Y	A	F	L	N	A	T	D	L
F	R	N	V	D	G	S	G	L	F	T	G	G	I	G	N	K	L
Y	K	L	V	K	A	K	W	L	M	V	G	L	A	A	D	W	L
Y	F	Q	D	P	A	L	L	L	F	D	P	L	L	A	V	A	D

Fuente: Rodríguez, 2011.

1. Conjuntos y números reales

La secuencias de presencia son:

Y, V, I ó M en la posición 1.

G ó P en la posición 3.

R en la posición 2.

V, L, M ó A en la posición 4.

A, G, S, T, R ó K en la posición 6.

L, M ó A en la posición 9.

L, Q, M ó N en la posición 7.

Y, W ó F en la posición 1 y N y L en cualquier posición.

Establezca los conjuntos de acuerdo con las siguientes reglas:

$A: \{x \in S / \text{Todos las } x \text{ que cumplan con la regla 1}\}$

$B: \{x \in S / \text{Todos las } x \text{ que cumplan con la regla 3}\}$

$C: \{x \in S / \text{Todos las } x \text{ que cumplan con la regla 4}\}$

$D: \{x \in S / \text{Todos las } x \text{ que cumplan con la regla 6}\}$

$E: \{x \in S / \text{Todos las } x \text{ tales que pertenezcan a C y no a D}\}$

$F: \{x \in S / \text{Todos las } x \text{ que cumplan con la regla 8}\}$

Con ello realice las siguientes operaciones de conjuntos:

$$A \cup B$$

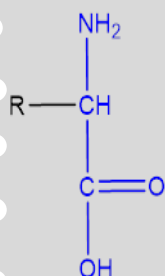
$$A \cap D$$

$$A \cap E$$



Recuerda que...

Una forma de identificar a los aminoácidos es con el código de una letra:



Estructura
general de
un aminoácido

Glicina	G	Aspartato	D	Fenilalanina	F
Alanina	A	Asparagina	N	Tirosina	Y
Valina	V	Glutamato	E	Triptófano	W
Leucina	L	Glutamina	Q	Lisina	K
Isoleucina	I	Cisteína	C	Arginina	R
Serina	S	Selenocisteína	U	Histidina	H
Treonina	T	Metionina	M	Prolina	P

Solución

Primero se establecen las reglas que se fijaron.

Secuencias									Reglas							
									1	2	3	4	5	6	7	8
W	R	V	D	N	R	R	G	L			•		•	•		•
W	T	K	L	T	S	D	Y	L				•	•	•		
Y	D	R	A	D	A	G	W	L	•			•	•	•		
Y	K	K	M	E	A	V	K	L	•			•	•	•		
F	R	N	V	D	G	S	G	L			•	•	•	•		•
Y	K	L	V	K	A	K	W	L	•			•	•	•		
Y	F	Q	D	P	A	L	L	L	•				•	•	•	
Y	Q	Y	L	Y	A	Q	K	S	•			•	•		•	
L	R	D	F	W	G	N	P	L			•		•	•	•	
Y	R	R	L	Y	N	G	L	K	•		•	•				•
Y	A	F	L	N	A	T	D	L	•			•	•	•		
F	T	G	G	I	G	N	K	L		•				•	•	•
M	V	G	L	A	A	D	W	L	•	•		•	•	•		
F	D	P	L	L	A	V	A	D		•		•	•			

Ahora con la tabla anterior se conforman los conjuntos que se piden.

Secuencias									Conjuntos					
									A	B	C	D	E	F
W	R	V	D	N	R	R	G	L		•		•		•
W	T	K	L	T	S	D	Y	L			•	•		
Y	D	R	A	D	A	G	W	L	•		•	•		
Y	K	K	M	E	A	V	K	L	•		•	•		
F	R	N	V	D	G	S	G	L		•	•	•		•
Y	K	L	V	K	A	K	W	L	•		•	•		
Y	F	Q	D	P	A	L	L	L	•			•		
Y	Q	Y	L	Y	A	Q	K	S	•		•		•	
L	R	D	F	W	G	N	P	L		•		•		
Y	R	R	L	Y	N	G	L	K	•	•	•		•	•
Y	A	F	L	N	A	T	D	L	•		•	•		
F	T	G	G	I	G	N	K	L				•		•
M	V	G	L	A	A	D	W	L	•		•	•		
F	D	P	L	L	A	V	A	D			•		•	

1. Conjuntos y números reales

Con esto se realiza la operación de conjuntos, pero se hará en una tabla debido a que los elementos son secuencias.

Secuencias									Operaciones		
									$A \cup B$	$A \cap D$	$A \cap E$
W	R	V	D	N	R	R	G	L			
W	T	K	L	T	S	D	Y	L	•		
Y	D	R	A	D	A	G	W	L		•	
Y	K	K	M	E	A	V	K	L	•	•	
F	R	N	V	D	G	S	G	L	•		
Y	K	L	V	K	A	K	W	L	•	•	
Y	F	Q	D	P	A	L	L	L	•	•	
Y	Q	Y	L	Y	A	Q	K	S	•		•
L	R	D	F	W	G	N	P	L	•		
Y	R	R	L	Y	N	G	L	K	•		•
Y	A	F	L	N	A	T	D	L	•	•	
F	T	G	G	I	G	N	K	L			
M	V	G	L	A	A	D	W	L	•	•	
F	D	P	L	L	A	V	A	D			



1.3 Definición y propiedades de los números reales

Una de las herramientas del cálculo que se utiliza en las matemáticas son los números reales, para saber cuáles son los números reales y sus propiedades se comenzarán con algunos sistemas numéricos sencillos.

Iniciaremos por los números más simples que son los **números naturales**, con éstos se pueden contar cosas u objetos.

$$1, 2, 3, 5, 5, 6, \dots$$

1. Conjuntos y números reales

Si a estos números naturales se les agrega el cero (número que fue inventado por los mayas del antiguo México, ver Figura 1.3) y sus inversos aditivos, tenemos a los **números enteros**.

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Figura 1.3

Número cero maya



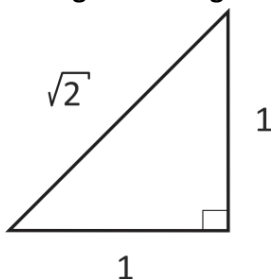
El uso de números enteros en laboratorio como en otras áreas no son suficientes, debido a la necesidad de medir por ejemplo partes de volúmenes o de pesos. Por lo que se deben de considerar los cocientes de los números enteros; a esto lo conocemos comúnmente como fracciones, tales como:

$$\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, -\frac{17}{3}$$

Estos números se pueden expresar como $\frac{m}{n}$, donde m y n son enteros y además se debe de cumplir que $n \neq 0$. A estos números se le conocen como **números racionales**.

Figura 1.4

Triángulo rectángulo



Los antiguos griegos encontraron que, para un triángulo rectángulo unitario, la hipotenusa no se puede escribir como un cociente de dos enteros. Esta longitud es $\sqrt{2}$, (ver Figura 1.4) y es un número no racional, es decir un **número irracional**. Existe una gran cantidad de números irracionales como $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{80}$, $\sqrt[3]{10}$ y el famoso π .

La historia de π inicio en el año 1650 a. c., donde se aproximaba su valor a $\left(\frac{4}{3}\right)^4 = 3.1604$, no fue hasta 1967 que Guilloud obtiene a π con 500 000 decimales en una computadora modelo CDC6600.

Por lo que el conjunto de los números racionales e irracionales conforman a los **números reales** (ver Figura 1.5).

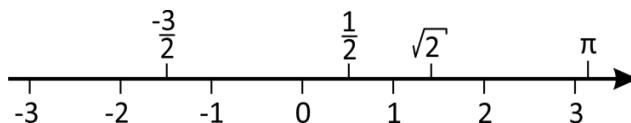
Se puede decir entonces que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, donde el símbolo $\subset$, se lee “*es subconjunto de...*”.

Figura 1.5 Conjunto de los números reales



Los números reales normalmente se pueden ver en una recta numérica en donde miden distancia de izquierda a derecha (ver Figura 1.6) y entre ellos separando a los negativos de los positivos el número cero, considerado como origen.

Figura 1.6 Recta numérica para representar a los números reales



Es bueno decir de la existencia de los **números complejos** que son de la forma $a + b\sqrt{-1}$. Donde a y b son números reales, y la raíz de -1 se considera como la parte imaginaria del número.

Entre los sistemas de numeración que han existido en la historia está el egipcio, babilónico, griego, romano, indoarábigo, maya y náhuatl; internacionalmente se ha adoptado el indoarábigo.

1.3.1 CONVERSIÓN DE DECIMAL A FRACCIÓN

Muchas veces en álgebra se requiere convertir un número decimal a una fracción para llevar a cabo operaciones. El decimal puede ser finito, infinito puro e infinito mixto, veamos un ejemplo de cada uno en la Tabla 1.3.

Tabla 1.3

Identificación del tipo de decimal

<i>Número decimal</i>	<i>Representación</i>	<i>Tipo de decimal</i>
0.25	0.25	Decimal finito
0.6666 ...	$0.\overline{6}$	Decimal infinito puro
0.068181 ...	$0.0\overline{681}$	Decimal infinito mixto

Para realizar la conversión de decimal a fracción es necesario recurrir a tres reglas para lograrlo, estas reglas son:

1. **Finito.** El numerador tendrá todas las cifras significativas del decimal y como denominador una potencia de 10 según sea el caso (10 para una cifra; 100 para dos cifras y así sucesivamente).
2. **Infinito puro.** El numerador tendrá todas las cifras significativas que formen el periodo y como denominador tantos 9 como cifras significativas tenga el periodo.
3. **Infinito mixto.** Primeros se convierte a infinito puro, multiplicando por una potencia de 10 adecuada según sea el número de cifras significativas, después se le resta la cantidad original y finalmente se divide entre tantos 9 como cifras periódicas tenga el decimal.

1. Conjuntos y números reales

La necesidad de medir longitudes, tiempos, pesos entre otras, requiere de fracciones de unidad, dando lugar a los números racionales.

$$\frac{a}{b}$$

Las primeras unidades de medición utilizadas estaban basadas en partes del cuerpo humano, por ejemplo, se comparaba el tamaño de un pie, del dedo pulgar, de una brazada para determinar la longitud de un objeto. Actualmente se conserva la unidad de pulgada y el pie. En química se utiliza como medida de la cantidad de sustancia al mol.



Ejemplo 4

Convierta a fracción los siguientes números decimales. a) 0.64, b) 0.135135... y c) 0.5909090...

Solución

Primero se identifica el tipo de decimal y después se aplica la regla que le corresponda.

a) 0.64

Este es un decimal finito, por lo tanto, se aplica la regla 1, por lo que colocamos como denominador 100, ya que tiene 2 cifras significativas.

$$0.64 = \frac{64}{100}$$

Se lleva a la mínima expresión y el resultado es:

$$\frac{64}{100} = \frac{32}{50} = \frac{16}{25}$$

b) 0.135135...

Este número es decimal infinito puro ya que se puede representar como $0.\overline{135}$, la regla que aplica es la 2, por lo que se coloca como denominador tres nueves (por que tiene 3 cifras periódicas).

$$0.\overline{135} = \frac{135}{999}$$

Se expresa en su forma mínima:

$$\frac{135}{999} = \frac{15}{111} = \frac{5}{37}$$

c) 0.5909090...

El decimal es un infinito mixto debido a que se puede representar como $0.5\overline{90}$, por lo que se aplica la regla 3, se designa $A = 0.5909090$, y multiplicamos por 100 (por que tiene 2 cifras periódicas) y le restamos A.

$$\begin{array}{rcl} 100A & = & 59.0909090 \\ - A & = & - 0.5909090 \end{array}$$

$$99A = 58.5$$

Se despeja A.

$$A = \frac{58.5}{99}$$

Se multiplica y divide por diez para quitar el punto decimal.

$$\frac{58.5}{99} \left(\frac{10}{10} \right) = \frac{585}{990}$$

Se lleva a la mínima expresión:

$$\frac{585}{990} = \frac{195}{330} = \frac{39}{66} = \frac{13}{22}$$



1.3.2 NOTACIÓN CIENTÍFICA

Los sistemas de posición son aquellos donde el valor de un dígito depende de la posición que guarde respecto al punto, esto se puede ver en la Tabla 1.4.

Tabla 1.4
Sistema de numeración posicional

Número	Posición	Nombre	Símbolo
0.000000000001	1×10^{-12}	Pico	<i>p</i>
0.000000001	1×10^{-9}	Nano	<i>n</i>
0.00000001	1×10^{-8}	Angstrom	<i>A°</i>
0.000001	1×10^{-6}	Micro	μ
0.001	1×10^{-3}	Mili	<i>m</i>
1	1	Unidad	-
1000	1×10^3	Kilo	<i>K</i>
1000000	1×10^6	Mega	<i>M</i>
1000000000	1×10^9	Giga	<i>G</i>
1000000000000	1×10^{12}	Tera	<i>T</i>

Dentro de la bioquímica existen tanto números muy grandes como muy pequeños, por ejemplo:

Masa de un electrón

0.000 000 000 000 000 000 000 000 000 9109 Kg

Longitud de ADN de todas las células en una persona adulta

200 000 000 000 000 000 m

Estas cantidades resultan difíciles de manejar y operar, por lo que éstas se abrevian, mediante la notación científica, para ello se utiliza un número comprendido entre 1 y 10 multiplicado por una potencia de 10, si es positiva el número es mayor a uno y si la potencia es negativa el número es menor a uno.



Recuerda que...

En el área de las ciencias químicas se pueden encontrar otros tipos de expresiones numéricas como el **Dalton** (Da) que es la masa de un átomo de hidrógeno cuyo valor es 1.66×10^{-24} g; usado para hacer referencia al tamaño de una molécula.

Ejemplo 5

Expresa en notación científica las siguientes cantidades.

- a) Pares de bases (nucleótidos) 3 200 000 000 pb
- b) Radio de Bohr 0.000 000 000 053 m

Solución

- a) Pares de bases (nucleótidos) es 3 200 000 000, lo primero es escoger la unidad y contamos los dígitos después de este número.

3, 200 000 000

9 dígitos

Por lo tanto, el número representado con notación científica es 3.2×10^9

Y usando la tabla 1.4 del sistema de numeración podemos expresarlo como: **3.2Gpb**.

1. Conjuntos y números reales

- b) Para el radio de Bohr ahora se inicia desde el último dígito y se cuenta la cantidad de dígitos hacia la izquierda hasta el punto.

0.000 000 000 053 m
└──────────┘
11 dígitos

Por lo tanto, nuestro número representado con notación científica es $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$

Con la tabla 1.4 la expresión del número sería: **0.53 pm**.



Recuerda que...

En la expresión de la masa molecular de los elementos se incluyó el número de Avogadro que es: 6.02×10^{23} átomos, iones o moléculas.

1.3.3 OPERACIONES CON NOTACIÓN CIENTÍFICA

Con esta notación científica podemos realizar operaciones sencillas de **suma y resta**, lo único que se necesita es expresar las cantidades o base con los mismos exponentes.



Ejemplo 6

Realiza las siguientes operaciones

a) $6.9 \times 10^{-2} - 1.9 \times 10^{-3} + 9.2 \times 10^{-1}$

b) $1.3 \times 10^{13} + 1.8 \times 10^{15} - 2.7 \times 10^{12}$

Solución

- a) Se expresan las tres cantidades con el mismo exponente, para ello se escoge el exponente -2.

$$6.9 \times 10^{-2} - 0.19 \times 10^{-2} + 92 \times 10^{-2}$$

Se suman los valores y como factor común tenemos la potencia de 10^{-2} .

$$\begin{aligned} (6.9 - 0.19 + 92) \times 10^{-2} \\ 98.71 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

Con notación científica 9.871×10^{-1}

- b) Se expresan las tres cantidades con el mismo exponente, para ello se escoge el exponente 13.

$$1.3 \times 10^{13} + 180 \times 10^{13} - 0.27 \times 10^{13}$$

Ya se tiene como factor común a la potencia.

$$\begin{aligned} (1.3 + 180 - 0.27) \times 10^{13} \\ 181.03 \times 10^{13} \end{aligned}$$

Con notación científica 1.8103×10^{15} .

**1.3.4 PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES**

Las propiedades de los números reales se basan en lo que se llaman propiedades de campo, que tienen su fundamento en las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división). Las propiedades de campo se pueden ver en la Tabla 1.5.

Tabla 1.5

Propiedades de campo

<i>Ley conmutativa</i> $x + y = y + x$ $xy = yx$	<i>Elementos neutros</i> $x + 0 = x$ $x \times 1 = x$
<i>Ley Asociativa</i> $x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$	<i>Inversos</i> $x + (-x) = 0$ $xx^{-1} = 1$
<i>Ley distributiva</i> $x(y + z) = xy + xz$	<i>Sustracción y división</i> $x - y = x + (-y)$ $\frac{x}{y} = xy^{-1}$

Al acomodar los números reales en la recta numérica, estos dígitos pueden ser comparados por su valor, por lo que se puede hablar entonces de las propiedades de orden; utilizando los símbolos de $<$, $>$ ó $=$, estas propiedades las podemos ver en la Tabla 1.6.

Tabla 1.6

Propiedades de orden

<i>Propiedad</i>	<i>Regla</i>
Tricotomía	$x < y$ ó $x = y$ ó $x > y$
Transitividad	$x < y \wedge x < z \Rightarrow x < z$
Aditiva	$x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
Multiplicativa	$x < y \Leftrightarrow xz < yz$ para z positiva

El símbolo $\Rightarrow$ se lee: “*implica ...*” y el símbolo $\Leftrightarrow$ se lee: “*equivalente a*”



Recuerda que...

Las reglas de los signos en la multiplicación son:

El producto de dos números positivos es positivo.

El producto de dos números negativos es positivo.

El producto de dos números con signos diferentes es negativo.

Ejemplo 7

Realice los siguientes ejercicios como recordatorio del manejo de los números, simplificando lo más posible y suprimiendo los paréntesis.

$$a) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{5}{2\sqrt{2}} \right)^{-2}$$

$$b) (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

Solución

a) Utilice primero la propiedad de división.

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{5}{2\sqrt{2}}} \right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{2-5}{2\sqrt{2}}} \right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{-3}{2\sqrt{2}}} \right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{-3} \right)^2$$

Se eleva al cuadrado.

$$\frac{(2\sqrt{2})^2}{3^2} = \frac{4(2)}{9} = \frac{8}{9}$$

Se realiza la suma de fracciones.

$$\frac{50 - 40 + 8}{25} = \frac{18}{25}$$

b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

Se utiliza la ley distributiva.

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{2} - (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3})$$

Nuevamente la ley distributiva.

$$(\sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2}) - (\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{3})$$

Se quita el paréntesis.

$$(2 + \sqrt{3}\sqrt{2}) - (\sqrt{2}\sqrt{3} + 3)$$

Se realiza la suma.

$$2 - 3 + \sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3} = -1$$



1.3.5 PROPIEDADES DE LOS EXPONENTES

Otra propiedad importante es la potencia, en los enteros se aplica la ley de signos de multiplicación. Veamos entonces que un **exponente** es un número que se multiplica por sí mismo n veces y se representa mediante a^n . Para cualquier entero se puede definir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Donde a recibe el nombre de base y n el exponente o potencia.

Para esta propiedad se han establecido reglas para operar a los exponentes, llamadas reglas de potencia que se presentan en la Tabla 1.7.

Tabla 1.7

Reglas de potencias

$a^m a^n = a^{m+n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$a^0 = 1$



Ejemplo 8

Simplifique las siguientes expresiones utilizando las propiedades de los exponentes.

$$a) \frac{(3^{-3})^{-2}(3^2)^{-1}}{(3^2)^{-4}(3^2)^5}$$

$$b) \frac{(2^3)^4(4^3)^3}{(2^5)^4(8^2)^3}$$

Solución

$$a) \frac{(3^{-3})^{-2}(3^2)^{-1}}{(3^2)^{-4}(3^2)^5}$$

Se utiliza la propiedad de una potencia elevada a otra potencia.

$$\frac{(3^{-3})^{-2}(3^2)^{-1}}{(3^2)^{-4}(3^2)^5} = \frac{[3^{(-3)(-2)}][3^{(2)(-1)}]}{[3^{(2)(-4)}][3^{(2)(5)}]}$$

1. Conjuntos y números reales

Ahora las potencias se suman por tener la misma base.

$$\frac{[3^6][3^{-2}]}{[3^{-8}][3^{10}]} = \frac{3^{6-2}}{3^{-8+10}}$$

Se restan las potencias.

$$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2}$$

Se efectúa la operación.

$$3^2 = \mathbf{9}$$

$$b) \frac{(2^3)^4(4^3)^3}{(2^5)^4(8^2)^3}$$

Se usa la propiedad de una potencia elevada a otra potencia.

$$\frac{[2^{(3)(4)}][4^{(3)(3)}]}{[2^{(5)(4)}][8^{(2)(3)}]} = \frac{(2^{12})(4^9)}{(2^{20})(8^6)}$$

Se homologuean las bases utilizando $4 = 2^2$ y $8 = 2^3$.

$$\frac{[2^{12}][4^9]}{[2^{20}][8^6]} = \frac{[2^{12}][(2^2)^9]}{[2^{20}][(2^3)^6]}$$

Ahora se expresa todo en términos de la base 2. Para ello tenemos que recordar que $4 = 2^2$ y que $8 = 2^3$.

$$\frac{(2^{12})(4^9)}{(2^{20})(8^6)} = \frac{(2^{12})(2^2)^9}{(2^{20})(2^3)^6}$$

1. Conjuntos y números reales

Nuevamente se utiliza la propiedad de una potencia elevada a otra potencia.

$$\frac{(2^{12})(2^2)^9}{(2^{20})(2^3)^6} = \frac{(2^{12})(2^{18})}{(2^{20})(2^{18})}$$

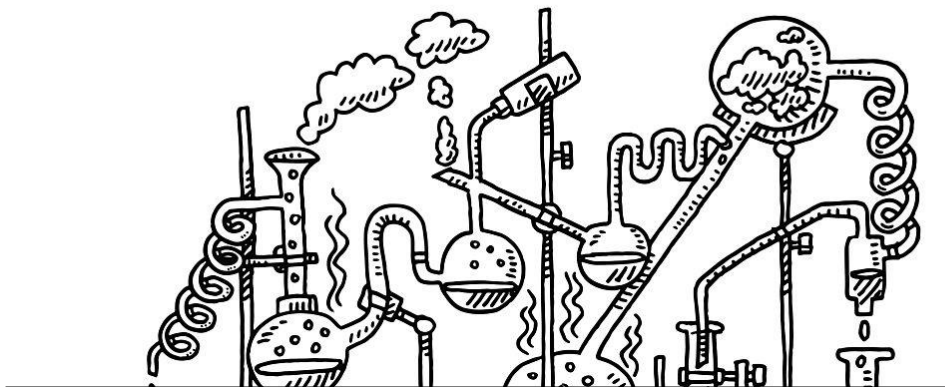
Se suman las potencias.

$$\frac{(2^{12})(2^{18})}{(2^{20})(2^{18})} = \frac{2^{30}}{2^{38}}$$

Se restan los exponentes.

$$\frac{2^{30}}{2^{38}} = 2^{30-38} = 2^{-8}$$





Ejercicios de refuerzo

UNIDAD 1 CONJUNTOS Y NÚMEROS REALES

I. Realice los siguientes ejercicios de operación de conjuntos.

1. Escriba el conjunto de los hidrácidos.
2. Escriba el conjunto resultante entre la intersección de los metales y los no metales.
3. Escriba el conjunto de los elementos más reactivos.
4. Escriba el conjunto de los elementos menos reactivos.
5. El conjunto S forma los 20 aminoácidos estándar, escribe los subconjuntos:
 - a) Aminoácidos aromáticos.
 - b) Aminoácidos con función amida.
 - c) Aminoácidos que tengan ciclos y que no pertenezcan a los aromáticos.

6. Escriba las reglas de los incisos a, b y c del ejercicio 1.
7. Establezca los conjuntos con diagramas de Venn-Euler para las energías de ionización de los elementos que se presentan en la tabla 1.7.

Tabla 1.7

Energías de ionización

Elemento	Energías de ionización (KJ/mol)		
	1ra	2da	3ra
B	801	2 430	3 660
C	1 086	2 350	4 620
N	1 400	2 860	4 580
O	1 314	3 390	5 300
F	1 680	3 370	6 050
Ne	2 080	3 950	6 120

Fuente: Chang, 2000

II. Considere que x es la primera energía, y la segunda y z la tercera energía de ionización y con las siguientes reglas:

$$A: \{(x, y, z) / x \geq 1\,300 \wedge y \geq 3\,300\}$$

$$B: \{(x, y, z) / x \geq 1\,300 \wedge z \geq 4\,000\}$$

$$C: \{(x, y, z) / x < 1\,300 \wedge y \leq 3\,300\}$$

$$D: \{(x, y, z) / x < 1\,300 \wedge z \leq 4\,000\}$$

Realice las siguientes operaciones:

8. D'

9. $D' \cap C$

10. $A \cup C$

11. $B \cup D$

Del ejemplo 3 ubicado en la página 6, encuentre los siguientes conjuntos:

12. $B \cap F$

13. $(B \cap F) \cup (A \cap E)$

14. $D' \cup B$

III. Escriba la propiedad básica de los números reales para justificar las siguientes operaciones:

15. $(5 + 6) + 8 = 5 + (6 + 8)$
16. $[4 \cdot 1] \cdot 5 = 4 \cdot [5 \cdot 1]$
17. $3(2 + 8) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 8$
18. $(2 - 4)(2 + 5) = 2(2 + 5) - 4(2 + 5)$
19. $(9 + 1) \left[\frac{1}{9 + 1} \right] = 1$
20. $2(1 + 3) = (1 + 3)2$
21. $\frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}$
22. $1 + (3 + 6) = (3 + 6) + 1$
23. $\frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$
24. $(8 + 5) + [-(8 + 5)] = 0$

IV. Clasifique los siguientes números en entero, natural, racional, irracional e imaginario.

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 25. $\sqrt{7}$ | 32. -6.1 |
| 26. 14 | 33. 0.178 |
| 27. π | 34. $3.36412151821 \dots$ |
| 28. $\sqrt{2}$ | 35. 8.0 |
| 29. $-\frac{7}{9}$ | 36. 0.1212 |
| 30. $2.1111 \dots$ | 37. $\sqrt{-25}$ |
| 31. $\sqrt{\frac{36}{49}}$ | 38. $0.2468101214 \dots$ |

V. En los siguientes problemas simplifique todo lo que sea posible.

39. $\left(1 + \frac{8}{3}\right) - \frac{6}{5}$

40. $\left(3\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(4\frac{1}{2}\right)$

41. $\frac{3}{4} - \left(\frac{7}{12} - \frac{2}{9}\right)$

42. $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \div \left[\left(\frac{3}{7}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\right]$

43. $\left(\frac{7}{2} - \frac{5}{3}\right) \div \left(-\frac{1}{5} \div \frac{2}{3}\right)$

44. $4 \cdot 5 - \left[2 + \left(3 - \frac{1}{2}\right)\right]$

45. $[6 - (-3 \cdot 5)] + \left[2 + \left(3 - \frac{1}{2}\right)\right]$

46. $\left\{\left(\frac{4}{9}\right) \div \left[\left(\frac{3}{2}\right) \div \left(\frac{4}{3}\right)\right]\right\} + \frac{1}{2}$

47. $\left[4 - \left(\frac{3}{2} \cdot 5\right)\right] + \left[4 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)\right]$

48. $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{5}{8}\right) \div \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{5}\right)$

49. $\left\{\left[\left(4\frac{5}{9}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\right] \cdot \left[2\frac{1}{3}\right]\right\} - \left\{3\frac{1}{4}\right\}$

50. $\left\{\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + 2\right] \cdot \left[\frac{1}{6} + 2\right]\right\} + \left\{1 - \frac{4}{5}\right\}$

51. $\left\{\left[\left(\frac{6}{9}\right) \div \left(\frac{2}{5}\right)\right] + \left[\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{8}{3}\right)\right]\right\} - 1$

52. $\left[\left(\frac{8}{3} - \frac{3}{5} + \frac{1}{4} + \frac{7}{6}\right) \div \left(\frac{3}{9} + \frac{4}{3} - \frac{1}{7}\right)\right] \cdot 7$

53. $\left[\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{4}{9}\right)\left(-\frac{2}{8}\right)\right]\left[\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) \div \frac{3}{8}\right]$

54. $\left[\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{6}\right) + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{8}\right)\right] + \left(1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2}\right)$

55. $\left[\left(8\frac{1}{2} - 9\frac{2}{7}\right)\left(7\frac{3}{4} \div 6\frac{1}{2}\right)\right] + \left[\frac{1}{3} \div \frac{11}{23}\right]$

56. $\left(9\frac{5}{3} + 6\frac{1}{7} - 3\frac{5}{8}\right) \div \left[\left(3\frac{6}{5}\right)\left(2\frac{3}{6}\right)\right]$

57. $\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{8}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\right] \div \left[\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{8}{3}\right)\right]$

58. $\left\{\left(\frac{17}{4} + \frac{13}{16}\right) \div \left[\left(5\frac{27}{4}\right) - \left(\frac{11}{4}\right)\right]\right\} + 3$

59. $\left\{\left[\frac{19}{3} \div 1\frac{7}{2}\right]\left[\left(\frac{13}{7}\right) \div \left(2\frac{11}{9}\right)\right]\right\} - 8\frac{2}{3}$

60. $\left\{\left[\left(\frac{15}{4}\right) + \left(\frac{13}{7}\right)\right](2)\right\} \div \left\{(3)\left(5\frac{2}{3}\right)\right\}$

61. $\left\{\left[\left(3\frac{2}{6} + 6\frac{1}{9} - 5\frac{7}{4}\right) - \left(4\frac{3}{10} - 6\frac{5}{4} - 5\frac{3}{16}\right)\right]\left[\left(\frac{8}{7} \div 9\right)\left(\frac{3}{4} + \frac{11}{13}\right)\right]\right\} + \left\{\frac{7}{4} \div \frac{6}{5}\right\}$

62. $\left\{\left[\left(7\frac{3}{4}\right)\left(5\frac{7}{3}\right) - \left(6\frac{9}{4} + 3\frac{6}{8}\right)\right] \div \left[\left(8\frac{4}{10} - 2\frac{6}{13}\right)\left(3\frac{11}{21}\right)\right]\right\} - \left[\left(6\frac{14}{13}\right)\left(1\frac{21}{4}\right)\right]$

VI. Simplifique las siguientes expresiones, utilizando las propiedades de los exponentes.

63. $(3^2)(3^6)(3^{-12})(3^6)$

71. $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \left(\frac{9}{8}\right)^3$

64. $6(2)^5$

72. $\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4} \div \frac{1}{5}\right)\right]^3$

65. $2^5 \cdot 2^2$

73. $\frac{(2^3)^5 \cdot (2^4)^3}{(2^4)^3 \cdot (-2)^{10}}$

66. $\frac{3^3 \cdot 3^4}{3^5}$

74. $\frac{(3^{-3})^{-2} \cdot (3^2)^{-1}}{(3^2)^{-4} \cdot (3^2)^5}$

67. $(3^2)^2$

75. $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3\right\}^3 \left\{\frac{3}{2}\right\}$

68. $2^{1/2} \cdot 2^{3/4} \cdot 4^{1/3} \cdot 8$

76. $\frac{\left(2 - \frac{1}{3}\right)^2}{3} - \left(\frac{\frac{2}{9}}{1 + \frac{1}{2}}\right)^2$

69. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

77. $\left(\frac{3^{1/2} \cdot 3^{-4/3}}{3^{-1}}\right) \left(\frac{9 \cdot 3^{-2}}{27}\right)$

70. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \left(\frac{2}{3}\right)^4$

78. $\left[\left(\frac{2^{-1} + 3^{-1}}{3^{-1} - 2^{-1}}\right) \left(\frac{2^2 \cdot 2^{-2}}{4}\right)\right] \div [3]$

VII. Convierta a fracción los siguientes decimales.

79. 0.123123123 ...

84. 0.1090909 ...

80. 0.21717171 ...

85. 2.565656 ...

81. 3.929292 ...

86. 0.58333 ...

82. 11.11112131213 ...

87. 0.272727 ...

83. 0.5625

88. 0.285715285714 ...

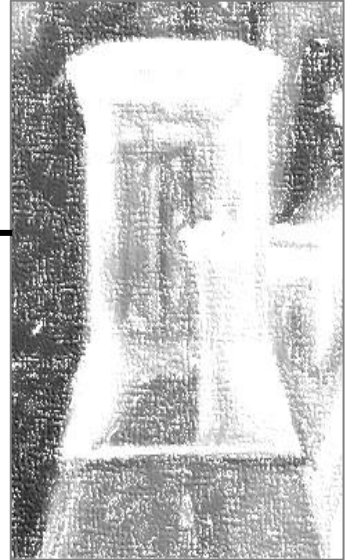
VIII. Realice las siguientes conversiones de unidades.

- 89. 0000 000 012 300 metros expréselas en Angstrom y nanómetros.
- 90. 0.000 012 120 kilogramos expréselas en microgramos.
- 91. 99 123 000 000 mililitros expréselas en litros y megalitros.
- 92. 435 900 000 000 000 células expréselas en Teracélulas.
- 93. 0.000 000 567 poise expréselas en micropoise y centipoise.
- 94. 729 000 000 000 nanomol expréselas en milimol y Kilomol.

Capítulo dos

Funciones

“La correspondencia entre variables es lo que llamamos función”



Leibniz utilizó el término de función para determinar un cierto tipo de fórmula matemática y la concebía como cualquier cantidad asociada a una curva. La expresión de función aparece en la obra matemática de Leibniz en 1673 en *Methodus tangentium inversa seu de functionibus* (Lupo, 2005).

Las funciones en las ciencias aplicadas se aprecian cuando se miden los fenómenos naturales con respecto al tiempo.

2.1 Definición y propiedades generales de las funciones



En el fabula de “La cigüeña y la zorra” se ilustra la correspondencia; en donde se asocia un objeto (frasco) con una función que cumple.



Definición

Una función es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto de un conjunto (dominio) un valor único de un segundo conjunto (rango).

Para entender lo que es una función, piense que está realizando un experimento en laboratorio y que va a monitorear la temperatura cada 5 minutos, y que ésta comienza a aumentar, llega a un máximo y después disminuye; pensamos entonces que la reacción está concluyendo, los datos de este ejemplo podrían ser:

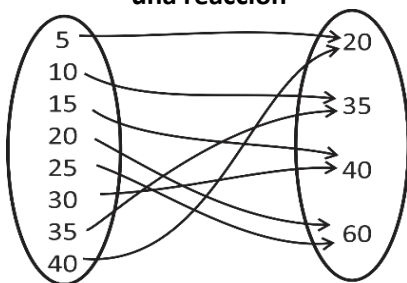
Tabla 2.1

Datos de temperatura de una reacción

Tiempo (min)	5	10	15	20	25	30	35	40
Temperatura (°C)	20	35	40	60	60	40	35	20

Se observa que existen parejas de datos, que se repiten las temperaturas en algunos tiempos, los cuales son 5 con 40; 10 con 35; 15 con 30 y 20 con 25 minutos, lo que nos lleva a pensar que existe una correspondencia entre los datos, para observar esta conexión lo representaremos mediante un diagrama de Venn-Euler (ver Figura 2.1).

Figura 2.1 Diagrama de Ven-Euler para la temperatura de una reacción



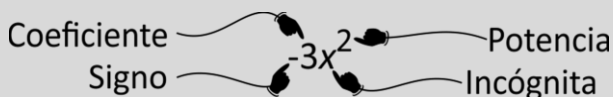
La definición no impone restricción alguna a los conjuntos de dominio y rango; por lo que el dominio puede consistir en los reactivos que se encuentran en laboratorio, el rango puede ser las concentraciones que se requieren; por lo que la regla de correspondencia es la necesidad de esas concentraciones para poder llevar a cabo una reacción.

Para representar una función se puede emplear una gráfica o fórmula algebraica.



Recuerda que...

Una fórmula algebraica consta de cuatro elementos:



Notación de las funciones

Es importante señalar que el dominio y rango consisten en el conjunto de los números reales. Para la notación de una función se utilizará la letra f ó g . Entonces $f(x)$ se interpreta como un estimado que tendrá la función al momento de ser evaluado en un valor definido de " x "

Por lo tanto, si $f(x) = x^2 - 1$ se puede evaluar la función para los valores de 2, -1 y a .

$$f(2) = 2^2 - 1 = 3$$

$$f(-1) = -1^2 - 1 = 0$$

$$f(a) = a^2 - 1$$

Es importante el entendimiento de la notación funcional, por lo que se plantea un ejemplo un poco más elaborado.

Ejemplo 1

De la función: $g(x) = 5 - 2x$, calcule $g(x + h) - g(x)$.

Solución

$$g(x + h) = 5 - 2(x + h) = 5 - 2x - 2h$$

Ahora $g(x + h) - g(x) = 5 - 2x - 2h - (5 - 2x)$

$$g(x + h) - g(x) = 5 - 2x - 2h - 5 + 2x = -2h$$

Ejemplo 2

Con la función $f(x) = 2x^2 + 3x$, encuentre: $\frac{[f(3+h)-f(3)]}{h}$

Solución

Primero encuentre $f(3 + h)$.

$$f(3 + h) = 2(3 + h)^2 + 3(3 + h) \quad f(3 + h) = 18 + 12h + 2h^2 + 9 + 3h$$

$$f(3 + h) = 27 + 15h + 2h^2$$

Ahora $f(3) = 2(3)^2 + 3(3) = 18 + 9 = 27$ Se une todo:

$$\frac{[f(3 + h) - f(3)]}{h} = \frac{(27 + 15h + 2h^2) - 27}{h}$$

Se simplifica.

$$\frac{[f(3 + h) - f(3)]}{h} = \frac{15h + 2h^2}{h} = \frac{h(15 + 2h)}{h} = 2h + 15$$

2.1.1 DOMINIO Y RANGO

Como se dijo el Dominio es el conjunto de objetos a los que la función asigna valores, la correspondencia de estos valores se puede representar con una fórmula algebraica, la cual se considera el corazón de la función, de forma análoga un reactor químico que transforma los reactivos (**Dominio**) en productos (**Rango**) vea la Figura 2.2.

Realicemos un ejemplo en donde f es la función cuya regla está representada por la ecuación: $f(x) = x^2 + 2$, los valores del dominio son -2, -1, 0, 1, 2, el rango lo obtenemos con la ecuación (ver Figura 2.3)

Cuando no se especifica el Dominio para una función, se deben asignar los valores para la regla, con el fin de obtener el rango, a esto se le conoce como **dominio natural**.

El símbolo $f(x)$ únicamente se reemplaza por y en una ecuación, como se muestra: $f(x) = 3x - 1$, es decir; $y = 3x - 1$.

Para encontrar el dominio de una función realicemos un ejemplo. Por lo que encontraremos el dominio de la siguiente función.

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Figura 2.2

Dominio y rango en una reacción química

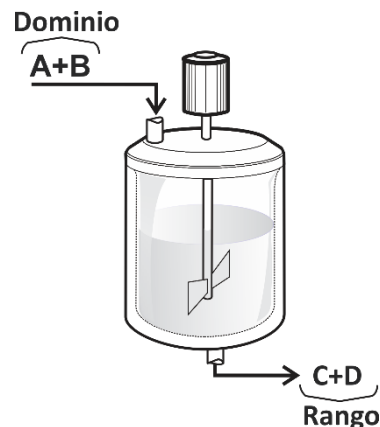
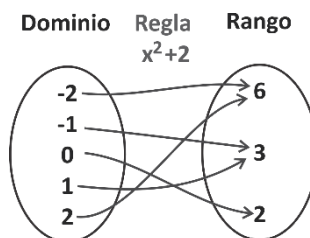


Figura 2.3

Dominio y rango en una función



Vemos que la ecuación es una fracción y que en el denominador se encuentra $x - 1$, por lo tanto el dominio no puede tener el valor de 1, lo que nos conduciría a una indeterminación. Por lo tanto el dominio serían los $\mathbb{R}$, con excepción del número 1, por lo que este conjunto se podría escribir como:

$$\text{Dominio} = \{x/x \in \mathbb{R}, 1 < x < 1\}$$

Otra forma de expresarlo sería con paréntesis y corchetes.

$$\text{Dominio} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

Recuerda que...

El uso de paréntesis y corchetes para un conjunto solución de una función es:

() Se acerca al valor sin tocarlo
(a, b] Se acerca a “a” y toca a “b”

[] Toca al valor
[a, b) Toca a “a” y se acerca a “b”

Ejemplo 3

Sí x representa el tiempo en minutos que el agua le toma elevar su temperatura al calentarse, se trata de una función de x , dada por: $f(x) = 15x + 25$, para un tiempo de 0 a 5 minutos y para valores mayores a 5 minutos la función es $f(x) = 100$.

- Describa $f(x)$.
- Encuentre $f(2)$ y $f(4)$.
- Haga un bosquejo de la gráfica.

Solución

La ecuación $f(x)$ depende si $0 \leq x \leq 5$ ó $5 < x < 100$, por lo que se escribe:

$$f(x) = \begin{cases} 15x + 25 & \text{para } 0 \leq x \leq 5 \\ 100 & \text{para } 5 < x < 100 \end{cases}$$

Se evalúa

- a) Para $x = 2$, se satisface con la primera fórmula.

$$f(x): f(2) = 15(2) + 25$$

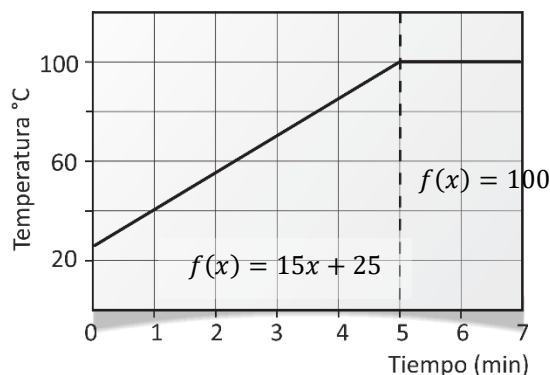
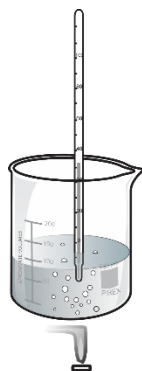
$$f(2) = 55$$

- b) De la misma forma para $x = 4$.

$$f(x): f(4) = 15(4) + 25$$

$$f(4) = 85$$

- c) Para cualquier valor mayor a 5 minutos la temperatura que se registrará será la de 100 °C. Podemos ver un bosquejo de lo que sucede.



Se puede observar que la ecuación que describe por completo al fenómeno requiere o necesita más de una función, esto ocurre cuando existe un cambio de pendiente muy drástico.



Ejemplo 4

Si x representa la presión en atmósferas para un mol de CO_2 a 313 K, la variación de PV/RT es una función de x , dada la ecuación de $y = -0.01x + 1$ para presiones de 0 a 71 atmósferas y para presiones mayores hasta 900 atmósferas, la ecuación es $y = 0.0015x + 0.25$, encuentre:

- La descripción de x .
- Encuentre $f(50)$ y $f(600)$.
- Haga el bosquejo de la gráfica.

Solución

- La fórmula $f(x)$ depende si $0 \leq x \leq 71$ ó $71 < x \leq 900$, por lo que decimos que:

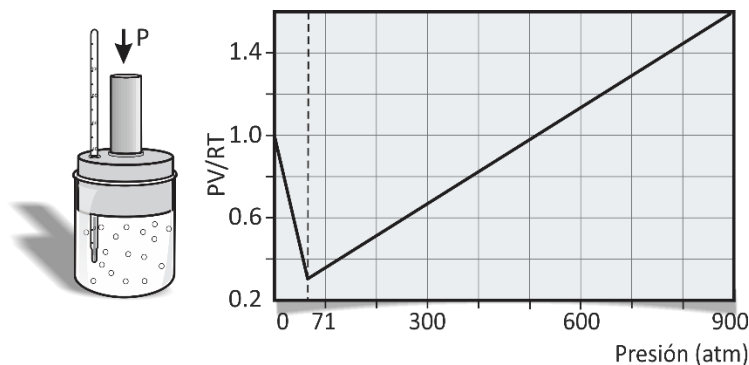
$$f(x) = \begin{cases} -0.01x + 1 & \text{para } 0 \leq x \leq 71 \\ 0.0015x + 0.25 & \text{para } 71 < x \leq 900 \end{cases}$$

- Para una presión de 600 atmósferas, utilizamos la segunda fórmula.

$$f(x): f(600) = 0.0015(600) + 0.25$$

$$f(600) = 1.15$$

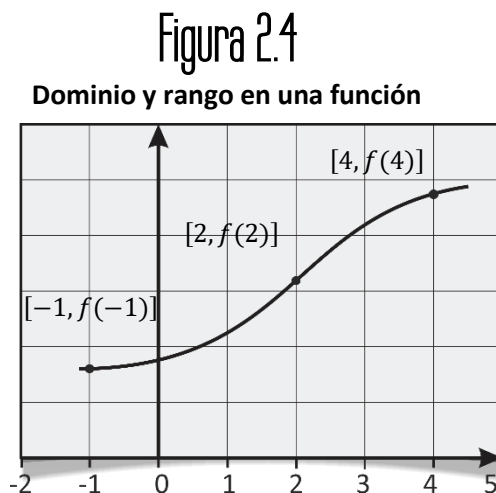
- Bosquejo de la gráfica.



Datos tomados de Theodore L. Brown, 1998

2.1.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES

Las funciones pueden ser representadas mediante el uso de gráficas, debido a que esto facilita la comprensión de la situación. Por lo que la gráfica de la función f , no es más que la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. El conjunto de todos los puntos (x, y) , forman una curva que se llama gráfica (ver Figura 2.4) de la función $f(x)$. Cada punto es $(x, f(x))$ y la unión de esta genera una curva.



Ejemplo 5

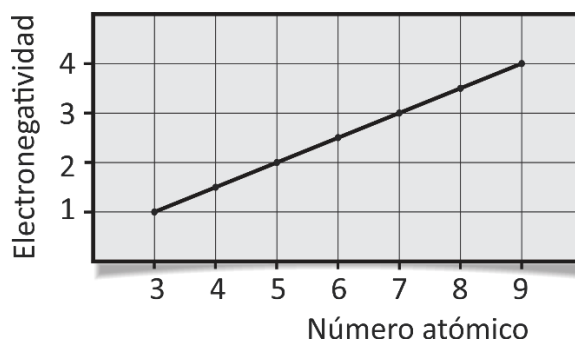
Trazar la gráfica cuya función es $f(x) = (x - 1)/2$, donde el dominio es el número atómico comprendido entre 3 y 9 protones y el contradominio o imagen es la electronegatividad.

Solución

Debido a que el dominio no es natural; es decir está establecido, de 3 a 9 protones, es decir $D = \{3 \leq X \leq 9\}$ ó $D = [3, 9]$; comenzamos a realizar una tabla con valores intermedios de 3 a 9 y evaluamos la función con la ecuación proporcionada.

Tabulación de datos

Número atómico (x)	3	4	5	6	7	8	9
Electronegatividad $f(x) = \frac{x-1}{2}$	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0

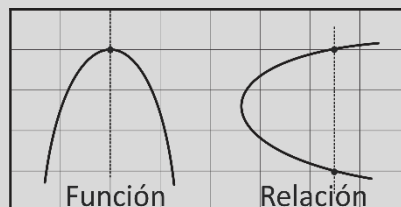


¿Para saber si la ecuación que se está graficando es una función o no?, se realiza la prueba de la recta vertical, si la recta corta en más de un punto la gráfica de la que se trata no es función; es una relación.



Recuerda que...

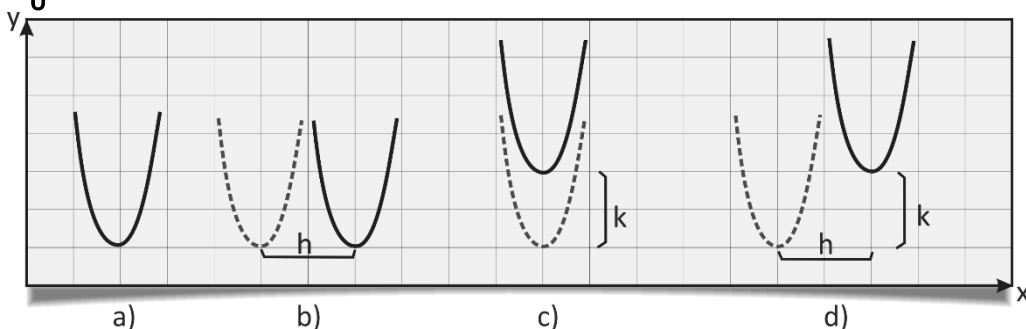
Todas las ecuaciones se pueden graficar, la única diferencia es que la curva resultante puede satisfacer o no la prueba de la recta vertical, que se ha mencionado.



2.1.3 TRASLACIÓN DE FUNCIONES

Con la observación se pueden construir gráficas a partir de otras de forma general, esto mediante la traslación (Figura 2.5).

Figura 2.5 Traslaciones de funciones



$$y = f(x)$$

Gráfica
original

$$y = f(x - h)$$

Traslación de h
unidades hacia
la derecha

$$y = f(x) + k$$

Traslación de k
unidades hacia
arriba

$$y = f(x - h) + k$$

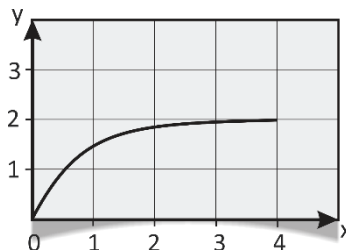
Traslación de h
unidades hacia la
derecha y k unidades
hacia arriba

Ejemplo 5

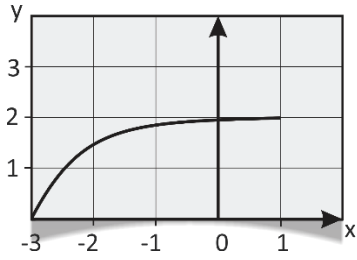
Realice el bosquejo de la gráfica $f(x) = \sqrt{x+3} + 1$, partiendo de la gráfica original.

Solución

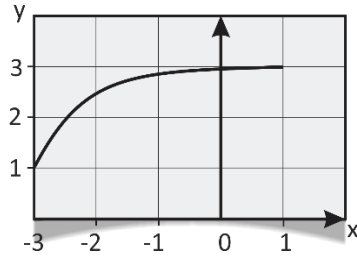
Primero se grafica la función original que es $f(x) = \sqrt{x}$



Ahora se traslada 3 unidades hacia la izquierda para tener la nueva función $f(x) = \sqrt{x + 3}$.



Finalmente se desplaza la gráfica una unidad hacia arriba para obtener la ecuación que se necesita $f(x) = \sqrt{x + 3} + 1$.



2.2 Clasificación general de las funciones

Entre las funciones para variables reales, hay géneros importantes que podemos observar en la siguiente tabla.

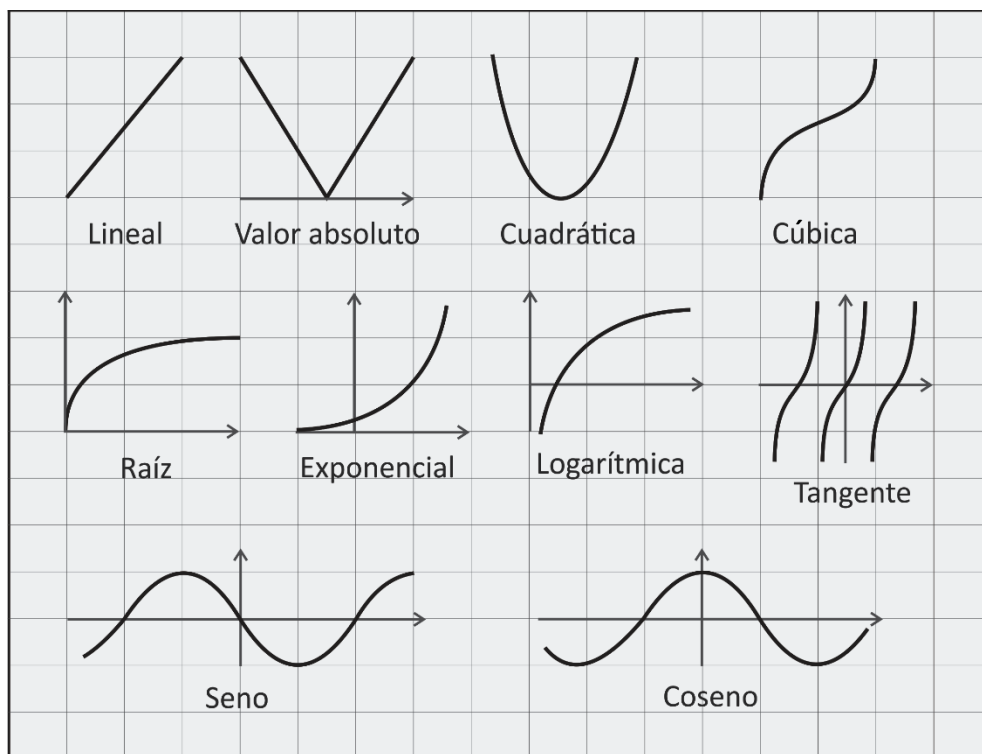
Tabla 2.2

Expresiones de funciones

Función	Ejemplo de ecuación	Función	Ejemplo de ecuación
Lineal	$y = 2x + 1$	Exponencial	$y = e^x$
Valor absoluto	$y = x $	Logarítmica	$y = \log x$
Cuadrática	$y = x^2$	Periódicas	
Cúbica	$y = x^3$	Seno	$y = \text{sen}(x)$
Raíz	$y = \sqrt{x}$	Coseno	$y = \cos(x)$
Potencia	$y = 2^x$	Tangente	$y = \tan(x)$

Las gráficas de éstas se pueden visualizar rápidamente en la Figura 2.6. Existen otras como la cúbica, cuártica, la tangente, aunque estas no juegan un papel especial en el área de la química.

Figura 2.6 Clasificación general de las funciones



Referente a las funciones cuadráticas, son ampliamente usadas ya que éstas por ejemplo permiten conocer la velocidad de consumo máximo o mínimo de sustrato., para las logarítmicas y exponenciales están los ejemplos clásicos de crecimiento bacteriano y en las funciones trigonométricas de seno y coseno podemos ver aplicaciones en los ciclos naturales como la luz del día, la respiración, etc. En este apartado se verá la función lineal, más adelante se analizarán otras funciones.

2.2.1 FUNCIÓN LINEAL

Las funciones lineales son ampliamente usadas en la química, éstas ayudan a describir el comportamiento de alguna especie, concentración o velocidad de reacción. Estas funciones se pueden representar de tres maneras:

Punto intersección $y = mx + b$

Punto-pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$

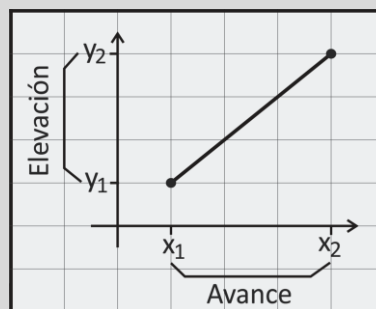
Forma general $Ax + By + C = 0$

En la ecuación de punto intersección ($y = mx + b$); el valor de b representa el punto de cruce en el eje y . Es pertinente aclarar que, en la forma general, el valor de B no es otra cosa que la pendiente y C es el valor de b .

Recuerda que...

La ecuación de la pendiente es el cociente de la elevación entre el avance.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

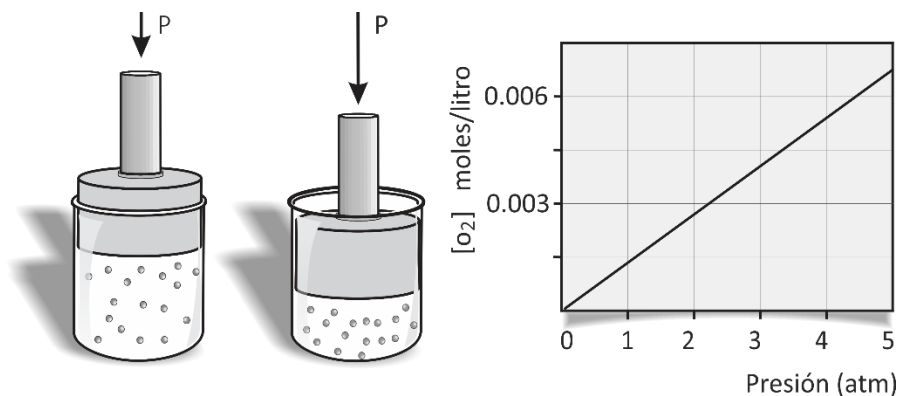


El trazo de estas ecuaciones son líneas rectas de pendiente m , describen normalmente crecimientos (aumentos) o decrecimientos (disminución) de la variable dependiente, este se refleja en la pendiente si es positiva se puede decir que existe un aumento y si es negativa una disminución.

Por ejemplo, cuando se aumenta la presión en un recipiente que contiene oxígeno, la concentración de oxígeno también lo hace, debido a que el volumen disminuye, observe la Figura 2.7.

Dado que la concentración es mol/litro, al disminuir el volumen como resultado de aumentar la presión, la concentración se incrementa.

Figura 2.7 Cambio de presión en el oxígeno



Fuente: Masterton, 1990

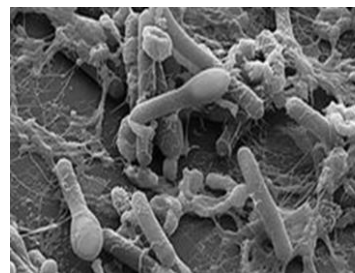
Sin embargo, existen muchas gráficas en química que escapan a esta clasificación, por ejemplo, la gráfica de energía potencial de reacción, de equilibrio entre fases, etc.

En este caso el valor de la variable independiente (y) disminuye al aumentar el valor de la variable dependiente (x), otros ejemplos de pendiente negativa son el consumo de reactivos en una reacción, la determinación de pesos moleculares de una proteína, la concentración de protones para determinar el pH, etc.

En la muerte térmica del *c. botulinum* (ver Figura 2.8), cuando se grafican con el tiempo de reducción decimal (D) en función de la temperatura en una gráfica semilogarítmica, en la esterilización de alimentos (ver Figura 2.9).

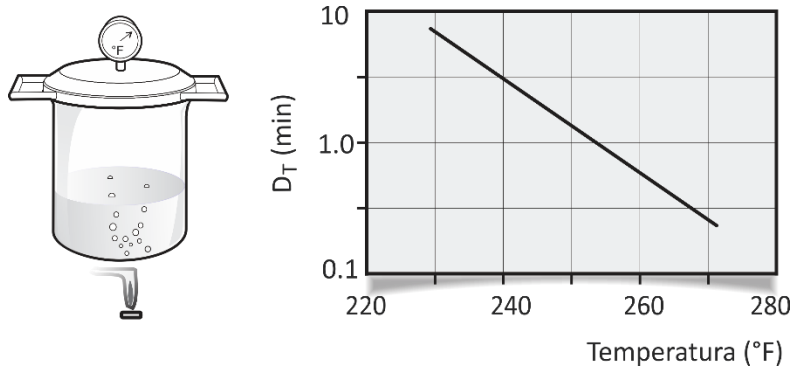
Figura 2.8

Bacteria de *c. botulinum*



Fuente: <https://es.pinterest.com>

Figura 2.9 Curva de destrucción térmica de la bacteria *c. botulinum*

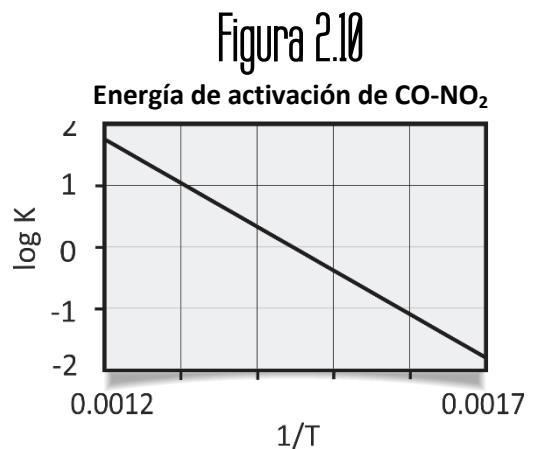


Fuente Geankoplis. 2011

En este caso el valor de la variable independiente (T) disminuye al aumentar el valor de la variable dependiente (D_T).

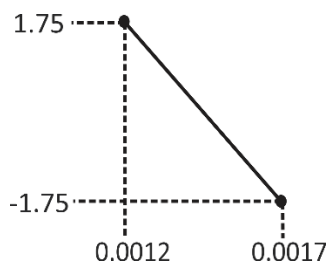
Ejemplo 7

Encuentre la energía de activación (E_a) de la reacción CO-NO_2 , utilizando la ecuación de Arrhenius $E_a = -2.3(8.31)m$ y la siguiente gráfica:



Solución

Primero se ve que la ecuación $E_a = -2.3(8.31)m$, sólo tiene como incógnita la pendiente, por lo que nos auxiliaremos con la gráfica para obtenerla, no está demás especificar que esta pendiente arrojará un valor negativo. Por lo que se utilizan los valores de los extremos para lograr determinarla.



Se calcula la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-1.75 - 1.75}{0.0017 - 0.0012}$$

$$m = -7 \times 10^3 J$$

Ya que se tiene la pendiente, se calcula la energía de activación.

$$E_a = -2.3(8.31)m$$

$$E_a = -2.3(8.31)(-7 \times 10^3 J)$$

$$E_a = 1.338 \times 10^5 J$$

Se expresa el resultado con el sistema de numeración posicional correspondiente.

$$E_a = 133.8 \text{ kJ}$$





Ejemplo 8

Obtenga la ecuación que representa la electronegatividad de los siguientes elementos con respecto al número atómico, expresado de la forma punto intersección, los datos son:

Tabla 2.3

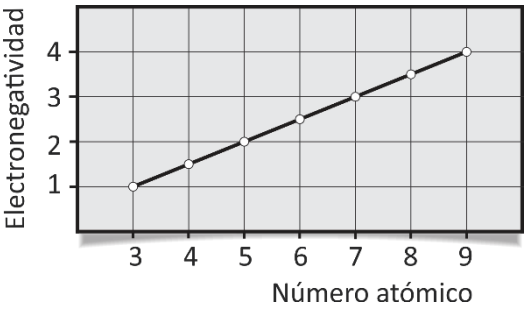
Electronegatividad de algunos elementos químicos

<i>Elemento</i>	<i>Número atómico (x)</i>	<i>Electronegatividad (y)</i>
Na	11	0.9
Mg	12	1.2
Al	13	1.5
Si	14	1.8
P	15	2.1
S	16	2.5
Cl	17	3.0

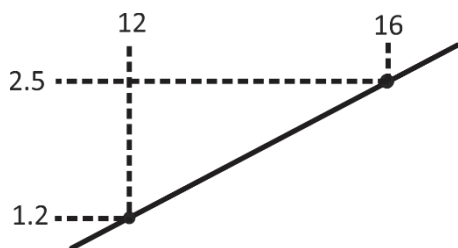
Nota: El desarrollo se debe de hacer gráficamente sin auxiliarse de la calculadora.

Solución

Primero se localizan los puntos en una gráfica de número atómico vs electronegatividad y se traza una línea de tendencia, teniendo cuidado de tocar la mayoría de los puntos.



Para obtener la ecuación que representa la dispersión de puntos; primero se obtiene la pendiente de la línea de tendencia (no es necesario tomar los extremos, se escogen puntos que son fácilmente leíbles):

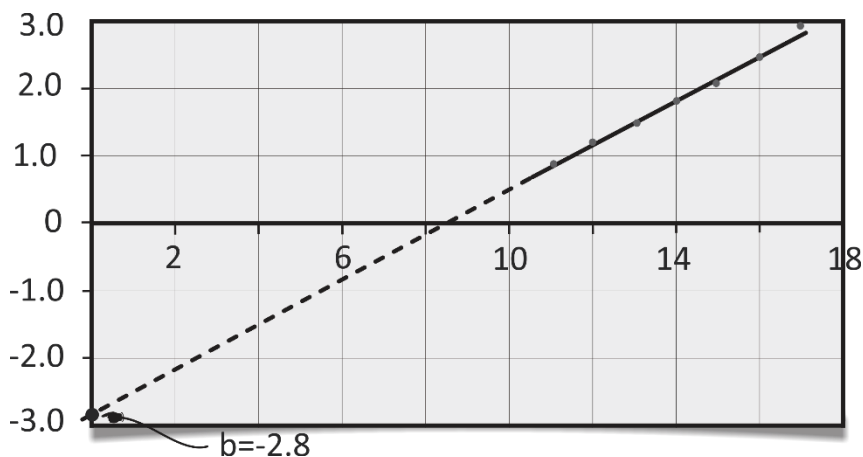


$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{2.5 - 1.2}{16 - 12}$$

$$m = 0.325$$

Ahora gráficamente se encuentra el valor de b , para ello se prolonga la línea y se registra el valor en donde cruza con el eje y , cuando $x = 0$.



Este valor es de -2.8, por lo que sólo resta expresar la ecuación de la línea recta utilizando la forma de punto-intersección $y = mx + b$, quedando:

$$y = 0.325x - 2.8$$



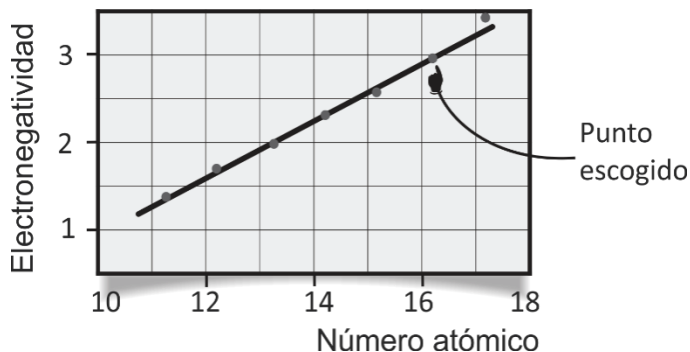
Ejemplo 9

Del ejercicio anterior encuentre la ecuación de la línea recta utilizando la expresión de punto pendiente.

Solución

Se ve que la ecuación que se debe de aplicar es: $y - y_0 = m(x - x_0)$

La pendiente ya se tiene ($m=0.325$), ahora se escoge un punto arbitrario que este dentro de la línea de tendencia.



Se sustituyen los valores del punto escogido ($y_0 = 2.5$ y $x_0 = 16$), en la expresión de la línea recta.

$$y - 2.5 = 0.325(x - 16)$$

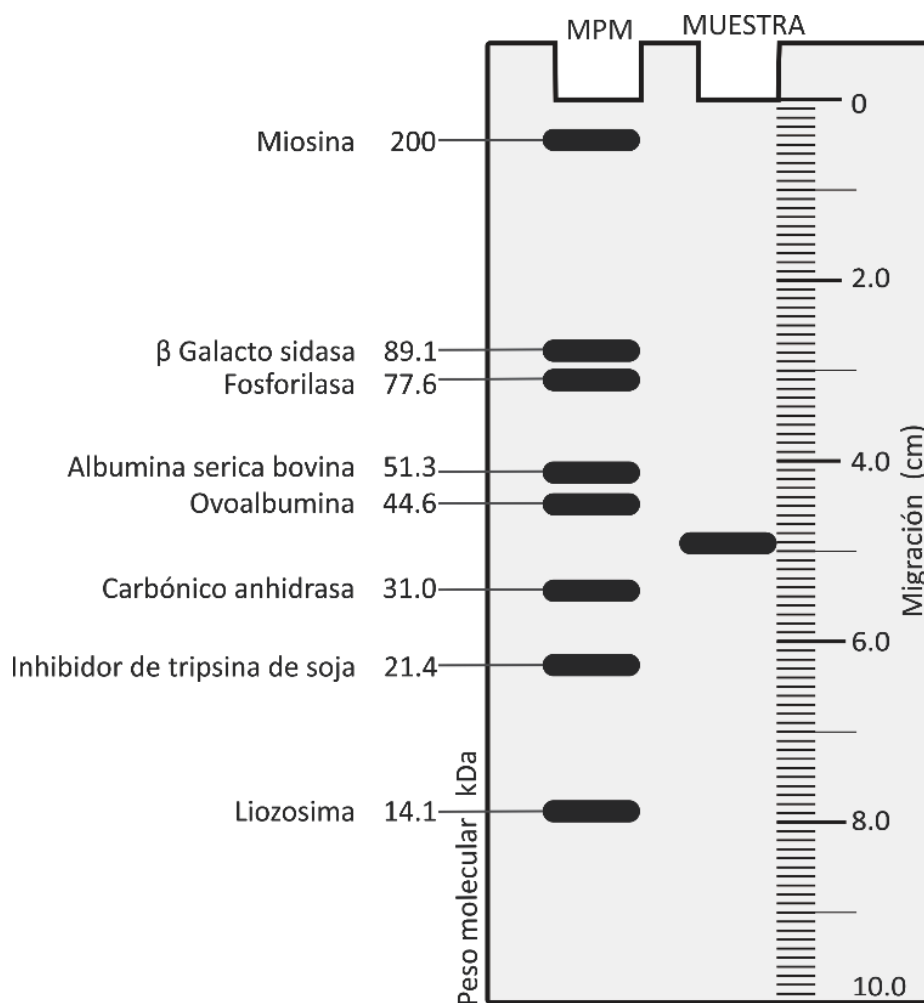
$$y - 2.5 = 0.325x - 5.2$$

$$y = 0.325x - 2.7$$

Como se ve el resultado es muy semejante al encontrado anteriormente, con la ventaja que es más fácil de obtener.

Ejemplo 10

Encuentre el número aproximado de aminoácidos que conforman una proteína de una muestra, utilizando datos de un marcador de peso molecular comercial (MPM) y su migración en un gel de electrofóresis.



Solución

Como es un ejercicio de aplicación, lo primero que se hace es establecer todas las ecuaciones que se requieren para su solución.

Ecuación de la pendiente
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación de la línea
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Número de aminoácidos
$$\text{Aminoácidos} = \frac{Da}{110}$$

1.- Cálculo de la pendiente

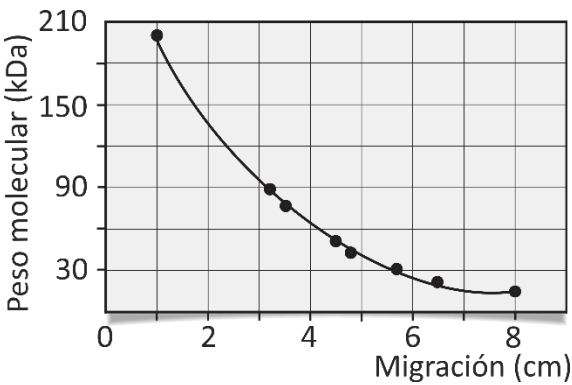
Se realiza la medición de la distancia recorrida por los marcadores de peso molecular comercial (MPM), con la escala de migración en cm. Para construir una tabla que servirá para graficar la curva de migración de la muestra, que se presenta a continuación:

Tabla 2.4

Migración de la muestra

Migración(cm)	MPM(kDa)
1	200
3.2	89.1
3.5	77.6
4.5	51.3
4.8	44.6
5.7	31.0
6.7	21.4
8	14.1

Figura 2.11 Curva de migración de la muestra



La gráfica muestra que la línea que se tiene no es recta por lo que a la variable dependiente se le obtiene el logaritmo base 10, para lograr transformar esta curva en línea recta. Por lo que se genera otra tabla y se gráfica.

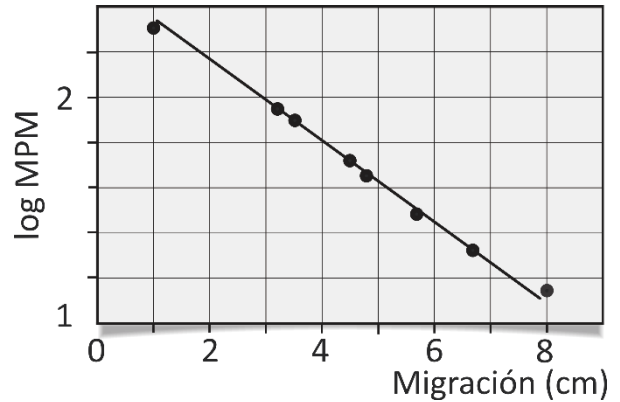
Tabla 2.5

Migración de la muestra
utilizando logaritmo

Migración(cm)	log MPM
1	2.3
3.2	1.95
3.5	1.89
4.5	1.71
4.8	1.65
5.7	1.49
6.7	1.33
8	1.15

Figura 2.12

Curva de migración de la muestra utilizando
logaritmo



Se escogen los puntos de (3.2, 1.95) y (6.7, 1.33), ya que estos tocan la línea, (recuerda que los valores para determinar el valor de la pendiente se escogen por pares).

$$m = \frac{1.33 - 1.95}{6.7 - 3.2} \quad m = -0.177$$

2.- Ecuación de la línea recta

Se escoge cualquier punto de los antes utilizados, para nuestro caso, se usa el punto (3.2, 1.95).

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1.95 = -0.177(x - 3.2)$$

Se expresa la igualdad como ecuación de línea recta.

$$y - 1.95 = -0.177x + 0.566$$

$$y = -0.177x + 0.566 + 1.95$$

$$y = -0.177x + 2.516$$

3. Número aproximado de aminoácidos

Ahora leemos en el gel de poliacrilamida la distancia de migración de la muestra.

El valor es 5.2 cm

Este valor se sustituye en la ecuación encontrada, para obtener el log MPM.

$$y = -0.177(5.2) + 2.516$$

$$y = 1.596$$

Es decir:

$$\log MPM = 1.596$$

Para obtener el valor de MPM, se utiliza la función inversa de logaritmo base 10.

$$MPM = 10^{1.596}$$

$$MPM = 39.446 \text{ kDa}$$

$$\text{Aminoácidos} = \frac{39446}{110}$$

El peso molecular de un aminoácido es en promedio **118 g/mol**.

$$\text{Aminoácidos} = 359$$



En laboratorio de química analítica es muy recurrente el uso de la curva estándar o de calibración para la cuantificación de diversos analitos.

La **curva estándar o curva de calibración** es un procedimiento analítico común en el análisis cuantitativo. Consiste en la representación gráfica de una señal (absorbancia, voltaje, etc.) que se mide en función de la concentración de un analito. Puesto que la curva se construye con valores bien definidos de concentración del analito (variable independiente) la intensidad de la señal que esta concentración genere será nuestra variable dependiente. Una vez graficados los datos, podemos interpolar en ella intensidad de señal de una muestra problema, para determinar su concentración.



Ejemplo II

La determinación cuantitativa de la concentración de proteínas es una de las pruebas más comunes en el laboratorio de bioquímica. En una de las prácticas del laboratorio de Bioquímica Celular y de los Tejidos I, se desea determinar el contenido de proteína de la clara de huevo por el método de Lowry (colorimétrico) el cual tiene la ventaja de ser extremadamente sensible, de 10 a 1000 $\mu\text{g/mL}$. Sabemos que la concentración promedio de proteína en la clara de huevo es de 11 g/100 mL (información que nos permite hacer la dilución correspondiente para poder usar el método).

Para ello, en la primera dilución se toma 1 mL de clara de huevo y se afora a 10 mL. En una segunda dilución se toma 1 mL de la primera dilución y se afora a 100 mL:

Primera dilución: $10 \text{ mL} / 1 \text{ mL} = 10$, Segunda dilución: $100 \text{ mL} / 1 \text{ mL} = 100$ y
Dilución total: $10 * 100 = 1000$

Dado que este método da resultados variables se requiere una curva de calibración que se hace a partir de una solución de albumina (BCA) de 0.1 mg/mL. Se usan 0.0, 0.1, 0.2, 0.4 y 0.8 mL de la solución estándar.

Solución

Calculamos la cantidad de proteína en cada uno de los volúmenes a usar:

$$0.1\text{mg/mL} * 0.1\text{mL} = .01\text{ mg}$$

$$0.1\text{mg/mL} * 0.2\text{mL} = .02\text{ mg}$$

$$0.1\text{mg/mL} * 0.4\text{mL} = .04\text{ mg}$$

$$0.1\text{mg/mL} * 0.8\text{mL} = .08\text{ mg}$$

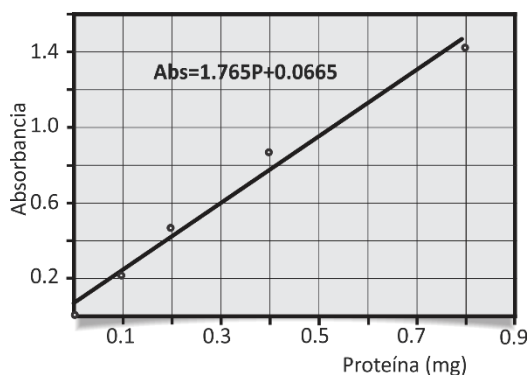
Después de llevar a cabo la reacción de Lowry con cada uno de los volúmenes del estándar y medir la absorbancia correspondiente a 640 nm se obtienen los siguientes datos:

Volumen (μL)	0	100	200	400	800
Masa de proteína correspondiente (mg)	0.161	0.312	0.461	0.618	0.202
Absorbancia (640 nm)	0	0.22	0.47	0.89	1.37

Con estos datos podemos graficar nuestra curva de calibración en la cual los mg de proteína son la variable independiente y la absorbancia la variable dependiente (ver Figura 2.13).

Figura 2.13

Ecuación de la curva de calibración



De la dilución de la muestra, se analizan 300 μL, que dan una absorbancia de 0.23.

$$Abs = 1.765P + 0.0665$$

Despejamos los mg de proteína presentes en esta dilución.

$$P = \frac{0.23 - 0.0665}{1.765}$$

$$P = 0.092\text{ mg}$$

Calculemos la concentración, considerando el volumen usado (300 μ L).

$$\frac{0.092mg}{0.3 mL} = 0.3mg/ml$$

Recordemos que esta concentración pertenece a la dilución de la muestra. Por lo que, para tener la concentración de la clara de huevo, se debe usar el factor de dilución:

$$0.3mg/mL * 1000 = \mathbf{308 mg/mL}$$

Valor que podemos comparar con el promedio reportado en la clara de huevo.



2.2.2 FUNCIONES POLINOMIALES

Las funciones polinomiales se utilizan normalmente en el área de química para conocer las raíces que dan solución a una reacción química en donde se establece un equilibrio, recordando también que para ello se necesita la constante de equilibrio. Este tipo de funciones tienen la siguiente forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

Dónde: n es un entero no negativo y $a_n, a_1, \dots, a_0$ son constantes

Naturalmente la función lineal y la cuadrática son casos especiales de las funciones polinomiales, el dominio de estas funciones son todos los números reales a excepción de que una función polinomial sea expresada como un cociente; lo que se conoce como función racional. La función cuadrática de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$. El dominio de esta función consiste en todos los números. La gráfica de estas funciones normalmente son llamadas parábolas.



Recuerda que...

Resolver una ecuación cuadrática con una incógnita es hallar los valores (raíces) que satisfacen la ecuación; es decir son los valores que cortan al eje x.

El punto mínimo (cuando abre hacia arriba) o máximo (cuando abre hacia abajo), se llama vértice de la parábola y se puede encontrar mediante la expresión:

$$X_v = \frac{-b}{2a}$$

Ejemplo 12

Encuentre el vértice de la siguiente función cuadrática $f(x) = x^2 + 6x + 8$.

Solución

Primero se utiliza la expresión del vértice:

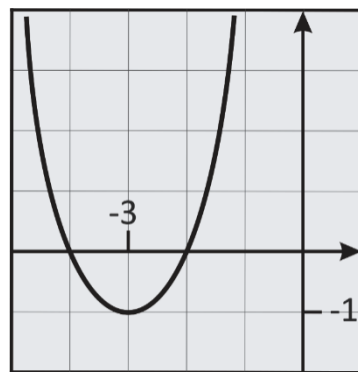
$$X_v = \frac{-6}{2(1)} X_v = -3$$

Ahora se evalúa con este valor la función.

$$f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 8$$

$$f(-3) = -1$$

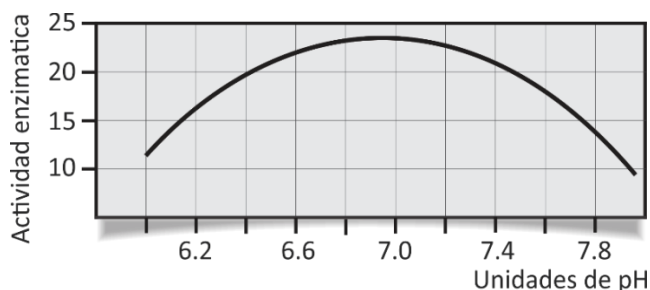
Por lo tanto, **el vértice es el punto (-3,-1)**



Las funciones cuadráticas son utilizadas por los químicos cuando se relaciona una reacción química en función del área de un reactor, o la influencia del potencial de

hidrógeno sobre la actividad de una enzima (ver Figura 2.14), la concentración óptima de un nutriente para cierto microorganismo, etc.

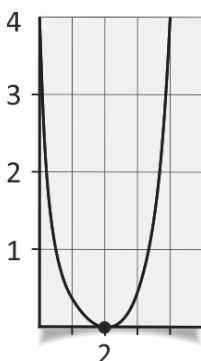
Figura 2.14 Función cuadrática que representa el pH vs actividad enzimática



Ejemplo 13

Encuentre gráficamente las raíces que dan solución a la siguiente función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

Solución



Para realizar el ejercicio se tabula en un dominio libre de 0 a 4 y se traza la parábola. En este ejemplo sólo existe un punto de intersección, que se encuentra cuando $x = 2$.

Al verificar el vértice, se tiene:

$$X_v = \frac{-b}{2a} X_v = \frac{-(-4)}{2(1)} X_v = 2$$

Por lo tanto, **el vértice es el punto (2,0)**.

Ejemplo 14

Encuentra la función cuadrática para la síntesis de amoníaco, la conversión es sumamente lenta, por lo que la temperatura es el factor importante para lograr acelerar la reacción. La reacción balanceada es: $N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$.

Se puede establecer el equilibrio en función de la presión (atm), considerando una conversión del 50%, y con un rango de temperatura de 350 a 600 °C (623 a 873 °K), para llegar a la expresión:

$$e^{-23.85 + \frac{11\,100}{T}} = \frac{5.333}{P^2}$$

Solución

Se despeja la presión.

$$P^2 = \frac{5.33}{e^{-23.85 + \frac{11\,100}{T}}} \quad P = \sqrt{\frac{5.33}{e^{-23.85 + \frac{11\,100}{T}}}}$$

La impresión que guarda esta función es que no parece una función cuadrática. Vemos los datos realizados en Excel®.

T (°C)	$e^{-23.85 + \frac{11\,100}{T}}$	$\frac{5.33}{e^{-23.85 + \frac{11\,100}{T}}}$	P (atm)
350	2602.650725	0.00204791	0.04525386
400	49.40244911	0.10788939	0.3284652
450	2.262944105	2.35533878	1.5347113
500	0.192049909	27.7532025	5.26813083
600	0.004748151	1122.54223	33.5043613
650	0.001144169	4658.40392	68.2525012

Al hacer la regresión de los datos se tiene: $P = -0.00017T^2 + 0.0343T + 8.1515$

Para resolver las funciones cuadráticas por el método analítico, nos remitimos a las técnicas de:

- a) Factorización.
- b) Completar el cuadrado perfecto.
- c) Fórmula general.

Para resolver un trinomio cuadrado imperfecto se buscan dos números cuyo producto sea el término independiente y la suma el término lineal.

a) Factorización

Cuando la expresión $ax^2 + bx + c$ es factorizable, la ecuación cuadrática se iguala a cero, es decir: $ax^2 + bx + c = 0$, y se puede expresar como el producto de dos factores lineales igualados a cero.



Ejemplo 15

Encontrar las raíces de la siguiente función cuadrática:

$$f(x) = x^2 + 7x + 10$$

Solución

Se buscan los números con los cuales se pueda expresar como el producto de un binomio.

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 5)(x + 2)$$

Se igualan a cero cada binomio y se tiene que las raíces son:

$$x_1 = -5 \qquad x_2 = -2$$

b) Completar el cuadrado perfecto

Esta técnica se utiliza cuando al hacer la prueba de encontrar los binomios del trinomio no se encuentran, es decir, dicha ecuación no es factorizable o no se puede factorizar.

**Recuerda que...**

Para completar un trinomio cuadrado perfecto, los pasos son:

- 1.- El término cuadrático y el lineal se igualan al término independiente.
- 2.- Se suman en ambos lados de la igualdad el cuadrado de la mitad del término lineal.
- 3.- Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto y se obtiene la raíz.
- 4.- Al extraer raíz se obtiene un doble signo, que corresponde a las dos soluciones.

Ejemplo 16

Resolver la siguiente ecuación de segundo grado, utilizando el método de completar el trinomio cuadrado perfecto: $f(x) = x^2 + 6x - 55$.

Solución

Se pasa el término independiente del otro lado de la igualdad $x^2 + 6x = 55$. Para completar el trinomio, se toma el término lineal (6) se obtiene la mitad y se eleva al cuadrado, entonces el resultado es 9. Se suma en ambos miembros.

$$x^2 + 6x + 9 = 55 + 9$$

Ahora se factoriza la parte izquierda de la expresión y se obtiene la raíz.

$$(x + 3)^2 = 64 \qquad x + 3 = \pm\sqrt{64}$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = -11$$

c) Fórmula general de una ecuación de segundo grado

La fórmula general, de representar una ecuación de segundo grado es la siguiente:
 $ax^2 + bx + c = 0$.

Esta expresión de segundo grado es empleada con frecuencia en química analítica, ya que permite conocer o determinar la concentración de las especies en equilibrio.

**Recuerda que...**

La fórmula general para la solución de ecuaciones de segundo grado es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El término $b^2 - 4ac$, se le conoce como discriminante, si éste es:

- a) Mayor a cero, la ecuación tiene dos raíces.
- b) Igual a cero, la ecuación tiene una raíz real.
- c) Menor a cero, la ecuación no tiene dos raíces reales (la solución de estas raíces se encuentra en la parte imaginaria).

Ejemplo 17

Resolver la ecuación $f(x) = x^2 + 4x - 12$, utilizando la fórmula general.

Solución

Sustituyendo los valores de a, b y c.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -6$$

2.3 Operaciones con funciones

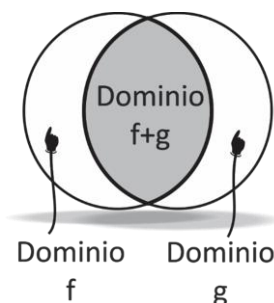
Las operaciones empleadas en las funciones son la suma, resta, producto, cociente y potencia (Tabla 2.6), estas operaciones generan una nueva función. Se debe tener cuidado con los dominios, una vez realizada la operación de las funciones, el dominio de la nueva función da como resultado la intersección de los dominios de cada función o de cada una de las funciones (ver Figura 2.15).

Tabla 2.6

Operación de funciones

Operación	Fórmula
Suma	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Diferencia	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
Producto	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con } g(x) \neq 0$
Potencia	$f^n(x) = [f(x)]^n$

Figura 2.15 Dominio de una operación entre funciones



Recuerda que...

La única excepción a esta operación es:

$$f^n \text{ para } n = -1$$

Que es la función inversa.



Ejemplo 18

Realice la operación de suma, diferencia, producto y cociente para las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x-5}{2} \quad g(x) = \sqrt{x} + 2$$

Solución

Para la suma se tiene.

$$(f + g)(x) = \frac{x-5}{2} + \sqrt{x} + 2$$

$$(f + g)(x) = \frac{x-1}{2} + \sqrt{x}$$

Dominio para $f(x)$ es:

$$(-\infty, +\infty)$$

Dominio para $g(x)$ es:

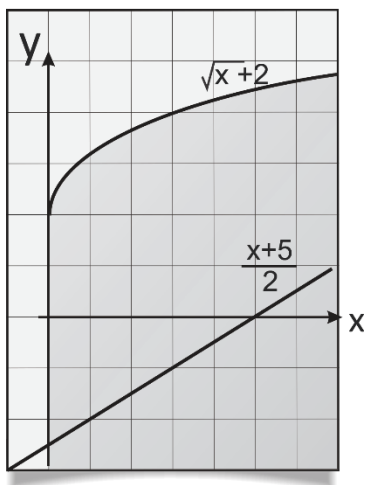
$$[0, +\infty)$$

Si se hace la intersección el dominio de la operación de estas funciones queda como:

$$(-\infty, +\infty) \cap [0, +\infty)$$

Dominio $[0, +\infty]$

Estas operaciones de funciones se pueden ver con ayuda de una gráfica.



También se puede utilizar la recta numérica.

Dominio de f



Dominio de g

Para la diferencia se tiene:

$$(f - g)(x) = \frac{x - 5}{2} - (\sqrt{x} + 2)$$

$$(f - g)(x) = \frac{x - 5 - 2\sqrt{x} - 4}{2}$$

$$(f - g)(x) = \frac{x - 9}{2} - \sqrt{x}$$

Para el producto se tiene:

$$(f \cdot g)(x) = \left(\frac{x - 5}{2}\right)(\sqrt{x} + 2)$$

$$(f \cdot g)(x) = \left(\frac{x - 5}{2}\right)\sqrt{x} + \left(\frac{x - 5}{2}\right)(2)$$

$$(f \cdot g)(x) = (x - 5)\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right)$$

Para el cociente se tiene:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - 5}{2(\sqrt{x} + 2)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x - 5}{2\sqrt{x} + 4}$$



Ejemplo 19

Encuentre el dominio de la siguiente suma de operación de funciones:

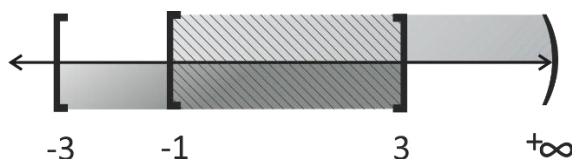
$$f(x) = \sqrt{x+1}g(x) = \sqrt{9-x^2}$$

Solución

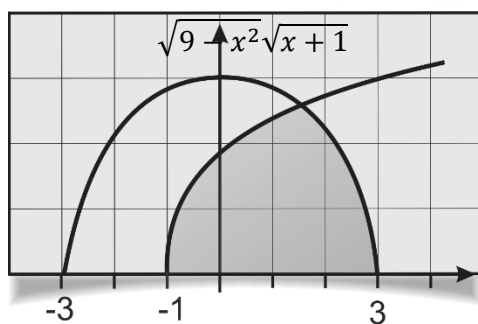
Dominio de $f(x)$ es $[-1, +\infty)$

Dominio de $g(x)$ es $[-3, 3]$

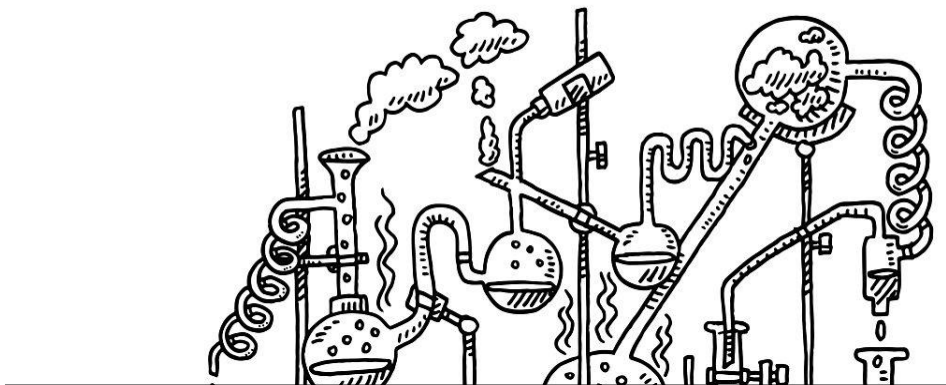
Ahora en la recta numérica se tiene la intersección. Dominio de la operación de las funciones f y g es $[-1, 3]$.



Gráfica del dominio de la operación de funciones



El uso de la operación de funciones se puede establecer en el suministro de diferentes fármacos, cada uno con un comportamiento distinto.



Ejercicios de refuerzo

UNIDAD 2 FUNCIONES

I. Obtenga el dominio de las siguientes funciones:

1. $\sqrt{x}$

2. $\frac{x-9}{x^2-9}$

3. $\sqrt{3-x}$

4. $\frac{4}{x^2+1}$

5. $2x^3 + x - 1$

6. $\frac{x^2-4}{x^2-5x}$

7. $\sqrt{x-4}$

8. $\frac{8x}{(x-1)(x-2)}$

9. $\frac{4}{x(x+2)}$

10. $\frac{2}{3x+1}$

II. Evalúe las funciones en el valor requerido.

$f(0), f(2), f(-2)$ y $f(9)$

11. $f(x) = 1000 + 3x$

12. $f(x) = (x-10)^2 + 23$

13. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

14. $f(x) = x - \frac{1}{x}$

III. Diga si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas:

15. $f(x) = 3x \rightarrow f(x) = 3f(x)$

16. $f(x) = x^2 \rightarrow f(-x) = f(x)$

17. $f(x) = x^2 \rightarrow f(1) + f(2) = f(1 + 2)$

18. $f(x) = 4x - 3 \rightarrow f(-x) = f(x)$

IV. Calcule y simplifique las siguientes expresiones si: $\frac{[g(x+h)+g(x)]}{h+2}$

19. $g(x) = 5 - 2x$

21. $g(x) = \frac{1}{x+2}$

20. $g(x) = x^2 + 3$

22. $g(x) = \frac{3}{2x+1}$

V. Calcule $f(2)$, $f(3)$ y $f(4)$ para:

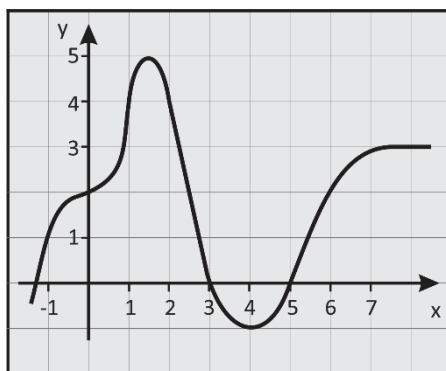
23. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{para } 0 \leq x \leq 2.6 \\ 2+x & \text{para } 2.6 \leq x \leq 5 \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} \pi x^{1/2} & \text{para } x \leq 2 \\ 1+x & \text{para } 2 < x \leq 3.5 \\ 4x & \text{para } 3.5 < x \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4-x} & \text{para } x < 3 \\ 3x & \text{para } 3 \leq x < 3 \\ \sqrt{2x^2 - 6} & \text{para } 3 \leq x \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} x^{1/2} & \text{para } 2 \leq x \leq 3 \\ x^{1/3} & \text{para } 3 < x \end{cases}$

VI. De la siguiente gráfica encuentra lo que se pide.



27. Encuentre $f(0)$.
28. Encuentre $f(2)$.
29. Encuentre $f(7)$.
30. ¿Es $f(-1)$ positivo o negativo?
31. ¿Qué valores de x es $f(x) = 0$?
32. ¿Es $f(4)$ positivo o negativo?
33. ¿Es $f(3/2)$ mayor que $f(6)$?

VII. Realice lo que se pide en los siguientes ejercicios.

34. Un laboratorio que provee reactivos para cultivo de microorganismos, ha encontrado que la cantidad en gramos de sustancias vendidas por año está dada por la función $f(x) = 40 + 3x + 12x^2$, donde $x = 0$ corresponde al año 2010.

- a) ¿Cuánto reactivo se vendió en 2015?
- b) Tabule la función para 10 años.
- c) ¿En qué lapso de tiempo se tiene una ganancia de 100 dólares?

35.- Para esterilizar un medio de cultivo microbiológico en un entorno líquido, se utiliza una autoclave; en donde x es el tiempo (en minutos) que está el medio dentro del equipo y que ésta es una función de la temperatura en Celsius, las funciones son: $y = x + 100$, para un tiempo de 0 a 20 minutos en el caso de $y = -2x + 160$ para un intervalo de tiempo de 20 a 35 minutos, encuentre:

- a) La descripción de x .
- b) ¿Qué temperatura existirá en 5 minutos y 22 minutos?
- c) Realice el bosquejo de la gráfica.

36.- Si x representa el número atómico de los elementos, la variación de la electronegatividad es una función de x , una muy buena aproximación de este comportamiento es $y = 0.1767x - 5.6656$ para números atómicos de 38 a 45 y la fórmula $y = 0.512x^2 - 5.0226x + 124.9$, para números atómicos de 53 a 56, encuentre:

- a) La descripción de x .
- b) Encuentre la electronegatividad del Zirconio.
- c) Encuentre la electronegatividad del Antimonio.
- d) Haga el bosquejo de la gráfica.
- e) Compare los valores encontrado a partir de las funciones y compárelos con los reportados en la literatura.

37.-En un reactor tubular se va a llevar a cabo la síntesis de un fármaco, en donde x representa la velocidad de reacción, esta velocidad está en función de la longitud del reactor, las funciones de x para formar el fármaco son: $y = 5\ln x - 3.05$, para valores de 0 a 5 mol/s; $y = x$, para valores de 5 a 30 mol/s y $y = 2.5 \ln x + 5.5$ para valores mayores de 30 mol/s, encuentre:

- a) La descripción de x .
- b) Calcule $f(3)$, $f(15)$ y $f(25)$.
- c) ¿Qué longitud deberá tener el reactor tubular para alcanzar una velocidad terminal del fármaco de 10 mol/s?
- d) Haga el bosquejo de la gráfica.

38.- Para retirar la humedad a cierto medicamento granulado y obtener las condiciones para tabletear, se introduce un lote a un secador, se sabe que x representa la humedad (Kg H_2O /Kg medicamento seco) y que está en función de la velocidad de secado (kg H_2O / $h \cdot m^2$), las funciones de x para secar el medicamento son: $y = 200x^2$, para valores de humedad de 0 a 0.06; $y = 10x$, para valores de 0.07 a 0.15; $y = 1.5$ para el intervalo de 0.15 a 0.4 y para $y = -5x$ de 0.4 a 0.6, encuentre:

- a) La descripción de x .
- b) Calcule $f(0.05)$, $f(0.15)$ y $f(0.45)$.
- c) Realice el bosquejo de la gráfica.
- d) ¿En qué intervalo existe mayor velocidad de secado del medicamento?
- e) ¿Qué valor se tiene cuando el secado permanece constante?

39. En la determinación de una especie X por un método instrumental en el que la señal analítica se define como P, se obtuvieron los siguientes datos de calibración:

Concentración de X (ppm)	0	2	6	10	14	18
Señal analítica P	0.032	0.174	0.423	0.701	0.957	1.249

- a) Con la ayuda de Excel® obtén la ecuación de la curva de calibrado.
- b) Calcular la concentración molar de X en una muestra, si al medir la intensidad de señal analítica se obtiene un valor de $P=0.531$.

40. En el laboratorio de Bioquímica Celular y de los Tejidos I (BCT), se hace una determinación de proteína con el uso de la curva estándar. Los siguientes son datos de absorbancia obtenidos en las diferentes concentraciones usadas para la curva:

Concentración de X (ppm)	0	2	4	6	8	10	Muestra
Señal analítica P	0.032	0.174	0.423	0.701	0.957	1.249	0.34

41. El hierro forma un complejo con 1,10 fenantrolina el cual presenta un máximo de absorción a 510 nm. A partir de una solución patrón de 1000 mg/L de hierro se preparó una curva de calibración, obteniéndose los siguientes datos:

Tabulación de datos

Concentración (mg/L)	2	4	6	8	muestra
Absorbancia (510 nm)	0.161	0.312	0.461	0.618	0.202

25,0 ml de una muestra de agua subterránea se colocaron en un matraz de 50,0 ml después de ser tratada para formar el complejo coloreado, al igual que la curva de calibración, fue aforada. La absorbancia fue de 0,202. Calcular la concentración de Fe de la muestra de agua en mg/L.

42. Se llevó a cabo el análisis del contenido de proteína de un alimento para bebé, utilizando el método de Lowry. La curva estándar se realizó preparando una solución de albúmina serica bovina (BSA por sus siglas en inglés) usando 10 mg de BSA en 100 mL de NaOH 0.1N. Los volúmenes utilizados en la construcción de la curva de calibración son : 100, 200, 600 y 800 μ L.

La muestra se preparó de la siguiente forma: 1.0 mL de la muestra se aforó a 10 mL y posteriormente, 5.0 mililitro de la solución previamente aforada se llevó a 500 mL.

Los valores de absorbancia obtenidos fueron de: 0, 0.035, 0.106, 0.211 y 0.323 para los respectivos volúmenes del estándar.

La absorbancia obtenida de 300 μ L de muestra es de 0.028. La etiqueta del alimento reporta 300 mg de proteína por mL del alimento.

Calcule la cocentración de la muestra y compare con lo reportado en la etiqueta.

VIII. Encuentre el vértice de las siguientes funciones cuadráticas:

43. $x^2 - 4x + 3 = 0$

44. $x^2 - 6x + 8 = 0$

45. $x^2 + 14x + 45 = 0$

45. $x^2 + 2x - 8 = 0$

47 $x^2 + 6x + 9 = 0$

48. $x^2 - 8x + 15 = 0$

49. $3x^2 - 2x - 1 = 0$

50. $4x^2 - 7x - 15 = 0$

51. $9x^2 + 24x + 16 = 0$

52. $10x^2 - x - 2 = 0$

53. $x^2 - 2x + 1 = 0$

54. $x^2 + 12x + 35 = 0$

55. $x^2 - 8x + 16 = 0$

IX. Encuentre gráficamente las raíces de las siguientes funciones cuadráticas:

$$56. x^2 + 6x + 10 = 0$$

$$57. x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$58. x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$67. x^2 + 22x + 117 = 0$$

$$68. x^2 - 16x + 64 = 0$$

$$69. x^2 - 4 = 0$$

$$70. x^2 + 22x + 120 = 0$$

$$71. x^2 - 8x - 65 = 0$$

X. Encuentre las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método de factorización.

$$59. x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$60. x^2 + x - 110 = 0$$

$$61. x^2 - 17x + 60 = 0$$

$$62. x^2 + 2x - 99 = 0$$

$$63. 9x^2 + 26x + 16 = 0$$

XI. Complete los cuadrados y encuentre las raíces de las siguientes ecuaciones:

$$64. x^2 + 10x + 21 = 0$$

$$65. x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$66. x^2 - 8x + 12 = 0$$

XII. Realice las operaciones de suma, diferencia, producto y cociente con las siguientes funciones, así mismo grafique y establezca el dominio con el uso de recta:

$$72. f(x) = 2x - 1$$

$$g(x) = (x - 1)^2$$

$$73. f(x) = \sqrt{x + 3}$$

$$g(x) = |x + 6|$$

$$74. f(x) = \sqrt{x - 2}$$

$$g(x) = \sqrt{x - 8}$$

$$75. f(x) = 2x^2$$

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$76. f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$g(x) = 9 - x^2$$

Capítulo tres

Función potencia

“La microbiología predictiva es una subdisciplina de la microbiología de alimentos que combina el conocimiento del crecimiento microbiano y el matemático”

-Maria Luisa Carrillo-Inungaray

Las funciones potencia permiten explicar muchos fenómenos que ocurren en la vida cotidiana ya que describen crecimientos o decrecimientos que se desarrollan muy rápidamente como es el caso de una colonia de bacterias.



Los microorganismos son los principales responsables de la descomposición de los alimentos, esta es una de las razones por lo que es importante el estudio de su crecimiento.

3.1 Definición y propiedades de la función potencia

¡¡¿Por qué no puedo hornear un pan grande y uno pequeño a la misma temperatura?!!!



La función potencia es una expresión base para la construcción de otras funciones; es la mínima expresión de una ecuación polinomial. En química es recurrente usar estas funciones potencias por su sencillez en la manipulación, por ejemplo, para calcular en una reacción que involucra gases la presión, el volumen, la densidad; la difusividad de una sustancia en otra; la energía liberada en una reacción, indicadores ambientales, etc.



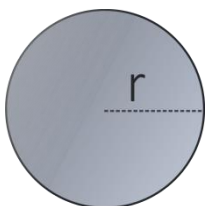
Definición

Una función potencia es aquella que puede escribirse de la forma:

$$f(x) = kx^a$$

Dónde k y a son constantes diferentes a cero.

En la función potencia la constante a es el exponente o potencia y la constante k representa la variación o proporcionalidad de la función. Se debe de leer $f(x)$ varia como la potencia a^{esima} de x , o que $f(x)$ es proporcional a la a^{esima} potencia de x .



Por ejemplo, para la función de la circunferencia se lee: “La circunferencia de un círculo varía directamente con el radio”.

Ejemplo 1

Indique la potencia y la constante de variación para las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \sqrt{4x} \qquad b) g(x) = \frac{3}{x^2}$$

Solución

a) Primero se expresa la función que sea explícita a una función potencia.

$$\sqrt{4x} = 2x^{1/2} \text{ Vemos entonces que } \mathbf{k = 2 \text{ y } a = 1/2.}$$

b) Para la función $g(x)$, también se acomoda la expresión.

$$\frac{3}{x^2} = 3x^{-2} \text{ Se tiene que } \mathbf{k = 3 \text{ y } a = -2.}$$

Las funciones más comunes en matemáticas de este tipo se pueden ver en la siguiente tabla.

Tabla 3.1

Funciones potencia

Función	Fórmula	Potencia	Valor de la constante
Circunferencia	$C = 2\pi r$	1	2π
Área	$A = \pi r^2$	2	π
Fuerza	$F = \frac{K}{d^2}$	-2	k

3.1.1 LA POTENCIA COMO UNA FUNCIÓN MONOMIAL

Como ya se vio la función potencia tiene un término constante y una variable elevado a un exponente, también la podemos considerar como un polinomio de un término, es decir, un monomio, que puede definirse como:

$$f(x) = kx^n$$

Dónde:

k es una constante diferente a cero.

n es un entero positivo

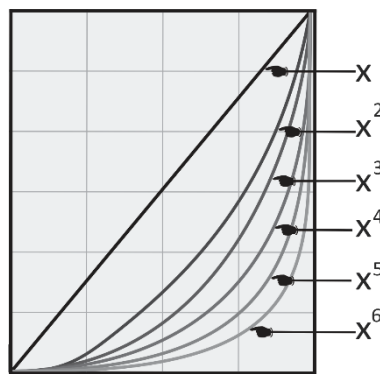
Las funciones monomiales básicas son x , x^2 y x^3 ; observe el comportamiento de la familia de funciones monomiales cuyo exponente es 1 a 6 (ver Figura 3.1). Para química podemos ver algunos ejemplos de función potencia:

Tabla 3.2

Ejemplo de funciones potencia aplicados a la química

Función	Fórmula	Potencia	Valor de la constante
Energía libre	$\Delta G = -RT \ln K_{eq}$	1	$-R \ln K_{eq}$
Radio de orbita	$r = n^2 a_0$	2	a_0
Ley de Boyle	$V = \frac{k}{P}$	-1	k
Energía total	$E_0 = -\frac{e^2}{2a} \left(\frac{1}{n^2} \right)$	-2	$-\frac{e^2}{2a}$
Densidad de energía	$u = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$	-4	$8\pi kT$

Figura 3.1 Gráficas de funciones monomiales hasta la sexta potencia en un intervalo

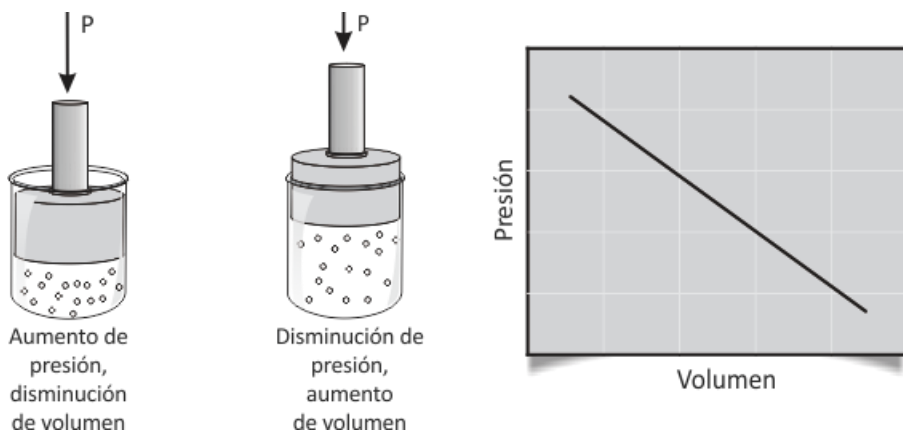


Ejemplos en lenguaje de variación y proporción:

- 1.- La energía libre varía directamente con la temperatura.
- 2.- El radio del orbital del hidrógeno es directamente proporcional al cuadrado de su nivel de energía.
- 3.- El volumen de un gas es inversamente proporcional a la presión aplicada.
- 4.- La densidad de energía es inversamente proporcional a la potencia cuártica de la longitud de onda.
- 5.- La energía de interacción molecular es inversamente proporcional a la potencia séxtica del radio de la molécula.

Analizando un poco más la ley de Boyle, en donde se ha dicho que el volumen de un gas es inversamente proporcional a la presión aplicada, este comportamiento se puede ver en la siguiente figura.

Figura 3.2 Ley de Boyle



Ejemplo 2

Con base en experimentos realizados en el laboratorio de química se encontró que, manteniendo la presión constante, el volumen de una masa de gas varía directamente con la temperatura, encuentre la función potencia de este fenómeno. Lo que se corroboró con la siguiente tabla:

Tabla 3.3

Variación del volumen de una masa dada con la temperatura

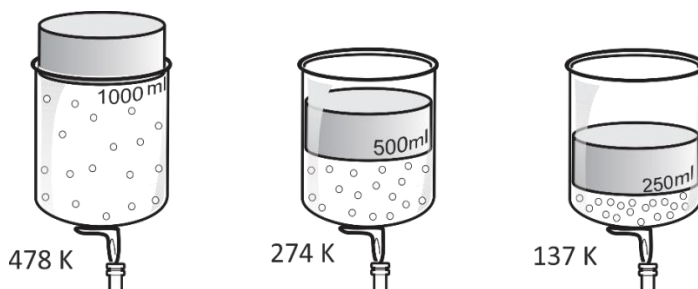
Temperatura (T)	Volumen (v)
274 K	500 ml
478 K	1000 ml
137 K	250 ml

Fuente: Frey, 1995

Solución

Como el volumen varía directamente con la temperatura esto es:

Figura 3.3 Variación del volumen de una masa dada con la temperatura



Se tiene una función de la siguiente forma: $v = KT$

Al despejar a la constante K se tiene:

$$\frac{v}{T} = K$$

En la tabla 3.3 se puede encontrar la constante de variación, realizando los cocientes:

$$\frac{v}{T} = \frac{500 \text{ ml}}{274 \text{ K}} = 1.82$$

$$\frac{v}{T} = \frac{1000 \text{ ml}}{548 \text{ K}} = 1.82$$

$$\frac{v}{T} = \frac{250 \text{ ml}}{137 \text{ K}} = 1.82$$

Por lo que se puede generalizar a presión constante:

$$\frac{v_1}{T_1} = \frac{v_2}{T_2} = \frac{v_3}{T_3} = K$$

Para este caso la $K=1.82$, se puede llegar con esta lógica a la ecuación de la Ley de Charles:

$$\frac{v_1}{T_1} = \frac{v_2}{T_2} \Rightarrow v_2 = v_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$



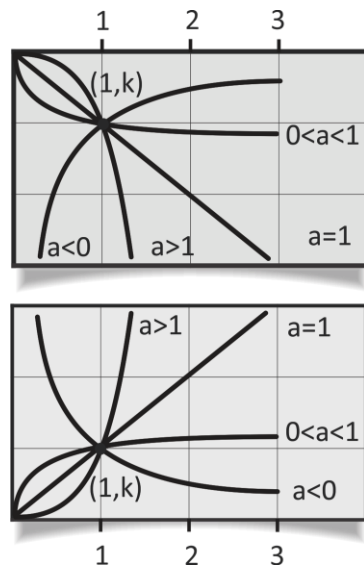
3.1.2 GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN POTENCIA

En general para cualquier función potencia $f(x) = kx^a$ debe darse alguno de los siguientes casos (ver Figura 3.4).

Potencia positiva $x \geq 0$, la gráfica de f

- Contiene al punto $(1, k)$,
- Pasa por el punto $(0, 0)$
- Potencia negativas $x \geq 0$, la gráfica de f
- Es asíntota en ambos ejes.
- Constante k , la gráfica de f
- Si es positiva se encuentra en el primer cuadrante.
- Si es negativa se encuentra en el cuarto cuadrante.

Figura 3.4 Funciones potencia



Ejemplo 3

Describe las siguientes funciones potencia: $-0.5x^{1.5}$, $3x^{-3}$ y $-2x^{-0.4}$

Solución

- a) Debido a que k es negativa (-0.5) se encuentra la gráfica en el cuarto cuadrante, el exponente es positivo por lo que es una función decreciente (por el cuadrante).

Como $a=1.5$ y esto es mayor a 1, la gráfica contiene al punto $(0,0)$ y pasa por el punto $(1,-0.5)$. La función no está definida para valores negativos, de evaluar la raíz de x en valores negativos estaremos trabajando con la parte imaginaria de los números. Hay que recordar que en los números reales no existen las raíces negativas (ver Figura 3.5).

$$f(x) = -0.5x^{1.5} = -\frac{1}{2}x^{3/2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^{3/2} = -\frac{1}{2}\sqrt{x^3}$$

- b) Para la función $f(x) = 3x^{-3}$; k es positivo (3) la curva de la gráfica se ubica en el primer cuadrante, el exponente es negativo por lo que es una función decreciente. La gráfica es una asíntota que pasa por los puntos $(1,3)$ y $(-1,-3)$, esto se puede ver en la Figura 3.6.

Figura 3.5

Función potencia $f(x) = -0.5x^{1.5}$

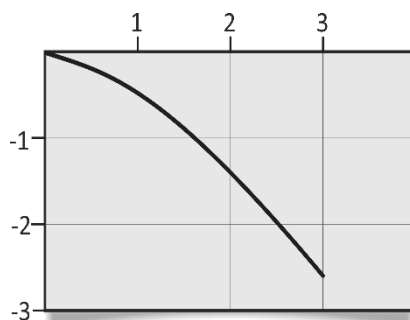
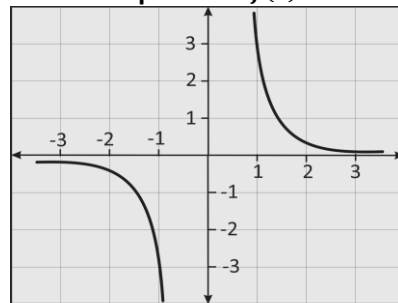


Figura 3.6

Función potencia $f(x) = 3x^{-3}$



- c) Para la función $f(x) = -2x^{-0.4}$, tenemos que k es negativo (-2) por lo que la curva se dibujará en el cuarto cuadrante, el exponente es negativo por lo que es una función creciente (debido al cuadrante). Como $a = -0.4$ y esto es menor a 1, la gráfica pasa por (1,-0.4). La función está definida para valores negativos de x ya que:

$$f(x) = -2x^{-0.4} = -2x^{-2/5}$$

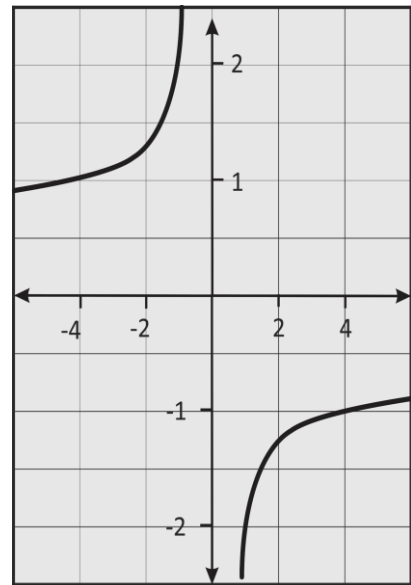
$$-2x^{2/5} = -2\sqrt[5]{x^{-2}} = -2\sqrt[5]{\frac{1}{x^2}}$$

Se puede ver también que no contiene al punto (0,0) debido al cociente dentro de la raíz. Finalmente se observa que es una asíntota (ver Figura 3.7).

Las funciones potencia, son utilizadas en muchas áreas de las ciencias, como en química, ambiental, biología, economía, astronomía. Veamos una aplicación ambiental con el uso de indicadores ambientales.

Figura 3.7

Función potencia $f(x) = -2x^{-0.4}$



Ejemplo 4

Se solicita a un grupo de químicos verificar la calidad de un cuerpo de agua, al realizar el muestreo se tuvieron los siguientes resultados:

Tabla 3.4

Resultados de análisis del cuerpo de agua

<i>Parámetro</i>	<i>Concentración (mg/L) o la que se indique</i>
Demanda Bioquímica de Oxígeno	65
Coliformes totales	N.D.
Coliformes fecales	N.D.
Nitrógeno de nitratos	15.3
Nitrógeno amoniacal	0.89
Fósforo total	8.12
Sólidos Suspendedos Totales	79.82
Turbiedad	6 UTN
pH	7.89
Grasas y aceites	15.4
Color	17 u Pt-Co

N.D. No Detectable

UTN Unidades de Turbidez Nefalométricas

Calcule el índice de calidad del agua (ICA) utilizando el modelo aritmético ponderado, cuya fórmula es:

$$ICA = \frac{\sum_{i=1}^n I_i W_i}{\sum_{i=1}^n W_i}$$

Dónde:

- I Subíndice de calidad para el i -ésimo parámetro (ver Tabla 3.5).
- W_i Peso de importancia de 0 a 5 (ver Tabla 3.4).
- n Número de parámetros.

Tabla 3.5

Las funciones potencia utilizadas para calcular el ICA

<i>Parámetro</i>	<i>Subíndice de calidad</i>	<i>Peso de importancia</i>
<i>DBO</i>	$I_{DBO} = 120[DBO]^{-0.673}$	5
NO_3^{-1}	$I_{NO3} = 162.2[NO3]^{-0.0343}$	2
NH_3	$I_{NH3} = 45.8[NH3]^{-0.673}$	2
PO_4^{-3}	$I_{PO4} = 34.215[PO4]^{-0.46}$	3
<i>Turbiedad</i>	$I_{TUR} = 180[TUR]^{-0.178}$	2
<i>SST</i>	$I_{SST} = 265.5[SST]^{-0.37}$	0.5
<i>pH</i>	$I_{pH} = 10^{4.22-0.295[pH]}$	1
<i>GYA</i>	$I_{GYA} = 87.25[GYA]^{-0.298}$	2
<i>Color</i>	$I_{Color} = 123[Color]^{-0.295}$	1

Fuente: Hoyo, 2015

Una vez obtenido el ICA, con ayuda de la Tabla 3.6 indique el estado del cuerpo de agua.

Tabla 3.6

Calidad del agua una vez obtenido el ICA

<i>ICA</i>	<i>0-29.9</i>	<i>30-49.9</i>	<i>50-69.9</i>	<i>70-84.9</i>	<i>85-100</i>
Estado del agua	Altamente contaminada	Contaminada	Poco contaminada	Aceptable	Excelente

Fuente: Semarnat.gob.mx, 2018

Solución

El cálculo para el primer parámetro es:

$$I_{DBO} = 120[DBO]^{-0.673} = 120[65]^{-0.673}$$

$$I_{DBO} = 7.23$$

Ahora se multiplica por el peso de importancia del parámetro

$$IW = 7.23(5) = 36.14$$

Con estos datos se construye la siguiente tabla.

Parámetro	[]	I	W	IW
DBO	65.0	7.23	5	36.14
NO_3^{-1}	N.D.	136.49	2	272.98
NH_3	N.D.	47.66	2	95.33
PO_4^{-3}	15.3	13.05	3	39.16
<i>Turbiedad</i>	0.89	12.37	2	24.74
<i>SST</i>	8.12	130.84	0.5	65.42
<i>pH</i>	79.82	78.06	1	78.06
<i>GYA</i>	6 UTN	87.62	2	77.25
<i>Color</i>	7.89	53.32	1	53.32
		$\sum_{i=1}^{n=9} W_i = 18.5$		$\sum_{i=1}^{n=9} I_i W_i = 742.4$

Se usa la ecuación:

$$ICA = \frac{\sum_{i=1}^n I_i W_i}{\sum_{i=1}^n W_i} = \frac{742.4}{18.5} = 49.29$$

Podemos concluir que el **agua está contaminada**.



3.2 Aplicaciones de la función potencia

Una de las aplicaciones más importantes de la función potencia, es expresar algunos fenómenos o acontecimientos de la naturaleza mediante un modelo matemático que describe, por ejemplo, la relación del número de cromosomas por especie, la distancia que existen entre los planetas, el peso corporal de una especie y su ritmo cardiaco, etc.



Ejemplo 5

Utilice los datos de la siguiente tabla para obtener un modelo de función potencia que describa la frecuencia cardiaca contra el peso corporal de la especie. Luego emplee el modelo para predecir la frecuencia cardiaca de un conejo, considerando que su peso corporal promedio es de 2 kg.

Tabla 3.6

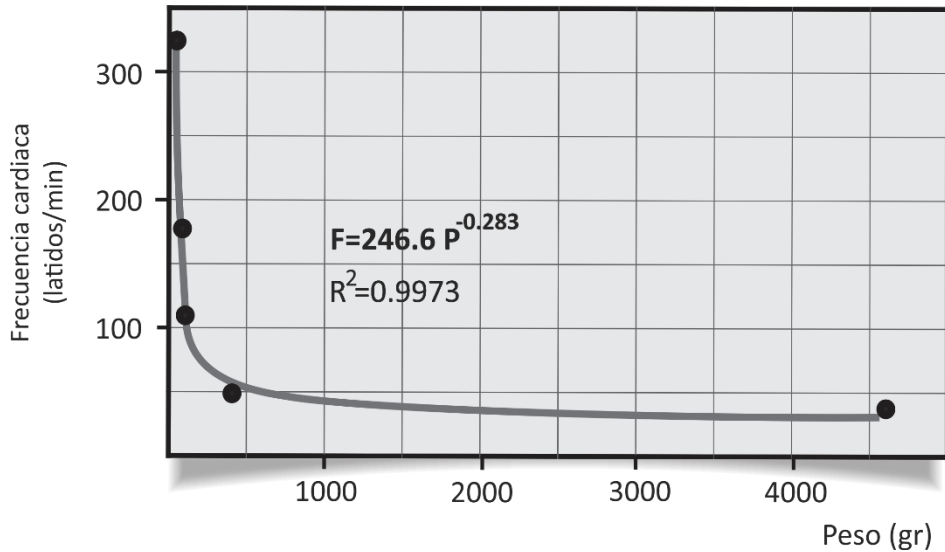
Frecuencia cardiaca en función del peso promedio de algunas especies

<i>Especie</i>	<i>Peso promedio (Kg)</i>	<i>Frecuencia cardiaca en reposo (latidos/minuto)</i>
Caballo	420	47
Humano	70	70
Perro	20	105
Gato	3	179
Rata	0.35	340

Fuente: Blaylock, 2000

Solución

Primero se grafican los puntos de la tabla 3.7.



Posteriormente se realiza una regresión para la potencia, se establece el modelo de la frecuencia cardiaca contra el peso es:

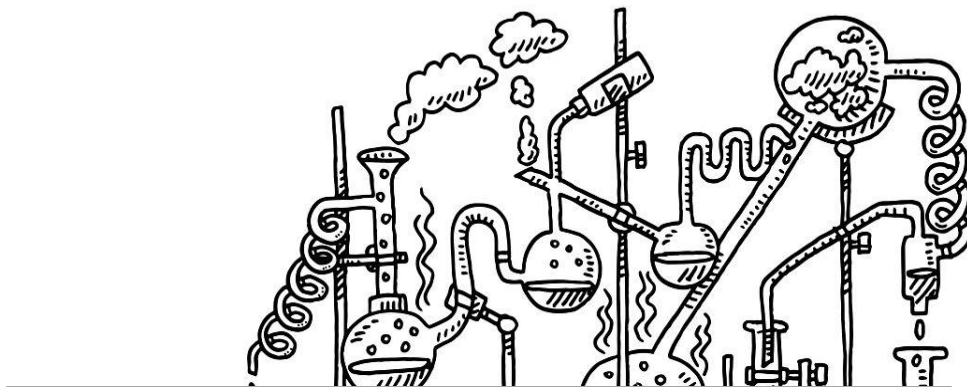
$$F = 246.6(Peso)^{-0.283}$$

Finalmente, con el peso promedio del conejo, la frecuencia cardiaca es:

$$F = 246.6(2)^{-0.283}$$

$$F = 202.6 \text{ latidos/min}$$





Ejercicios de refuerzo

UNIDAD 3 FUNCIÓN POTENCIA

I. De los siguientes ejercicios escribe la expresión utilizando sólo potencias enteras y positivas.

1. $x^{\frac{3}{2}}$ 4. $m^{-1/2}$

2. s^{-3} 5. $p^{7/2}$

3. x^{-6} 6. $b^{-4/5}$

II. En los siguientes ejercicios escriba la expresión de la forma $k \cdot x^a$

7. $\sqrt{8x^3}$ 9. $\sqrt[3]{27x^6}$

8. $\sqrt[3]{\frac{3}{x^4}}$ 10. $\frac{3x}{\sqrt{64x^3}}$

III. Determine si las siguientes funciones son potencia, indicando la potencia y la constante de variación.

$$11. f(x) = -\frac{1}{2}x^4$$

$$12. f(x) = 9x^{\frac{3}{2}}$$

$$13. f(x) = 16$$

$$14. f(x) = ma$$

$$15. f(x) = \frac{k}{D^2}$$

$$16. E = mc^2$$

$$17. EC = \frac{1}{2}kv^5$$

$$18. v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$19. d = \frac{1}{2}gt^2$$

$$20. P = \frac{nRT}{V}$$

IV. Determine si la función es de tipo monomial.

$$21. f(x) = -4$$

$$22. f(x) = -9x^6$$

$$23. f(x) = 4\pi r^2$$

$$24. y = -5 \cdot 2^x$$

$$25. B = lx$$

$$26. IpH = 10^{4.22-0.295pH}$$

$$27. P = \frac{l}{V}$$

$$28. IDBO = 120[DBO]^{-0.673}$$

$$29. v = \frac{m}{a^2}$$

$$30. K = 3x^2 + 1$$

V. Expresé el enunciado en forma de una función potencia. Utilizando la constante que se indique o en su defecto K.

31. El volumen es proporcional al número de moles de un gas; P y T son las constantes de proporción (Ley de Avogadro).

32. La presión de un gas es inversamente proporcional al volumen; constante de proporcionalidad es nRT .

33. La velocidad media molecular ($\bar{v}$) es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura; la constante de proporcionalidad es $3R/\mathcal{M}$, donde R es la constante universal de los gases y $\mathcal{M}$ es la masa molar (velocidad de Maxwell).

34. La presión de un gas es proporcional tanto a la densidad como a la temperatura del gas.
35. La velocidad de difusión (s) de una sustancia gaseosa es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la relación de las masas molares ($\mathcal{M}$), esta función es conocida como la Ley de difusión de Graham.
36. El calor liberado (q) en una reacción es directamente proporcional al cambio de temperatura, la constante de proporcionalidad es $m \cdot s$, donde m es la masa de la sustancia y s es el calor específico (para el agua es 4.184 J/g).
37. El trabajo (w) que desarrolla un gas es proporcional al cambio de volumen; la constante de proporcionalidad es $-P$.
38. El cambio de energía (ΔE) es proporcional al cambio en la temperatura; la constante de proporcionalidad es C .
39. La energía de un cuanto (E_n) emitida es proporcional a la radicación; la constante de proporcionalidad es h , conocida como constante de Planck ($h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Js}$).
40. La energía de un electrón en un átomo de hidrógeno (E) es inversamente proporcional al cuadrado del número cuántico n ; la constante de proporcionalidad es $-R_H$, conocida como la constante de Rydberg ($R_H = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$).
41. La longitud de onda (λ) es inversamente proporcional a la velocidad de la partícula; la constante de proporcionalidad es h/m , donde h es la constante de Planck y m es la masa.
42. La presión osmótica (π) de una disolución es proporcional a la temperatura; la constante de proporcionalidad es mR , donde m es la molalidad de la solución y R es la constante universal de los gases.
43. La velocidad de una reacción es proporcional a la concentración de los reactivos elevados a sus coeficientes estequiométricos, considere:
$$aA + bB \rightarrow cC + dD$$

La constante de proporcionalidad se le conoce como constante de velocidad de reacción K .

44. La energía de una celda ($\mathcal{E}$) es proporcional al logaritmo de la constante de reacción, donde la constante de proporcionalidad es RT/nF , donde F es la constante de Faraday (96500 J/V mol), n es el número de electrones que se transfieren, R la constante universal de los gases y T es la temperatura absoluta.
45. La dispersión de los rayos X (d) es proporcional a la longitud de onda; la constante de proporcionalidad es $n/2\sin\theta$, donde n es un múltiplo de la longitud de onda.
46. El radio de una órbita permitida es directamente proporcional a la longitud de onda del electrón, la constante de proporcionalidad es $n/2\pi$, donde n es el número cuántico principal.
47. La solubilidad de un gas (C) en un líquido es proporcional a la presión del gas sobre la disolución (Ley de Henry).
- 48.- El cambio de temperatura (ΔT) es proporcional a la concentración del soluto (en unidades de molalidad); la constante de proporcionalidad es K_f que
- senta la depresión del punto de congelación cuyas unidades son $^{\circ}\text{C}/m$.
49. La velocidad de una onda (v) es inversamente proporcional a la longitud de onda; teniendo como constante de proporcionalidad la velocidad de la luz cuyo valor es $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.
50. Los gramos (m) de una sustancia liberada por electrólisis es proporcional a la cantidad de electricidad en Coulomb administrada (Q), con una constante de proporcionalidad conocida como equivalente electroquímico en gramos (e).
51. La rapidez de difusión de los gases (D) varía inversamente con las raíces cuadradas de sus densidades (ρ).

VI. Indique la potencia, la constante de variación, la gráfica y analice el ejercicio como en el ejemplo 1.

52. $f(x) = 3x^4$

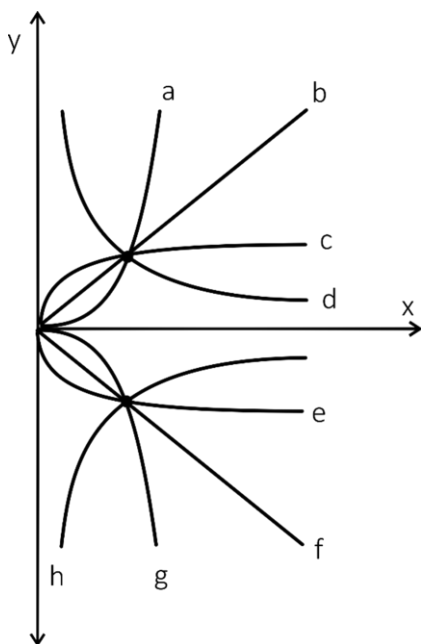
53. $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$

54. $f(x) = -3x^2$

55. $f(x) = -4x^{-3}$

56. $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x^3}$

VII. En los ejercicios 57 al 62 relacione la ecuación con una de las curvas de la siguiente figura.



57. $f(x) = -\frac{1}{3}x^4$

58. $f(x) = 2x^{1/4}$

59. $f(x) = -x^{5/3}$

60. $f(x) = 1.6x^{2/3}$

61. $f(x) = 2x$

62. $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$

VIII. En los ejercicios 63 y 64 obtenga la función potencia con los datos que se proporcionan.

63.

X	0	2	4	6	8
Y	0	-0.75	0.1875	-0.083	-0.0468

64.

X	1	2	6	12	16
Y	0.2	0.2828	0.4898	0.6928	0.8

IX. Resuelva los siguientes ejercicios:

65. Un gas producido por cierta bacteria fluye a través de una membrana porosa en 1.4 minutos. A nivel laboratorio, se reproducen las condiciones de presión y temperatura establecidas por la bacteria, a través de la misma membrana se hace pasar un volumen de bromo el cual tarda un tiempo de 4.4 minutos.

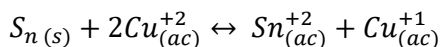
Encuentre que gas está desprendiendo la bacteria considerando que la composición es únicamente de carbono e hidrógeno. Use la ecuación encontrada en el ejercicio 35.

66. El Hierro forma un compuesto de fórmula $\text{Fe}(\text{CO})_x$ ¿Cuál es el valor de x , dado que el metano en las mismas condiciones de T y P fluye 3.2 veces más rápido que ese compuesto? Use la ecuación encontrada en el ejercicio 35.

67. Calcule la cantidad de calor liberado en KJ, cuando se enfrían 400 gramos de mercurio de 80°C a 15°C , use la ecuación del ejercicio 36. Considere que $s=0.138\text{ J/g}^\circ\text{C}$.

68. Nuestros ojos son sensibles a la luz en un intervalo de frecuencia de $4 \times 10^{14}\text{Hz}$ a $7.5 \times 10^{14}\text{Hz}$. Calcule la longitud de onda de estas frecuencias. Use la ecuación del ejercicio 49.

69. Calcule la constante de equilibrio para la siguiente reacción a 25°C .



Utilice la ecuación:

$$\mathcal{E} = \frac{0.0591}{n} \log K$$

70. Calcule el ICA del siguiente análisis de agua:

<i>Parámetro</i>	<i>Concentración (mg/l) o la que se indique</i>
Demanda Bioquímica de Oxígeno Coliformes totales	25
Coliformes fecales	N.D.
Nitrógeno de nitratos	N.D.
Nitrógeno amoniacal	10.1
Fósforo total	0.69
Sólidos Suspendidos Totales	3.12
Turbidez	25.82
pH	2 UTN
Grasas y aceites	7.7
Color	11.3
	13 u Pt-Co

Capítulo cuatro

Funciones exponenciales y logarítmicas



*“De curva a línea, transición que solo un
logaritmo logra cambiando las múltiples
pendientes a una sola”*

La invención de los logaritmos fue puramente económica, ya que se necesitaba en el siglo XVI, calcular la riqueza, debida al interés compuesto. Sin embargo, esto vino a resolver la medición de fenómenos cuyas magnitudes son muy grandes como la cantidad de iones en una solución.

Un claro ejemplo del empleo de logaritmo se observa en el uso de ecuaciones afectadas por esta función, cuyo objetivo es lograr relaciones más lineales entre temperatura y parámetros de crecimiento microbiano

4.1 Definición y propiedades de la función exponencial



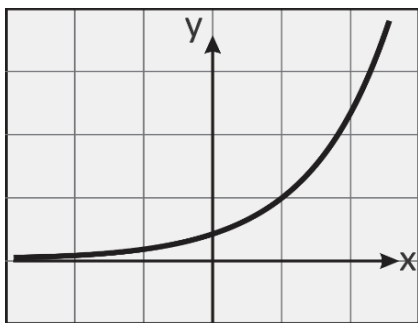
Normalmente escuchamos que la población mundial tiene un crecimiento exponencial o que el uso del correo electrónico es exponencial, pero esto ¿qué quiere decir?

Lo que nos quiere decir esta función es que el crecimiento aumenta o se eleva rápidamente en períodos cortos como, por ejemplo; el pH en una reacción de neutralización, la propagación del sonido, el desarrollo de microorganismos, la medición de movimientos telúricos, entre otros, son representados por funciones exponenciales.

Estos comportamientos son explicados con funciones en las cuales el exponente es la variable y la base es una constante.

La función exponencial está definida matemáticamente para todos los números reales y su trazado es continuo (ver Figura 4.1).

Figura 4.1 Función exponencial



Definición

$$f(x) = b^x$$

Para $b > 0$ y $b \neq 1$

Donde b es un número real positivo distinto de 1



Recuerda que...

La **función potencia** está compuesta:

$$f(x) = x^2$$

Exponente (constante)
Base (variable)

En cambio, la **función exponencial** es de la forma:

$$f(x) = 2^x$$

Exponente (variable)
Base (constante)

Ejemplo 1

Identifique las funciones que se presentan

- a) $f(x) = 4^x$ c) $g(x) = 3x^{-2}$
b) $m(x) = -5 \left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) $n(x) = \sqrt{2}^\pi$

Solución

- a) $f(x) = 4^x$ Es una función exponencial, con valor inicial de 1 y base de 4.
b) $m(x) = -5 \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ Es una función exponencial, con valor inicial de -5 y base de 3 ya que $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ es $\left(\frac{1^{-1}}{3}\right)^x$ y $\frac{1^{-1}}{3} = \frac{1}{3}$.
c) $g(x) = 3x^{-2}$ No es una función exponencial ya que la base x es una variable y el exponente es un constante; g es una función potencia.
d) $n(x) = \sqrt{2}^\pi$ No es una función exponencial, es una base constante elevada a un exponente constante; n es una función constante.

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

La forma en que las funciones exponenciales cambian, producen un patrón útil para explicar algunos fenómenos en química, biología y otras disciplinas.

Se puede hacer de manera general un resumen de las características de las funciones exponenciales.

Para cualquier función exponencial

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Dominio:	Todos los reales
Rango:	$(0, \infty)$
Asíntota:	Solo tiene horizontal cuando y tiende a cero
Acotada:	Por abajo pero no por arriba
Creciente:	Cuando $b > 1$
Decreciente:	Cuando $0 < b < 1$
Simetría:	No tiene
Máximo:	No tiene
Mínimo:	No tiene

Para poder realizar el bosquejo de gráficas exponenciales también se utilizan las traslaciones. En las traslaciones de funciones se aplica:

b^{-x} ; Reflejo de la gráfica.

b^{x-1} ; 1 hacia la derecha.

b^{x+1} ; 1 hacia la izquierda.

kb^{x-1} ; k unidades de alargamiento vertical.



Recuerda que...

Las propiedades de los exponentes, son la base de las funciones exponenciales. Sea a y b números reales o expresiones algebraicas y sea n y m , números enteros.

$$a^0 = 1$$

$$a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

Ejemplo 2

Calcule el resultado de las siguientes funciones exponenciales, con los siguientes valores: $-2, 1/2$ y $-2/3$.

$$a) f(x) = 3^x \quad b) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$$

Solución

$$a) f(x) = 3^x$$

$$f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3^{-2/3} = \frac{1}{3^{2/3}}$$

$$\frac{1}{3^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

$$b) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$$

$$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \sqrt{1/2}$$

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2/3} = 1/\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$$

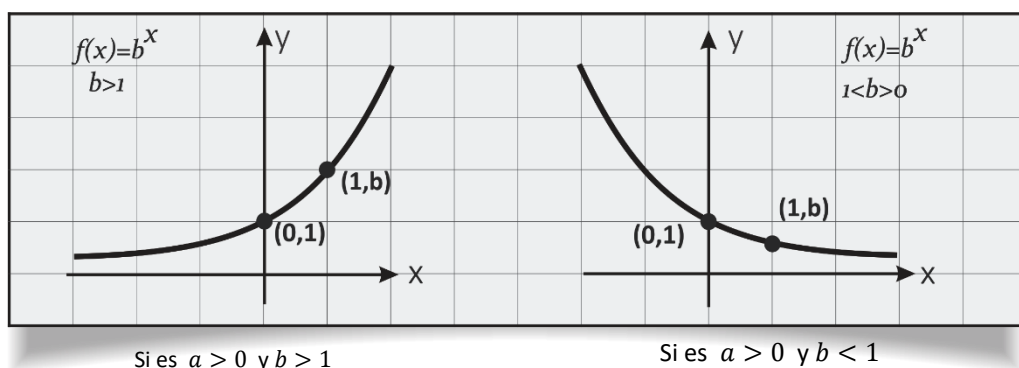
$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \sqrt[3]{4}$$

4.1.1 CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO EXPONENCIAL

La función exponencial se puede representar gráficamente de dos maneras: de forma creciente y de forma decreciente o decaimiento (Figura 4.2), son muy utilizadas para crecimientos microbianos o para decaimientos radiactivos.

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Figura 4.2 Representación gráfica de la función exponencial



Es una función de crecimiento exponencial.
La base b es su factor de crecimiento.

Es una función de decaimiento exponencial.
La base b es su factor de decaimiento.

Ejemplo 3

Identifique las funciones $f(x) = 3 \cdot 4^x$ y $g(x) = 8 \cdot \frac{1}{4}^x$

Solución

a) $f(x) = 3 \cdot 4^x$

Es una función de crecimiento ya que $a = 3$ es mayor que cero y $b = 4$ es mayor a 1.

$g(x) = 8 \cdot \frac{1}{4}^x$

Es una función de decaimiento ya que $a = 8$ es mayor que cero y $b = 1/4$ es menor a 1.

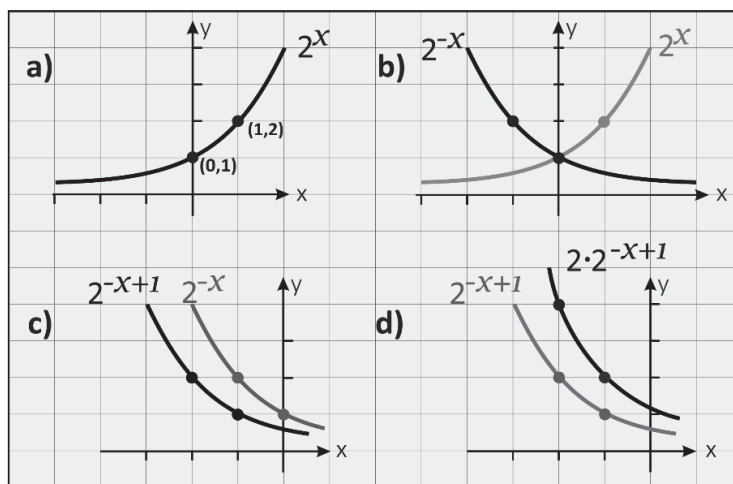
Ejemplo 4

Bosqueje la gráfica $f(x) = 2 \cdot 2^{-x+1}$ a partir de $f(x) = 2^x$.

Solución

a) Se bosqueja $f(x) = 2^x$, pasa por los puntos (0, 1) y (1, 2).

b) Posteriormente se refleja la función y obtenemos $f(x) = 2^{-x}$.



c) Se traslada la función una unidad hacia la izquierda y se obtiene $f(x) = 2^{-x+1}$.

d) Por último, se alarga en un factor de dos unidades, es decir en y los puntos se localizaban en 1 y 2, ahora estarán en 2 y 4.



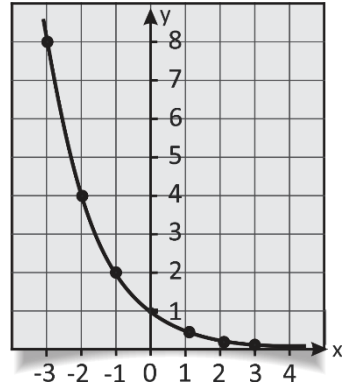
Ejemplo 5

Grafique $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ determine el dominio y el rango de la función.

Solución

Esta función es como sabemos de la forma $y = a^x$, donde $a=1/2$ y se traza la curva, con los siguientes valores.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	1	1	1/2	1/4	1/8



4.1.2 LA BASE NATURAL e

Esta función tiene como característica que si bien se simboliza con la letra e , es por el matemático Leonhard Euler, quien introdujo, esta notación y su definición es:



Definición

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

El valor de la base natural e , se puede ver con la siguiente tabla en donde se han realizado las aproximaciones.

Tabla 4.1

Aproximaciones de la base natural e .

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.59...
100	2.7048...
1 000	2.7169...
10 000	2.7181...
100 000	2.7182...

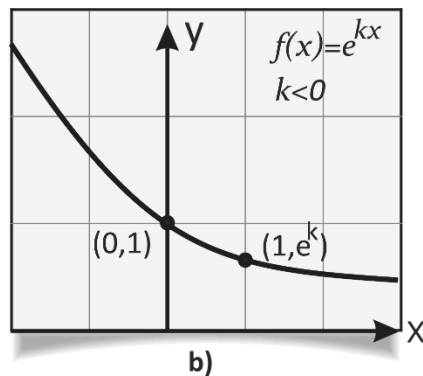
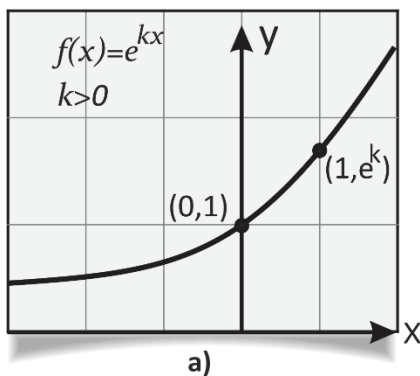
Por lo que se pueden expresar las funciones exponenciales con la base natural de la siguiente forma:

$$f(x) = a \cdot b^x$$

$$f(x) = a \cdot e^{kx}$$

La transformación de función exponencial a función natural base e se presenta a continuación en la siguiente figura.

Figura 4.3 Gráfica de la función exponencial natural, para a) es una función creciente y para b) es una función decreciente



4. Funciones exponenciales y logarítmicas

La función exponencial como ya se vio al aumentar el valor de la variable independiente la variable dependiente también lo hace, pero se puede establecer cotas (topes) en este crecimiento, esto se logra expresando a la función exponencial como un cociente conocido como **función logística**.



Definición

Si a, b, c y k son positivos, con b menor a 1

$$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot b^x} \quad \text{ó} \quad f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-kx}}$$

Donde c es el límite de crecimiento.

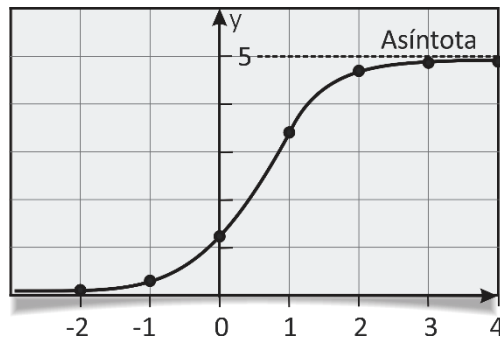
Ejemplo 6

Grafique la función logística $f(x) = \frac{5}{1+3e^{-2x}}$, marcando la asíntota horizontal.

Solución

Se tabulan los datos para obtener los puntos de la gráfica.

x	$f(x)$
-2	0.03
-1	0.21
0	1.25
1	3.55
2	4.73
3	4.96
4	4.99



4.2 Aplicaciones de la función exponencial

Como ya se analizó la función exponencial suele ser utilizada para describir los incrementos o decrementos. Los siguientes ejemplos son ilustraciones de la función exponencial.



Ejemplo 7

El hongo *penicillium chrysogenum*, (ver Figura 4.4) tiene un tiempo de duplicación de 2.5 horas, encuentre la ecuación que representa este crecimiento y calcule la cantidad que habrá en una semana si consideramos que al inicio existían 1×10^3 esporas.

Solución

La función exponencial general.

$$f(x) = b \cdot a^x$$

La constante de la función exponencial **b** es la cantidad inicial de esporas del hongo, **a** es la base que representa la duplicación del hongo, por lo que se puede decir entonces:

$$f(x) = 1 \times 10^3 \cdot 2^{x/2.5}$$

Ahora bien, para encontrar la cantidad en una semana se ingresa en la ecuación 168 horas en la variable x.

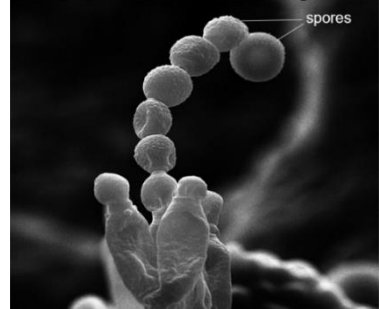
$$f(x) = 1 \times 10^3 \cdot 2^{168/2.5}$$

$$f(x) = 1.7 \times 10^{23}$$

Esta cantidad equivale a **1.7 mil trillones** de esporas de hongos.

Figura 4.4

Hongopenicilliumchrysogenum



Fuente: www.whyfiles.org



Ejemplo 8

Ahora para a un microorganismo que su crecimiento es trepidante, la *Escherichia coli*, (ver Figura 4.5) tiene un tiempo de duplicación de 20 minutos, en condiciones de laboratorio, considere que se inocula 2×10^3 bacterias iniciales, ¿Qué cantidad habrá en un día?

De manera directa se puede establecer:

$$f(x) = 2 \times 10^3 \cdot 2^{x/20}$$

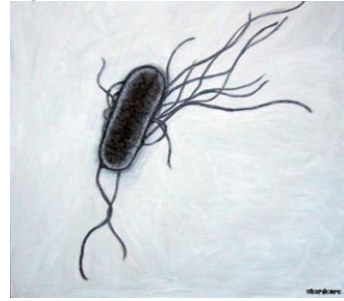
Donde x es el tiempo en minutos. Un día tiene 1440 minutos, por lo que la cantidad de bacterias es:

$$f(x) = 2 \times 10^3 \cdot 2^{1440/20}$$

$$f(x) = 9.44 \times 10^{24}$$

Con respecto a los hongos, a *E.coli* le toma un día rebasar la cantidad de hongos que se desarrollan en una semana.

Figura 4.5 Bacteria *E. coli*.



Fuente: www.whyfiles.org

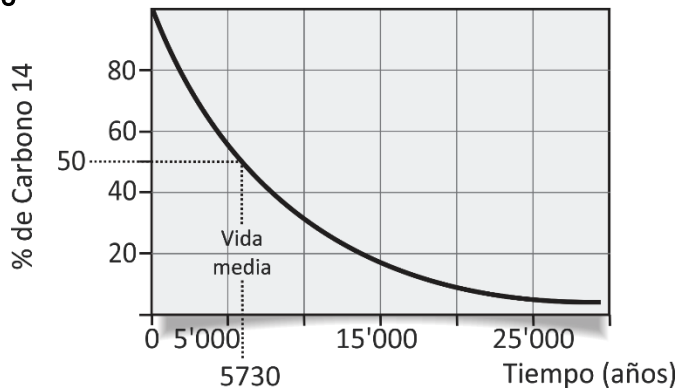
La *E. coli* es una bacteria, bacilo Gram negativo, habitante normal, y más abundante de la microbiota gastrointestinal. Fue descrita por primera vez en 1885 por Theodore Von Escherich, quien la denominó *Bacterium coli commune*. Posteriormente se le adjudicó el nombre de *Escherichia coli*, en honor a su descubridor.

Es el microorganismo mejor conocido en el ámbito científico, dada su relativa sencillez, velocidad de crecimiento y condiciones de cultivo, lo que lo ha convertido en un instrumento más de laboratorio, sobre todo en el campo de la biología molecular.

Ejemplo 9

El carbono 14 tiene su origen principalmente en la atmósfera debido a la acción de los rayos cósmicos sobre los átomos de nitrógeno, y una vez formados dan lugar a dióxido de carbono. Y el dióxido de carbono es absorbido por las plantas durante la fotosíntesis (ver Figura 4.6), por lo que todos los seres vivos tienen un porcentaje de carbono 14 (Cervera, 2010).

Figura 4.6 Curva de decaimiento radiactivo del carbono 14



Por lo que se puede deducir que la ecuación para el carbono 14 es:

$$A = A_0 2^{-t/5730}$$

Donde

- A Masa que se pierde.
- A_0 Masa inicial.
- t Tiempo en años.

Al reconstruir la pieza de un fósil en un software, se encontró que la pérdida de masa fue de un noveno al paso del tiempo, con esta información encuentre la antigüedad del fósil.

Solución

Se expresa la ecuación, pero en función del tiempo.

$$\frac{A}{A_0} = 2^{-t/5730}$$

$$\log \frac{A}{A_0} = -\frac{t}{5730} \log 2$$

Se despeja a t.

$$t = -\frac{5730 \left(\log \frac{A}{A_0} \right)}{\log 2}$$

Se tiene por información del software que:

$$A = 1/9 A_0$$

Se sustituye en la ecuación.

$$t = -\frac{5730 \left(\log \frac{\left(\frac{1}{9}\right) A_0}{A_0} \right)}{\log 2}$$

$$\mathbf{t = 18\ 163.6\ años}$$



La existencia de isótopos de los átomos de carbono (variedades de ellos con igual número de protones, pero distinto número de neutrones), el conocimiento del porcentaje de éste de manera normal en un organismo vivo, aunado al conocimiento del tiempo de vida media de las variantes inestables (5730 años para el carbono 14), permite su uso como una especie de reloj atómico. Es decir, cuando un organismo muere, la cantidad de C_{14} presente en él queda estática y se conoce su proporción, por lo que al cuantificar el C_{14} residual en fósiles, es posible estimar su edad.

Ejemplo 10

El crecimiento de poblaciones (ver Figura 4.7) se puede explicar con la diferencia que existe entre los nacimientos y defunciones. Si inicialmente se parte de una población P_0 , la cual muestra un índice de crecimiento como la ecuación que se muestra continuación:

$$P = P_0(1 + i)^t$$

Dónde:

- P Población al tiempo t (años).
 P_0 Población inicial.
 i índice de crecimiento

Figura 4.7 Ciudad de México



Fuente: www.melodijolola.com

Según SEDUE, una ciudad está definida por al menos medio millón de personas. Si en cierta localidad existen 800 personas (sin considerar migraciones ni emigraciones), ¿en qué momento esta localidad alcanzará la definición de ciudad, pensando que tiene un índice de crecimiento de 3%?

Solución

$$P/P_0 = (1 + i)^t$$

Se aplican logaritmos.

$$\log P/P_0 = t \cdot \log(1 + i)$$

$$t = \frac{\log P/P_0}{\log(1 + i)}$$

Se sustituye.

$$t = \frac{\log(500000/800)}{\log(1 + 0.03)} \quad t = 217.8 \text{ años}$$

Ejemplo 11

Una forma de desinfectar el agua es utilizando cloro, normalmente hipoclorito de sodio (NaClO) por ser más económico (ver Tabla 4.3), este cloro realiza una serie de reacciones, de las cuales se tiene cloro residual, mientras transcurre el tiempo el cloro hace su “trabajo” de desinfección y va disminuyendo la concentración de éste; los datos del decaimiento son:

Tabla 4.3

Liberación de cloro residual

Día	0	4	8	12	16	20	24
Cloro (mg/l)	300	252.2	227.25	214.22	207.43	203.88	202.02

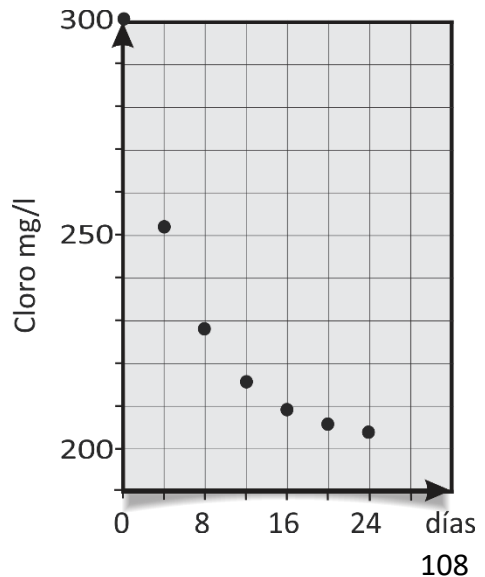
Encuentre el modelo que describe el comportamiento.

Solución

Los datos representan una curva que no es lineal y el patrón parece de una secuencia geométrica decreciente. Se grafica para ver el comportamiento de los datos.

Para determinar la ecuación exponencial, se realiza el primer cálculo con un par de puntos.

$$f(x) = b \cdot a^x$$



4. Funciones exponenciales y logarítmicas

Generalizando sería:

$$y - y_1 = b \cdot a^{x-x_1}$$

La gráfica deja ver que cuando el tiempo tienda a infinito la cota o valor límite es 200 mg/L, por lo que se puede escribir:

$$y - 200 = (y_1 - 200) \cdot a^{x-x_1}$$

Se despeja la base a .

$$\frac{y - 200}{y_1 - 200} = a^{x-x_1} \quad a = \left(\frac{y - 200}{y_1 - 200} \right)^{1/x-x_1}$$

Para encontrar el valor de a , se sustituye cualquier punto de la gráfica y se realiza álgebra, usando el par de datos (12, 214.22).

$$a = \left(\frac{y - 200}{214.22 - 200} \right)^{1/x-12}$$

Con esta ecuación se calcula el valor de a , en todos los puntos de la gráfica, utilizando un punto sencillo (0, 300).

$$a = \left(\frac{300 - 200}{214.22 - 200} \right)^{1/0-12}$$

$$a = \left(\frac{100}{14.22} \right)^{-1/12}$$

$$\mathbf{a = 0.85}$$

Se puede ya obtener la ecuación general:

$$y - 200 = (214.22 - 200) \cdot a^{x-12}$$

$$\mathbf{y = 200 + (14.22)0.85^{x-12}}$$



4.3 Definición y propiedades de la función logarítmica

La función inversa de la exponencial se le conoce como función logarítmica, y se representa como:

$$x = b^y \quad \text{equivale a:} \quad y = \log_b x$$

El dominio de la función logarítmica son los positivos $(0, \infty)$.



Definición

La función logarítmica, con base $b > 0$, $b \neq 1$ $f(x) = \log_b x$

La **función exponencial** es de la forma: $y = b^x$, se lee “ x es el exponente de la base b que produce y ”. En su **forma logarítmica** esto se cambia a “ y es el logaritmo de la base b que produce x ”. Que se expresa como: $x = \log_b y$.

Ejemplo 12

Realice la equivalencia de las siguientes expresiones exponenciales a su forma logarítmica: $9 = 3^2$, $8 = 2^3$, $0.0001 = 10^{-4}$, $1/4 = (1/2)^2$ y $5 = c^{-3}$.

Solución

Forma exponencial	Forma logarítmica
$9 = 3^2$	$\log_3 9 = 2$
$8 = 2^3$	$\log_2 8 = 3$
$0.0001 = 10^{-4}$	$\log_{10} 0.0001 = -4$
$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$
$5 = c^{-3}$	$\log_c 5 = -3$

La gráfica de la función logarítmica, se puede obtener como el reflejo de la función exponencial debido a que es la inversa (ver Figura 4.8).

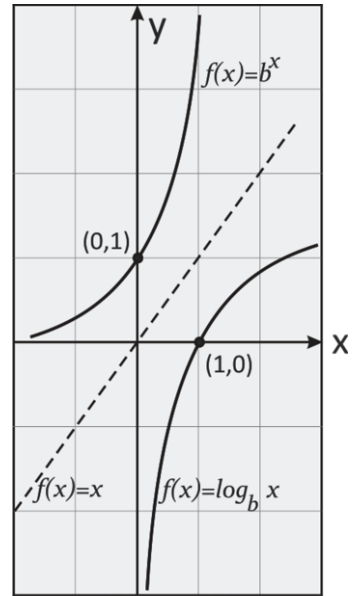
Podemos hacer un resumen de las características de la función logarítmica.

Para cualquier función

$$f(x) = \log_b x$$

Dominio:	$(0, \infty)$
Rango:	Todos los reales
Asíntota:	Vertical $x = 0$
Acotada:	Por abajo pero no por arriba
Creciente:	En el intervalo de $(0, \infty)$ $b > 1$
Decreciente:	En el intervalo de $(0, \infty)$ $0 < b < 1$
Simetría:	No tiene
Máximo:	No tiene
Mínimo:	No tiene

Figura 4.8
Función logarítmica



Es importante señalar que, si la base en lugar de ser el número 10 para obtener un logaritmo común es el valor de la exponencial, se tiene:

$$\log_e x = \ln x$$

La cual es el logaritmo natural (debido a que la base es la función exponencial natural). Algunas características de ambos logaritmos son:

Tabla 4.4

Características de los logaritmos

Logaritmo	Expresión	Razonamiento
Común	$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
	$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
Natural	$\ln 1 = 0$	$e^0 = 1$
	$\ln e = 1$	$e^1 = e$



Recuerda que...

Logaritmo común

Históricamente la base que se utiliza con mayor frecuencia es la 10, a lo que se le ha llamado **logaritmo común**. Por tal motivo no suele escribirse la base cuando se utiliza. Por lo que un logaritmo de 2 cifras está entre un valor de [1 a 2).

$$\log 10 = \log 10^1 = 1$$

$$\log 100 = \log 10^2 = 2$$

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3$$

$$\log 10000 = \log 10^4 = 4$$

$$\log 0.1 = \log 10^{-1} = -1$$

$$\log 0.01 = \log 10^{-2} = -2$$

$$\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3$$

$$\log 0.0001 = \log 10^{-4} = -4$$

Ejemplo 13

Sabiendo que $\log 2 = 0.301030$, obtenga el resultado del siguiente logaritmo común sin la ayuda de la calculadora.

a) $\log 80$ b) $\log 3.2$

Solución

a) $\log 80$

$$\log 80 = \log(8 \times 10)$$

$$\log(8 \times 10) = \log 2^3 + \log 10$$

$$\log 2^3 + \log 10 = 3\log 2 + 1$$

$$3\log 2 + 1 = 2(0.301030) + 1$$

$$\log 80 = 1.60206$$

b) $\log 3.2$

$$\log 3.2 = \log(32/10)$$

$$\log\left(\frac{32}{10}\right) = \log 32 - \log 10$$

$$\log 32 - \log 10 = \log 2^5 - 1$$

$$\log 2^5 - 1 = 5\log 2 - 1$$

$$5\log 2 - 1 = 5(0.301030) - 1$$

$$\log 3.2 = 0.50515$$



Recuerda que...

Las Leyes de los logaritmos

Para cualquier base $b > 0$, $b \neq 1$ y números enteros positivos

$$\log ab = \log a + \log b$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\log a^x = x \log a$$

$$\ln a^x = x \ln a$$



Ejemplo 14

Use las leyes de los logaritmos y evalúe la expresión.

$$a) \ln\sqrt{9e} \qquad b) \ln 2 + \ln(4x - 2) = \ln(2x + 8)$$

Solución

$$a) \ln\sqrt{9e}$$

$$\ln(9e)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln 9e = \frac{1}{2} [\ln 9 + \ln e]$$

$$\frac{1}{2} [\ln 9 + \ln e] = \frac{1}{2} [\ln 9 + 1] = \mathbf{1.59}$$

$$b) \ln 2 + \ln(4x - 2) = \ln(2x + 8)$$

Primero se observa el lado izquierdo de la igualdad.

$$\ln 2 + \ln(4x - 2) = \ln 2(4x - 2)$$

$$\ln 2(4x - 2) = \ln(8x - 4)$$

Se iguala con el lado derecho de la igualdad.

$$\ln(8x - 4) = \ln(2x + 8) \quad \ln(8x - 4) - \ln(2x + 8) = 0$$

$$\ln \frac{(8x - 4)}{2x + 8} = 0$$

Aplicando la función inversa del logaritmo natural:

$$\frac{8x - 4}{2x + 8} = e^0 \frac{8x - 4}{2x + 8} = 1$$

$$8x - 4 = 2x + 8 \quad x = \mathbf{2}$$

4.4 Aplicaciones de la función logarítmica

De forma general el uso de logaritmos es tan variado, desde ajuste a modelos que representan movimientos telúricos (ver Figura 4.9).

En cuanto el ruido, nuestro oído cubre una extraordinaria y amplia variedad de presiones sonoras, en una relación de más de un millón a uno. La escala de dB (decibel) hace que los números sean manejables. Especialmente en la química el uso de los logaritmos, se utilizan en electroquímica para conocer el efecto de la concentración de los iones sobre el voltaje de un electrodo (ecuación de Nernst); en química nuclear para determinar la velocidad de desintegración radiactiva; equilibrio de una reacción química; en presiones de vapor de sustancias químicas y mucho más conocido el parámetro de pH (ver Tabla 4.5).

Figura 4.9

Movimiento telúrico



Fuente: www.chiguete.com

Tabla 4.5

Ejemplo de algunas ecuaciones logarítmicas utilizadas en química

Nombre	Ecuación
Velocidad de desintegración	$2.3 \log \frac{N_1}{N_2} = kt$
Ecuación de Nernst	$E = E^0 - \frac{2.303RT}{nF} \log K$
Constante de equilibrio	$\ln K_T = -\frac{1}{R} \left[\frac{\Delta G_r^0 - \Delta H_r^0}{298} + \frac{\Delta H_r^0}{T} \right]$
Potencial de hidrógeno	$pH = pKa + \log \frac{[A^-]}{[HA]}$
Presión de vapor	$\ln \frac{P_1}{P_2} = \frac{\Delta H_{vap}}{R} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} \right)$

4.4.1 ECUACIÓN DE NERNST

La ecuación de Nernst se utiliza para predecir si una reacción redox es espontánea o no.

$$E = E^0 - \frac{2.303RT}{nF} \log K$$

Como la magnitud del potencial de oxidación varía con la temperatura, se adopta un *estado normal* para los potenciales de oxidación, podemos llegar a:

$$E = E^0 - \frac{2.303(8.314)(298.15)}{n(96490)} \log K$$

$$E = E^0 - \frac{0.0591}{n} \log K$$

Dónde:

E	Potencial de la reacción
E^0	Potencial estándar (tabla 4.6.)
n	Número de electrones perdidos o ganados en la reacción
K	Constante de reacción

$$K = \frac{[Productos]}{[Reactivos]}$$

Para obtener el valor de K , es importante señalar que el corchete indica concentración molar. Los **sólidos** tienen una concentración de **uno** y los gases a menos que estén en condiciones estándar también tiene un valor de uno, del caso contrario se debe de realizar el cálculo previo. El balanceo de las semireacciones proporcionan el valor de n y los coeficientes estequiométricos que son los exponentes a los que se elevan las concentraciones.

Tabla 4.6

Potenciales normales de oxidación

	Reacción	E^0 (Volts)
Li	$\rightarrow Li^+ + e^-$	3.045
K	$\rightarrow K^+ + e^-$	2.925
Mg	$\rightarrow Mg^{+2} + 2e^-$	2.363
Al	$\rightarrow Al^{+3} + 3e^-$	1.662
$H_2 + 2OH^-$	$\rightarrow 2H_2O + 2e^-$	0.83
Cr	$\rightarrow Cr^{+3} + 3e^-$	0.74
Zn	$\rightarrow Zn^{+2} + 2e^-$	0.763
Fe	$\rightarrow Fe^{+2} + 2e^-$	0.440
Cd	$\rightarrow Cd^{+2} + 2e^-$	0.430
$Pb + SO_4^{-2}$	$\rightarrow PbSO_4 + 2e^-$	0.31
Ni	$\rightarrow Ni^{+2} + 2e^-$	0.250
Sn	$\rightarrow Sn^{+2} + 2e^-$	0.136
H_2	$\rightarrow 2H^+ + 2e^-$	0.000
Sn^{+4}	$\rightarrow Sn^{+2} + 2e^-$	-0.13
Cu	$\rightarrow Cu^{+2} + 2e^-$	-0.337
$2I^-$	$\rightarrow I_2 + 2e^-$	-0.536
Fe^{+2}	$\rightarrow Fe^{+3} + e^-$	-0.771
Hg	$\rightarrow Hg^{+2} + 2e^-$	-0.789
Ag	$\rightarrow Ag^+ + e^-$	-0.799
$2Br^-$	$\rightarrow Br_2 + 2e^-$	-1.07
$2Cl^-$	$\rightarrow Cl_2 + 2e^-$	-1.36
Au	$\rightarrow Au^{+3} + 3e^-$	-1.5
$2F^-$	$\rightarrow F_2 + 2e^-$	-2.87

Fuente: Chang, 2015

Para caracterizar la espontaneidad de una reacción en relación con el valor del **potencial**, se tiene que si éste es **mayor a uno es espontánea**, si es menor a uno es espontánea en sentido inverso y si es igual a cero la reacción se encuentra en equilibrio.



Ejemplo 15

Calcule el potencial estándar de la reacción: $Zn_{(s)} + I_{(s)} \rightarrow Zn_{(ac)}^{+2} + 2I_{(ac)}^{-}$ y exprese con la ecuación de Nernst el potencial de reacción.

Solución

Primero se obtiene de la Tabla 4.6 los potenciales estándar:

$$E_{Zn/Zn^{+2}}^0 = 0.763 \text{ volt}$$

$$E_{2I^{-}/I_2}^0 = -0.563 \text{ volt}$$

Ahora se calcula el potencial estándar:

$$E^0 = E_{Zn/Zn^{+2}}^0 + E_{I_2/2I^{-}}^0$$

Como se busca la semireacción inversa del yodo, sólo se cambia el signo del potencial estándar.

$$E^0 = 0.763 \text{ volt} + 0.563 \text{ volt}$$

$$E^0 = 1.442 \text{ volt}$$

Finalmente se expresa la ecuación de Nernst.

$$E = 1.442 - \frac{0.0591}{2} \log[(Zn^{+2})(I^{-})^2]$$



Ejemplo 16

Prediga si la reacción se llevará a cabo: $Ni_{(s)} + Fe(OH)_2(ac) \rightarrow Ni_{(ac)}^{+2} + Fe_{(s)}$, para esto utilice la ecuación de Nernst. Las concentraciones son $[Fe^{+2}] = 0.15 \text{ M}$ y $[Ni^{+2}] = 0.28 \text{ M}$.

Solución

Primero se obtienen los valores de los potenciales estándar de la tabla 4.6.

$$E^0_{Ni/Ni^{+2}} = 0.25 \text{ volt}$$

$$E^0_{Fe/Fe^{+2}} = 0.44 \text{ volt}$$

Se calcula el potencial estándar.

$$E^0 = E^0_{Ni/Ni^{+2}} + E^0_{Fe^{+2}/Fe}$$

$$E^0 = 0.25 \text{ volt} - 0.44 \text{ volt}$$

$$E^0 = -0.19 \text{ volt}$$

Se calcula el potencial.

$$E = E^0 - \frac{0.0591}{n} \log \frac{[Ni^{+2}]}{[Fe^{+2}]}$$

$$E = -0.19 - \frac{0.0591}{2} \log \frac{0.28}{0.15}$$

$$E = -0.198 \text{ Volt}$$

Ya que E es negativo la reacción no es espontánea en la dirección descrita.

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

Es interesante determinar la relación de $\frac{[Ni^{+2}]}{[Fe^{+2}]}$ en la cual la reacción se hace espontánea. Primero se escribe la ecuación de Nernst a 25 °C.

$$E = E^0 - \frac{0.0591}{n} \log \frac{[Ni^{+2}]}{[Fe^{+2}]}$$

Ahora se hace el valor de E igual a cero, ya que corresponde al equilibrio.

$$0 = E^0 - \frac{0.0591}{n} \log \frac{[Ni^{+2}]}{[Fe^{+2}]}$$

$$\log \frac{[Ni^{+2}]}{[Fe^{+2}]} = -6.429$$

Se realiza la operación de antilogaritmos en ambos lados de la ecuación:

$$\frac{[Ni^{+2}]}{[Fe^{+2}]} = 3.71 \times 10^{-7}$$

Así, para que sea espontánea, la relación $\frac{[Ni^{+2}]}{[Fe^{+2}]}$ debe ser menor a 3.71×10^{-7} .



4.4.2 CONSTANTE DE EQUILIBRIO

La constante de equilibrio puede calcularse también a través de la energía libre de Gibbs y la Entalpía de reacción, utilizando la siguiente expresión:

$$\ln K_T = -\frac{1}{R} \left[\frac{\Delta G_r^0 - \Delta H_r^0}{298} + \frac{\Delta H_r^0}{T} \right]$$

Tanto la energía libre de Gibbs como la Entalpía de reacción se obtienen mediante las siguientes sumatorias:

$$\Delta G_r^0 = \sum n_i \Delta G_{i_f}^0 \quad \Delta H_r^0 = \sum n_i \Delta H_{i_f}^0$$

La Entalpías y las energías de sustancias puras a 25 °C, se pueden obtener de la Tabla 4.7 y n_i es el coeficiente estequiométrico; (-) para reactivos y (+) para productos.

Tabla 4.7

Energía libre de Gibbs y entalpía de formación estándar de algunos compuestos

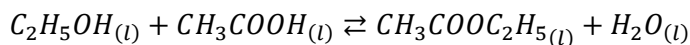
<i>Compuesto</i>	$\Delta G_f^0 \text{ kJ/gmol}$	$\Delta H_f^0 \text{ kJ/gmol}$
Acetaldehído(g)	-133.1	-166.2
Acetato de etilo(l)	-318.4	-463.3
Acetona (g)	-151.3	-215.7
Acetona (l)	-155.5	-248.2
Acetileno(g)	210.68	228.2
Ácido acético(l)	-392.5	-486.18
Ácido adípico(l)	-985.4	-741.3
Ácido nítrico(l)	-79.91	-173.22
Agua(l)	-237.19	-285.84
Agua(g)	-228.59	-241.83
Amoniaco(g)	-16.6	-46.15
Benceno(g)	129.6	82.88
Butadieno,1,3 (g)	149.7	109.24
n-Butano(g)	-15.707	-124.73
Carbonato de Calcio(s)	-1133.0	-1211.3
Cloruro de hidrógeno(l)	-95.3	-92.31
Cloruro de vinilo(c)	41.95	28.45
Dióxido de carbono(g)	-394.37	-393.5
Dióxido de azufre(g)	-299.9	-296.81
Etano(l)	-31.92	-83.82
Etanol(g)	-167.85	-234.95
Etileno(g)	68.44	52.51
Fenol(l)	-46.11	-158.16
Formaldehído(l)	-102.6	-108.6
Glicerina(g)	-	-577.9
Metano(g)	-50.49	-74.52
Metanol(g)	-160.12	-238.655
Nitrato de Amonio(ac)	-190.7	-340
Tolueno(g)	122.0	50.17
Tolueno(l)	114.148	11.996
Urea(g)	-152.7	-235.5
Urea(l)	-194.3	-324.5

Fuente: Murphy, 2007

Ejemplo 17

Los acetatos son los responsables del olor de distintas frutas. El acetato de etilo se sintetiza industrialmente con etanol y ácido acético en fase líquida:

Etanol Ac. Acético Acetato de etilo Agua



Encuentre la temperatura en donde la reacción se considera aceptable; es decir, que la constante de equilibrio tenga valores de $K \geq 0.1$ a 1.

Solución

Se conforma la siguiente tabla y se tiene

<i>Especies</i>	<i>ni</i>	ΔG_f^0 <i>kJ/gmol</i>	ΔH_f^0 <i>kJ/gmol</i>
$C_2H_5OH_{(l)}$	-1	-174.72	-277.61
$CH_3COOH_{(l)}$	-1	-392.5	-486.18
$CH_3COOC_2H_5_{(l)}$	1	-318.4	-463.3
$H_2O_{(l)}$	1	-237.19	-285.84

Cálculo de ΔG_r^0

$$\Delta G_r^0 = (-1)(-174.72) + (-1)(-392.5) + (-318.4) + (-237.19)$$

$$\Delta G_r^0 = 11.63 \text{ kJ/mol}$$

Cálculo de ΔH_r^0

$$\Delta H_r^0 = (-1)(-277.61) + (-1)(-486.18) + (-463.3) + (-285.8)$$

$$\Delta H_r^0 = 14.65 \text{ kJ/mol}$$

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

Considerando que $k = 0.1$ se despeja T .

$$\ln K_T = -\frac{1}{R} \left[\frac{\Delta G_r^0 - \Delta H_r^0}{298} + \frac{\Delta H_r^0}{T} \right]$$

$$-\ln K_T R = \frac{\Delta G_r^0 - \Delta H_r^0}{298} + \frac{\Delta H_r^0}{T}$$

$$-\ln K_T R - \frac{\Delta G_r^0 - \Delta H_r^0}{298} = \frac{\Delta H_r^0}{T}$$

$$T = \frac{\Delta H_r^0}{-\ln K_T R - \frac{\Delta G_r^0 - \Delta H_r^0}{298}}$$

$$T = \frac{\Delta H_r^0}{\frac{\Delta H_r^0 - \Delta G_r^0}{298} - \ln K_T R}$$

Se sustituye.

$$T = \frac{14.65 \text{ kJ/mol}}{\frac{(14.65 - 11.63) \text{ kJ/mol}}{298 \text{ K}} - \ln(0.1) \left(\frac{0.0083144 \text{ kJ}}{\text{mol K}} \right)}$$

$$T = 500.4 \text{ K, es decir } \mathbf{T = 227.3^\circ\text{C}}$$

La temperatura que se encontró es elevada, la única restricción es mantener en fase líquida la reacción.

.....

4.4.3 POTENCIAL DE HIDRÓGENO

Antes de plantear los ejercicios haremos un repaso sobre el concepto de pH en la química.

La medición de pH en química merece un repaso antes de plantear los ejercicios. Se ha encontrado experimentalmente que en 10 000 000 de litros de agua existe una mol de iones de hidrógeno.

$$[H^+] = \frac{1}{10\,000\,000}$$

$$[H^+] = 10^{-7} \frac{\text{mol}}{\text{Litro}}$$

La definición básica de pH fue pensada así para el manejo de las concentraciones de los iones hidrógeno, por lo que se utiliza el negativo del logaritmo del recíproco de la concentración del ión hidrógeno para hacer un número más manejable.

$$pH = \log \frac{1}{[H^+]}$$

Se Puede generalizar a 25°C la escala de pH.

$[H^+]$	pH
10^0	0
10^{-1}	1
10^{-2}	2
10^{-3}	3
10^{-7}	7
10^{-12}	12
10^{-13}	13
10^{-14}	14

Ciertos compuestos como el ácido acético, el hidróxido de amonio, los aminoácidos, sufren ionización parcial cuando están en agua. Por lo que se establece un equilibrio entre las moléculas que están ionizadas y las que no lo están (ver Tabla 4.8).

Tabla 4.8

Constantes de equilibrio iónico

Sustancia	Ecuación de equilibrio	Constante
Ác. carbónico	$H_2CO_3 \rightleftharpoons H^+ + HCO_3^-$	4.5×10^{-7}
	$HCO_3^- \rightleftharpoons H^+ + CO_3^{2-}$	6.0×10^{-11}
Ácido cianhídrico	$HCN \rightleftharpoons H^+ + CN^-$	7.0×10^{-10}
Ácido sulfhídrico	$H_2S \rightleftharpoons H^+ + HS^-$	1.1×10^{-7}
	$HS^- \rightleftharpoons H^+ + S^{2-}$	1.0×10^{-15}
Ácido nitroso	$HNO_2 \rightleftharpoons H^+ + NO_2^-$	4.5×10^{-4}
Ácido fosfórico	$H_3PO_4 \rightleftharpoons H^+ + H_2PO_4^-$	7.5×10^{-3}
	$H_2PO_4^- \rightleftharpoons H^+ + HPO_4^{2-}$	2.0×10^{-7}
	$HPO_4^{2-} \rightleftharpoons H^+ + PO_4^{3-}$	1.0×10^{-12}
Ácido fosforoso	$H_3PO_3 \rightleftharpoons H^+ + H_2PO_3^-$	1.7×10^{-2}
Ácido sulfuroso	$H_2SO_3 \rightleftharpoons H^+ + HSO_3^-$	1.2×10^{-2}
	$HSO_3^- \rightleftharpoons H^+ + SO_3^{2-}$	1.0×10^{-7}
Agua	$H_2O \rightleftharpoons H^+ + OH^-$	1.0×10^{-14}
Hidróxido de amonio	$NH_4OH \rightleftharpoons NH_4^+ + OH^-$	1.8×10^{-5}

Tomado de Paul R. Frey

Ejemplo 18

Calcule el pH Y pOH de una solución de ácido clorhídrico 0.3 M, que se encuentra 80% ionizado.

Solución

$$\% \text{ Disociación} = \frac{\text{Concentración de un disociado}}{\text{Concentración de la solución}} \times 100$$

$$80\% = \frac{x}{0.3M} \times 100$$

Donde

$$x = [H^+] = [Cl^-]$$

Por lo que $x = 0.24$

El pH será:

$$pH = \log \frac{1}{[0.24]} \quad pH = 0.62$$

El pOH por otra parte será

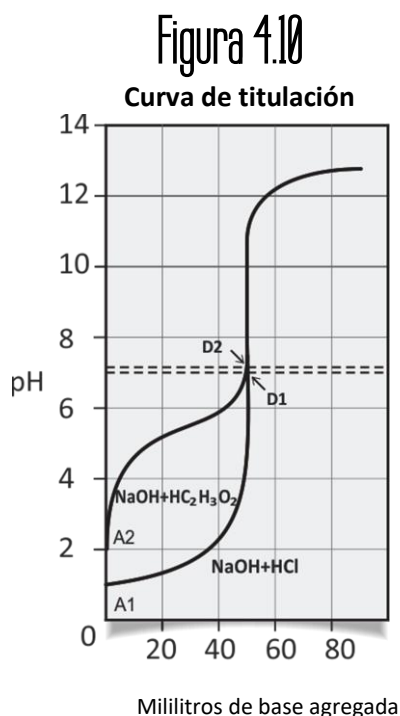
$$pOH = 14 - pH \quad pOH = 13.38$$

4.4.4 TITULACIÓN ÁCIDO-BASE

Por otra parte, el pH juega un papel importante en la teoría de titulación ácido base, cuando se agrega a una solución acuosa de un ácido, pequeñas cantidades de una solución acuosa de una base, se produce incrementos correspondientes de pH en la solución. La Figura 4.10 muestra la curva de una titulación usando un ácido 0.1 N.

El punto de inflexión corresponde al punto final de la titulación y se presenta con el pH de la sal formada. Cuando se titula un ácido fuerte y una base fuerte como el HCl y el NaOH, en el punto de deflexión, D1, corresponde a un pH aproximadamente de 7, debido a que el NaCl prácticamente no se hidroliza. Para una solución 0.100N de un ácido fuerte como el HCl el valor inicial es de aproximadamente 1 (A1), para un ácido débil como el ácido acético, el valor inicial de pH es mucho más alto (A2) debido al bajo grado de ionización del ácido. Para el ácido débil el punto final D2, tiene un pH mayor de 7, debido a hidrólisis de la sal formada, en este caso $\text{NaC}_2\text{H}_3\text{O}_2$.

Más allá del punto final A2, las dos curvas coinciden debido a que el cambio de pH se debe únicamente de la solución de NaOH.



Indicador

Para determinar el punto final de una titulación se usan indicadores químicos y medidores de pH. El indicador ideal de una titulación específica será el que cambie de color al pH de la solución en el punto final. Los indicadores químicos usualmente son ácidos o bases débiles. Sin embargo, la cantidad de indicador que se utiliza es tan pequeña, que la contribución de los iones H^+ u OH^- es prácticamente despreciable.



Recuerda que...

Las constantes de equilibrios son:

Acidez

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]}$$

Dónde:

A es la base conjugada del ácido,
H el ion hidrógeno y
HA es el ácido.

Basicidad

$$K_b = \frac{[B^+][OH^-]}{[BOH]}$$

Dónde:

OH es ion hidroxilo, **B** es la base conjugada del ácido y **BOH** es la base.

Ionización del agua

$$K_w = [H^+][OH^-]$$

Hidrólisis

$$K_w = \frac{K_w}{K_a}$$

Producto de solubilidad

$$K_{ps} = [B^+][A^-]$$

Ejemplo 19

Se agregó una solución 0.100 N de NaOH a 100 mL de solución 0.050 N de ácido acético, cuál será el pH de la solución después de la adición de:

- a) 25 ml de solución de NaOH
- b) 40 ml de solución de NaOH

Se sabe que $K_a = 1.5 \times 10^{-5}$

Solución

- a) La adición de 25 ml de la solución de NaOH representa el punto final de la titulación. Recuerda que en aquellas soluciones donde sólo existe un equivalente para ionizarse la normalidad y la molaridad tienen el mismo valor, En el caso del ácido acético sólo se tiene un ion hidrógeno por lo tanto

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

la normalidad es igual a la molaridad de ahí se tiene que 0.5 N (equivalentes de soluto/Kg de disolución) = 0.5 M (moles/litro de disolución).

$$NaC_2H_3O_3 = 0.1l(0.05N)$$

$$NaC_2H_3O_3 = 0.005 \text{ moles}$$

Concentración.

$$\frac{0.005 \text{ mol de } NaC_2H_3O_3}{0.125 \text{ L de disolución}} = 0.04 \frac{\text{mol } NaC_2H_3O_3}{\text{L disolución}}$$

Como:

$$K_h = \frac{K_w}{K_a}$$

$$K_h = \frac{[H^+][OH^-]}{\frac{[H^+][C_2H_3O_3^-]}{[HC_2H_3O_3]}}$$

$$K_h = \frac{[HC_2H_3O_3][OH^-]}{[C_2H_3O_3^-]}$$

$$\text{Sea } x = [HC_2H_3O_3] = [OH^-]$$

Como la sal ionizada al 100%.

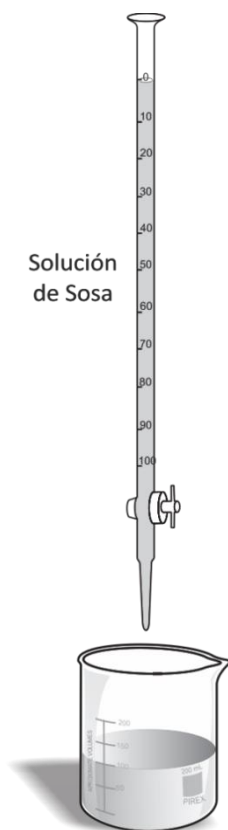
$$[C_2H_3O_3^-] = 0.04 \text{ M}$$

Entonces.

$$K_h = \frac{x^2}{0.04}$$

Se sabe que:

$$K_h = \frac{1 \times 10^{-14}}{1.5 \times 10^{-5}} = 6.67 \times 10^{-10}$$



Ácido acético

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

Se sustituye.

$$6.67 \times 10^{-10} = \frac{x^2}{0.04}$$

Se despeja a x y se tiene:

$$x = \sqrt{(0.04)(6.67 \times 10^{-10})}$$

$$x = 5.16 \times 10^{-6}$$

$$\text{Como } K_w = [H^+][OH^-] = 1 \times 10^{-14}$$

$$[H^+] = \frac{1 \times 10^{-14}}{5.16 \times 10^{-6}}$$

$$[H^+] = 1.93 \times 10^{-9}$$

$$pH = \log \frac{1}{1.93 \times 10^{-9}}$$

Finalmente.

$$\mathbf{pH = 8.71}$$

- b) Todos los iones OH^- se originarán por el exceso de los 15 mililitros de NaOH 0.100 N, por lo tanto.

$$[OH^-] = \frac{(0.015l)(0.1\text{ N})\text{ mol}}{(0.125l + 0.015l)} [OH^-] = 0.01071\text{ M}$$

$$pOH = \log \frac{1}{0.01071} \quad pOH = 1.97$$

Ahora

$$pH = 14 - 1.97 \quad \mathbf{pH = 12.03}$$



4.4.5 PRESIÓN DE VAPOR

La presión de vapor se utiliza para predecir el comportamiento de una sustancia o de una mezcla, respecto a la temperatura y se recurre a la ecuación de Clausius-Clapeyron:

$$\ln \frac{P_1}{P_2} = \frac{\Delta H_{vap}}{R} \left(\frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} \right)$$

Dónde:

- P Presión de una sustancia en mmHg.
 ΔH_{vap} Calor molar de vaporización en kJ/mol (ver Tabla 4.9)
 T Temperatura de una sustancia en Kelvin.
 R Constante universal de los gases (8.314 J/Kmol).

Tabla 4.9

Calores molares de vaporización de algunos líquidos

<i>Sustancia</i>	<i>Punto de ebullición (°C)</i>	<i>ΔH_{vap} (kJ/mol)</i>
Argón (Ar)	-186	6.3
Metano (CH ₄)	-164	9.2
Éter etílico (C ₂ H ₅ OC ₂ H ₅)	34.6	26.0
Etanol (C ₂ H ₅ OH)	78.3	39.3
Benceno (C ₆ H ₆)	80.1	31.0
Agua (H ₂ O)	100.0	40.79
Mercurio (Hg)	357	59.0

Calor molar de vaporización

Una manera rápida de demostrar el calor molar de vaporización, es frotar alcohol de curación en las manos, al hacer esto las manos proveen la energía cinética suficiente para evaporar el alcohol, éste cambia de fase rápidamente tomando el calor de las manos y enfriándolas.

 Ejemplo 20

La presión de vapor del éter etílico es de 401 mm de Hg a 18 °C, calcúlese la presión de vapor a 30 °C.

Solución

Primero se tiene de la tabla 4.9 que ΔH_{vap} es 26 kJ/mol, con los datos sustituimos en la ecuación:

$$\ln \frac{401}{P_2} = \frac{26\,000 \text{ J/mol}}{8.314 \text{ J/molK}} \left[\frac{291\text{K} - 303\text{K}}{(291)(303\text{K})} \right]$$

$$\ln \frac{401}{P_2} = -0.425$$

Tomando el antilogaritmo

$$\frac{401}{P_2} = e^{-0.425}$$

$$P_2 = \frac{401}{e^{-0.425}}$$

$$P_2 = 613.7 \text{ mmHg}$$

4.4.6 BIOLOGÍA

Los logaritmos en la biología son muy recurrentes debido a que a través de modelos matemáticos se puede representar el crecimiento de organismos, el siguiente ejercicio ilustra lo mencionado.



Ejemplo 21

Se ha desarrollado un modelo matemático que predice el crecimiento de *Salmonella* en ostras, la ecuación que lo describe es:

$$Y = Y_0 + Y_{m\acute{a}x} - \ln[e^{Y_0} + (e^{Y_{m\acute{a}x}} - e^{Y_0})e^{-\mu_{m\acute{a}x}B(t)}]$$

Dónde:

- $\log Y$ Crecimiento microbiano (UFC/g).
- Y_0 Cantidad de microorganismos al tiempo cero (UFC/g).
- $Y_{m\acute{a}x}$ Cantidad máxima de microorganismo (UFC/g).
- $\mu_{m\acute{a}x}$ Relación del crecimiento específico (h^{-1}).
- $B(t)$ *Background* o fondo (otros microorganismos diferentes a *salmonella*).

El crecimiento específico se puede calcular con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\sqrt{\mu_{m\acute{a}x}} &= a(T - T_0)[1 - e^{b(T - T_{m\acute{a}x})}] \\ \sqrt{\mu_{m\acute{a}x}} &= a(T - T_{m\acute{m}})^{0.75}[1 - e^{b(T - T_{m\acute{a}x})}]\end{aligned}$$

Dónde:

- a y b Coeficientes.
- T_0 Temperatura mínima del modelo *Ratkowsky* (ver Tabla 4.10).
- $T_{m\acute{m}}$ Temperatura mínima de crecimiento biológico.
- $T_{m\acute{a}x}$ Temperatura máxima de crecimiento biológico.

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

$$B(t) = t + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1 + e^{-\alpha(t-\lambda)}}{1 + e^{\alpha\lambda}}$$

Dónde:

- α Coeficiente de transición $\alpha = 4$.
- t Tiempo (h).
- λ Duración de la fase de retardo de los microorganismos de fondo (h). Una buena aproximación a la fase de retardo es:

$$\ln \lambda = -0.132 - 1.56 \ln(\mu_{\max})$$

Tabla 4.10

Modelos para los coeficientes del crecimiento específico de *Salmonella*

Coeficientes	Ratkowsky	Huang Rate
a	0.034	0.083
b	0.211	0.313

Fuente: Fang *et al*, 2015

Encuentre el crecimiento máximo de *Salmonella*, considerando que la temperatura es 20° en un intervalo de 5 a 30 °C, para un tiempo de 20 horas y una cantidad de microorganismo inicial de 3 unidades formadoras de colonias (UFC).

Solución

1.- Calculamos primero el crecimiento específico.

$$\sqrt{\mu_{\max}} = a(T - T_0)[1 - e^{b(T - T_{\max})}]$$

Se utilizan las constantes a y b de la tabla 4.10 y se aplica el modelo de Ratkowsky.

$$\sqrt{\mu_{\max}} = 0.034(20 - 5)[1 - e^{0.211(20 - 30)}]$$

$$\sqrt{\mu_{\max}} = 0.4481 \quad \mu_{\max} = 0.20085$$

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

2.- Se obtiene el Background o fondo.

$$B(t) = t + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1 + e^{-\alpha(t-\lambda)}}{1 + e^{\alpha\lambda}}$$

Para la fase de retardo λ .

$$\ln \lambda = -0.132 - 1.56 \ln(\mu_{\max})$$

$$\ln \lambda = -0.132 - 1.56 \ln(0.20085)$$

$$\lambda = e^{2.372} \quad \lambda = 10.71$$

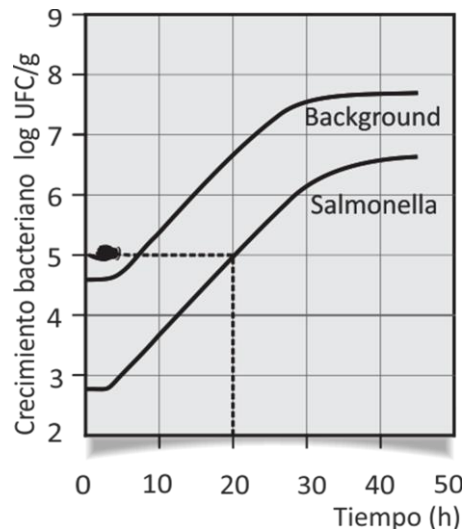
$$B(t) = 20 + \frac{1}{4} \ln \frac{1 + e^{-4(20-10.71)}}{1 + e^{4(10.71)}}$$

$$B(t) = 20.17$$

Para encontrar a Y , se utiliza la gráfica de crecimiento de *Salmonella* y del Background a 20 °C.

La lectura de crecimiento para 20 horas es de logUFC/g=5.

Figura 4.11
Crecimiento de la *Salmonella* y del Background a 20 °C



Fuente: Fang et al, 2015

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

Ahora se obtiene el crecimiento máximo.

$$Y = Y_0 + Y_{m\acute{a}x} - \ln[e^{Y_0} + (e^{Y_{m\acute{a}x}} - e^{Y_0})e^{-\mu_{m\acute{a}x}B(t)}]$$

$$Y = Y_0 + Y_{m\acute{a}x} - \ln[e^{Y_0} + (e^{-Y_{m\acute{a}x}\mu_{m\acute{a}x}B(t)} - e^{-Y_0\mu_{m\acute{a}x}B(t)})]$$

$$Y = Y_0 + Y_{m\acute{a}x} - \ln e^{Y_0} - \ln e^{-Y_{m\acute{a}x}\mu_{m\acute{a}x}B(t)} + \ln e^{-Y_0\mu_{m\acute{a}x}B(t)}$$

$$Y = Y_0 + Y_{m\acute{a}x} - Y_0 + Y_{m\acute{a}x}\mu_{m\acute{a}x}B(t) - Y_0\mu_{m\acute{a}x}B(t)$$

$$Y = Y_0 - Y_0 - Y_0\mu_{m\acute{a}x}B(t) + Y_{m\acute{a}x} + Y_{m\acute{a}x}\mu_{m\acute{a}x}B(t)$$

$$Y = -Y_0\mu_{m\acute{a}x}B(t) + Y_{m\acute{a}x} + Y_{m\acute{a}x}\mu_{m\acute{a}x}B(t)$$

$$Y = -Y_0\mu_{m\acute{a}x}B(t) + Y_{m\acute{a}x}[1 + \mu_{m\acute{a}x}B(t)]$$

$$Y + Y_0\mu_{m\acute{a}x}B(t) = Y_{m\acute{a}x}[1 + \mu_{m\acute{a}x}B(t)]$$

$$Y_{max} = \frac{Y + Y_0\mu_{m\acute{a}x}B(t)}{1 + \mu_{m\acute{a}x}B(t)}$$

Se sustituyen los valores.

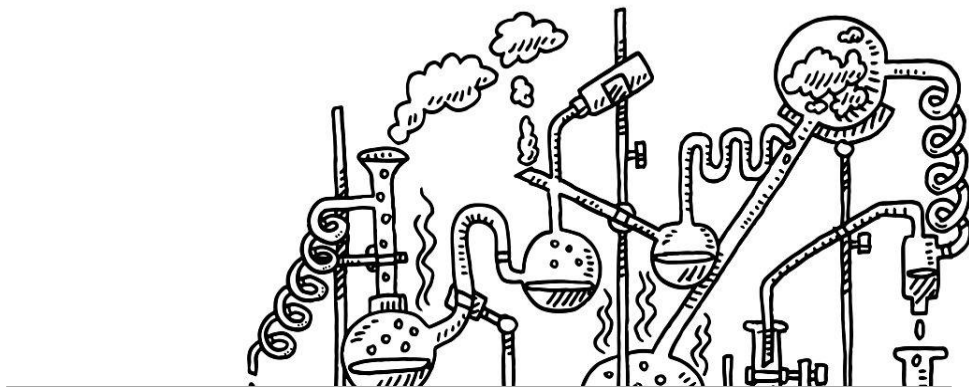
$$Y_{m\acute{a}x} = \frac{10^5 + 10^3(0.20085)(20.17)}{1 + 0.20085}$$

$$Y_{m\acute{a}x} = 86106$$

$$\log Y_{m\acute{a}x} = 4.937$$

Es decir, se tienen **4.937 UFC/g**





Ejercicios de refuerzo

UNIDAD 4 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

I. Identifique el tipo de función:

1. $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$
2. $f(x) = \frac{3}{4x}$
3. $f(x) = e^x$
4. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)4^x$
5. $f(x) = -3x^{\sqrt{2}}$

II. Evalúe las siguientes funciones, tomando los valores de: $-3, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ y 2 .

6. $f(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)^{-x}$
7. $f(x) = 7^{-x}$
8. $f(x) = 5^x$
9. $f(x) = 2^{x+1}$
10. $f(x) = 2^x + 1$

III. Realice el bosquejo de las siguientes gráficas:

11. $f(x) = -3^x$

12. $f(x) = 3^{-x+2}$

13. $f(x) = 4^x$

14. $f(x) = 4^{-x}$

15. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

16. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

17. $f(x) = 3^x - 1$

18. $f(x) = 2^x + 1$

IV. De las siguientes funciones indica ¿Cuál es la asíntota horizontal?

19. $f(x) = \frac{-3}{1 + 2e^{4x}}$

20. $f(x) = \frac{6}{1 + 4e^{-x}}$

V. Resuelva los siguientes ejercicios.

21. A un microorganismo le lleva 4 horas triplicar su población, obtenga la ecuación que representa este crecimiento y calcule la cantidad de microorganismos que habrá en 3 días, si se inicia con 1 UFC.

22. La siguiente función representa el crecimiento poblacional de cierta región para personas de la tercera edad:

$$f(t) = 0.6(1.04)^t$$

Donde $f(t)$ es la población en millones de personas de 65 y más años, y t el número de años desde 1960.

Encuentre el número de personas de la tercera edad para a) 2000, b) 2050 y c) 2100.

23. Una población que cuenta con 2000 habitantes, crece a un ritmo que es descrita por la siguiente expresión:

$$f(t) = 2000(1.2)^{0.1t}$$

¿En cuántos años alcanzará la cantidad de cinco millones de habitantes?

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

24. En un poblado recién fundado se ha contabilizado que existen 680 personas, los especialistas proyectan la siguiente ecuación de crecimiento poblacional:

$$f(t) = 680(1.4)^{0.2t}$$

¿Cuántos habitantes tendrá el poblado en 30 años?

25. Si una persona inicia ahorrando 2 pesos y cada día se duplica la cantidad anterior ¿Cuánto dinero tendrá después de 15 días?

26. La cantidad de sustancia radioactiva presente en gramos, en el instante t , donde t está en años, tiene la siguiente expresión:

$$f(t) = 80 \left(\frac{1}{2} \right)^{0.4t}$$

Determine la cantidad de gramos para
a) 20 años y b) 200 años.

27. Determine los gramos presentes de una sustancia radioactiva después de 10 años, utilice la siguiente expresión:

$$f(t) = 20 \left(\frac{1}{3} \right)^{0.6t}$$

28. En la Ciudad de México, en promedio se utiliza poco más de 40 m³/s de agua, suponga que, a partir del año 2015, el capitalino común fue capaz de reducir su consumo en 3%. Entonces, la cantidad de agua que se utilizará a partir de 2015 puede escribirse como:

$$A(t) = 40(0.97)^t$$

Explique ¿Por qué esta fórmula puede utilizarse para el consumo de agua de los capitalinos? y ¿Cuál será el promedio de consumo para el año 2020?

29. Antes de la incursión exitosa del plástico (PET - Siglas del polímero llamado Polietilen Teraftalato) en las bebidas gaseosas, el vidrio era reciclado en 80% para fabricar nuevos envases (situación que no ocurre con el PET). En México se utilizó más de 200, 000, 000 de botellas de vidrio tan sólo en 1980, con la fórmula:

$$E(t) = 200\,000\,000(2)^{0.1n}$$

Donde n es el tiempo en años.

Si este ritmo se hubiera mantenido, la industria del vidrio sería más pujante. ¿Cuántos envases de cristal se fabricarían en 2017, con vidrio reciclado de 1980?

4. Funciones exponenciales y logarítmicas

30. Para calcular la presión en milibares a determinada altura, se puede utilizar la siguiente expresión:

$$A(h) = 41.97(0.996)^p$$

Donde A es la altura en kilómetros y p la presión en milibares. Si la presión en el monte Everest es de 389 milibares, calcule la altura de la cima del monte Everest.

31. En las proyecciones de los geólogos, se aplica esta ecuación para determinar la edad de un fósil:

$$A = A_0(2)^{-t/5600}$$

Con esta expresión determine la cantidad en gramos que quedará de un hueso después de 500 años, el peso inicial del hueso era de 600 gramos.

32. Se dice que un hueso de cierto fósil, redujo su peso en una décima parte de su peso original, escriba la ecuación del fenómeno y encuentre la edad del fósil.

VI. Grafique las siguientes funciones logarítmicas:

33. $f(x) = \log_2 x$

34. $f(x) = \log_5 x$

35. $f(x) = \log_3 x$

36. $f(x) = \log_4 x$

VII. Escriba las siguientes expresiones en forma logarítmica:

37. $2^4 = 16$

38. $64^{1/3} = 4$

39. $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 1/64$

40. $3^5 = 243$

41. $16^{1/2} = 4$

42. $2^{-3} = 1/8$

43. $81^{1/2} = 9$

44. $10^{1.0792} = 12$

45. $8^{-1/3} = 1/2$

46. $32^{-1/5} = 1/2$

47. $81^{-1/4} = 1/3$

48. $4^{-3} = 1/64$

49. $e^2 = 7.3891$

50. $c^d = m$

VII. Escriba cada ecuación en forma exponencial:

$$51. \log_2 8 = 3$$

$$52. \log_{1/2} \frac{1}{64} = 3$$

$$53. \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$$

$$54. \log_6 216 = 3$$

$$55. \log_5 125 = 3$$

$$56. \log_5 \frac{1}{25} = -2$$

$$57. \log_4 \frac{1}{16} = -2$$

$$58. \log_4 1024 = 5$$

$$59. \log_{10} \frac{1}{100} = -2$$

$$60. \log_{10} 8 = 0.9031$$

$$61. \log_{10} \frac{1}{1000} = -3$$

$$62. \log_w p = -s$$

VIII. Utilice las propiedades de los logaritmos para realizar las siguientes operaciones:

$$63. \log \frac{29}{34}$$

$$64. \log \sqrt{3/4}$$

$$65. \ln 65 \sqrt[3]{3/4^2}$$

$$66. \ln(1/\sqrt{5})$$

$$67. \ln(5^2 \sqrt{32})$$

IX. Desarrolle las siguientes expresiones, usando propiedades de los logaritmos:

$$68. \log 4(x+3)^3$$

$$69. \log \left(\frac{4-x}{3} \right)^2$$

$$70. \ln \frac{(3-y)^2}{2}$$

$$71. \ln \frac{[x(x+3)]^3}{6}$$

$$72. \log \frac{\sqrt{x}}{x-16}$$

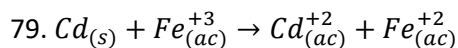
4. Funciones exponenciales y logarítmicas

$$73. \log \sqrt{\frac{x^3}{x+2}}$$

$$74. \log \frac{x(x+4)}{x^3}$$

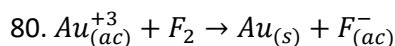
$$75. \ln \frac{x^5}{(x-4)^4}$$

$$76. \log \frac{\sqrt[4]{xy^3}\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a-b}}$$

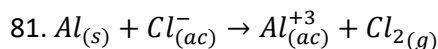


$$[Fe_{(ac)}^{+2}] = 0.22M; [Fe_{(ac)}^{+3}] = 0.35M$$

$$[Cd_{(ac)}^{+2}] = 0.12M$$



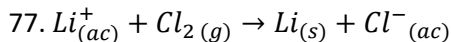
$$[Au_{(ac)}^{+3}] = 0.05M; [F_{(ac)}^{-}] = 0.25M$$



$$[Al_{(ac)}^{+3}] = 0.04M; [Cl_{(ac)}^{-}] = 0.6M$$

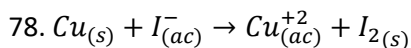
$$[Cl_{2(g)}] = 0.05M$$

X. Realice las siguientes predicciones de reacciones utilizando la ecuación de Nernst. Recuerde que, si el potencial eléctrico es negativo, la reacción se considera no espontánea.



$$[Li_{(ac)}^{+}] = 0.1M; [Cl_{(ac)}^{-}] = 0.2M$$

$$[Cl_{2(g)}] = 0.15M$$



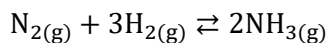
$$[Cu_{(ac)}^{+2}] = 0.4M; [I_{(ac)}^{-}] = 0.15M$$

XI. Calcule las constantes de reacción a 298 K y 350 K. Para las siguientes reacciones.

Nota. Para 298 K utilice la siguiente expresión:

$$\ln K_T = -\frac{\Delta G_r^0}{RT}$$

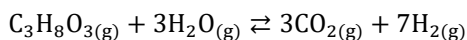
82. Producción de amoníaco.



83. Obtención de formaldehído.

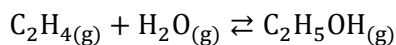


84. Conversión de glicerina en hidrógeno.



Nota. Reacción a 200 °C y 1.2 atm.

85. Hidrólisis para obtener metanol.



XII. Calcule el pH en los siguientes ejercicios.

86. Para una solución que contiene 25 mL de $\text{HC}_2\text{H}_3\text{O}_2$ 0.100 N y 10 mL de NaOH 0.100 N.

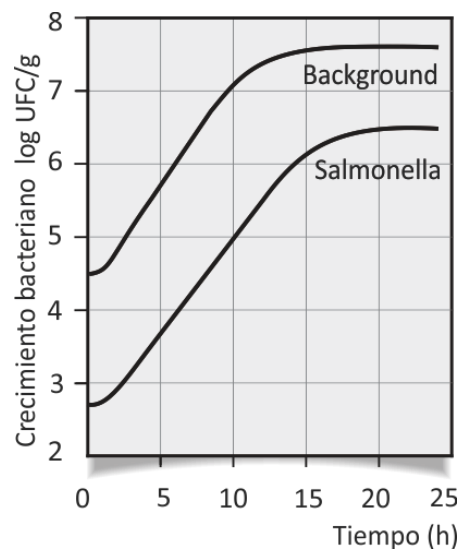
87. Para una solución que contiene 200 mL de NaOH 0.100N y 300 ml de HCN 0.500 N, $K_a=4.9 \times 10^{-10}$.

88. Para una solución que contiene 10 mL de HCl 0.050 N y 50 ml de NaOH 0.010 N.

XIII. Calcule lo que se pide

89. Del ejercicio 19, encuentre el crecimiento máximo de Salmonella, considerando que la temperatura ahora es 25° en un intervalo de 5 a 30°C, para un tiempo de 15 horas y una cantidad de microorganismo inicial de 3 unidades formadoras de colonias.

Gráfica de crecimiento de salmonella a 25 °C.



Capítulo cinco

Funciones periódicas

“Nacer, crecer, reproducirse y morir, se dice que son las etapas del ciclo de la vida” pero, ¿son suficientes para sentirnos completos?



La primera función trigonométrica registrada fue la función “*seno*”. La función coseno se refiere a que es el complemento de la función seno es decir “*co sinus*”. Estas funciones pueden explicar comportamientos cíclicos, como el desarrollo de la vida misma.

La trigonometría es el resultado de observaciones astronómicas, el primer registro de estas funciones se dio en la antigua Babilonia.

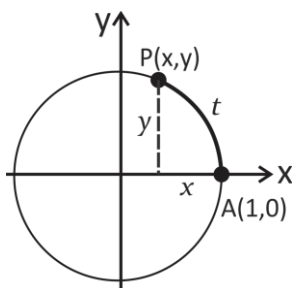
5.1 Definición y propiedades de las funciones periódicas



Las **funciones trigonométricas** son también llamadas funciones periódicas, debido a que después de cierto punto sus formas se vuelven a repetir.

Dentro de las funciones periódicas más importantes tenemos a la función de seno y coseno. Pensemos en un círculo de radio unitario ($x^2 + y^2 = 1$), designado al punto A en las coordenadas $(0,1)$ y al punto P , en las coordenadas (x, y) , cuyo arco será t (ver Figura 5.1). Si asociamos a cualquier número t , un punto único $P(x,y)$, esto nos permite dar las definiciones de las funciones seno y coseno.

Figura 5.1
Círculo unitario



Definición

Si t determina el punto $P(x,y)$, como se indicó, entonces:

$$\text{sen } t = y \quad \text{cos } t = x$$

Muchos fenómenos naturales a los que estamos acostumbrados son repetitivos o cíclicos; como el movimiento planetario, el ritmo cardíaco, las vibraciones, la marea. En química estos ciclos los podemos ver en reacciones de algunos complejos, en donde se da formación y descomposición de manera cíclica.

5.1.1 PROPIEDADES BÁSICAS DE SENO Y COSENO

Es evidente que con la definición antes dada, el valor de x y y varía entre 1 y -1, de tal forma que:

$$|\operatorname{sen} t| \leq 1 \quad |\cos t| \leq 1$$

Debido a que la circunferencia del círculo equivale a 2π , el punto P , también está determinado por $t + 2\pi$, podemos decir que:

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \quad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

La función seno es impar y la función coseno es par, debido a que los puntos P , que corresponde a t y $-t$ son simétricos, con respecto al eje x , las coordenadas en x son las mismas y difiere sólo en el signo de y (ver Figura 5.2).

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \quad \cos(-t) = \cos t$$

Ahora los puntos P , que corresponde a t y $\pi/2 - t$, son simétricos con respecto a la recta $x = y$ (ver Figura 5.3), por lo tanto sus coordenadas se pueden intercambiar, por lo que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t$$

Figura 5.2
Simetría de t y $-t$

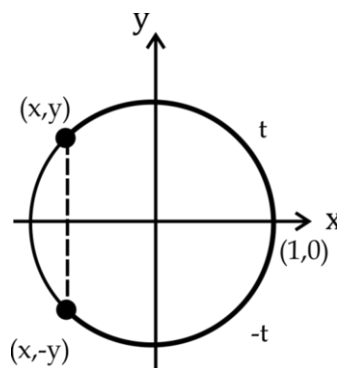
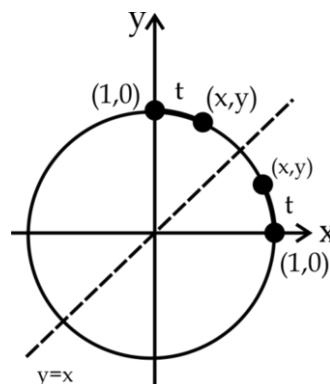


Figura 5.3
Medios ángulos



Para graficar las funciones seno y coseno, seguimos el procedimiento que conocemos, en este caso la variable independiente es t , los extremos son 2π a -2π (la circunferencia de un círculo) y se comienza a encontrar los pares ordenados (ver Tabla 5.1).

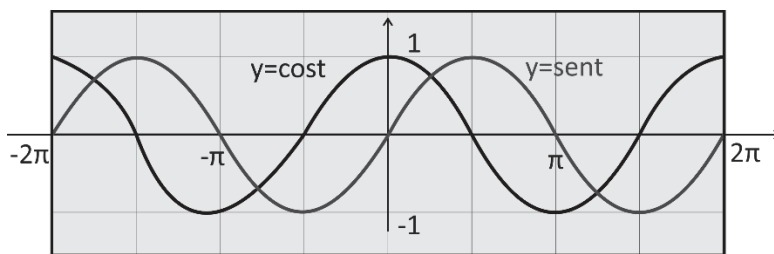
En la Figura 5.4 se presentan las gráficas de la función seno y coseno, calculadas en radianes.

Tabla 5.1

Algunos valores de la función seno y coseno

t	sent	cost
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
π	0	$-1/2$

Figura 5.4 Gráfica de la función seno y coseno



Las características principales de las funciones seno y coseno son:

- Los valores extremos en el eje de las "y" tanto de la función seno como de la función coseno es $[1, -1]$.
- Ambas funciones son periódicas, en el intervalo de 2π .
- La gráfica de seno es simétrica con respecto al origen y la de coseno es simétrica con respecto al eje "y".
- La gráfica de seno es la misma de coseno, sólo desplazada $\pi/2$ unidades hacia la derecha.



Recuerda que...

Otras cuatro funciones trigonométricas en términos de seno y coseno son:

$$\tan t = \frac{\text{sent}}{\text{cost}} \quad \cot t = \frac{\text{cost}}{\text{sent}} \quad \sec t = \frac{1}{\text{cost}} \quad \csc t = \frac{1}{\text{sent}}$$

Estas igualdades posteriormente se aplicarán con mayor intensidad en cálculo diferencial.

Ejemplo 1

Verifique las siguientes identidades trigonométricas $\csc^2 t = 1 + \cot^2 t$ y $\sec^2 t = 1 + \tan^2 t$.

Solución

$$a) \quad \sec^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$$

Recordemos que:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\sec^2 t = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t}$$

$$\sec^2 t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t}$$

$$\sec^2 t = \tan^2 t + 1$$

Reordenando.

$$\sec^2 t = 1 + \tan^2 t$$

$$b) \quad \csc^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$$

Recordemos que:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\csc^2 t = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}$$

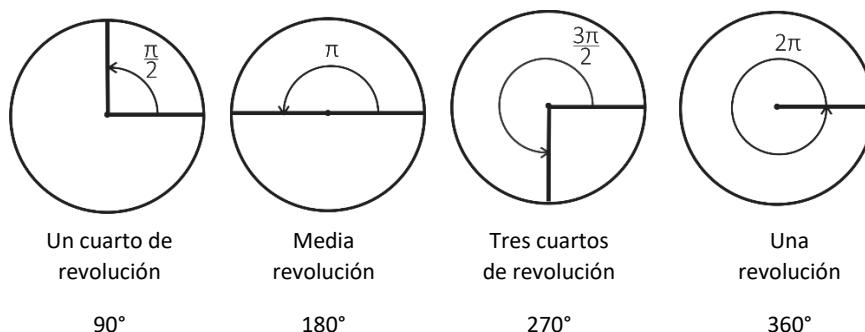
$$\csc^2 t = \frac{\sin^2 t}{\sin^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$$

Reordenamos.

$$\csc^2 t = 1 + \cot^2 t$$

Como se mencionó anteriormente para el cálculo de las funciones trigonométricas, la calculadora debe de estar en modo “*rad*”, es decir en radianes, estamos familiarizados en cursos anteriores con los grados (en la calculadora *deg*) que es la forma común de establecer el valor de un ángulo (ver Figura 5.5).

Figura 5.5 Algunas equivalencias importantes entre ángulos y radianes



Se puede establecer la siguiente ecuación que da equivalencia entre las dos formas de medir un ángulo:

$$\text{Radianes} = d^{\circ} \frac{\pi}{180}$$

Es importante mencionar que, en el cómputo de ángulos, esto debe de realizarse en radianes, de forma general la equivalencia entre los ángulos en radianes y grados, se puede ver en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2

Equivalencias de ángulos de grados a radianes

°	Rad	°	Rad	°	Rad
0	0	135	$3\pi/4$	240	$3\pi/2$
30	$\pi/6$	150	$5\pi/6$	270	$5\pi/3$
45	$\pi/4$	180	π	300	$7\pi/4$
60	$\pi/3$	210	$7\pi/3$	330	$11\pi/6$
120	$2\pi/3$	225	$5\pi/4$	360	2π

 Ejemplo 2

Convierta 450° a radianes.

Solución

Se aplica la ecuación de cambio de grados a radianes y tenemos:

$$450^\circ = 450 \frac{\pi}{180} \text{radianes}$$

$$450^\circ = \frac{5}{2} \pi \text{radianes} \approx \mathbf{7.85 \text{radianes}}$$

 Ejemplo 3

Encuentre el valor de $\cos (33.5^\circ)$

Solución

$$33.5^\circ = 33.5 \frac{\pi}{180} \text{radianes} \approx 0.58 \text{radianes}$$

$$\cos (33.5^\circ) \approx \cos(0.58) \approx \mathbf{0.83}$$

5.2 Aplicaciones de las funciones periódicas

Las aplicaciones de estas funciones trigonométricas a la química se observan en muchas áreas, por ejemplo; para representar los ciclos que desarrollan los organismos para su sobrevivencia como el metabolismo; el aumento y la disminución de la temperatura en un día, el volumen de aire en los pulmones debido a la inhalación y exhalación, etc.

Se presenta un resumen de las identidades trigonométricas para seno y coseno que serán útiles en matemáticas.

Identidades par-impar

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

Identidades de suma y diferencia

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}x \cos y + \cos x \operatorname{sen}y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen}x \operatorname{sen}y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

Identidades de ángulo doble

$$\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x \cos x$$

$$\cos2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

Identidades de medio ángulo

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Ejemplo 4

El metabolismo basal de un organismo se puede describir como la cantidad de calor que produce en un periodo, suponiendo que el organismo está en reposo y sin ninguna tensión. Por ejemplo, la rata del desierto en ciclo diario, el metabolismo aumenta en la noche por ser diurna y disminuye en el día mediante la siguiente expresión:

$$M = 0.4 + 0.2\text{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

Dónde:

M Metabolismo (Kcal/h).

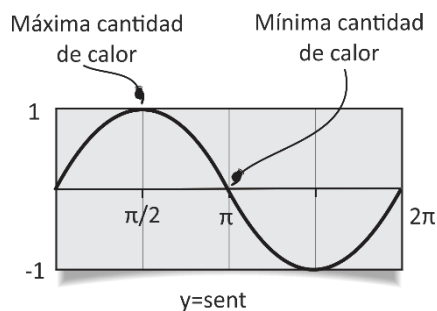
t Tiempo (h).

Encuentre la máxima cantidad de calor que genera la rata del desierto.

Solución

La máxima cantidad de calor será cuando el ángulo de la función seno sea $\pi/2$. Se igualan los ángulos:

$$\frac{\pi t}{12} = \frac{\pi}{2}$$



De esta igualdad la incógnita es t, se despeja y se tiene: $t = \frac{12\pi}{2\pi} = 6$.

Se observa que a las seis horas de actividad alcanza su mayor temperatura, se sustituye este valor en la ecuación y se calcula el calor generado.

$$M = 0.4 + 0.2\text{sen}\left(\frac{\pi(6)}{12}\right) \quad \mathbf{M = 0.6 \text{ kcal/h}}$$

Ejemplo 5

Las grandes masas de agua regulan la temperatura del planeta (Figura 5.6), la radiación que llega del sol es absorbida por el agua en el día y cedida durante la noche, evitando un descenso brusco de temperatura. Suponga que la temperatura del agua de cierto lugar puede calcularse con la siguiente expresión:

$$T = 59 + 14\cos\left[\frac{\pi(t - 208)}{183}\right]$$

Dónde:

T Temperatura del agua (F).
t Tiempo en días ($0 \leq t \leq 365$).

Encuentre la temperatura mínima y en qué día del año se presenta.

Solución

La temperatura mínima se tiene cuando el ángulo vale π .

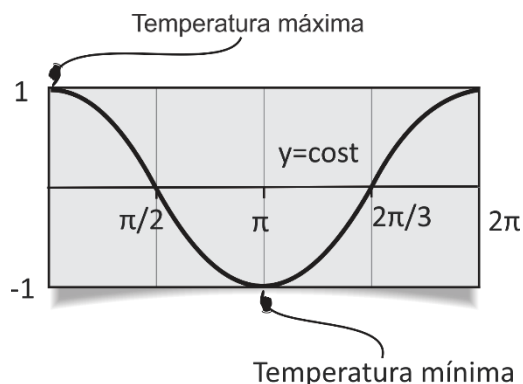
Se igualan los ángulos.

$$\frac{\pi(t - 208)}{183} = \pi$$

Figura 5.6 Toma de lectura de temperatura en el océano atlántico



Fuente: www.agenciasinc.es



De esta igualdad la incógnita es t , se despeja y se tiene:

$$\frac{(t - 208)}{183} = \frac{\pi}{\pi}$$

$$t - 208 = 183$$

$$t = 391 \text{ días}$$

Esto indica que el día 391 es el más frío, pero como el año tiene 365 días, se tiene entonces que es $391 - 365$.

$$t = 26 \text{ días}$$

Es decir, el día 26 del primer mes se tiene la temperatura más baja. Ahora la temperatura que se tiene en el día 26, es:

$$T = 59 + 14\cos\left[\frac{\pi(t - 208)}{183}\right]$$

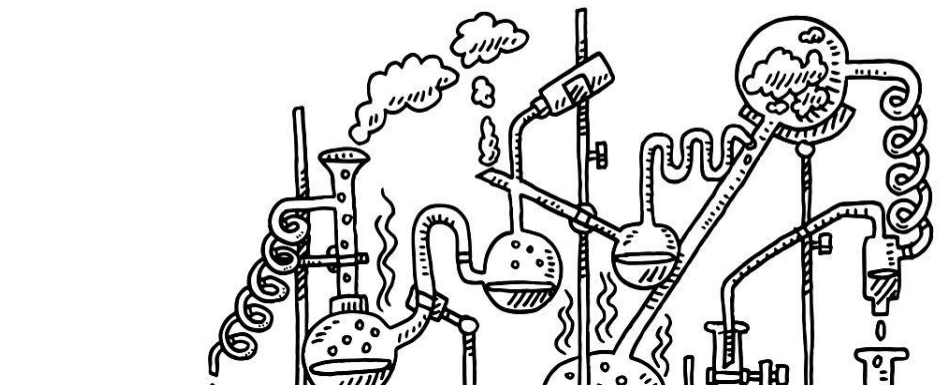
$$T = 59 + 14\cos\left[\frac{\pi(26 - 208)}{183}\right]$$

$$T = 45 \text{ }^{\circ}\text{F}$$

Esto equivale a

$$T = 7.2 \text{ }^{\circ}\text{C}$$





Ejercicios de refuerzo

UNIDAD 5 FUNCIONES PERIÓDICAS

I. Exprese los siguientes ángulos de grados a radianes (exprese su respuesta en términos de π).

- | | |
|-----------------|------------------|
| 1. 225° | 5. 2° |
| 2. 34° | 6. -56° |
| 3. 610° | 7. 520° |
| 4. 16° | 8. 720° |
| 9. 32.5° | 10. -390° |

II. Convierta en grados las siguientes medidas de ángulos.

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| 11. 9π | 16. $\left(-\frac{1}{3}\right)\pi$ |
| 12. $\left(\frac{7}{6}\right)\pi$ | 17. $\left(-\frac{11}{12}\right)\pi$ |
| 13. $\left(\frac{5}{4}\right)\pi$ | 18. $\left(\frac{7}{5}\right)\pi$ |
| 14. $\left(\frac{1}{18}\right)\pi$ | 19. $(-2/9)\pi$ |
| 15. $\left(-\frac{1}{5}\right)\pi$ | 20. $(4/5)\pi$ |

III. Realice las siguientes operaciones en la calculadora.

21. $\text{sen}(0.345)$

22. $\tan(0.128)$

23. $\cos(-0.293)$

24. $\cos(0.428)$

25. $\tan(-0.357)$

IV. Calcule las siguientes operaciones.

26. $\frac{220.7\text{sen}(1.123)}{\cos(0.472)}$

27. $\cos^2(2.163) + \sqrt{\text{sen}(0.41)}$

28. $\frac{43.6 \tan(34.2^\circ)}{\cos(34.6^\circ)}$

29. $\frac{\text{sen}23.8^\circ}{\cos12.5^\circ + \tan23.1^\circ}$

30. $\left(\frac{\sqrt{\cos43^\circ}}{\sqrt{\text{sen}52.1^\circ}} \right)^3$

IV. Evalúe sin usar la calculadora.

31. $\tan(\pi/6)$

32. $\sec(3\pi/4)$

33. $\cot(\pi/2)$

34. $\tan(-\pi/4)$

35. $\csc(\pi/4)$

V. Demuestre las siguientes igualdades.

36. $\frac{1}{\sec^2 t} = (1 + \text{sen}t)(1 - \text{sen}t)$

37. $\tan^2 t = (\sec t + 1)(\sec t - 1)$

38. $\text{cost} = \sec t - \text{sent} \tan t$

39. $\text{sen}^2 t = \frac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t}$

40. $\tan t = \frac{1}{\text{sent} \cos t} - \frac{\cos t}{\text{sent}}$

VI. Bosqueje las gráficas, en el intervalo de $[-\pi, 2\pi]$:

41. $y = \cos 2t$

42. $y = \text{sen} 3t$

43. $y = \csc t$

44. $y = \tan t$

45. $y = 2\cos t$

VII. Realice los siguientes ejercicios:

46. En una localidad la duración de la luz del día (en candelas) varía durante el año en t días y está dada por la ecuación:

$$L = 720 + 200\operatorname{sen}\frac{\pi(t - 79.5)}{183}$$

Donde $0 \leq t \leq 365$

Encuentre el día en el que hay menos luz y en el que hay más luz.

47. Suponga que la presión sanguínea de una persona al tiempo t , está dada por:

$$P = 100 + 20\cos 6t$$

Si el tiempo se mide en minutos, aproximadamente ¿Cuántos latidos del corazón predice la ecuación?

48. Un espirograma es un instrumento que registra en una gráfica el volumen de aire que llega a los pulmones, considere que espontáneamente se llega a la hiperventilación, la cual puede ser representada por la siguiente ecuación:

$$V = 3 + 0.04\operatorname{sen}\left(160\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Dónde:

t Tiempo en minutos.
 V Volumen en litros.

Encuentre el volumen máximo y mínimo que ocupan los pulmones.

Capítulo seis

Números complejos

“Incluso alrededor del siglo XVI existían matemáticos que se referían a las raíces negativas como ficticias, absurdas o falsas”

-Macarena Flores Gonzalez

El hecho de que el binomio $x^2 + 1 = 0$, fue considerado por los matemáticos como imposible de resolver, dio inicio a una propuesta de solución “imaginaria”, aunque el uso en la vida cotidiana de los números complejos ya existía, la propuesta de $\sqrt{-1}$, la realizó el matemático Euler, iniciando con esto el manejo de los números complejos.

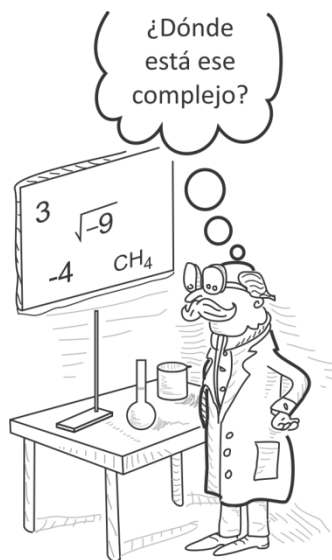


La solución de la ecuación cúbica por el método de Cardano:

$$y^3 = py + q$$
$$y = \sqrt[3]{q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{p^3 + q^2}}$$

Presenta para su solución una raíz negativa.

6.1 Definición y propiedades de los números complejos



Los números complejos están conformados por una parte real y una parte imaginaria; que se expresa:

$$a + b\sqrt{-1}$$

Donde a y b son números reales.



Definición

Un número imaginario se expresa como:

$$i = \sqrt{-1}$$

El uso de los números complejos está en la electrónica, aerodinámica y campos magnéticos. En cuanto a la química los números complejos se utilizaron en la ecuación de Schrödinger, partiendo de la ecuación clásica de la energía cinética:

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

Se encontró una similitud con la ecuación de:

$$E = \frac{1}{2m}(p^2x + p^2y + p^2z)$$

Donde p es un operador de momento que tiene la forma:

$$px = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

Dónde $\hbar$ es la constante de Planck.

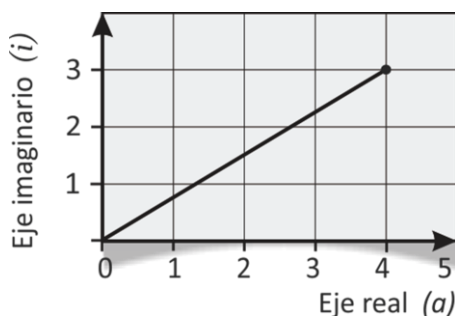


Recuerda que...

La ecuación de Schrödinger establece la densidad de probabilidad de un electrón en una región particular del átomo.

Los números complejos se pueden representar en los ejes rectangulares de la forma a, bi , por ejemplo el número complejo $4 + 3i$, está en el cuadrante de los números positivos en los ejes rectangulares, cuatro unidades en el eje real y tres unidades en el eje imaginario (ver Figura 6.1).

Figura 6.1
Representación de complejos en coordenadas rectangulares



Ejemplo 1

Represente el siguiente número complejo $5 - \sqrt{-4}$, en coordenadas rectangulares.

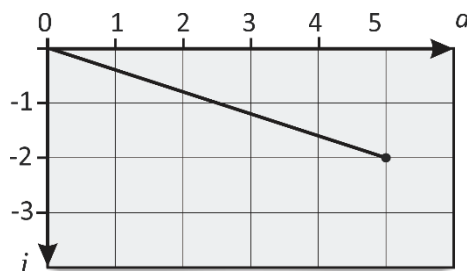
Solución

Primero se expresa la parte imaginaria como $\sqrt{-1}$.

$$\sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)}$$

$$\sqrt{(4)(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1}$$

Esto finalmente es: $2\sqrt{-1}$. El complejo queda pues: $5 - 2\sqrt{-1}$, por lo que se puede escribir $5 - 2i$.



6.1.1 OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Estas operaciones de los números complejos son la suma, diferencia, producto y cociente, que al realizarlas conduce a simplificar la expresión.

Suma

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Diferencia

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Producto

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + cbi + bdi^2$$

Cociente

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \left(\frac{c - di}{c - di} \right)$$

Nota: una vez establecida la regla del cociente se multiplican los numeradores y los denominadores y se realizan las sumas o diferencias que se presenten.

En la operación de producto al desarrollar del binomio se obtiene el número imaginario elevado al cuadrado, el cual por las propiedades de los imaginarios se sustituye por -1, por consiguiente, se puede prever que el número imaginario elevado a la cuarta potencia es igual a 1 (ver Tabla 6.1).

Tabla 6.1

Propiedades de los números imaginarios

$i = \sqrt{-1}$	$i^5 = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$



Ejemplo 2

Realice las siguientes operaciones con números complejos:

$$a) (7 - 3i) + (-5 + 4i)$$

$$b) (2 - 3i)(-7 + i)$$

$$c) \frac{2 - i}{4 - 3i}$$

Solución

$$a) (7 - 3i) + (-5 + 4i)$$

Se tiene una suma; por lo que se realiza la suma de la parte real con la imaginaria de cada complejo.

$$(7 - 3i) + (-5 + 4i) = (7 - 5) + (-3 + 4)i$$

$$(7 - 3i) + (-5 + 4i) = \mathbf{2 + i}$$

$$b) (2 - 3i)(-7 + i)$$

Se tiene una multiplicación, por lo que se sigue la regla establecida.

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + cb + bdi^2$$

$$(2 - 3i)(-7 + i) = (2)(-7) + (2)(i) + (-7)(-3i) + (-3)i^2$$

Se realizan las operaciones:

$$(2 - 3i)(-7 + i) = -14 + 2i + 21i - 3i^2$$

Se agrupan términos comunes y se sustituye $i^2 = -1$.

$$(2 - 3i)(-7 + i) = -14 + 2i + 21i - 3(-1)$$

$$(2 - 3i)(-7 + i) = -14 + 3 + (2 + 21)i$$

$$(2 - 3i)(-7 + i) = -11 + 23i$$

$$c) \frac{2 - i}{4 - 3i}$$

Se multiplica por su conjugado.

$$\frac{2 - i}{4 - 3i} \left(\frac{4 + 3i}{4 + 3i} \right) = \frac{(2 - i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)}$$

Se realiza las multiplicaciones:

$$\frac{(2 - i)(4 + 3i)}{(4 - 3i)(4 + 3i)} = \frac{8 + 6i - 4i - 3i^2}{16 + 12i - 12i - 9i^2}$$

Recordar que $i^2 = -1$.

$$\frac{8 + 6i - 4i - 3i^2}{16 + 12i - 12i - 9i^2} = \frac{8 + 2i - 3(-1)}{16 - 9(-1)}$$

$$\frac{8 + 2i - 3(-1)}{16 - 9(-1)} = \frac{11 + 2i}{25}$$

El resultado que se tiene es:

$$\frac{2 - i}{4 - 3i} \left(\frac{4 + 3i}{4 + 3i} \right) = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$$



6.1.2 NÚMEROS COMPLEJOS EN COORDENADAS POLARES

Para localizar un punto en coordenadas polares se utiliza un eje polar, como referencia para establecer el ángulo (θ) y se traza el módulo o longitud (r) a partir del origen, la forma de representarlos es:

$$P(r, \theta)$$

El ángulo θ es positivo cuando se mueve en sentido contrario de las manecillas del reloj (ver Figura 6.2).

Por ejemplo, para localizar al punto A que se ubica en $(3, 120^\circ)$, se ubica la circunferencia de 3 unidades y el ángulo de 120 grados para dibujar el punto (ver Figura 6.3).

El ángulo puede ser expresado en grados o en radianes (ver Figura 6.4).

Figura 6.2

Localización del punto P en coordenadas polares

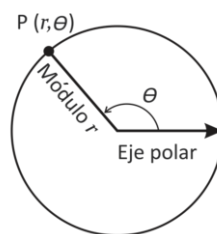


Figura 6.3

Localización del punto A, con coordenadas $(3, 120^\circ)$

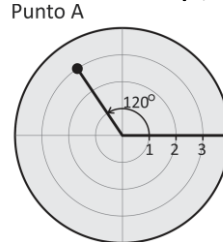
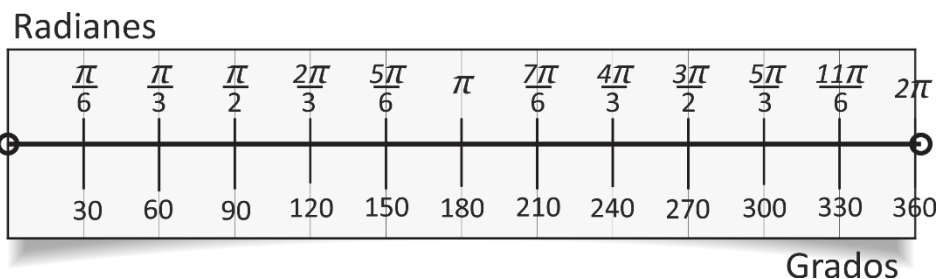


Figura 6.4

Equivalencia entre grados y radianes.



Ejemplo 3

Localice los siguientes puntos en coordenadas polares.

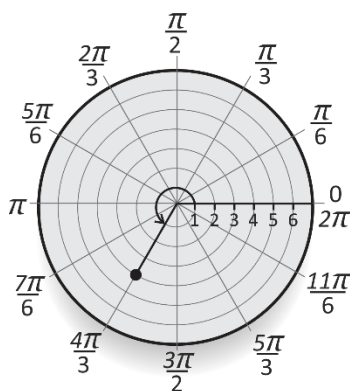
a) $4, \frac{4\pi}{3}$

b) $6, 3\pi$

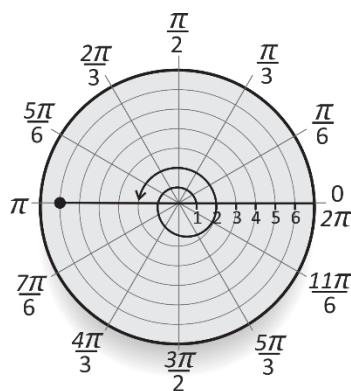
c) $3, \frac{2\pi}{3}$

d) $\sqrt{30}, \frac{5\pi}{3}$

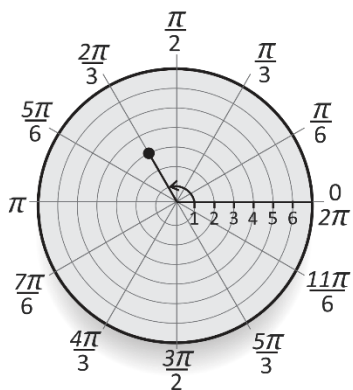
Solución



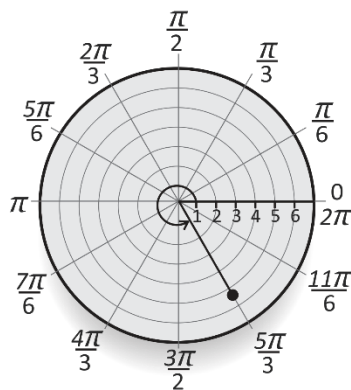
a)



b)



c)



d)

La equivalencia entre las coordenadas rectangulares y polares se puede encontrar utilizando el triángulo rectángulo (ver Figura 6.5).

$$x = r \cos \theta$$

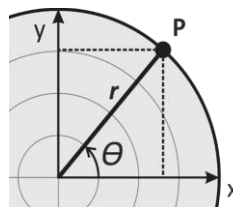
$$y = r \sin \theta$$

$$\text{Donde: } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Cumpliendo que $r \geq 0$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

Figura 6.5
Equivalencia de coordenadas polares a rectangulares



Ejemplo 4

Determine las coordenadas rectangulares del punto P, cuyas coordenadas polares son: $P = \left(5, \frac{5}{6}\pi\right)$.

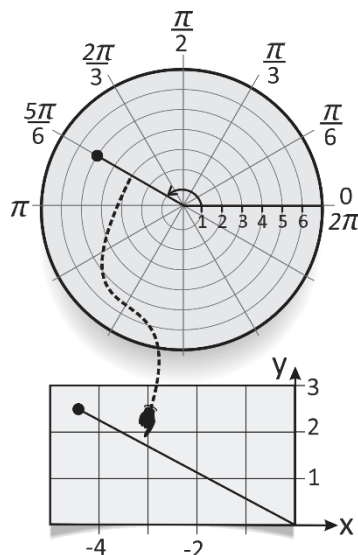
Solución

Para calcular las coordenadas rectangulares, vemos con la figura 6.4 que $5/6\pi$ equivalen a 150° , por lo tanto el cálculo de las coordenadas es:

$$x = 5 \cos(150^\circ) \quad x = -4.33$$

$$y = 5 \sin(150^\circ) \quad y = 2.5$$

En coordenadas rectangulares el punto P está en $(-4.33, 2.5)$.



Ejemplo 5

Determine las coordenadas polares del siguiente punto cuyas coordenadas rectangulares son (5,-2).

Solución

Primero se grafica el punto P en coordenadas rectangulares.

Se calcula el módulo.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad r = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2} \quad r = \sqrt{29}$$

Ahora el ángulo

$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right) \quad \theta = -21.8$$

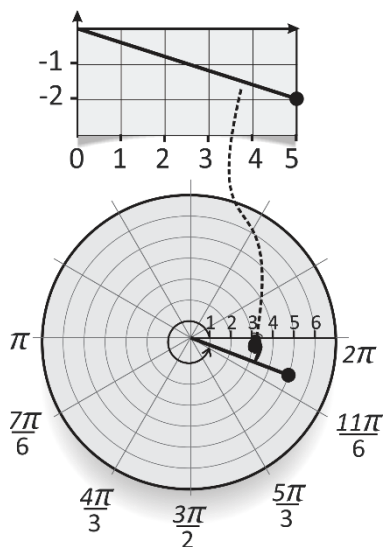
Pero el ángulo respecto al eje polar es:

$$\theta = 360^\circ - 21.8^\circ \quad \theta = 338.2$$

En radianes $338.2^\circ = 338.2 \frac{\pi}{180} \text{radianes}$

$$338.2^\circ = 1.87 \pi \text{rad}$$

Finalmente el punto se expresa $(\sqrt{29}, 1.87\pi)$



Los números complejos también puede expresarse en coordenadas polares, también conocida como forma trigonométrica, ya que se utilizan las funciones de seno y coseno. Se puede escribir de una manera sencilla:

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = rcis\theta$$

Ejemplo 6

Encontrar la forma polar del siguiente número complejo $-2 + 3i$.

Solución

Se grafica primero el número complejo en coordenadas rectangulares.

Se calcula el módulo primero.

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} \quad r = \sqrt{13}$$

Ahora el ángulo.

$$\theta = \tan^{-1} \frac{3}{-2} \quad \theta = -56.31^\circ$$

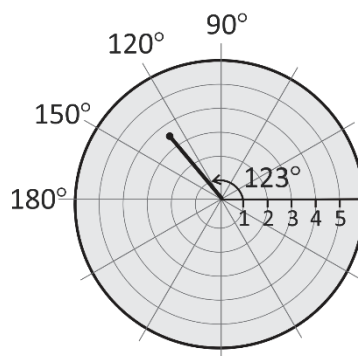
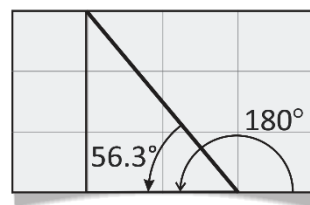
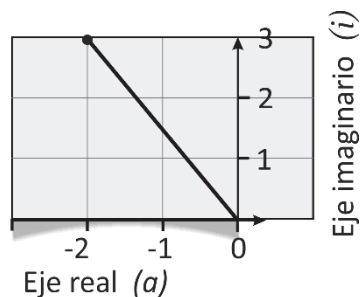
En coordenadas polares el ángulo parte desde el eje polar, por lo que éste es:

$$\theta = 180 - 56.3^\circ \quad \theta = 123.7^\circ$$

Es necesario que se bosqueje primero en coordenadas rectangulares para lograr ver el ángulo que se necesita para expresar al número complejo en coordenadas polares.

La forma polar es:

$$\sqrt{13}(\text{cis}123.7^\circ)$$



Este número complejo también se puede expresar en coordenadas polares en radianes con la siguiente equivalencia:

$$123.69^\circ \left(\frac{1 \text{ rad}}{57.2958^\circ} \right) = 2.158 \text{ radianes}$$

Se expresa como π radianes por lo que se divide entre π , quedando el ángulo como:

$$\theta = 0.68\pi$$

La forma polar en radianes queda como:

$$\sqrt{13}(\text{cis } 0.68\pi)$$



Ejemplo 7

Determine las coordenadas rectangulares del siguiente punto $(\sqrt{30}, 1/4\pi)$.

Solución

Gráfica en coordenadas polares.

Se determinan las coordenadas rectangulares.

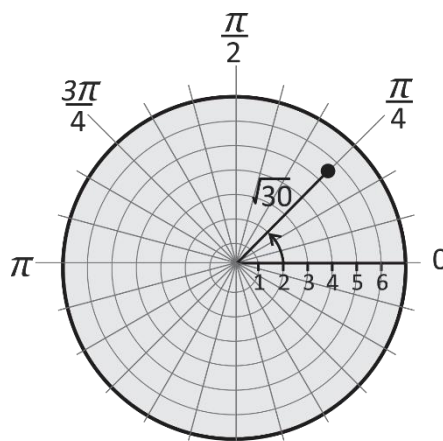
$$x = \sqrt{30} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) x = 3.87$$

$$y = \sqrt{30} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) y = 3.87$$

El ángulo es:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{3.87}{3.87} \quad \theta = \tan^{-1}(1)$$

Finalmente, el ángulo $\theta = 45^\circ$



6.2 Operaciones con números complejos

Las operaciones de números complejos son producto, división, potencia y raíz en coordenadas polares.

El producto de dos números complejos se obtiene multiplicando sus módulos y se suman los argumentos (ángulos), por otro lado para encontrar la n -ésima potencia de un complejo, se debe de elevar el módulo a la potencia n y multiplicar el argumento por n . Esta es la **Fórmula de De Moivre**.

$$\text{Si } z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \text{ entonces } z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Inversamente, para encontrar la raíz n -ésima de un complejo basta con sacarle la raíz n -ésima a su módulo y dividir su argumento entre n .

Las operaciones con números complejos se muestran a continuación.

Producto

$$[r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)][r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)] = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

División

$$\frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Potencia

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Radicación

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{1/n} = r^{1/n}(\cos \theta/n + i \operatorname{sen} \theta/n)$$

Ejemplo 8

Encuentre la raíz cúbica del número complejo $3(\cos 3/4 \pi + i \operatorname{sen} 3/4 \pi)$

Solución

Se aplica la fórmula de radicación.

$$\sqrt[3]{3 \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{4} \pi \right)} = 3^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\left[\left(\frac{3}{4} \right) \pi \right]}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\left[\left(\frac{3}{4} \right) \pi \right]}{3} \right)$$

$$\sqrt[3]{3 \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{4} \pi \right)} = 1 \left(\cos \frac{1}{4} \pi + i \operatorname{sen} \frac{1}{4} \pi \right)$$

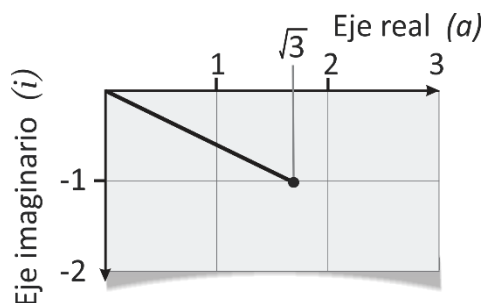
Ejemplo 9

Encuentre la potencia que se pide del siguiente complejo $(\sqrt{3} - i)^6$

Solución

Primero se calcula el ángulo.

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad \theta = -30^\circ$$



A este ángulo se le suman 360° , por lo que queda: $\theta = 360^\circ - 30^\circ = 300^\circ$

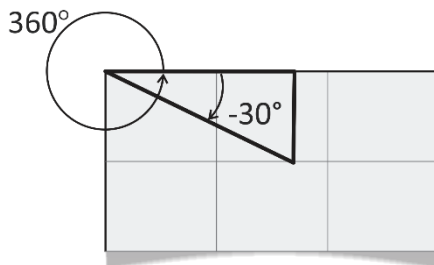
Ahora el módulo.

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$$

$$r = \sqrt{4} \quad r = 2$$

Finalmente se aplica la regla de la potencia.

$$2^6 [\cos 6(300) + i \operatorname{sen} 6(300)] 2^6 [1 + i(0)] = \mathbf{64}$$



Ejemplo 10

Realice la división del siguiente complejo:

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\pi\right) \div (-2, \pi)$$

Solución

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\pi\right) \div (-2, \pi) = \frac{\frac{3}{2}}{-2} \left[\cos\left(\frac{7}{3} - 1\right)\pi + i \operatorname{sen}\left(\frac{7}{3} - 1\right)\pi \right]$$

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{3}\pi\right) \div (-2, \pi) = -\frac{3}{4} \left[\cos \frac{4}{3}\pi + i \operatorname{sen} \frac{4}{3}\pi \right]$$

Ejemplo 11

Para la elaboración de un jarabe antitusivo se requiere un mezclador para formar la fase homogénea. Técnicamente se sabe que se requiere una revolución por segundo. Con la imagen que se presenta deduzca si este mezclador servirá.

Solución

Lo que se requiere es establecer la altura máxima que alcanza el vórtice debido al mezclado y verificar si está superando las dimensiones del mezclador o no.

Se usa la teoría de líneas de corriente equipotencial para sumideros.

$$f(z) = \alpha \log z$$

Dónde:

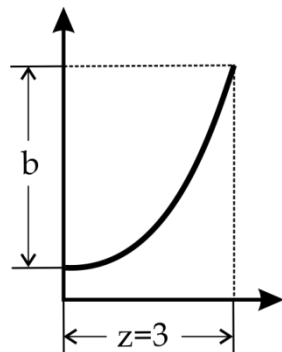
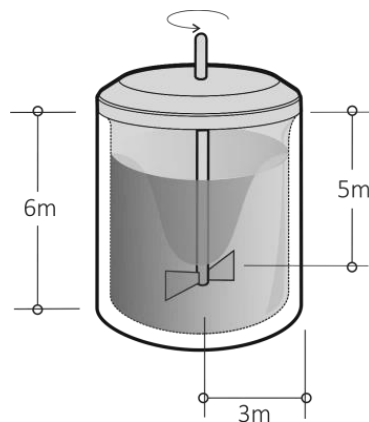
$$\alpha = a + ib$$

$$a = -2\pi b$$

- a Es un punto en el sumidero del vórtice (negativo por ser sumidero).
- b Es la altura del sumidero del vórtice.
- z Parte real de la función.

Recuerde que 1 revolución por segundo equivale a $2\pi/s$.

Se puede establecer que $z = 3m$, por lo tanto:



$$\frac{2\pi}{s} = \alpha \log 3$$

Se despeja α .

$$\alpha = \frac{2\pi}{s} \frac{1}{\log 3}$$

$$\alpha = 13.36$$

Ahora se sustituye este valor en el número complejo.

$$13.36 = a + bi$$

Para sumideros, que es nuestro caso $a = -2\pi b$

Se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas, las cuales se pueden resolver para encontrar el valor de b .

$$13.36 = a + bi$$

$$a = -2\pi b$$

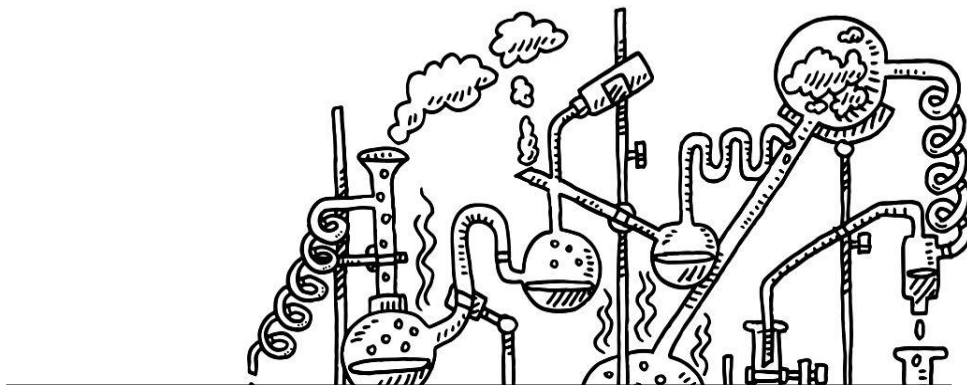
Se sustituye el valor de a en la primera ecuación.

$$13.36 = -2\pi b + bi$$

Se factoriza b .

$$13.36 = (-2\pi + i)b$$

Se despeja b y se realiza el conjugado.



Ejercicios de refuerzo

UNIDAD 6 NÚMEROS COMPLEJOS

Dadas las siguientes expresiones

$$A = 3 + 5i$$

$$B = -5 + 2i$$

$$C = \frac{1}{2} - 4i$$

$$D = 1 - \frac{1}{2}i$$

I. Realice las siguientes operaciones de números complejos.

1. $A + B + C$

2. $(AB) + (CD)$

3. $(A + B)C$

4. D^2

5. $\frac{A-B}{C+D}$

6. $\frac{AC}{BD}$

7. $\frac{B}{2A+3C}$

8. $\frac{A^2C}{D}$

9. $\frac{2B^2}{(A-B)C}$

10. $\frac{\frac{2}{3}A - \frac{1}{5}B}{(C-D)^2}$

11. $3A - \frac{4B^2}{2C+D}$

II. Convierta las siguientes coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

12. $(4, -3)$

13. $(-5, -7)$

14. $(-3, 4)$

15. $(-\sqrt{7}, 5)$

16. $(-10, 6)$

III. Exprese los siguientes números polares en coordenadas rectangulares.

17. $\left(\frac{4}{3}, 2\pi\right)$

20. $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

18. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\pi\right)$

21. $\left(-3, \frac{17}{3}\pi\right)$

19. $\left(\frac{5}{2}, \frac{12}{5}\pi\right)$

IV. Determine el módulo, el argumento, la forma de los siguientes números complejos.

22. $2 + 3i$

28. $2 + 2i$

23. $-3 + 5i$

29. $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

24. $\sqrt{6} + 2i$

30. $-2 - 5i$

25. $\frac{2}{3} - i$

31. $-4 - \sqrt{-9}$

26. $\sqrt{3} + i$

32. $\sqrt[3]{23} + \sqrt{-16}$

27. $-3 - 4i$

33. $\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{-27}}{3}$

V. Encuentre el número complejo de las siguientes expresiones polares.

34. $\sqrt{3}(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$

35. $5(\cos 125^\circ + i \sin 125^\circ)$

36. $2(\cos 98^\circ + i \sin 98^\circ)$

37. $3(\cos 325^\circ + i \sin 325^\circ)$

38. $\sqrt{7}(\cos 205^\circ + i \sin 205^\circ)$

39. $\frac{4}{3}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$

40. $\sqrt{5}(\cos 22^\circ + i \sin 22^\circ)$

41. $4(\cos \pi + i \sin \pi)$

42. $\frac{3}{2}\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right)$

43. $\sqrt{2}(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$

44. $\frac{5}{2}\left(\cos \frac{7}{2}\pi + i \sin \frac{7}{2}\pi\right)$

45. $\sqrt[3]{49}\left(\cos \frac{15}{4}\pi + \frac{i \sin 15}{4}\pi\right)$

VI. Realice las siguientes operaciones de complejos en su forma polar con las siguientes expresiones.

Dados

$$A = 3 + 5i$$

$$B = 3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$$

$$C = \sqrt{2}(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

$$D = 1 + i$$

46. $(A)(B)$

47. $\frac{(C + A)}{D}$

48. C^5

49. $\sqrt[3]{B}$

50. $\frac{A^2 + B^2}{CD}$

51. $\sqrt{\frac{C^3}{(A - B)^2}}$

Capítulo siete

Teoría de ecuaciones

“Con la representación de longitudes de segmentos de recta por números nace el álgebra geométrica y con la incorporación de las equivalencias inician las ecuaciones algebraicas”

Indudablemente una ecuación es una igualdad y esta se refleja como una transformación de la materia, en donde se expresa una igualdad de la cantidad de reactivos que se convierten en productos, en matemática se simboliza con el signo de “=”, en química se utiliza una flecha “ $\rightarrow$ ”.



Una ecuación algebraica nace de una proporción de dos rectas que parten del mismo lugar; en química a esto se le conoce como escalamiento de reacción.

7.1 Definición de ecuación



Una ecuación en x es un polinomio igualado a cero cuyo grado es n , por ejemplo en el siguiente polinomio el grado es 3.

$$6x^3 + 4x^2 + 7x + 12 = 0$$

Un polinomio lo podemos generalizar de la siguiente manera:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Término
dominante

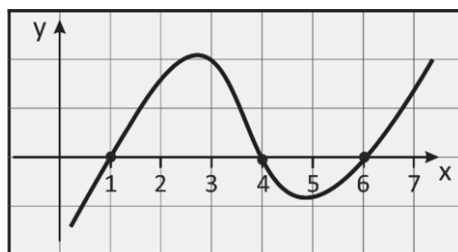
Término
independiente

En los polinomios existen valores que satisfacen la igualdad de $P(x) = 0$, llamados raíces. El número de raíces de un polinomio que satisfacen esta igualdad corresponde al grado del polinomio.

Por ejemplo, para un polinomio de grado 3, existen tres raíces que satisfacen la igualdad. Gráficamente, son los valores que toma x , cuando la variable dependiente es cero (ver Figura 7.1).

Figura 7.1

Raíces de un polinomio de grado tres





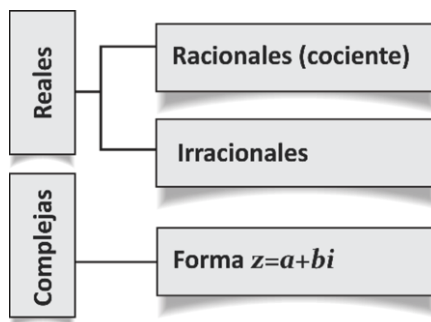
Recuerda que...

Un polinomio es la suma algebraica de dos o más monomios.

Todas las raíces de un polinomio se le conocen como el **conjunto solución**, las raíces pueden ser reales o complejas (ver Figura 7.2).

Figura 7.2

Tipos de raíces de un polinomio



Ejemplo 1

Determine las raíces del siguiente polinomio $2x^2 - 24 = 0$

Solución

Este ejercicio es sencillo de resolver, ya de primera vista es un polinomio de grado 2, por lo que debemos tener dos raíces que satisfagan la igualdad.

$$2x^2 = 24 \quad \text{Se obtienen las raíces. } x = \pm 2\sqrt{3} \quad \text{Las raíces son irracionales.}$$

7.1.1 FACTORIZACIÓN

Primero tenemos que mencionar que factorizar matemáticamente hablando es encontrar dos o más factores cuyo producto es igual a la expresión propuesta.

Por ejemplo el polinomio $4x^2 + 12x$, tiene como factor $4x$; es decir el polinomio puede ser dividido entre este factor y como resultado se tienen expresiones enteras, es decir:

$$\frac{4x^2 + 12x}{4x} = x + 3$$

Por lo que la factorización se puede escribir como:

$$4x^2 + 12x = 4x(x + 3)$$

En general la regla de factorización es:

Si p es un polinomio factorizable

$$p = q \cdot r$$

Para los polinomios p, q y r , se tiene que:

- q y r son factores de p .
- p es divisible entre q y r .

Ejemplo 2

Indique si los siguientes monomios son divisibles:

- a) $45x^5$ es divisible entre $5x^4$
- b) $6x^5$ es un factor de $36x^2$

Solución

- a) Se realiza el cociente

$$\frac{45x^5}{5x^4} = \frac{45}{5} \cdot \frac{x^5}{x^4} = \frac{45x^5}{5x^4} = 9x$$

El resultado es un monomio, lo que implica que $5x^4$ es un factor de $45x^5$.

b) Se realiza el cociente

$$\frac{36x^2}{6x^5} = \frac{36}{6} \cdot \frac{x^2}{x^5} = \frac{36x^2}{6x^5} = \frac{6}{x^3}$$

El resultado no es un monomio, lo que indica que $6x^5$ no es un factor de $36x^2$.

Una forma de factorizar un polinomio es utilizar la ley distributiva.



Ejemplo 3

Factorice el polinomio $4x^4 - 12x^3$

Solución

Primero se encuentra el factor común descomponiendo el polinomio.

$$4x^4 = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$$

$$12x^3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x$$

Se tiene entonces $2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = 4x^3$ como factor común.

Por lo que se expresa a los polinomios como:

$$4x^4 = 4x^3(x) \qquad 12x^3 = 4x^3(3)$$

Por lo tanto, el polinomio se puede escribir de la siguiente forma:

$$4x^3(x) - 4x^3(3)$$

Finalmente se utiliza la propiedad distributiva y se factoriza $4x^3$.

$$4x^3(x) - 4x^3(3) = 4x^3(x - 3)$$

Se puede ver que las raíces de este polinomio son 0 y 3.

La **diferencia de cuadrados perfectos** se factoriza como la suma de dos monomios con signo contrario, es decir $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$.



Ejemplo 4

Encuentre las raíces de siguiente polinomio. $\frac{1}{4} - 9x^2 = 0$

Solución

La regla para factorizar es: $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$, por lo tanto:

$$\frac{1}{4} - 9x^2 = \left(\frac{1}{2} + 3b\right)\left(\frac{1}{2} - 3b\right) = 0 \quad \text{las raíces son } b = \pm \frac{1}{6}$$

Las raíces pueden ser reales o complejas, la forma de comprobar la cantidad de raíces reales es con los cambios de signo.

7.1.2 Raíces racionales

Para encontrar el número de raíces racionales de un polinomio se utiliza la prueba de Descartes que consiste en:

Expresando el polinomio en forma descendente y con un término independiente que no sea cero, se tiene:

Raíces positivas

La cantidad de raíces positivas es igual al número de cambios de signos del polinomio de negativo a positivo o ese número disminuido en pares.

Raíces negativas

La cantidad de raíces negativas es igual al número de cambios del polinomio de positivo a negativo, o ese número disminuido en pares.

Ejemplo 5

Realice la prueba de Descartes en el siguiente polinomio.

$$2x^5 - 7x^4 + 10x^3 - 16x^2 + 16x - 10 = 0$$

Solución

Primero se buscan las negativas, usando el signo en la incógnita:

$$2(-x^5) - 7(-x^4) + 10(-x^3) - 16(-x^2) + 16(-x) - 10 = 0$$

Realizamos la regla de los signos con la potencia de cada parte del polinomio.

$$-2x^5 - 7x^4 - 10x^3 - 16x^2 - 16x - 10 = 0$$

El polinomio presenta tres cambios de signo, lo que conduce a tener un número impar de raíces (3 ó 1) por lo tanto se puede presentar los siguientes casos:

Caso 1.- Si se tienen tres raíces negativas entonces las dos restantes son positivas.

Caso 2.- Si se tiene una raíz negativa las cuatro restantes son positivas.

7.2 Métodos de solución de ecuaciones

Existen diversos métodos para encontrar las raíces de una ecuación polinomial, comenzando por las raíces reales, se puede aplicar la división sintética o la fórmula general (si es de segundo grado), para las raíces irracionales se puede utilizar el método de Newton Raphson, y para raíces complejas nuevamente con la fórmula general se puede encontrar la solución y en general un software también puede encontrar la solución en un lapso de tiempo muy pequeño, independientemente de que tipo de raíz se trate así como el grado del polinomio.

7.2.1 DIVISIÓN SINTÉTICA

Una forma sencilla de encontrar las raíces de los polinomios es realizar la división sintética. Con la condición de que sólo se puede utilizar como divisor el monomio de la forma $x \pm c$.

Los pasos a seguir para realizar la división sintética son:

- 1.- Se acomoda el polinomio de mayor a menor exponente y al final el término constante, sólo se escriben los coeficientes, si falta alguna exponente, se coloca un cero.
- 2.- Se dibujan las “líneas de división” y fuera de estas en la parte derecha se escribe el divisor $x \pm c$.
- 3.- Se baja el primer coeficiente del polinomio fuera de la línea de división (en el tercer renglón).
- 4.- Multiplicamos este coeficiente por la constante “c”, para obtener un número del segundo renglón.
- 5.- Se realiza la suma de la columna para obtener el segundo coeficiente del tercer renglón.
- 6.- Esta operación se repite hasta encontrar el último número del tercer renglón (si es cero la división es exacta, si es diferente de cero se tiene como resultado el llamado residuo).

Para realizar la división primero se debe de explorar el polinomio para proponer el divisor para efectuar la operación de división.

Para el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, los posibles divisores monomiales son $x \pm c$; el valor de c se obtiene utilizando la relación de los divisores del término dominante entre los divisores del término constante:

$$a_0/a_n$$



Ejemplo 6

Encontrar las raíces del siguiente polinomio utilizando la división sintética.

$$x^3 - x^2 - 26x - 24$$

Solución

Como el término dominante es 1, vemos entonces que los divisores del término constante (24) son: $(\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24)$.

Comenzamos con -1, es decir $x^3 - x^2 - 26x - 24 \div x + 1$

1	-1	-26	-24		
	-1	2	24		-1
1	-2	-24	0		

Ahora se tiene el siguiente polinomio

$$x^3 - x^2 - 26x - 24 = (x^2 - 2x - 24)(x + 1)$$

El polinomio de segundo grado que resultó de la división, se factoriza y queda como:

$$x^3 - x^2 - 26x - 24 = (x - 6)(x + 4)(x + 1)$$

Las raíces del polinomio son:

$$x_1 = 6 \quad x_2 = -4 \quad x_3 = -1$$

7.2.2 RAÍCES COMPLEJAS

Las raíces complejas se presentan a menudo en los polinomios, éstas normalmente se presentan en pares conjugados. Una forma de encontrarlas es utilizando la fórmula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Recuerda que...

El discriminante de la fórmula general, son las variables que se encuentran dentro de la raíz.

$$D = b^2 - 4ac$$

Si el discriminante de la fórmula general es negativo, el polinomio tiene raíces complejas.

Ejemplo 7

Encuentre las raíces del siguiente polinomio.

$$2x^2 + 8x + 12 = 0$$

Solución

Primero obtenemos el discriminante.

$$D = 8^2 - 4(2)(12) \quad D = 64 - 96 \quad D = -32$$

Como el discriminante es negativo, las raíces que se obtienen son complejas:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{-32}}{2(2)} \quad x = -\frac{8}{4} \pm \sqrt{-32}$$

Recuerda que $i = \sqrt{-1}$

$$\text{Finalmente} \quad x = -2 \pm \sqrt{32} i$$

7.2.3 NEWTON RAPHSON

Una forma de encontrar las raíces numéricamente es mediante el método de Newton-Raphson, que es iterativo pero muy efectivo. La ecuación a utilizar es:

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$

En donde:

$P(x_{n-1})$ Polinomio

$P'(x_{n-1})$ Derivada del polinomio, la regla es: $P'(x^n) = nx^{n-1}$



Ejemplo 8

Encuentre las raíces del siguiente polinomio utilizando el método de Newton-Raphson, partiendo de la iteración igual a 3.

$$x^3 - 2x^2 - 1 = 0$$

Solución

Se deriva el polinomio teniendo $3x^2 - 4x$

La ecuación utilizando el método de Newton-Raphson queda como:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 2x_0^2 - 1}{3x_0^2 - 4x_0}$$

Primer cálculo iterativo.

$$x_1 = 3 - \frac{(3)^3 - 2(3)^2 - 1}{3(3)^2 - 4(3)}$$

$$x_1 = 3 - \frac{(27) - 2(9) - 1}{3(9) - 4(3)}$$

$$x_1 = 2.46666667$$

Se elabora una tabla para 5 iteraciones y tenemos que $x_0 = 3$

<i>Iteración</i>	x_n
1	2.466667
2	2.247342
3	2.206900
4	2.205571
5	2.205569

La raíz irracional de este polinomio es **2.20557**.



7.2.4 USO DE MAPLE® PARA ENCONTRAR RAÍCES DE UN POLINOMIO

Para encontrar las raíces de un polinomio también se puede recurrir a diversos softwares como Maple®, el primer paso es nombrar al polinomio, se colocan dos puntos y después el signo de igualdad, es decir:

nombre:=

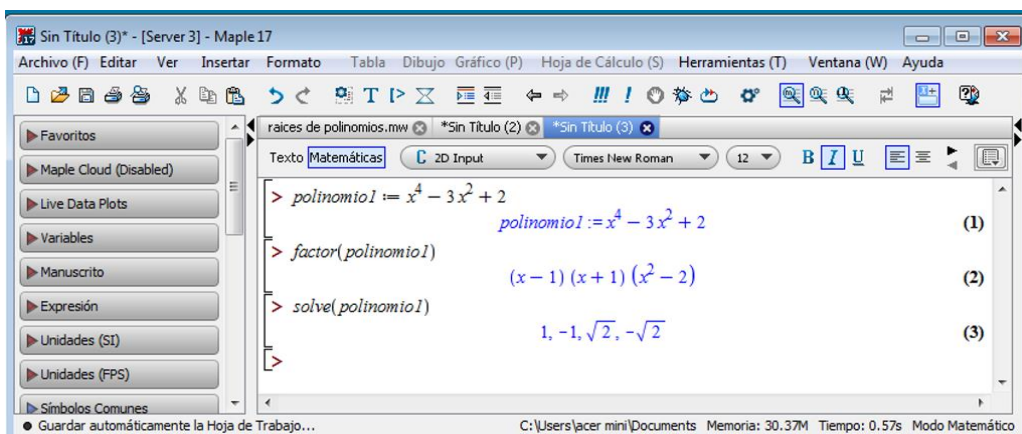
Ejemplo 9

Encuentre las raíces de $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Solución

Se inicia definiendo al polinomio por ejemplo *polinomio 1*, se puede establecer una factorización con el comando *factor* y finalmente se encuentran las raíces resolviendo el polinomio con el comando *solve*.

En la siguiente imagen se ve el resultado de obtener las raíces del polinomio usando Maple®



Se tiene que las raíces son:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = \sqrt{2}, \quad x_4 = -\sqrt{2}$$

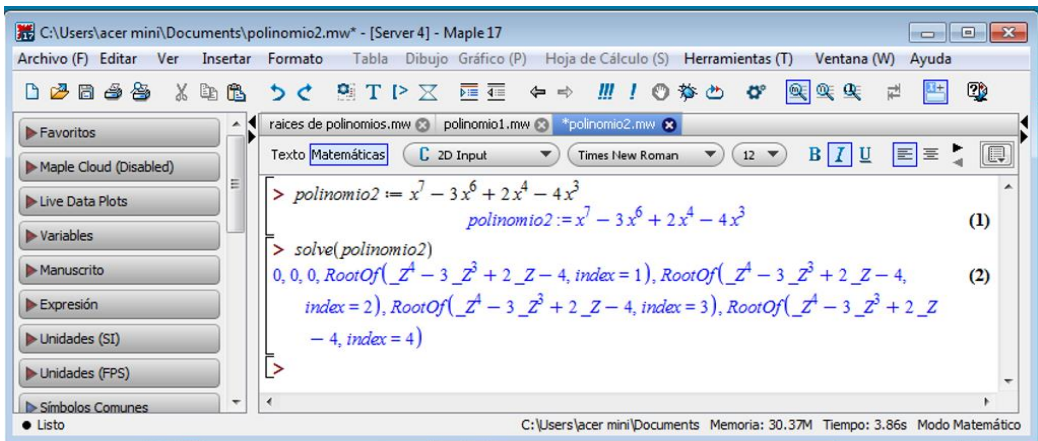
Esto resulta ser una herramienta poderosa para aquellos polinomios que no tienen raíces enteras o que estas son complejas. Cuando Maple encuentra con este comando sólo una o alguna del total de raíces, se debe recurrir a otro comando para lograr obtener todas las raíces.

Ejemplo 10

Encuentre las raíces de $x^7 - 3x^6 + 2x^4 - 4x^3 = 0$

Solución

Se observa que hay siete raíces, por lo que asignamos ahora el nombre de polinomio2 en Maple® y utilizamos el comando *solve* para que obtenga las raíces del polinomio, como se muestra en la siguiente imagen.

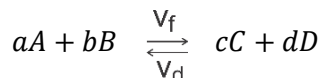


Maple® arroja como resultado sólo tres raíces que son cero y posteriormente aparece *RootOf*, que significa que las raíces que restan no tienen una solución exacta, por lo que se debe utilizar el comando *fsolve*, que nos dará una solución aproximada.

Finalmente se tienen tres raíces que son cero; una raíz con aproximación decimal y tres raíces que son complejas.

7.3 Aplicaciones de las raíces polinomiales

El uso de las raíces polinomiales en química lo podemos encontrar en equilibrios químicos de reacciones. En términos de velocidad, se puede decir que el equilibrio químico se puede expresar como:



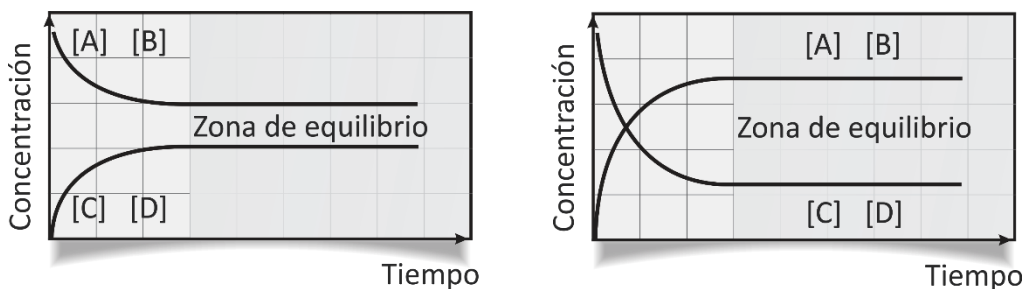
Dónde:

V_f Velocidad de formación.

V_d Velocidad de descomposición.

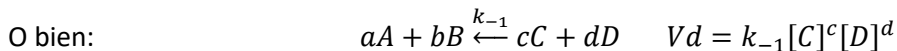
Se puede decir que cuando predomina la formación de productos en equilibrio se encuentra este desplazado hacia la derecha; es decir hay más cantidad de C y D, y en caso contrario cuando se desplace hacia la izquierda hay más cantidad de A y B (ver Figura 7.3).

Figura 7.3 Representación de una reacción en equilibrio cuando predominan los reactivos (en la izquierda) y cuando predominan los productos (en la derecha)



Es bueno mencionar que en reacciones sencillas de una sola etapa existe proporcionalidad entre la velocidad de reacción y la concentración de reactivos, para más de una etapa se utiliza la actividad química (Alemañ, 2012).

El equilibrio químico se presenta en una reacción reversible y se establece cuando la concentración de las especies participantes no cambia. Existe una relación entre la velocidad y los coeficientes estequiométricos que se puede establecer como:



Si estas velocidades son iguales se tiene: $k_1[A]^a[B]^b = k_{-1}[C]^c[D]^d$

Es decir:

$$\frac{k_1}{k_{-1}} = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$

Mejor conocida como la constante de equilibrio

$$K_{eq} = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$

Ejemplo 11

El valor de K_c es 19.9 para la reacción $Cl_2 + F_2 \rightleftharpoons 2ClF$, de cloro existen 0.5 mol, de Flúor 0.2 mol y de Fluoruro de cloro 7 mol, encuentre las cantidades al equilibrio de las especies.

Solución

Se establece la reacción y las moles de las especies como sigue:

	Cl_2	$+ F_2$	$\rightleftharpoons$	$2ClF$
Mol al inicio	0.5	0.2		0
Mol que reaccionan	x	x		$2x$
Mol al equilibrio	$0.5 - x$	$0.2 - x$		$2x$

Se relacionan estas cantidades, pensando que el volumen es 1 litro para que las concentraciones se puedan expresar en mol/L. Por lo que la constante de equilibrio puede expresarse como:

$$K_{eq} = \frac{(2x)^2}{(0.5 - x)(0.2 - x)}$$

Se sustituye el valor de la constante de equilibrio

$$19.9 = \frac{4x^2}{0.1 - 0.7x + x^2}$$

$$15.9x^2 - 13.93x + 1.99 = 0$$

El polinomio de segundo grado se resuelve con la ecuación general.

$$x = \frac{13.93 \pm \sqrt{(-13.93)^2 - 4(15.9)(1.99)}}{2(15.9)}$$

$$x = \frac{13.93 \pm \sqrt{67.4809}}{31.8}$$

$$x_1 = 0.696 \quad x_2 = 0.179$$

De las dos raíces obtenidas, la primera raíz conduce a un valor mayor que la concentración de los reactivos; proporcionando un valor de concentración negativo el cual resulta inconsistente. Por lo tanto, se utiliza la segunda raíz. La concentración al equilibrio de las especies es:

$$[Cl_2] = [F_2] = 0.179 \text{ mol/L}$$

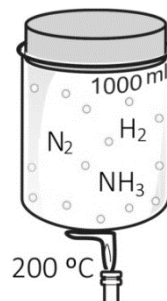
$$[ClF] = 2(0.179) = 0.359 \text{ mol/L}$$

.....



Ejemplo 12

El valor de K_c es 0.65 a 200 °C en un reactor para la reacción $N_2 + 3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$; de Nitrógeno e Hidrógeno existen 0.1 mol, y de Amoníaco 0.1 mol, encuentre las cantidades al equilibrio de las especies.



Solución

Se establece la reacción y las moles de las especies como sigue:

	N_2	$+ 3H_2$	$\rightleftharpoons$	$2NH_3$
Mol al inicio	0.1	0.1		0.1
Mol que reaccionan	x	$3x$		$2x$
Mol al equilibrio	$0.1 - x$	$0.1 - 3x$		$0.1 + 2x$

De la misma forma se supone un volumen de 1 litro para que las concentraciones se puedan expresar en mol/L. Por lo que la constante de equilibrio la expresamos como sigue:

$$0.65 = \frac{(0.1 + 2x)^2}{(0.1 - x)(0.1 - 3x)^3} \quad 0.65 = \frac{(0.1 + 2x)^2}{(0.1 - x)(0.1 - 3x)^3}$$

$$0.65(0.1 - x)(0.1 - 3x)^3 = (0.1 + 2x)^2$$

Se llega a un polinomio de cuarto grado:

$$17.55x^4 - 3.51x^3 - 3.766x^2 - 0.5235x - 0.009935 = 0$$

Se obtiene 4 raíces utilizando el software de Maple® hallando dos raíces imaginarias y dos reales, estas últimas son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.6233 & x_2 &= -0.0225 \\ x_3 &= -0.2 + 0.0105i & x_4 &= -0.2 - 0.0105i \end{aligned}$$

Por lo que primero se analizan las raíces reales y se toma el valor negativo, ya que con el positivo la concentración de los reactivos es negativa.

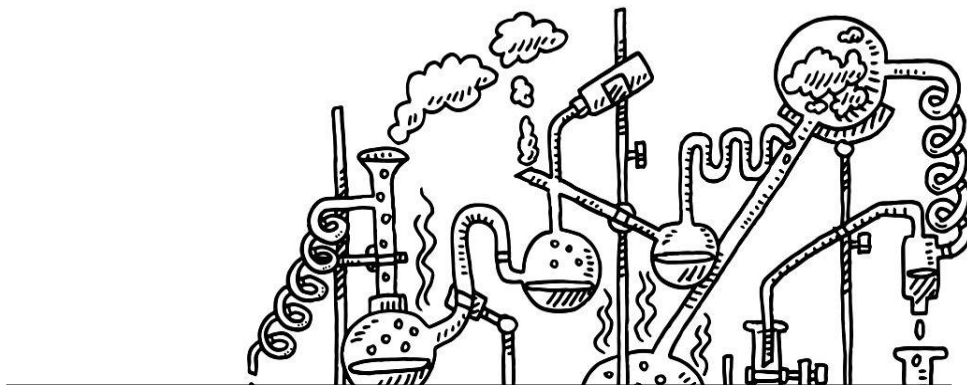
$$[N_2] = 0.1 - (-0.0255) = \mathbf{0.1255 \text{ mol/L}}$$

$$[H_2] = 0.1 - 3(-0.0255) = \mathbf{0.1765 \text{ mol/L}}$$

$$[NH_3] = 0.1 + 2(-0.0255) = \mathbf{0.049 \text{ mol/L}}$$

Por lo tanto, **el equilibrio se desplaza hacia la izquierda.**





Ejercicios de refuerzo

UNIDAD 7 TEORÍA DE ECUACIONES

I. Factorice los siguientes polinomios

1. $\frac{1}{7} - \frac{4x^2}{28}$

2. $a^{4n} - 255b^4$

3. $100x^{10} - 60a^4x^5y^6 + 9a^8y^{12}$

4. $7m^2 - 23m + 6$

5. $14w^2 - 33w + 10$

6. $24x^2 + 22x - 35$

7. $12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3 + 48m^5n^4$

II. Encuentre las raíces de los siguientes polinomios utilizando la factorización.

8. $x^2 + x - 12 = 0$

9. $x^2 + x - 12 = 0$

10. $a^2 + 3a + 2 = 0$

11. $y^2 + 3y - 10 = 0$

12. $9w^2 - 33w + 24 = 0$

13. $b^2 - b - 110 = 0$

14. $x^{12} - 2x^6 - 63 = 0$

III. Encuentre la cantidad de raíces racionales de los siguientes polinomios.

15. $x^4 + 10x^3 + 23x^2 - 34x - 120 = 0$

16. $x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 256 = 0$

17. $x^7 + 18x^6 - 135x^5 + 540x^4 + 1215x^3 + 1458x^2 + 729 = 0$

18. $x^4 - 8x^3 - 19x^2 + 122x + 240 = 0$

19. $x^4 + 12x^3 + 11x^2 - 132x + 108 = 0$

20. $x^4 - 18x^3 + 77x^2 + 120x - 900 = 0$

21. $x^4 - 4x^3 + \frac{17}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = 0$

IV. Obtenga las raíces reales de los siguientes polinomios, usando el método de Raphson.

22. $x^3 - 4x^2 + 9 = 0$

con $x_0 = 4$

23. $x^4 - 5x - 6 = 0$

con $x_0 = 3$

24. $x^3 - 7x - 36 = 0$

con $x_0 = 5$

25. $x^5 - 3x^2 - 20 = 0$

con $x_0 = 3$

26. $x^6 - 5x^3 - 10x - 4 = 0$

con $x_0 = 1$

27. $4x^3 + 2x - 5 = 0$

con $x_0 = 1$

28. $x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 6x + 10 = 0$

con $x_0 = 3$

V. Encuentre las raíces complejas de los siguientes polinomios.

29. $4x^2 + x + 8 = 0$

$$30. \quad 2x^2 + 2x + 9 = 0$$

$$31. \quad x^2 + x + 6 = 0$$

$$32. \quad x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$33. \quad \frac{1}{2}x^2 - x + 7 = 0$$

$$34. \quad 3x^2 + 4x + 10 = 0$$

$$35. \quad 3x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$43. \quad x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$44. \quad x^3 + 9x^2 + 14x - 24 = 0$$

$$45. \quad x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$46. \quad x^3 + 9x^2 - 108 = 0$$

$$47. \quad x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$$

$$48. \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$49. \quad x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 27x + 90 = 0$$

$$50. \quad x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{2} = 0$$

VI. Encuentre las raíces de los siguientes polinomios, utilizando la división sintética.

$$36. \quad x^3 + 5x^2 + 12x - 36 = 0$$

$$37. \quad x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$38. \quad x^4 + 7x^3 - 24x^2 - 112x + 128 = 0$$

$$39. \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$40. \quad x^3 - 9x^2 - x - 105 = 0$$

$$41. \quad x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

$$42. \quad x^3 + 5x^2 - 34x - 80 = 0$$

VII. Encuentre las raíces de los siguientes polinomios utilizando un software.

$$51. \quad 4x^4 + 16x^3 + 25x^2 + 21x + 9 = 0$$

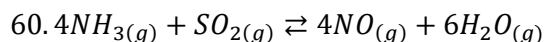
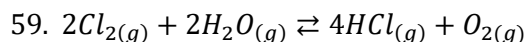
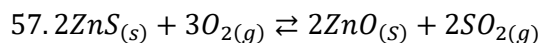
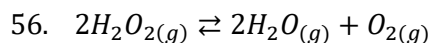
$$52. \quad 16x^5 - 16x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 1 = 0$$

$$53. \quad x^5 + \frac{27}{10}x^4 + \frac{7}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{40} = 0$$

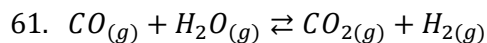
$$54. \quad x^5 - 8x^4 + 17x^3 - 10x^2 - 1 = 0$$

$$55. \quad x^7 - 8x^6 + \frac{61}{4}x^5 + \frac{67}{4}x^4 - \frac{239}{4}x^3 + \frac{37}{4}x^2 + \frac{87}{2}x - 18 = 0$$

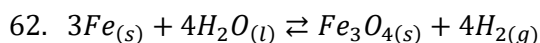
VIII. Exprese la constante de equilibrio de las siguientes reacciones:



IX. Encuentre de las siguientes reacciones el valor de las concentraciones de las especies:



Considere una constante de equilibrio de 1.845 y las concentraciones de los reactivos son 0.5 mol de monóxido de carbono y 0.5 mol de agua.

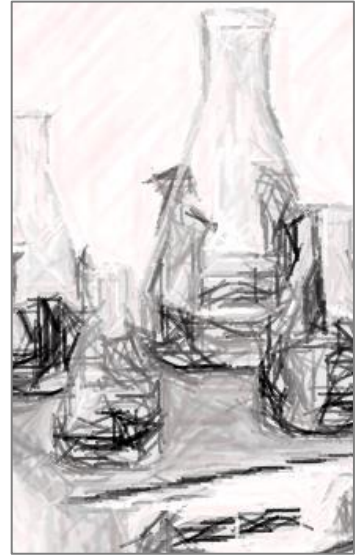


Se sabe que la constante de equilibrio es 4.6; existen 24 gramos de agua y que el elemento hierro está en exceso.

Capítulo ocho

Elementos de álgebra lineal

“La resolución de cualquier problema inicia ordenando y acomodando las variables”



En 1851 Sylvester introdujo el término de matriz debido a que esta operación la definió como una sucesión rectangular de términos de la que distintos sistemas de determinantes pueden engendrarse como del útero de una misma madre (Góngora, 2009). Esto debido a que era considerada como una regla para resolver sistema de ecuaciones llamada madre de las reglas.

El uso de las matrices se remonta a Babilonia entre los siglos II y III a. c. y en China entre 200 y 100 a. c. se planteaban problemas de cosecha de granos en áreas de cultivo.

8.1 Conceptos básicos del álgebra lineal

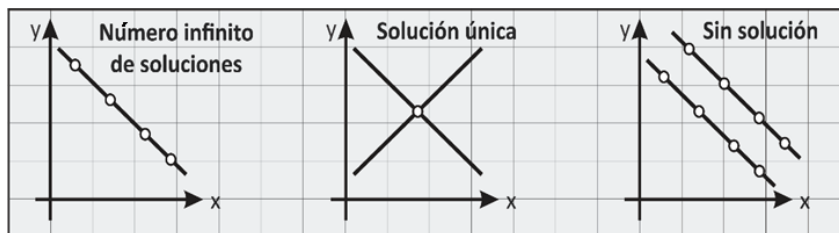


Históricamente el álgebra ha sido una herramienta para resolver sistemas de ecuaciones, y se considera importante debido a que prácticamente en todas las profesiones como administración, economía, ciencias sociales, ingeniería, física, biología y por supuesto en química, tienen un apartado en donde se enseña esta disciplina.

Los sistemas de ecuaciones son expresiones algebraicas que contienen dos o más ecuaciones. Estas ecuaciones tienen una igualdad en la que hay una o varias incógnitas y sólo se puede comprobar si es verdadera para determinados valores (Rendón *et al*, 1998).

El conjunto solución de dos o más ecuaciones es un punto en donde las ecuaciones representadas por líneas se cruzan; es decir este punto es común en ambas ecuaciones. Para un **sistema de ecuaciones lineales** pueden ocurrir sólo tres cosas: tener un número infinito de soluciones, tener una sola solución o no tener solución (ver Figura 8.1).

Figura 8.1 Conjunto solución de un sistema de ecuaciones





Recuerda que...

La cantidad de incógnitas define la cantidad de ecuaciones; es decir para encontrar el valor de dos incógnitas se necesitan dos ecuaciones.

Cuando se obtiene la solución de un sistema de ecuaciones lineales, ésta tiene dos significados; uno algebraico y otro geométrico. El significado **algebraico** corresponde al par de valores que satisfacen ambas ecuaciones y el **geométrico** es el punto común que ambas líneas comparten. Por ejemplo, en el sistema de ecuaciones:

$$\text{Ecuación ①} \quad 3x - y - 4 = 0$$

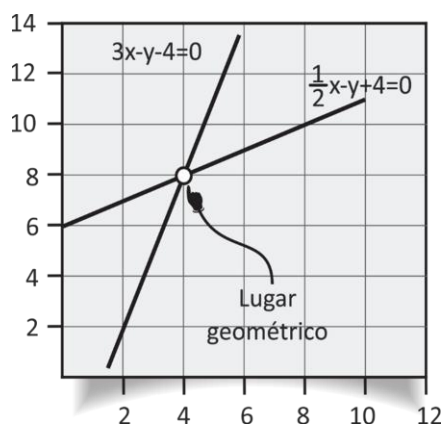
$$\text{Ecuación ②} \quad \frac{1}{2}x - y + 6 = 0$$

El significado algebraico que satisface a ambas ecuaciones es cuando $x = 4$ y $y = 8$, el significado geométrico que es el punto de cruce de las líneas, se puede ver en la Figura 8.2.

Para encontrar la solución de sistema de ecuaciones se pueden utilizar varios métodos analíticos, entre los que se encuentran:

- Reducción.
- Sustitución.
- Igualación.
- Determinantes.
- Matrices.

Figura 8.2 Punto geométrico de un sistema de ecuaciones



8.1.1 MÉTODO DE REDUCCIÓN

Este método se basa en reducir el número de incógnitas utilizando la suma o resta de éstas, para obtener una sola ecuación con una incógnita. Esto sólo se logra cuando el valor absoluto de una incógnita es el mismo, pero con signo contrario, para ello se requiere que se multiplique por el mínimo común de ambos coeficientes. Una vez encontrado el valor de la primera incógnita, este valor se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales para hallar la segunda incógnita.



Ejemplo 1

Halle la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, utilizando el método de reducción.

$$\textcircled{1} \quad x - y - 1 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 5x - 6y - 1 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad -3x - y + 20 = 0$$

Solución

Primero se multiplica por -2 la ecuación $\textcircled{1}$ y se suma con la ecuación $\textcircled{2}$ y $\textcircled{3}$, para obtener la ecuación $\textcircled{4}$.

$$\textcircled{1} \quad -2x + 2y + 2 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 5x - 6y - 1 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad -3x - y + 20 = 0$$

$$\textcircled{4} \quad -5y + 21 = 0$$

De la ecuación $\textcircled{4}$ se despeja a y , teniendo que $y = 21/5$

El valor de $y = 21/5$, se sustituye en la ecuación ①

$$x - (21/5) - 1 = 0$$

$$x = 26/5$$

El conjunto solución del sistema de ecuaciones es: $x = 26/5$ $y = 21/5$

Este método se opera de diferente modo, cuando se tienen 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Se realizan las reducciones con dos ecuaciones sucesivamente.



Ejemplo 2

Halle la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, utilizando el método de reducción.

$$\textcircled{1} \quad x + 3y - z = 8$$

$$\textcircled{2} \quad 2x - y + 2z = -2$$

$$\textcircled{3} \quad 3x - y + 2z = 11$$

Solución

Primero se multiplica por -2 la ecuación ① y se suma con la ecuación ②, para obtener la ecuación ④.

$$\textcircled{1} \quad -2x - 6y + 2z = -16$$

$$\textcircled{2} \quad 2x - y + 2z = -2$$

$$\textcircled{4} \quad -7y + 4z = -18$$

Ahora se reducen las ecuaciones ③ y ①, para obtener la ecuación ⑤. Por lo que se multiplica la ecuación ① por -3 y se suma con la ecuación ③.

$$\begin{array}{rcl}
 \textcircled{1} & -3x - 9y + 3z & = -24 \\
 \textcircled{3} & 3x - y + 2z & = 11 \\
 \hline
 \textcircled{5} & -10y + 5z & = -13
 \end{array}$$

Finalmente se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{array}{rcl}
 \textcircled{4} & -7y + 4z & = -18 \\
 \textcircled{5} & -10y + 5z & = -13
 \end{array}$$

Por lo que se multiplica por 5 la ecuación ④ y por -4 la ecuación ⑤ para sumarse y obtener la ecuación ⑥.

$$\begin{array}{rcl}
 \textcircled{4} & -35y + 20z & = -90 \\
 \textcircled{5} & 40y - 20z & = 52 \\
 \hline
 \textcircled{6} & 5y & = -38
 \end{array}$$

Despejando a y , se tiene $y = -38/5$

Ahora se sustituye el valor de y en la ecuación ④ ó ⑤ y se despeja a z .

$$\begin{array}{rcl}
 \textcircled{4} & -35\left(-\frac{38}{5}\right) + 20z & = -90 \\
 & \frac{266}{5} + z & = -18
 \end{array}$$

Despejando a z , se tiene $z = -89/5$

Finalmente de la ecuación ①, ② o ③ se sustituye el valor de y y z , para obtener el valor de x .

$$\textcircled{1} \quad x + 3\left(-\frac{38}{5}\right) - \left(-\frac{89}{5}\right) = 8$$

Despejando a x , se tiene: $x = 13$

La solución del sistema es $x = 13$, $y = -38/5$ y $z = -89/5$

8.1.2 MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Este método se fundamenta primordialmente en el álgebra ya que se despeja una incógnita de una ecuación y se sustituye en la otra ecuación, para tener una ecuación con una sola incógnita y el valor obtenido se sustituye en alguna de las ecuaciones originales para encontrar la otra ecuación.



Ejemplo 3

Encuentre la solución del siguiente sistema de ecuaciones, utilizando el método de sustitución.

$$\textcircled{1} \quad x - 2y + z = 0$$

$$\textcircled{2} \quad 2x - y - 3z = -9$$

$$\textcircled{3} \quad x + y - 2z = -3$$

Solución

De la ecuación ① se despeja a x y se sustituye en ② y ③, para obtener la ecuación ④ y ⑤.

$$\text{De ① se tiene: } x = 2y - z$$

Se sustituye en ② y ③

$$\text{② } 2(2y - z) - y - 3z = -9$$

$$\text{③ } (2y - z) + y - 2z = -3$$

Para obtener las ecuaciones ④ y ⑤

$$\text{④ } 3y - 5z = -9$$

$$\text{⑤ } 3y - 3z = -3$$

Ahora se despeja a la variable y de la ecuación ④ y se sustituye en la ecuación ⑤, para obtener la ecuación ⑥.

De ④ se tiene:

$$y = \frac{5z - 9}{3}$$

Se sustituye en ⑤

$$3\left(\frac{5z - 9}{3}\right) - 3z = -3 \qquad 5z - 9 - 3z = -3$$

$$2z = 6 \qquad \mathbf{z = 3}$$

Ahora para conocer el valor de la incógnita y , utilizamos la ecuación despejada de y

$$y = \frac{5z - 9}{3}$$

$$y = \frac{5(3) - 9}{3} \quad y = 2$$

Finalmente de la ecuación ① en donde se despejó a x , se tiene:

$$x = 2y - z$$

$$x = 2(2) - 3$$

$$x = 1$$

La solución del sistema es: $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$



8.1.3 MÉTODO DE IGUALACIÓN

Este método consiste en despejar una incógnita común en ambas ecuaciones e igualarlas para obtener una ecuación con una sola incógnita.



Ejemplo 4

Halle la solución del siguiente sistema de ecuaciones, utilizando el método de igualación.

$$\textcircled{1} \quad 2x - y + z = 6$$

$$\textcircled{2} \quad x + 3y - z = 2$$

$$\textcircled{3} \quad 3x - y + 2z = 11$$

Solución

Primero se despeja de todas las ecuaciones a la variable x .

$$\textcircled{1} \quad x = \frac{y - z + 6}{2}$$

$$\textcircled{2} \quad x = z - 3y + 2$$

$$\textcircled{3} \quad x = \frac{y - 2z + 11}{3}$$

Ahora igualamos la ecuación $\textcircled{1}$ con la $\textcircled{2}$ y la $\textcircled{2}$ con la $\textcircled{3}$, para obtener la ecuación $\textcircled{4}$ y $\textcircled{5}$.

$$\textcircled{4} \quad \frac{y - z + 6}{2} = z - 3y + 2$$

$$\textcircled{5} \quad z - 3y + 2 = \frac{y - 2z + 11}{3}$$

Realizando álgebra a las ecuaciones $\textcircled{4}$ y $\textcircled{5}$ se tiene:

$$\textcircled{4} \quad 7y - 3z = -2$$

$$\textcircled{5} \quad 10y - 5z = -5$$

Ahora se despeja de ambas ecuaciones la incógnita y .

$$\textcircled{4} \quad y = \frac{3z - 2}{7}$$

$$\textcircled{5} \quad y = \frac{5z - 5}{10}$$

Estas ecuaciones se igualan para tener una sola incógnita.

$$\frac{3z - 2}{7} = \frac{5z - 5}{10}$$

$$30z - 20 = 35z - 35 \quad \quad \quad \mathbf{z = 3}$$

Teniendo la incógnita z se obtiene y , con la ecuación $\textcircled{4}$ ó $\textcircled{5}$.

$$y = \frac{5(3) - 5}{10} \qquad y = 1$$

Finalmente con la ecuación ①, ② ó ③ se obtiene la incógnita x .

$$x = z - 3y + 2$$

$$x = 3 - 3(1) + 2 \qquad x = 2$$

La solución del sistema es:

$$x = 2, \quad y = 1 \quad z = 3$$



8.1.4 DETERMINANTE

Un determinante es un arreglo que sirve para resolver sistemas de ecuaciones y se define como:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$ax + by = r$$

$$cx + dy = s$$

Los determinantes son:

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} D_x = \begin{bmatrix} r & b \\ s & d \end{bmatrix} D_y = \begin{bmatrix} a & r \\ c & s \end{bmatrix}$$

El valor de las incógnitas del sistema de ecuaciones utilizando determinantes es el siguiente:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

En forma desarrollada quedaría como:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} r & b \\ s & d \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{rd - bs}{ad - bc} \quad y = \frac{\begin{bmatrix} a & r \\ c & s \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{as - rc}{ad - bc}$$

Para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,

$$ax + by + cz = A$$

$$dx + ey + fz = B$$

$$gx + hy + iz = C$$

El valor de las incógnitas del sistema de ecuaciones utilizando determinantes es el siguiente:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}$$

El determinante del sistema queda como:

$$D = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

Los determinantes de x , y y z .

$$D_x = \begin{bmatrix} A & b & c \\ B & e & f \\ C & h & i \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} B & f \\ C & i \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} B & e \\ C & h \end{bmatrix}$$

$$D_y = \begin{bmatrix} a & A & c \\ d & B & f \\ g & C & i \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} B & f \\ C & i \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} d & B \\ g & C \end{bmatrix}$$

$$D_z = \begin{bmatrix} a & b & A \\ d & e & B \\ g & h & C \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} e & B \\ h & C \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} d & B \\ g & C \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$



Ejemplo 5

Según la Organización Mundial de la Salud (OMS), una persona en su ingesta diaria necesita 1 mg de Tiamina, 20 mg de Niacina, y 25 mg de Vitamina C. En el mercado existen 3 marcas de *comprimidos* que tienen las siguientes cantidades de las vitaminas mencionadas.

<i>Vitamina</i>	<i>Natura</i>	<i>Natura plus</i>	<i>vc</i>
Tiamina (B1)	0.2	0.2	0.4
Niacina (B3)	3.0	9.0	5.0
Ácido ascórbico (C)	6.0	8.0	5.0

¿Cuántas pastillas debe ingerir una persona?

Solución

Se establece como x , y y z a la cantidad de pastillas por lo que las ecuaciones quedan como:

$$0.2x + 0.2y + 0.4z = 1$$

$$3x + 9y + 5z = 20$$

$$6x + 8y + 5z = 25$$

Se calcula el determinante del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.4 \\ 3 & 9 & 5 \\ 6 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 0.2 \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} - 0.2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 0.4 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D = 0.2(45 - 40) - 0.2(15 - 30) + 0.4(24 - 54)$$

$$D = 1 + 3 - 12$$

$$\mathbf{D = -8}$$

El determinante x

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 0.2 & 0.4 \\ 20 & 9 & 5 \\ 25 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} - 0.2 \begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 25 & 5 \end{vmatrix} + 0.4 \begin{vmatrix} 20 & 9 \\ 25 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 5 + 5 - 26 \quad \mathbf{D_x = -16}$$

El determinante y

$$D_y = \begin{vmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 3 & 20 & 5 \\ 6 & 25 & 5 \end{vmatrix} = 0.2 \begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 25 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 0.4 \begin{vmatrix} 3 & 20 \\ 6 & 25 \end{vmatrix}$$

$$D_y = -5 + 15 - 18 \quad \mathbf{D_y = -8}$$

El determinante z

$$D_z = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.2 & 1 \\ 3 & 9 & 20 \\ 6 & 8 & 25 \end{vmatrix} = 0.2 \begin{vmatrix} 9 & 20 \\ 8 & 25 \end{vmatrix} - 0.2 \begin{vmatrix} 3 & 20 \\ 6 & 25 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D_z = 13 + 9 - 30 \quad \mathbf{D_z = -8}$$

Por lo tanto, las incógnitas son:

$$x = \frac{-16}{-8} \mathbf{x = 2}$$

$$y = \frac{-8}{-8} \mathbf{y = 1}$$

$$z = \frac{-8}{-8} \mathbf{z = 1}$$

La solución es 2 comprimidos de natura, 1 de natura plus y 1 de nutri-vit.



8.2 Clasificación y propiedades de las matrices

Cuando aumenta el número de ecuaciones en un sistema, también aumenta la complejidad, para encontrar la solución una matriz puede resolver sistemas de ecuaciones complejas.



Definición

Una matriz es una tabla de números con la cual se pueden hacer operaciones algebraicas de suma y producto. Las matrices describen sistemas de ecuaciones lineales, el traslado de éstas se realiza sólo con los coeficientes de las incógnitas.

La forma general de una matriz es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cada elemento de la matriz (a_{ij}) tiene dos subíndices, el primer subíndice indica la fila (i) y el segundo subíndice indica la columna (j). Por ejemplo, en la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

El valor numérico -3 está situado en la primera fila y segunda columna es decir es el elemento a_{12} . Una **matriz cuadrada** es aquella que tiene **el mismo número de filas y de columnas**. Por ejemplo una matriz de 4×4 es:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \mathbf{a_{44}} \end{bmatrix}$$

Los elementos que están ubicados en el mismo número de fila que de columna ($\mathbf{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}}$) forman una **diagonal principal**, de la matriz cuadrada. Esta diagonal es importante al resolver una matriz.

8.2.1 TIPOS DE MATRICES



Definición

Matriz triangular superior se cumple cuando $a_{ij} = 0$, además que $i > j$

En una matriz se puede tener ciertas características que hacen importante revisarlas para operarla más adelante.

Una **Matriz triangular superior**, se define como una matriz que tiene valores nulos por debajo de la diagonal principal. Esta definición se puede ver en la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_{44}} \end{bmatrix}$$

Una **Matriz triangular inferior**, se define como una matriz que tiene valores nulos por arriba de la diagonal principal.



Definición

Matriz triangular superior se cumple cuando $a_{ij} = 0$, además que $i < j$

Esta definición se puede ver en la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \mathbf{a_{44}} \end{bmatrix}$$

Al igual que la matriz triangular superior también pueden ser ceros algunos valores fuera del triángulo. Una **Matriz diagonal**, se define como una matriz cuadrada que tiene valores nulos por arriba y por abajo de la diagonal principal.



Definición

Matriz diagonal se cumple cuando $a_{ij} = 0$, además que $i = j$

Esta definición se puede ver en la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_{44}} \end{bmatrix}$$

Si los valores de la diagonal principal tienen valores de 1, se le llama **matriz unitaria o idéntica**.



Definición

Matriz identidad se cumple cuando $a_{ij} = 1$, cuando $i = j$, y $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$,

Esta definición se puede ver en la siguiente matriz.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz unitaria cumple con la propiedad algebraica de:

$$AI = A$$

Si todos los elementos de una matriz cuadrada son cero, se representa con la letra mayúscula $\mathbb{O}$, esta matriz es diferente al número real cero.

$$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

8.3 Operación de matrices

La operación de matrices se utiliza en química para seleccionar procesos, balancear reacciones, identificar equipos vitales en producción, entre otros.

8.3.1 SUMA Y RESTA DE MATRICES

La suma y resta de matrices sólo se pueden realizar si éstas son de las mismas dimensiones (mismo número de filas y columnas), el resultado es otra matriz con las mismas dimensiones, por ejemplo la suma de una matriz de 3×2 .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix}$$



Ejemplo 6

Realice las siguientes sumas de matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 + 7 & 2 + 3 \\ -4 + 9 & 3 + 0 \\ 3 + 1 & 5 + 2 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

8.3.2 PRODUCTO ESCALAR

La multiplicación de un escalar se obtiene multiplicando cada elemento de una matriz por el escalar λ .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} \end{bmatrix}$$



Ejemplo 7

Realice la multiplicación escalar $\lambda = 3$ por la matriz A.

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad 3A = \begin{bmatrix} (3)6 & (3)9 \\ (3)-3 & (3)4 \\ (3)3 & (3)1 \end{bmatrix} \quad 3A = \begin{bmatrix} 18 & 27 \\ -9 & 12 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

8.3.3 PRODUCTO DE MATRICES

El producto de dos matrices se obtiene realizando el producto escalar del i -ésimo elemento del renglón por la j -ésima columna de las matrices A y B respectivamente. Es decir, el primer valor de la matriz se obtiene sumando los productos los elementos de la fila de la matriz A por los elementos de la columna de la matriz B, es decir:

$$c_{ij} = \sum_k^n a_{ik} b_{kj}$$



Ejemplo 8

Realice el producto de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Para encontrar el primer elemento de la matriz resultante (C_{11}), se obtiene al sumar los productos de los elementos de la primera fila de la matriz A, con los elementos de la primera columna de la matriz B, es decir;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = (2)(1) + (3)(6) + (-1)(2) = 18$$

Para los demás elementos es:

$$C_{12} = (2)(3) + (3)(1) + (-1)(1) = 8$$

$$C_{21} = (1)(1) + (4)(6) + (-2)(2) = 21$$

$$C_{22} = (1)(3) + (4)(1) + (-2)(1) = 5$$

La matriz resultante queda como:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ 21 & 5 \end{bmatrix}$$

8.3.4 MATRIZ INVERSA

La matriz inversa es aquella que al realiza el producto con una matriz da origen a la matriz identidad, es decir:

$$AA^{-1} = I$$

Si la matriz inversa existe se le llama **matriz no singular** y si no existe se llama **matriz singular**.

Para obtener la matriz inversa se debe de cumplir lo siguiente:

- La matriz debe de ser cuadrada.
- Los renglones y las columnas deben de ser linealmente independiente, es decir que ninguna fila o columna sea una combinación de las filas o columnas restantes.



Ejemplo9

Determine la matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} A^{-1} = B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Se debe de cumplir que $AB = I$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se realiza el producto, igualando a la matriz identidad; con estas igualdades se pueden plantear sistemas de ecuaciones que al resolverlos proporcionan los elementos de la matriz inversa.

Sistema de ecuaciones

$$C_{11} = (6)(b_{11}) + (9)(b_{21}) + (2)(b_{31}) = 1$$

$$6x + 9y + 2z = 1$$

$$C_{12} = (-3)(b_{11}) + (4)(b_{21}) + (1)(b_{31}) = 0$$

$$-3x + 4y + z = 0$$

$$C_{13} = (3)(b_{11}) + (1)(b_{21}) + (5)(b_{31}) = 0$$

$$3x + y + 5z = 0$$

$$C_{21} = (6)(b_{12}) + (9)(b_{22}) + (2)(b_{32}) = 0$$

$$6x + 9y + 2z = 0$$

$$C_{22} = (-3)(b_{12}) + (4)(b_{22}) + (1)(b_{32}) = 1$$

$$-3x + 4y + z = 1$$

$$C_{23} = (3)(b_{12}) + (1)(b_{22}) + (5)(b_{32}) = 0$$

$$3x + y + 5z = 0$$

Sistema de ecuaciones

$$C_{31} = (6)(b_{13}) + (9)(b_{23}) + (2)(b_{33}) = 0$$

$$6x + 9y + 2z = 0$$

$$C_{32} = (-3)(b_{13}) + (4)(b_{23}) + (1)(b_{33}) = 0$$

$$-3x + 4y + z = 0$$

$$C_{33} = (3)(b_{13}) + (1)(b_{23}) + (5)(b_{33}) = 1$$

$$3x + y + 5z = 1$$

La solución del primer sistema de ecuaciones es:

$$6x + 9y + 2z = 1$$

$$-3x + 4y + z = 0$$

$$3x + y + 5z = 0$$

Se utiliza el método de igualación, despejamos a x de las tres ecuaciones:

$$x = \frac{1 - 9y - 2z}{6}$$

$$x = \frac{4y + z}{3}$$

$$x = \frac{-y - 5z}{3}$$

Se iguala.

$$\frac{1 - 9y - 2z}{6} = \frac{4y + z}{3}$$

$$\frac{1 - 9y - 2z}{6} = \frac{-y - 5z}{3}$$

$$3 - 27y - 6z = 24y + 6z$$

$$3 - 27y - 6z = -6y - 30z$$

$$3 = 51y + 12z$$

$$3 = 21y - 24z$$

Se despeja a la variable z en ambas y se igualan.

$$z = \frac{3 - 51y}{12}$$

$$z = \frac{21y - 3}{24}$$

$$\frac{3 - 51y}{12} = \frac{21y - 3}{24}$$

$$y = 3/41$$

Se sustituye en z.

$$z = \frac{3 - 51(3/41)}{12}$$

$$z = -5/82$$

Finalmente.

$$x = \frac{-y - 5z}{3}$$

$$x = \frac{19}{246}$$

De manera similar se resuelve los otros dos sistemas de ecuaciones, para obtener la matriz inversa.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{46} & \frac{3}{41} & -\frac{5}{82} \\ -\frac{43}{246} & \frac{4}{41} & \frac{7}{82} \\ \frac{1}{246} & -\frac{2}{41} & \frac{17}{82} \end{bmatrix}$$

8.4 Sistemas de ecuaciones lineales

Recordemos que una ecuación lineal tiene la siguiente forma:

$$a_1x_1 + \cdots + a_mx_n = b$$

En donde a y b son números reales (a , son los coeficientes, b el término independiente) y x representa a las incógnitas. Un sistema de ecuaciones lineales de n ecuaciones, con las mismas incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se puede escribir de forma matricial de la siguiente manera $Ax = b$, es decir:

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\ A & x & = & b \end{matrix}$$

Dónde:

- A** Es la matriz de coeficientes o matriz del sistema;
- x** Es el vector de incógnitas y
- b** Es el vector de términos independientes.

Cuando se añade a la matriz de coeficiente la columna de términos independientes se obtiene la **matriz aumentada** (A^*).

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Los sistemas de ecuaciones se clasifican por la cantidad de soluciones que pueden tener, es decir si tienen una solución o más el **sistema es compatible** y si no tiene solución se dice que es **incompatible**.

Si todos los términos independientes del sistema de ecuaciones son iguales a cero el sistema es compatible es decir tiene al menos una solución.

8.5 Métodos de solución de sistemas de ecuaciones

Antes de resolver un sistema de ecuaciones utilizando las matrices, se revisarán las propiedades para operar las matrices.

Las operaciones de las matrices incluyen también el poder hacer cambio de renglón y realizar operaciones elementales en los renglones. Se escribe una flecha y encima de ésta se indicarán las operaciones que se están efectuando para que el lector no pierda la continuidad de las operaciones. Las operaciones básicas en renglones las vamos a representar como sigue:

Tabla 8.1

Operaciones básicas

$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambio de renglón i con el j.
cR_i	Nuevo renglón i
$aR_i + R_j$	Operación del renglón i con el j que proporciona un nuevo renglón

Para resolver las ecuaciones lineales usando matrices, se utiliza el método de Reducción de Gauss, que se basa en encontrar la **Matriz Triangular Superior** y después resolver de forma sencilla el sistema de ecuaciones o el método de Gauss-Jordan, que consiste en encontrar la **Matriz Identidad**.

8.5.1 MÉTODO DE REDUCCIÓN GAUSSIANA

Este método se centra en encontrar la matriz triangular superior, siguiendo los siguientes pasos:

1. Se escribe la matriz ampliada (A^*) del sistema de ecuaciones.
2. Se realizan las operaciones básicas para encontrar la matriz triangular superior.
3. Se resuelve el sistema de ecuaciones que es equivalente al original, pero mucho más sencillo.



Ejemplo 10

Utilice la reducción Gaussiana para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x - 2y - z = -2$$

$$2x + y + 3z = 7$$

$$x - 4y + 4z = -3$$

Solución

1. Se escribe la matriz aumentada y se establecen los renglones.

$$\begin{array}{l} R1 \\ R2 \\ R3 \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

1. Se realizan operaciones básicas.

Se cambia de renglón, ya que tenemos así el primer valor de 1, que se usará como “pivote” (renglón que se usará para operar a los siguientes renglones).

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R3} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Se hacen cero los valores por debajo del pivote.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -2R1+R2 \\ -3R1+R3 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 9 & -5 & 13 \\ 0 & 10 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

Se multiplica por 1/9 el segundo renglón para pivotear con éste.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 9 & -5 & 13 \\ 0 & 10 & -13 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/9R2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5/9 & 13/9 \\ 0 & 10 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$

Ahora se hace cero por abajo del pivote.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5/9 & 13/9 \\ 0 & 10 & -13 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-10R2+R3} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5/9 & 13/9 \\ 0 & 0 & -67/9 & -67/9 \end{bmatrix}$$

Se multiplica por $-9/67$ el tercer renglón para hacerlo 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & 25/9 \\ 0 & 1 & -5/9 & 13/9 \\ 0 & 0 & -67/9 & -67/9 \end{bmatrix} \xrightarrow{-9/67 R_3} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5/9 & 13/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz equivale a:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5/9 & 13/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x - 4y + 4z = -3$$

$$y - \frac{5}{9}z = \frac{13}{9}$$

$$z = 1$$

Lo que es muy sencillo de resolver algebraicamente.

$$x = 1, \quad y = 2 \quad z = 1$$



8.5.2 MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Este método tiene el mismo principio de Reducción Gaussiana, con la diferencia que se sigue realizando las operaciones básicas para llegar a la matriz identidad, los pasos son:

1. Se escribe la matriz ampliada (A^*) del sistema de ecuaciones.
2. Se realizan las operaciones básicas para encontrar la matriz identidad.



Ejemplo 11

Utilice el método de Gauss-Jordan, para resolver el sistema de ecuaciones del ejemplo 7.

$$3x - 2y - z = -2$$

$$2x + y + 3z = 7$$

$$x - 4y + 4z = -3$$

Solución

1. Se escribe la matriz aumentada. Y se establecen los renglones.

$$\begin{array}{l} R1 \\ R2 \\ R3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 3 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -4 & 4 & -3 \end{array} \right]$$

2. Se realizan operaciones básicas.

Este ejercicio ya está con la matriz triangular superior desarrollada.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5/9 & 13/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Se hacen cero los valores por arriba del pivote ubicado en la segunda columna.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5/9 & 13/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{4R2+R1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 16/9 & 25/9 \\ 0 & 1 & -5/9 & 13/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Se hacen cero los valores por arriba del pivote ubicado en la tercera columna.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -5/9 & 13/9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{5/9R3+R2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 16/9 & 25/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 16/9 & 25/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-16/9R3+R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el resultado es: $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

Si se tiene un sistema de ecuaciones, que no es cuadrada, es decir que tenga una incógnita más que el número de ecuaciones, se resuelve utilizando el método de Gauss-Jordan y posteriormente se resuelve un sistema de ecuaciones que da como resultado la operación de la matriz.

Ejemplo 12

Resuelva el sistema de ecuaciones utilizando matrices.

$$3x - 2y + 3z = 5$$

$$2x + 4y - z = 2$$

Solución

1. Se escribe la matriz aumentada y se establecen los renglones.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Se realizan operaciones básicas.

Se multiplica por $1/3$ el primer renglón para pivotar con éste.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/3R1} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1 & 5/3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1 & 5/3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 16/3 & -3 & -4/3 \end{bmatrix}$$

Se multiplica por $3/16$ el segundo renglón para pivotar con éste.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 16/3 & -3 & -4/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{3/16} \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 1 & -9/16 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 1 & -9/16 & -1/4 \end{bmatrix} \xrightarrow{2/3R2+R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/8 & 3/2 \\ 0 & 1 & -9/16 & -1/4 \end{bmatrix}$$

La matriz ya no se puede reducir más, lo que obtenemos es un nuevo sistema:

$$x + \frac{5}{8}z = \frac{3}{2}$$

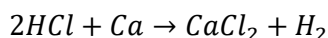
$$y - \frac{9}{16}z = -\frac{1}{4}$$

Estas ecuaciones dependen de z . Por lo que existe más de una solución. Se fija el valor de $x = 1$ y se determinan los otros valores: $z = 4/5$ y $y = 1/5$.



8.6 Aplicación de las matrices

La escritura química de una reacción se efectúa colocando primero los reactivos y después los productos, separados por una flecha que se lee como “reacciona para formar”, por ejemplo:



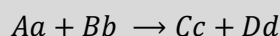
La lectura de esta reacción es: dos moléculas de ácido clorhídrico con una de calcio reaccionan para formar una molécula de cloruro de calcio y otra de hidrógeno. Vemos que existe como elementos H, Cl y Ca presentes en algunas de las 4 moléculas que son el HCl, Ca, $CaCl_2$ y H_2 .

En esta reacción sencilla el número 2, que antecede a la molécula del ácido clorhídrico es un valor que debemos de encontrar para establecer el balanceo de la reacción, para que la misma cantidad de elementos presentes en los reactivos éste también en los productos. En algunas reacciones estos valores, llamados como coeficientes estequiométricos no son a primera vista fáciles de encontrar y se debe de establecer un método para hallarlos. El caso sencillo es donde existe la misma cantidad de elementos y de moléculas y el que requiere más atención es la reacción química en donde se tiene un mayor número de moléculas que de elementos.



Recuerda que...

Una ecuación química es la manera que se representan las reacciones, de manera que los reactivos se escriben en la izquierda, los productos a la derecha y entre éstos se halla una flecha que se lee como “reacciona para formar...”. Siempre a cada compuesto, átomo o molécula antecede un número que se llama factor estequiométrico y para separar los reactivos o productos se utiliza el signo de “+”.



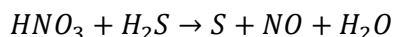


Ejemplo 13

Balancee la siguiente reacción $HNO_3 + H_2S \rightarrow S + NO + H_2O$, utilizando matrices.

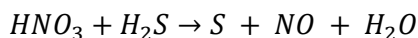
Solución

Se analiza la reacción.



Cuenta con cuatro elementos: H (Hidrógeno); N (Nitrógeno); S (Azufre) y O (Oxígeno). Y cinco moléculas que son: HNO_3 (Ácido Nítrico), H_2S (Ácido sulfhídrico), S (Azufre), NO (Monóxido de Nitrógeno) y agua. Por lo que existe una **molécula más con respecto a la cantidad de elementos**.

Se inicia utilizando la letra m para designar el número de molécula a cada una.



M1 M2 M3 M4 M5

Ahora se fija cualquier molécula como base de cálculo para establecer la matriz. Para ello se debe de tener en cuenta el signo que se va a emplear, es decir:

Tipo de molécula	Signo
Reactivo	–
Producto	+

Esto se debe a que como los reactivos se están consumiendo el signo que se utiliza es negativo y como los productos están generándose el signo a utilizar es positivo.

Ahora bien, se designa al ácido nítrico como molécula base para constituir la matriz el aumento de columna son los coeficientes de esta molécula.

Se fija HNO_3 por lo tanto $M1=-1$, por lo que la matriz queda:

$$\begin{array}{c} M2 \quad M3 \quad M4 \quad M5 \quad M1 \\ \begin{array}{l} H \\ N \\ S \\ O \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ahora esta matriz se resuelve, teniendo en cuenta que en la matriz aumentada tendremos los coeficientes estequiométricos que resolverán la ecuación química.

$$\begin{array}{l} R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Se hacen cambio de renglones para facilitar la operación de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R3 \leftrightarrow R2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

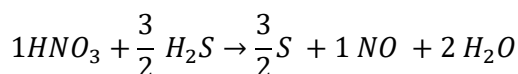
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2 R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R3+R4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

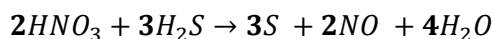
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R4+R2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R4+R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se ve que el primer término es negativo y esto indica que deber ser un reactivo y que el resto son positivos por lo que deben de ser productos, estos coeficientes estequiométricos se colocan en la reacción química.



Ahora se establece la reacción con números enteros, por lo que se multiplica por 2.



Reactivos	→	Productos
2+6=8	H	8
2	N	2
6	O	2+4=6
3	S	3

Se verifica y efectivamente se tiene en ambos lados de la reacción la misma cantidad de cada elemento, la reacción está balanceada.



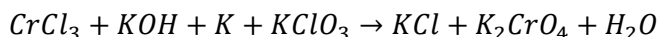


Ejemplo 14

Balancee la reacción $CrCl_3 + KOH + K + KClO_3 \rightarrow KCl + K_2CrO_4 + H_2O$, utilizando matrices.

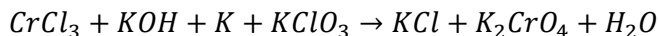
Solución

Se analiza la reacción.



Los elementos presentes en la reacción son 5: Cr (Cromo); Cl (Cloro); K (Potasio); H (Hidrógeno) y O (Oxígeno). Y siete moléculas que son: $CrCl_3$ (Cloruro de Cromo III), KOH (Hidróxido de Potasio), K (Potasio), $KClO_3$ (Clorato de potasio), K_2CrO_4 (Cromato de potasio) y agua. Por lo que se tiene dos moléculas más con respecto a la cantidad de elementos.

Nuevamente se utiliza la letra M para designar el número de molécula a cada una.



M1 M2 M3 M4 M5 M6 M7

Se designa al Cloruro de Cromo III, como molécula base de cálculo, y resolvemos una serie de ecuaciones lineales que darán respuesta al balance.

Se fija $CrCl_3$ por lo tanto $M1=-1$, por lo que la matriz queda:

$$\begin{array}{c} M2 \ M3 \ M4 \ M5 \ M6 \ M7 \ M1 \\ \begin{array}{l} H \\ K \\ O \\ Cl \\ Cr \end{array} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Se resuelve la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-1R1+R2 \\ -R1+R3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/3R3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-R3+R2 \\ -R3+R4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2/3 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2/3 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R4+R2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4/3 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2R5+R2 \\ -4/3R5+R3 \\ 4/3R5+R4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 13/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones lineales que quedan son:

$$M2 - 2M6 = 0$$

$$M3 - 2M6 = -5$$

$$M4 - 1/3M6 = 4/3$$

$$M5 + \frac{1}{3M6} = 13/3$$

$$M6 = 1$$

Se realizan las operaciones partiendo que $M6=1$, obteniendo:

$$M1 = -1$$

$$M2 = -2$$

$$M3 = -3$$

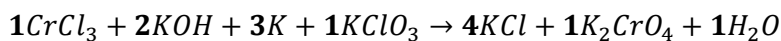
$$M4 = 1$$

$$M5 = 4$$

$$M6 = 1$$

Se ve que el valor que arroja la matriz para $M7$ es cero, esto se puede interpretar como ya especificado en el balance y no es necesario colocar algún factor estequiométrico.

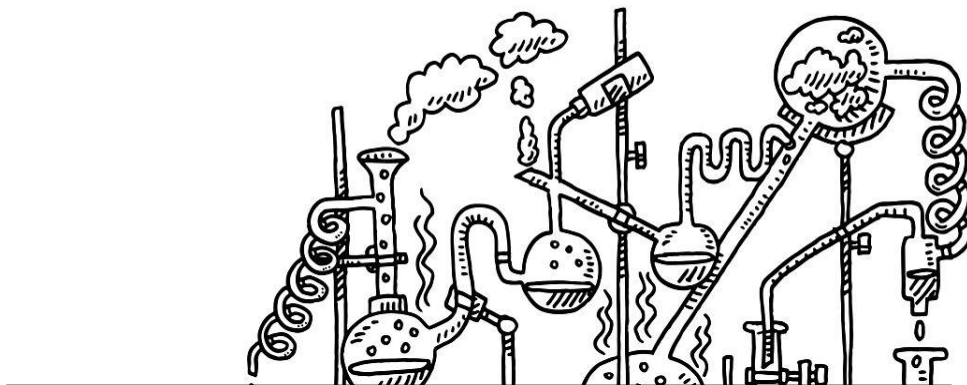
Se verifican los valores encontrados y tenemos lo siguiente:



Reactivos	→	Productos
1	Cr	1
3+1=4	Cl	4
2+3+1=6	K	4+2=6
2	H	2
2+3=5	O	4+1=5

Se ve que la reacción está balanceada.





Ejercicios de refuerzo

UNIDAD 8 ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

I. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando el método indicado.

Reducción

1. $\begin{cases} 2x + 8y - 12 = 0 \\ 4x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 9x + 2y + 29 = 0 \\ 5x + 4y + 18 = 0 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 4x - 3y - 6 = 0 \\ x + 5y + 12 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 2y + 4 = 0 \\ 6x - 5y - 12 = 0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 5x + 4y - 8 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x + 5y - 3 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x - 7y + 13 = 0 \\ 7x + 2y - 29 = 0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x + 6y - 6 = 0 \\ 4x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 6x - 6y + 8 = 0 \\ 15x - 5y + 5 = 0 \end{cases}$

10.
$$\begin{cases} 2x + 5y - 20 = 0 \\ 3x + 6y + 9 = 0 \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} 3x + 3y - 9 = 0 \\ -x - 4y - 6 = 0 \end{cases}$$

29.
$$\begin{cases} -x - 4y - 16 = 0 \\ x + 3y + 15 = 0 \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} -3x + 2y + 3 = 0 \\ 5x - 7y + 17 = 0 \end{cases}$$

19.
$$\begin{cases} 7x - 6y + 3 = 0 \\ 12x + 8y + 9 = 0 \end{cases}$$

30.
$$\begin{cases} 22x + 15y - 13 = 0 \\ 26x - 24y - 18 = 0 \end{cases}$$

12.
$$\begin{cases} 5x + 6y + 9 = 0 \\ 6x + 5y - 9 = 0 \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} 2x + 6y - 24 = 0 \\ -3x + 6y + 36 = 0 \end{cases}$$

31.
$$\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{6}{5}y - \frac{4}{5}z = \frac{13}{5} \\ \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + z = -\frac{2}{3} \\ 3x + \frac{5}{4}y + \frac{9}{4}z = 5 \end{cases}$$

13.
$$\begin{cases} 2x - 6y - 6z = -4 \\ x + 12y + 12z = 13 \\ 4x + 5y - z = 13 \end{cases}$$

21.
$$\begin{cases} -3x + 2y + 12 = 0 \\ 9x + 7y + 14 = 0 \end{cases}$$

14.
$$\begin{cases} x + 5y - 3z = -18 \\ x - y - 6z = -15 \\ 3x + 4y + z = 5 \end{cases}$$

22.
$$\begin{cases} 18x + 8y + 9 = 0 \\ 60x + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

32.
$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y - \frac{1}{15}z = 1 \\ 3x + \frac{1}{2}y - z = \frac{5}{2} \\ -x - \frac{3}{4}y + \frac{3}{2}z = -1 \end{cases}$$

15.
$$\begin{cases} 6x - 6y + 3z = 6 \\ 15x - 5y - 5z = 20 \\ 3x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

23.
$$\begin{cases} 14x - 7y - 21 = 0 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

24.
$$\begin{cases} -x - y - 3 = 0 \\ x - 4y - 12 = 0 \end{cases}$$

16.
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y + 2z = \frac{9}{8} \\ -2x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{4}z = -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = \frac{7}{4} \end{cases}$$

25.
$$\begin{cases} 6x - 16y + 6 = 0 \\ 15x - 5y + 5 = 0 \end{cases}$$

26.
$$\begin{cases} 2x - 5y - 22 = 0 \\ 3x + 6y + 19 = 0 \end{cases}$$

Sustitución

33.
$$\begin{cases} 10x + 9y - 18 = 0 \\ -x - 9y + 20 = 0 \end{cases}$$

34.
$$\begin{cases} -3x - 3y - 15 = 0 \\ 6x - 18y - 4 = 0 \end{cases}$$

Igualación

27.
$$\begin{cases} -11x + 21y + 3 = 0 \\ 5x - 4y + 12 = 0 \end{cases}$$

35.
$$\begin{cases} -7x - 11y + 25 = 0 \\ -x + 18y + 19 = 0 \end{cases}$$

17.
$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x + 5y + 18 = 0 \end{cases}$$

28.
$$\begin{cases} 24x + 26y + 29 = 0 \\ 16x + 25y - 14 = 0 \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} -32x - 24y - 15 = 0 \\ 18x - 18y - 36 = 0 \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} -17x + 27y + 5 = 0 \\ x + 18y + 38 = 0 \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} x + 2y - 18 = 0 \\ -x - 4y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} -x - 6y - 15 = 0 \\ -6x - 9y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} -x - 12y + 5 = 0 \\ -x + 18y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} x + 9y - 18z = 38 \\ -x - 6y - 20z = 6 \\ -4x + 10y + z = 11 \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} 2x + 7y - \frac{1}{2}z = \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{3}x + 4y + \frac{1}{2}z = \frac{17}{6} \\ 4x + y + \frac{3}{2}z = \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - \frac{17}{6}z = 1 \\ -2x - \frac{5}{4}y + \frac{16}{6}z = \frac{5}{36} \\ \frac{1}{3}x + \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}z = 2 \end{cases}$$

II. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando cualquier método.

$$45. \begin{cases} x + y + z - w = 6 \\ 3x - 2y + 5z - 3w = 12 \\ 2x + 5y - 3z + 2w = 4 \\ x - y - 3z - w = -6 \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} 3x - y - z - w = 3 \\ x - y + 4z - w = 4 \\ -x + 2y - 2z + 3w = 1 \\ x - 3y - 4z - 2w = -7 \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} -x + y + z + w = 2 \\ 2x - 2y + 4z - 2w = -16 \\ -3x + 2y - 4z + 2w = 17 \\ -x - y - z + 2w = 6 \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} 3x - y + 2z - w = 7 \\ -2x + 2y - 3z - w = -7 \\ x + y - 2z + 2w = -2 \\ x - 2y - 3z + 6w = 3 \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} -x + y - z + w = 1 \\ 2x + y + z - 3w = 3 \\ 2x + 2y - 2z - 2w = 10 \\ -x - 3y - z - w = -11 \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} 2x - 4y - 5z - w = 12 \\ -x - 2y + 3z + w = -2 \\ -x + 2y + 2z + w = -5 \\ x + 4y - 2z - 2w = 2 \end{cases}$$

$$51. \begin{cases} x + 2y + 4z + 2w = -17 \\ 5x - 4y + 4z + 2w = -7 \\ -6x + 7y + 8z + w = -39 \\ x + 9y - 2z - 8w = 14 \end{cases}$$

$$52. \begin{cases} -x - \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z - w = -\frac{7}{6} \\ 3x + \frac{6}{4}y - 2z - \frac{3}{2}w = -1 \\ \frac{1}{3}x + y + \frac{4}{3}z - 2w = -\frac{8}{3} \\ x - \frac{2}{3}y - 4z + w = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$59. \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$60. \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$61. \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$62. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

III. Calcular los determinantes dada la matriz.

$$53. \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$54. \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$55. \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$56. \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$57. \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$$

$$58. \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 15 & -6 \end{bmatrix}$$

$$63. \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$64. \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$65. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$66. \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$67. \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$68. \begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$69. \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$70. \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$71. \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -4 & -\frac{4}{3} & -3 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$72. \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 4 \\ -\frac{4}{3} & 5 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$73. \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{2} \\ 4 & -\frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{7} & -\frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$$

IV. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando determinantes.

$$74. \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 7 \\ 4x + 3y - 2z = -8 \end{cases}$$

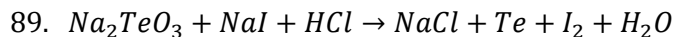
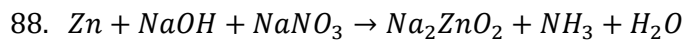
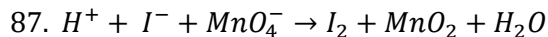
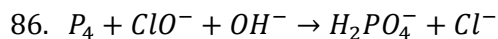
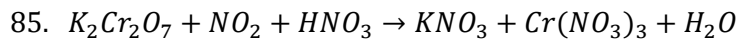
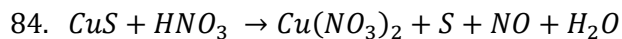
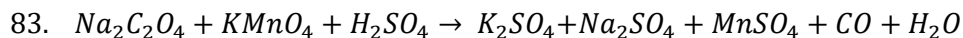
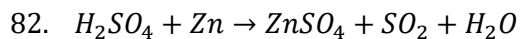
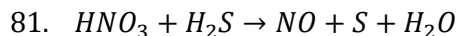
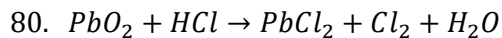
$$75. \begin{cases} x + 3y - z = 8 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ 5x + 3y - z = 12 \end{cases}$$

$$76. \begin{cases} 3x + 4y - z = 4 \\ x + 2y + 3z = -2 \\ x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$77. \begin{cases} x + 3y - z = -5 \\ 5x - 3y - 2z = 2 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$78. \begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - y - z = -4 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$$

$$79. \begin{cases} 3x + 4y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ x + 5y - 2z = -9 \end{cases}$$

V. Balancee las siguientes reacciones químicas utilizando matrices.

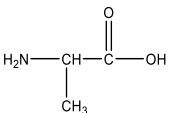
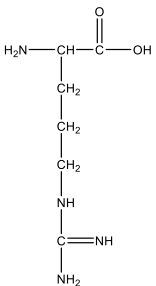
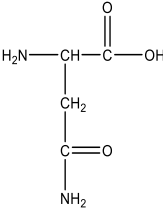
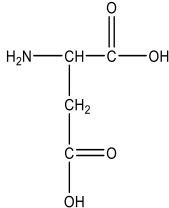
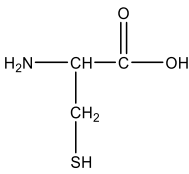
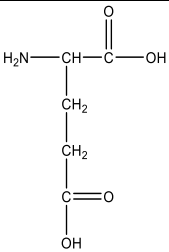
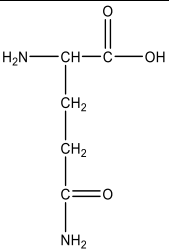
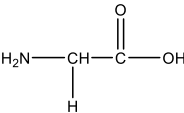
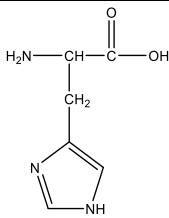
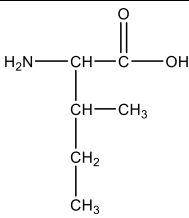
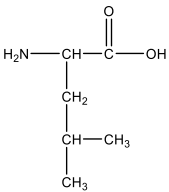
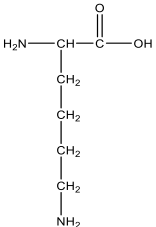
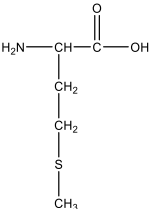
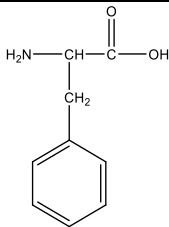
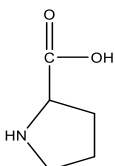
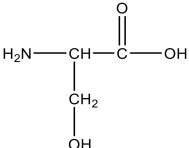
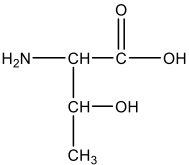
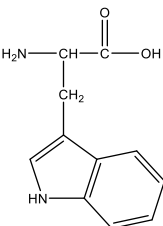
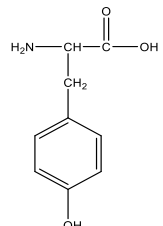
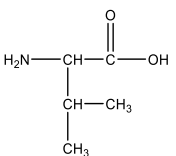
ANEXO A1

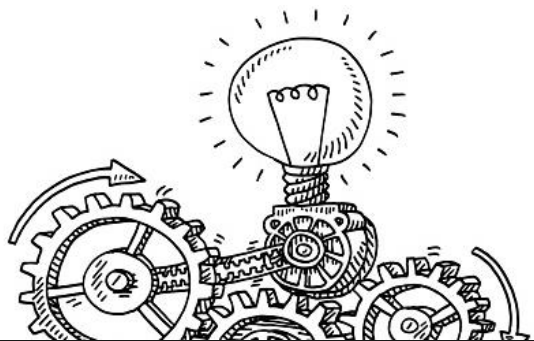
Lista de los elementos con sus símbolos y masas atómicas

Elemento	Símbolo	Número atómico	Masa atómica	Elemento	Símbolo	Número atómico	Masa atómica
Actinio	Ac	89	(277)	Lutecio	Lu	71	175.0
Aluminio	Al	13	26.98	Magnesio	Mg	12	24.31
Americio	Am	95	(243)	Manganes	Mn	25	54.94
Antimonio	Sb	51	121.8	Mendelevi	Md	101	(256)
Argón	Ar	18	39.95	Mercurio	Hg	80	200.6
Arsénico	As	33	74.92	Molibdeno	Mo	42	95.94
Ástato	At	85	(210)	Neodimio	Nd	60	144.2
Azufre	S	16	32.07	Neón	Ne	10	20.18
Bario	Ba	56	137.3	Neptunio	Np	93	(237)
Berilio	Be	4	9.012	Niobio	Nb	41	92.91
Berkelio	Bk	97	(247)	Níquel	Ni	28	58.69
Bismuto	Bi	83	209.0	Nitrógeno	N	7	14.01
Boro	B	5	10.81	Nobelio	No	102	(253)
Bromo	Br	35	79.90	Oro	Au	79	197.0
Cadmio	Cd	48	112.4	Osmio	Os	76	190.2
Calcio	Ca	20	40.08	Oxígeno	O	8	16.00
Californio	Cf	98	(249)	Paladio	Pd	46	106.4
Carbono	C	6	12.01	Plata	Ag	47	107.9
Cerio	Ce	58	140.1	Platino	Pt	78	195.1
Cesio	Cs	55	132.9	Plomo	Pb	82	207.2
Cloro	Cl	17	35.45	Plutonio	Pu	94	(242)
Cobalto	Co	27	58.93	Polonio	Po	84	(210)
Cobre	Cu	29	63.55	Potasio	K	19	39.10
Cromo	Cr	24	52.00	Praseodimi	Pr	59	140.9
Curio	Cm	96	(247)	Prometio	Pm	61	(147)
Disproσιο	Dy	66	162.5	Protactinio	Pa	91	(231)
Einsteinio	Es	99	(245)	Radio	Ra	88	(226)
Erbio	Er	68	167.3	Radón	Rn	86	(222)
Escandio	Sc	21	44.96	Renio	Re	75	186.2
Estaño	Sn	50	118.7	Rodio	Rh	45	102.9
Estroncio	Sr	38	87.62	Rubidio	Rb	37	85.47
Europio	Eu	63	152.0	Rutenio	Ru	44	101.1
Fermio	Fm	100	(253)	Samario	Sm	62	150.4
Flúor	F	9	19.0	Selenio	Se	34	78.96
Fósforo	P	15	30.97	Silicio	Si	14	28.09
Francio	Fr	87	(223)	Sodio	Na	11	22.99
Gadolinio	Gd	64	157.3	Talio	Tl	81	204.4
Galio	Ga	31	69.72	Tantalio	Ta	73	180.9
Germanio	Ge	32	72.59	Tecnecio	Tc	43	(99)
Hafnio	Hf	72	178.5	Telurio	Te	52	127.6
Helio	He	2	4.003	Terbio	Tb	65	158.9
Hidrogeno	H	1	1.008	Titanio	Ti	22	47.88
Hierro	Fe	26	55.85	Torio	Th	90	232.0
Holmio	Ho	67	164.9	Tulio	Tm	69	168.9
Indio	In	49	114.8	Tungsteno	W	74	183.9
Iridio	Ir	77	192.2	Uranio	U	92	238.0
Iterbio	Yb	70	173.0	Vanadio	V	23	50.94
Itrio	Y	39	88.91	Xenón	Xe	54	131.3
Kriptón	Kr	36	83.80	Yodo	I	53	126.9
Lantano	La	57	138.9	Zinc	Zn	30	65.39
Lawrencio	Lr	103	(257)	Zirconio	Zr	40	91.22
Litio	Li	3	6.491				

ANEXO A2

Lista de los aminoácidos, clasificados por el grupo R

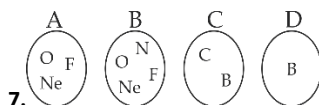
Alanina	Arginina	Asparagina	Ác. Aspártico	Cisteína
				
Ác. Glutámico	Glutamina	Glicina	Histidina	Isoleucina
				
Leucina	Lisina	Metionina	Fenilalanina	Prolina
				
Serina	Treonina	Triptófano	Tirosina	Valina
				



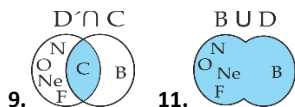
Respuesta a los problemas de número impar

Capítulo 1 Conjuntos y números reales

1. A: {HF, HCl, HBr, HI, HAt, H₂S} 3. B: {Li, Na, K, Rb, Cs, Fr} 5. a) {Fenilalanina, Triptofano, Tirosina}
b) B: {Glutamida, Asperagina} c) C: {Histidina, Prolina}



13.



Secuencias									(BnF)U (AnE)
W	R	V	D	N	R	R	G	L	•
W	T	K	L	T	S	D	Y	L	
Y	D	R	A	D	A	G	W	L	
Y	K	K	M	E	A	V	K	L	
F	R	N	V	D	G	S	G	L	•
Y	K	L	V	K	A	K	W	L	
Y	F	Q	D	P	A	L	L	L	
Y	Q	Y	L	Y	A	Q	K	S	•
L	R	D	F	W	G	N	P	L	
Y	R	R	L	Y	N	G	L	K	•
Y	A	F	L	N	A	T	D	L	
F	T	G	G	I	G	N	K	L	
M	V	G	L	A	A	D	W	L	
F	D	P	L	L	A	V	A	D	

15. Asociativa 17. Distributiva 19. Inverso 21. Elemento neutro 23. Inverso
25. Irracional 27. Irracional 29. Racional 31. Irracional 33. Racional 35. Entero
37. Imaginario 39. $\frac{37}{15}$ 41. $\frac{7}{18}$ 43. $-\frac{55}{9}$ 45. $\frac{51}{2}$ 47. $\frac{7}{3}$ 49. $\frac{923}{108}$ 51. $\frac{32}{15}$ 53. $-\frac{16}{189}$
55. $-\frac{2881}{12012}$ 57. $\frac{49}{80}$ 59. $-\frac{4784}{609}$ 61. $-\frac{807969}{221130}$ 63. 9 65. 2^7 67. 3^4 69. $\frac{2}{3}$ 71. $\frac{9}{2}$
73. 32 75. $\left(\frac{2}{3}\right)^{17}$ 77. $\frac{1}{3^{\frac{17}{6}}}$ 79. $\frac{123}{999}$ 81. $\frac{389}{99}$ 83. $\frac{5625}{10000}$ 85. $\frac{254}{99}$ 87. $\frac{27}{99}$
89. a) $1.23 \text{ A}^\circ\text{m}$ b) 12.3 nm 91. a) 99 123 000 L b) 99 123 ML
93. a) $0.567 \mu\text{poise}$ b) $0.000\,056\,7 \text{ centipoise}$

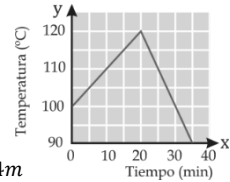
Capítulo 2 Funciones

1. $[0, +\infty)$ 3. $(-\infty, 3]$ 5. $\mathbb{R}$ 7. $[4, +\infty)$ 9. $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ 11. a) 1000 b) 1006 c) 994 d) 1029

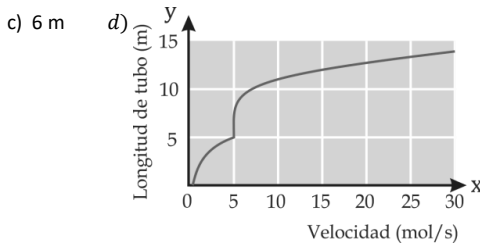
13. a) 0 b) $\frac{2}{3}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{9}{80}$ 15. V 17. F 19. $\frac{10-4x-2h}{h+2}$ 21. $\frac{4+2x+h}{(h+2)(x+2)(x+h+2)}$

23. a) $\sqrt{2}$ b) 5 c) 6 25. a) $\frac{3}{2}$ b) 9 c) $\sqrt{10}$ 27. 2 29. 3 31. -1.5, 3, 5 33. $f\left(\frac{3}{2}\right) > f(6)$

35. a) $f(x) = \begin{cases} x+100 & \text{para } 0 \leq x \leq 20 \\ -2x+160 & 20 < x \leq 35 \end{cases}$ b) 105 °C, 116 °C c)

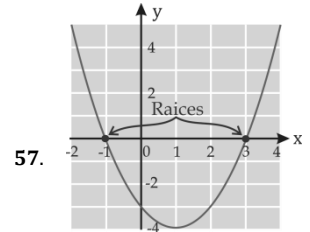


37. a) $f(x) = \begin{cases} 5\ln x - 3.05 & \text{para } 0 \leq x \leq 5 \\ 2.5\ln x + 5.5 & \text{para } 5 < x \leq 30 \end{cases}$ b) 2.44 m, 12.27 m 13.54 m



39. a) $P = 0.067x + 0.0308$ b) 7.46 ppm 41. $5.1 \frac{mg}{L}$

43. (2, -1) 45. (-7, -4) 47. (-3, 0)
49. $\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{5}\right)$ 51. $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ 53. (1, 0) 55. (4, 0)

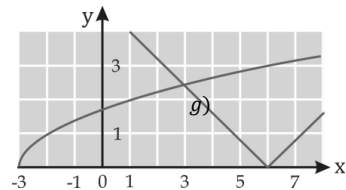


59. $(x+5)(x-8) = 0$ 61. $(x-5)(x-12) = 0$ 63. $(9x+8)(x+2) = 0$ 65. $(x+1)(x-5) = 0$

67. $(x+13)(x+9) = 0$ 69. $(x+2)(x-2) = 0$ 71. $(x+5)(x-13) = 0$

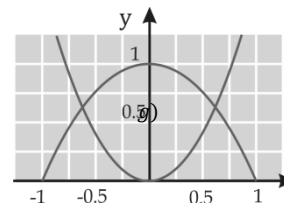
73. a) $\sqrt{x+3} + |x+6|$ b) $\sqrt{x+3} - |x+6|$ c) $(x+6)\sqrt{x+3}$

d) $\frac{\sqrt{x+3}}{|x+6|}$ e) Dominio $f(x)$ es $[-3, +\infty)$ de $g(x)$ es $\mathbb{R}$



75. a) $2x^2 + \sqrt{1-x^2}$ b) $2x^2 - \sqrt{1-x^2}$ c) $2x^2\sqrt{1-x^2}$

d) $\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ e) Dominio $f(x)$ es $\mathbb{R}$



Capítulo 3 Función potencial

1. $\sqrt{x^3}$ 3. $\frac{1}{x^6}$ 5. $\sqrt{p^7}$ 7. $\sqrt{8} x^{3/2}$ 9. $3x^2$ 11. Función potencia; cte = $-\frac{1}{2}$, $a = 4$

13. Función constante 15. Función potencia; cte = k , $a = 2$ 17. Función potencia; cte = $\frac{1}{2k}$, $a = 5$ 19. Función potencia; cte = $\frac{1}{2g}$, $a = 2$ 21. No es monomial

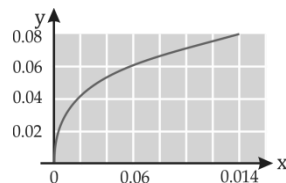
23. Función monomial, grado 2 25. Función monomial grado 1 27. Función monomial grado 1

29. Función monomial grado - 2 31. $V = PT \cdot n$ 33. $\bar{v} = \frac{3R}{\mathcal{M}} \sqrt{T}$ 35. $s = K \sqrt{\frac{\mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_1}}$

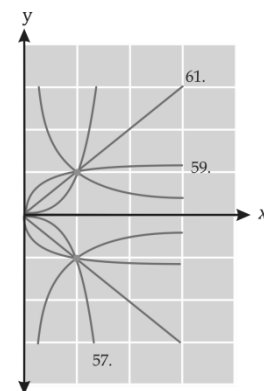
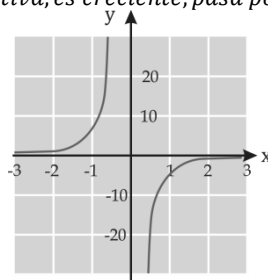
37. $w = -PV$ 39. $E_n = h\gamma$ 41. $\lambda = \frac{h}{mv}$ 43. $V = K[A]^a[B]^b$ 45. $d = \frac{n\lambda}{2\sin\theta}$ 47. $C = KD$

49. $v = \frac{c}{\lambda}$ 51. $D = \sqrt{\frac{\rho_B}{\rho_A}}$ 53. K es positivo, primer cuadrante,

potencia positiva, es creciente, pasa por (0,0)



55. K es negativo, cuarto cuadrante
exponente negativo, es decreciente



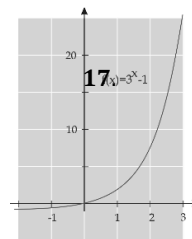
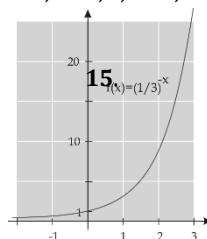
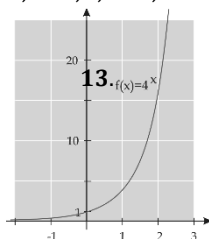
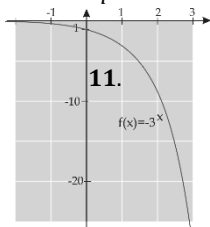
63. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 65. CH_4 67. $Q = -3.58kJ$

69. $K = 10^{9.67}$

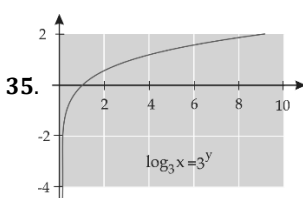
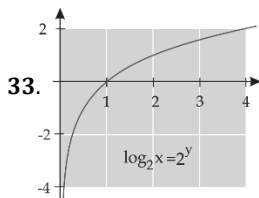
Capítulo 4 Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Exponencial, valor inicial 1 y base $3/2$ 3. Exponencial, valor inicial 1 y base e

5. Función potencia 7. 343, 2.64, 1, 0.37, 0.02 9. 0.25, 1.41, 2, 5.65, 8



19. -3 21. $f(x) = 3^{x/4}$ 23. 429.13 años 25. 32 768 \$ 27. 0.027 g 29. 2.08 billones
31. 563.9 g



37. $\log_2 16 = 4$ 39. $\log_{1/4} \frac{1}{64} = 3$

41. $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ 43. $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$

45. $\log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ 47. $\log_{81} \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$

49. $\log_e 7.3891 = 2$ 51. $2^3 = 8$ 53. $49^{1/2} = 7$ 55. $5^3 = 125$ 57. $4^{-2} = \frac{1}{16}$ 59. $10^{-2} = \frac{1}{100}$

61. $10^{-3} = \frac{1}{1000}$ 63. $\log 29 - \log 34$ 65. $\ln 65 + \frac{1}{3} \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 4$ 67. $2 \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 32$

69. $2 \log(4-x) - 2 \log 3$ 71. $3 \ln[x(x+3)] - \ln 6$ 73. $\frac{3}{2} \log x - \frac{1}{2} \log(x+2)$

75. $5 \ln x - 4 \ln(x-4)$ 77. $E = -1.7 \text{ volt}; \text{no espontánea}$ 79. $1.24 \text{ volt}; \text{espontánea}$

81. $0.34 \text{ volt}; \text{espontánea}$ 83. a) $K = 8.31 \times 10^{-11}$ b) $K = 2.01 \times 10^{-7}$ 85. a) $K = 22.37$
b) $K = 1.09$ 87. $\text{pH} = 11.4$ 89. 5.9 UFC/g

Capítulo 5 Funciones periódicas

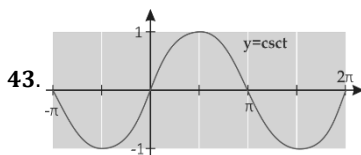
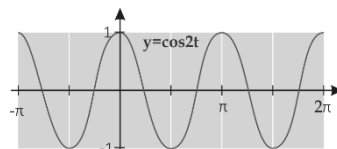
1. $\frac{5}{4}\pi$ 3. $\frac{61}{18}\pi$ 5. $\frac{1}{90}\pi$ 7. $\frac{26}{9}\pi$ 9. $\frac{13}{72}\pi$ 11. 1620° 13. 225° 15. -36°

17. -165° 19. -40° 21. 0.006 23. ≈ 1.0 25. -0.006 27. 1.083 29. 0.287 31. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

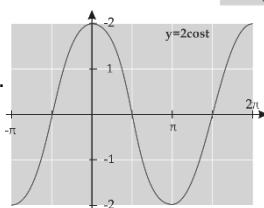
33. 0 35. $\frac{2}{\sqrt{2}}$ 37. $\tan^2 t = \sec^2 - 1$ ($\sec + 1$)($\sec - 1$)

39. $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{1}{\sec^2 t} = \frac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t}$

41.



45.



47. 119 latidos /min

Capítulo 6 Números complejos

1. $-\frac{3}{2} + 3i$ 3. $27 + \frac{23}{2}i$ 5. $-\frac{1}{15} + \frac{9}{5}i$ 7. $-\frac{166}{241} + \frac{20}{241}i$ 9. $\frac{7568}{4745} + \frac{2564}{4745}i$

$$\begin{aligned}
& 11. -\frac{647}{305} + \frac{2359}{305}i \quad 13. (\sqrt{74}, 1.69\pi) \quad 15. (\sqrt{32}, 0.65\pi) \quad 17. \left(\frac{4}{3}, 0\right) \quad 19. (0.77, 2.37) \\
& 21. \left(-\frac{3}{2}, 2.598\right) \quad 23. \sqrt{34}(\cos 120.96^\circ + i \sin 120.96^\circ) \quad 25. \sqrt{\frac{13}{9}}(\cos 303.69^\circ + i \sin 303.69^\circ) \\
& 27. 5(\cos 233.13^\circ + i \sin 233.13^\circ) \quad 29. 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \quad 31. 5(\cos 216.86^\circ + i \sin 216.89^\circ) \\
& 33. \sqrt{\frac{133}{36}}(\cos 84.7^\circ + i \sin 84.7^\circ) \quad 35. -2.86 + 4.09i \quad 37. 2.45 - 1.72i \quad 39. 1.28 + 0.34i \\
& 41. -4 \quad 43. \sqrt{2} \quad 45. 2.58 - 2.58i \quad 47. \frac{7.08}{\sqrt{2}}(\cos 19.93^\circ + i \sin 19.93^\circ) \\
& 49. \sqrt[3]{3}\left(\frac{\cos 60^\circ}{3} + i \frac{\sin 60^\circ}{3}\right) \quad 51. \sqrt{0.998}\left(\frac{\cos 211.9^\circ}{2} + i \frac{\sin 211.9^\circ}{2}\right)
\end{aligned}$$

Capítulo 7 Teoría de ecuaciones

$$\begin{aligned}
& 1. \frac{1}{7}(1 - x^2) \quad 3. (3a^4y^6 - 10x^5)^2 \quad 5. (14w - 5)(w - 2) \quad 7. 12m^2n(1 + 2mn - 3m^2n^2 + 4m^3n^3) \\
& 9. (x + 4)(x - 3) \quad 11. (x + 5)(x - 2) \quad 13. (b + 10)(b - 11) \quad 15. \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 2 \end{cases} \quad 17. \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\
& 19. \begin{cases} x_1 = -6 \\ x_2 = -9 \\ x_3 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases} \quad 21. \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_3 = 1 \\ x_1 = 2 \end{cases} \quad 23. \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2i \\ x_1 = -2i \end{cases} \quad 25. 2.49 \quad 27. 0.83 \quad 29. -\frac{1}{8} \pm \frac{127}{8}i \\
& 31. -\frac{1}{2} \pm \frac{23}{2}i \quad 33. 1 \pm 13i \quad 35. \frac{7}{6} \pm \frac{95}{6}i \quad 37. 1, -3, -2, -1 \quad 39. 1, -3, -3, -1 \quad 41. 2, i, -i \\
& 43. 1, -1, 2 \quad 45. 1, 3, -2 \quad 47. -2, 2i, -2i \quad 49. 2, 3, -5, -3 \quad 51. -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{3i}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \\
& 53. \frac{1}{5}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \quad 55. 1, 2, 3, 4, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1 \quad 47. -2, 2i \quad 57. k_{eq} = \frac{[SO_2]^2}{[O_2]^3} \\
& 59. k_{eq} = \frac{[O_2][HCl]^4}{[Cl_2]^2[H_2O]^2} \quad 61. [CO] = [H_2O] = 0.212 \frac{mol}{L}, \quad [CO_2] = [H_2] = 0.2879 \frac{mol}{L}
\end{aligned}$$

Capítulo 8 Elementos de álgebra lineal

$$\begin{aligned}
& 1. \begin{cases} x = -\frac{10}{11} \\ y = \frac{19}{11} \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \quad 7. \begin{cases} x = -\frac{6}{23} \\ y = -\frac{54}{23} \end{cases} \quad 9. \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad 11. \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$13. \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{5}{3} \\ z = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad 15. \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = 0 \\ z = -\frac{2}{5} \end{cases} \quad 17. \begin{cases} x = 12 \\ y = -6 \end{cases} \quad 19. \begin{cases} x = -\frac{39}{64} \\ y = -\frac{27}{128} \end{cases} \quad 21. \begin{cases} x = \frac{56}{39} \\ y = -\frac{50}{13} \end{cases} \quad 23. \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

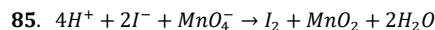
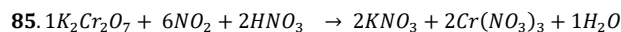
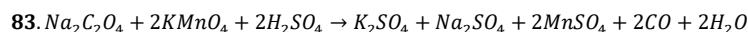
$$25. \begin{cases} x = -\frac{5}{21} \\ y = \frac{2}{7} \end{cases} \quad 27. \begin{cases} x = -\frac{264}{61} \\ y = -\frac{147}{61} \end{cases} \quad 29. \begin{cases} x = -12 \\ y = -1 \end{cases} \quad 31. \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \quad 33. \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{91}{45} \end{cases} \quad 35. \begin{cases} x = \frac{659}{137} \\ y = -\frac{108}{137} \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} x = \frac{33}{56} \\ y = -\frac{79}{56} \end{cases} \quad 39. \begin{cases} x = 27 \\ y = -\frac{9}{2} \end{cases} \quad 41. \begin{cases} x = \frac{33}{5} \\ y = -\frac{2}{15} \end{cases} \quad 43. \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 2 \end{cases} \quad 45. \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 2 \\ w = -1 \end{cases} \quad 47. \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -2 \\ w = 2 \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -1 \\ w = 2 \end{cases} \quad 51. \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -3 \\ w = -2 \end{cases} \quad 53. -10 \quad 55. -32 \quad 57. -81 \quad 59. 2 \quad 61. -60 \quad 63. -14$$

$$65. -35 \quad 67. 19 \quad 69. -14 \quad 71. -\frac{25}{12} \quad 73. -\frac{1321}{504} \quad 75. \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \quad 77. \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$79. \begin{cases} x = \frac{117}{40} \\ y = -\frac{15}{8} \\ z = \frac{51}{40} \end{cases} \quad 81. 2HNO_3 + 3H_2S \rightarrow 2NO + 3S + 4H_2O$$



REFERENCIAS

- Alemañ B., (2010). **El concepto de equilibrio químico. Historia y controversia. Historia de la Química.** Revista de la Real Sociedad Española de Química, número 108, vol. 1 pp.49-56, España.
- Becerril E., Benítez M., Rivera V., Zubieta B., (2004) **Problemario de Solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan.** Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, 1ra Edición, México.
- Brown T., (1998). **Química la ciencia central.** Editorial Pearson, 4ta. Edición, México.
- Chang R., (2010). **Química.** Editorial Mc Graw Hill. 10ma. Edición, México.
- Fang T., Huang L. Liu L. Mei F., Chen J., (2014). **Mathematical modeling of growth of *Salmonella* spp. And spoilage microorganisms in raw oysters.** Revista Elsevier Ltd, Num. 53, pp. 140-146, USA.
- Falcón A., (2000). **Álgebra elemental.** Editorial ULA, 1ra. Edición, México.
- Frey P., (1995). **Problemas de química y cómo resolverlos.** Editorial CECSA, 1ra. Edición, Mexico.
- Flores M.; Montoya E., (2016). **Artefacto y espacio de trabajo matemático en la multiplicación de números complejos.** Educación Matemática, vol. 28, núm. 2, agosto, pp. 85-117, Grupo Santillana México, Distrito Federal, México.
- Geankopolis, C., (2011). **Procesos de transporte y principios de procesos de separación.** GrupoEditorial Patria, 4ta. Edición, México.

- Goldstein L., Lay D., Scheneider D., (1990). **Cálculo y sus aplicaciones**. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana S.A., 6ta. Edición, México.
- Hoyo M. E., (2015). **Análisis de la calidad del agua de la descarga del rastro municipal de Villa Victoria, Estado de México**. División de Ingeniería Civil y Geomática de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, México.
- Masterton W., (1990). **Química**. Editorial Mc Graw Hill, 5ta. Edición México.
- Murphy, R., (2007). **Introducción a los procesos químicos, principios, análisis y síntesis**. Editorial Mc Graw Hill -Interamericana, 1ra Edición, México.
- Purcell E., Varberg D., (1987). **Cálculo con geometría analítica**. Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, 4ta. Edición.
- Rendón T., Rodríguez F., Morales A., (2004). **Introducción al álgebra lineal y de matrices, aplicaciones con Excel**. Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco, 1ra. Edición, México.
- Rodríguez J., (2008). **Teoría de Conjuntos aplicada a la caracterización matemática de unión de péptidos al HLA clase II**, Revista Ciencias de la Salud, vol. 6, núm. 1, pp. 9-15, Universidad del Rosario, Bogotá, Colombia.
- Rodríguez J., Prieta S., Bernal P., Perez C., Correa C., Vitery S., (2011). **Teoría de conjuntos aplicada a poblaciones de leucocitos, linfocitos y CD4 de pacientes con VIH. Predicción de linfocitos T CD4, de aplicación clínica**. Revista Med. Vol. 19, Julio Diciembre, pp. 148-156, Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá Colombia.

PÁGINAS WEB

- www.whyfiles.org; *Penicilium crysogenum*(18 de febrero de 2016).
- www.colimedical.pres.es; Bacteria *Escherichai coli*(14 de marzo de 2016).
- www.melodijolola.com; Ciudad de México (25 de marzo de 2016).
- www.chiguete.com; Terremotos (11 de abril de 2016).

www.agenciasinc.es; Temperatura (2 de mayo de 2016).

www.cidse.itcr.cr; Educación e internet, Revista digital (29 de agosto de 2016).

www.fceia.unr.edu.ar; Guía básica de comandos para uso de Maple (10 de enero de 2017).

www.aprenderaprogramar.com; Variables con índice de localizador arrays, matrices, arreglos, formaciones parte 1 (10 de enero de 2017).

www.semarnat.gob.mx; Indicadores de calidad del agua (09 agosto 2018).

ÍNDICE ALFABÉTICO

	Página
A	
Ángulos	147
Aplicaciones	
Función exponencial	103
Función logarítmica	115
Función trigonométrica	152
Matrices	237
Raíces de polinomios	195
B	
Boyle	79
Base natural e	100
C	
Calores molares de vaporización	131, 132
Carbono 14	105
Crecimiento	
Exponencial	98
Poblacional	107
Conjunto	
Definición	2
Operaciones	4
Propiedades	3
Constante de equilibrio	120, 128
Constante de equilibrio iónico	125
Coordenadas polares	165
Curva estándar	55
D	
Dalton	16
Decaimiento exponencial	98
Decimal	12
Diferencia de cuadrados perfectos	186
División sintética	188
Dominio	35
Función exponencial	103

	Página
E	
Ecuación	182
Definición	182
Química	237
<i>Escherichia coli</i>	104
Equilibrio químico	116, 120
F	
Factorización	61
Fórmula general	63
Función	
Clasificación	42
Coseno	146-148
Definición	32
Exponencial	98
Lineal	43
Logarítmica	110
Logística	102
Monomial	78
Notación	33
Polinomial	57
Potencia	75
Operaciones	64
Seno	148
Traslación	41
G	
Gráfica	39
Exponencial natural	101
Gibbs, energía libre	120
I	
ICA	84
Identidades trigonométricas	149, 152
Incógnita	207
Indicador	127
Isótopos	106

	Página		Página
L		P	
Logaritmos		Pendiente	44
Características	111	Polinomio	182
Leyes	113	Potencial de hidrógeno	124
		Potencial normal de oxidación	116-117
M		Presión de vapor	131
Maple, uso de	192	Propiedades de	
Matriz	217	Campo	19
Aumentada	229	Conjunto	3
Definición	219	Exponentes	21, 97
Diagonal	221	Números imaginarios	160
Inversa	226	Números reales	18
Triangular inferior	221	Orden	19
Triangular superior	221		
Producto de	224	R	
Unitaria	222	Raíces	
Métodos de sistemas de ecuaciones lineales	207, 230	Complejas	190
Determinantes	215	Racionales	186
Gauss-Jordan	223	Irracionales	183
Igualación	213	Polinomio	182
Reducción	208	Rango	35
Reducción Gaussiana	231	Reglas	
Sustitución	211	Paréntesis	36
		Signos	20
N		Relación	40
Nernst, ecuación de	116		
Notación científica	17	Sistema	
Números		Ecuación lineal	206
Complejos	11, 160-164	Numeración posicional	15
Decimal	12		
Enteros	10	T	
Infinito mixto	12	Titulación ácido-base	126
Infinito puro	12	Trinomio cuadrado perfecto	61
Naturales	9		
Racionales	10	V	
Reales	11	Vértice de una parábola	58
O			
Operaciones de números complejos	171		
Operación de matrices	222		
Suma y resta	223		
Producto	224		
Producto escalar	224		



La presente obra centra a las matemáticas como piedra angular del conocimiento que un estudiante del área químico biológica debe de poseer, dando un acercamiento a ello con ejercicios de aplicación en los campos de la química, contextualizando el aprendizaje hasta llevarlo a un aspecto significativo y no meramente de números, fórmulas y signos. Este proyecto **“Matemáticas con un enfoque químico biológico”** elaborado en la FES Zaragoza de la UNAM, con el apoyo PAPIME PE100818, tiene como objetivo demostrar al lector que ninguna ciencia es independiente de otra, como es el caso que nos ocupa, las matemáticas en las ciencias químico biológicas. En este volumen se manifiestan conceptos básicos como conjuntos, funciones, teoría de ecuaciones y elementos de álgebra lineal. Destacando aplicaciones móviles con Geogebra y software como Maple y Wolfram.

Este texto aborda la enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva de la química, dado que los autores comparten el gusto y la pasión por esta disciplina, así como los colaboradores. Los autores han decidido con esta obra exponer el camino que conecta las matemáticas con la química.